arXiv:2602.06651v1 [math.CT] 6 Feb 2026

超减法与半直积

DOMINIQUE BOURN

Abstract. 本文介绍了半直积概念的一种外在方法；其内在方法已见于 [10] 和[3]。这将使我们把注意力集中在两种代数结构上，它们有助于刻画这种外在的明确表述。

Introduction

群的半直积概念广为人知，它与一个群（Y， $*$）在另一个群（K， $*$）上的任意群作用相关。值得注意的是，群范畴 Gp 中的任意分裂满态射（f， s）：$X \rightleftarrows Y$，在同构意义下，都可由这样的半直积得到。最初尝试从内在角度理解这一重要结构性事实（即在群范畴 Gp 本身内部理解）见于 [10]。随后， [3] 对其作了进一步阐述，并在 [4] 中借助分裂扩张分类器的概念完成了这一研究；其他细节见 [2]。这也间接促成了 [13] 中关于群范畴 Gp 的重要观察，其中引入了代数幂化的概念。在这里，我们尝试从外在角度理解这一概念，即考察从群到带点集的遗忘函子 V： Gp $\to$Set$_*$ 的性质。我们将研究半直指标的概念，它保证任意分裂满态射（f， s）在同构意义下，经该函子映为典范分裂满态射（$p_{V(Y)}$ $\iota_{V(Y)}$）： $V(Y)$ $\times V(\mathrm{Ker}\, f)$ $\rightleftarrows V(Y)$。然后我们将证明，对于带点范畴之间任意左正合保守函子 U： $\mathbb{C} \to \mathbb{D}$ ，无论 $\mathbb{D}$满足何种条件，只要存在半直指标， $\mathbb{C}$就必然是原模范畴。为此，我们将把注意力集中在两种代数结构上：超 S-lom´ınski 框架与超减法。

本文按以下结构组织：第 1 节探讨这两种结构；其中包含对内架的一些考察，并引入预拟群的概念。第 2 节简要回顾原模范畴和部分 Mal'tsev 范畴，第 3 节则刻画半直指标和超指标存在的条件。

1. ILO setting setting and hypersubtraction

在关于半直积的第 3 节中，我们将关注使下列分裂满态射图表交换的同构 ρ ，其中图表位于

Key words and phrases. 群；半直积；减法，分裂满态射；原模范和加性范畴；超减法；S-lom´ınski 设置；架和预拟群；拉丁方；双群；斜brace。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 08A05、18E13、20E34、20J15。

有基点的范畴 $\mathbb{D}$ 中:

$$\begin{array}{ccc} X\times X & \xrightarrow{\rho} & X\times X \\ {\scriptstyle p_1^X}\downarrow\uparrow{\scriptstyle s_0^X} & & {\scriptstyle p_0^X}\downarrow\uparrow{\scriptstyle \iota_0^X} \\ X & \xrightarrow[=]{} & X \end{array}$$

其中 p_0^X, p_1^X, s_0^X, ι_0^X分别是两个投影、对角态射和（Id_X, 0_X）。

1.1. **ILO 结构**。 让我们从任意范畴 $\mathbb{D}$中的同构 ρ 开始，如左侧所示:

$$\begin{array}{ccc} X\times X & \xrightarrow{\rho} & X\times X \\ {\scriptstyle p_1^X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_0^X} \\ X & \xrightarrow[=]{} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X\times X & \xrightarrow{d} & X \\ {\scriptstyle p_1^X}\downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

或者，等价地，给出一个二元运算 $d: X\times X \to X$，使右侧图表成为一个拉回。逆元 ρ^{-1} 产生另一个二元运算 $\circ: X\times X\to X$，满足: i) $d(x\circ z,\ x) = z$ 且 ii) $x\circ d(z,\ x) = z$。这些等式意味着 $x\circ -$ 是 $d(-,\ x)$ 的逆元。于是得到: i)+ii) $\iff$ iii): $x\circ y = t \iff y = d(t,\ x)$。

定义1.1。 范畴 $\mathbb{D}$ 中的内在可逆左运算设定是一个二元组 (X, d)，由对象 X 和二元运算 d 组成，并满足 $(p_1^X, d): X\times X \to X\times X$ 是一个同构。它等价于三元组 $(X, d, \circ)$，其中 $(d, \circ)$ 是 X 上的一对二元运算，满足公理 i) 和ii)。

ILO 是"可逆左运算"的缩写。给定任意 ILO 结构 (X, d)，我们称 $\circ$ 为与 d关联的伴随二元运算。由于映射 ρ是同构，ILO 结构之间的态射 $h: (X, d) \to (Y, d)$ 既可以称为 d- 同态，也可以称为 $\circ$- 同态。

例子
1) 扭转同构 $\mathrm{tw}(x, y) = (y, x)$ 所产生的 ILO 结构满足: $d(x, y) = x$ 是第一投影，而 $x\circ y = y$ 是第二投影。
2) 任意群 $(G, \circ)$ 都会产生一个 ILO 结构，其中 $d(x, y) = y^{-1}\circ x$，且二元运算为 $\circ$。

3) 由 $(X, d, \circ)^{op} = (X, \circ^{op}, d^{op})$ 定义的 ILO 结构的对偶也是一个 ILO 结构。

定义1.2。 一个内部 *ILO*设定（X、d）称为对合的，当它等于其对偶，即当 $x\circ y = d$（y、x）。当 d（x、y）$= d$（y、x）或 $\circ = d$ 时，称其为对称的。当（X、d^{op}）也是一个 *ILO*设定时，称其为拉丁的。

"拉丁的 "这一术语源于这样的事实: 拉丁 ILO结构的二元运算d 的运算表决定了一个拉丁方。任何对称的 ILO设定都是拉丁的。与一个群（X、$\circ$）相关联的 ILO设定必然是拉丁的; 当且仅当该群是阿贝尔的时，它是对称的; 当且仅当 $x^2 = 1$时，它是对合的。ILO设定主要分为两类:
1）满足 $d(x,\ x) = 1$（这等价于 $x\circ 1 = x$）的 A 类，其中包括群的 ILO结构;

2）满足 $d(x,\ x) = x$（这等价于 $x\circ x = x$）且该例1属于此类的 B类。

显然，属于 $A\cap B$ 的 ILO设定（X, d,1）化简为单元素集 1。

命题 1.1。 设$(X, d, \circ)$是一个 ILO设定。以下条件等价:

1) the law $\circ$ is associative ; 2) $d(y,z)\circ d(x,y) = d(x,z)$;
3) $d(d(x,z), d(y,z)) = d(x,y)$; 4) $d(x,y)\circ t = d(x\circ t, y)$.

证明。 假设 1)。则 $z\circ(d(y,z)\circ d(x,y)) = (z\circ d(y,z))\circ d(x,y) = y\circ d(x,y) = x = z\circ d(x,z)$。由此得 2)。
假设 2)。则 $d(y,z)\circ(d(x,z)\circ d(y,z)) = d(x,z)$, 而 $d(y,z)\circ d(x,y) = d(x,z)$, 由此得 3)。

当且仅当 $d(d(x\circ t, y)\ d(x,y)) = t$ 时, 我们得到 4)。由 3) 得:
$d(d(x\circ t,\ y)\ d(x,\ y)) = d(x\circ t,\ x) = t$。
当且仅当 $y\circ z = d((x\circ y)\circ z, x)$ 时, 我们有 1)。由 4) 得: $d((x\circ y)\circ z, x) = d(x\circ y, x)\circ z = y\circ z$。 □

命题 1.2. 设$(X, d, \circ)$是一个 ILO设定。以下条件等价: 1) 运算律 $\circ$是可交换的; 2) $x = d(x\circ y, y)$; 3) $d(y, d(y, x)) = x$。

证明。 由 iii), 可得 1), 即 $y\circ x = x\circ y \iff$ 2) 。我们有 $d(y, d(y, x)) = x \iff d(y,x)\circ x = y = x\circ d(y,x)$。这等价于 $\circ$的可交换性, 令$t = d(y,x)$。□

1.2. **A 类: 超 S-隆´因斯基设定**。 现在让我们回到起点和带基点语境:

$$\begin{array}{ccc} X\times X & \xrightarrow{\rho} & X\times X \\ {\scriptstyle p_1^X}\downarrow\uparrow{\scriptstyle s_0^X} & & {\scriptstyle p_0^X}\downarrow\uparrow{\scriptstyle \iota_0^X} \\ X & \xrightarrow[=]{} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X\times X & \xrightarrow{d} & X \\ {\scriptstyle p_1^X}\downarrow\uparrow{\scriptstyle s_0^X} & & \downarrow\uparrow \\ X & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

也就是说, 存在一个分裂满态射的同构 ρ, 或者如右侧所示, 对分裂满态射作拉回。这在 i) 和 ii) 的基础上增加了公理 iv)$d(x,x) = 1$。作为一个簇的项恒等式, 公理 iv) 和 ii) 已在[19]中讨论。根据 [10], , 在 $n = 1$ 的情形下, 它们刻画了带基点原型模簇。因此有以下

定义*1.3.* 范畴 $\mathbb{E}$ 中的内部 *S-lom´ınski* 结构是一个对象 X 以及两个二元运算组成的四元组 *$(X, d, \circ, 1)$*, 满足 *iv)* $d(x,x) = 1$ 和 *ii)* $x\circ d(z,x) = z$。超 *S-lom´ınski* 结构是满足公理 *iv)*、*ii)* 和 *i)* $d(x\circ z, z) = x$ 的相同数据; 或者等价地, 它是满足 $d(x,x) = 1$ 的 *ILO* 结构 *$(X, d, 1)$*。

因此, 属于 A 类的 ILO 结构与超 S-lom´ınski 结构一致。与群相关联的 IL O 结构是超 S-lom´ınski 结构。

命题 1.3. 给定任意 *S-lomi´nsky* 结构 $(X, d, \circ, 1)$, 我们得到: *1)* $x\circ 1 = x$ (元素 1 是右单位元) ; *2)* $1\circ d(x,1) = x$; *3)* $x\circ d(1,x) = 1$ (x 在右侧有逆元) ; 以及 *4)* $x = y \iff d(x,y) = 1$。

证明。 只需核查最后一点: $y = y\circ 1 = y\circ d(x,y) = x$。 □

我们得到以下内部 S-lom´ınski 和超 S-lom´ınski 情形的例子:

命题 1.4。 设 $\mathbb{A}$ 为一个有限完备加法范畴。则 $\mathbb{A}$ 中的任意内部 *S-lom´ınski* 情形 (X, d) 都由一个三元组 (X, f, g) 确定，其中 (f, g) 是一对 X-自同态，满足 $g.f = -Id_{\mathbb{A}}$。于是有： $d(x, y) = f(x - y)$ 以及 $x \circ y = x + g(y)$ 。 $\mathbb{A}$ 中的一个 *S-lom´ınski* 情形是超 *S-lom´ınski* 情形，当且仅当 f 可逆且 $g = f^{-1}$。

证明。对于满足 $d(x, x) = 0$ 的任意映射 $d\colon X \times X \to X$ in $\mathbb{A}$，我们得到：$d(x, y) = d((x - y, 0) + (y, y)) = d(x - y, 0) + d(y, y) = d(x - y, 0)$。令 $d(x, 0) = f(x)$，得到 $d(x, y) = f(x - y)$。因此， $d(0, y) = -f(y)$。

令 $0 \circ x = g(x)$，由 $x \circ y = (x + 0) \circ (0 + y) = (x \circ 0) + (0 \circ y)$，我们得到$x \circ y = x + g(y)$。现在，由 $x \circ d(y, x) = x$，我们得到 $x + gf(y - x) = y$；从而$g.f = Id_X$。

由于任意加性范畴都是原模范畴，因此 (X, d) 是超 S-lom´ınski 结构，当且仅当 $d(-, 0) = f$ 是同构，见命题 2.2。□

当 $\mathbb{E}$ 是有限完备的，我们将内部 S-lom´ınski 结构和超 S-lom´ınski 结构的范畴分别记为 Slom$\mathbb{E}$ 和 Σlom$\mathbb{E}$。它们都是原模范畴。

1.3. **超减法**。 我们还将关注以下对左侧施加更多约束的交换关系：

$$\begin{array}{ccccc} X & \underset{p_1^X}{\overset{s_0^X}{\rightleftarrows}} & X \times X & \underset{d}{\overset{\iota_0^X}{\rightleftarrows}} & X \\ = \downarrow & & \rho \downarrow & & = \downarrow \\ X & \underset{p_0^X}{\overset{\iota_0^X}{\rightleftarrows}} & X \times X & \underset{p_1^X}{\overset{\iota_1^X}{\rightleftarrows}} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X \times X & \underset{d}{\overset{\iota_0^X}{\rightleftarrows}} & X \\ p_1^X \downarrow \uparrow s_0^X & & \downarrow \uparrow \\ X & \rightleftarrows & 1 \end{array}$$

这等价于右侧方块是分裂满态射的拉回这一事实。为超 S-lom´ınski 结构添加的公理是 $\rho.\iota_0^X = \iota_1^X$，即 v) $d(x, 1) = x$。回顾一下，按照 [20] 的定义，减法是满足 iv) $d(x, x) = 1$ 和 v) $d(x, 1) = x$ 的二元运算 d。由此得到以下

定义1.4。 对象 X 在范畴 $\mathbb{E}$上的超减法，是一个超- *S-lom´ınski* 结构 $(X, d, 1)$，满足 $d(x, 1) = x$，或等价地满足 $1 \circ x = x$。

当 $\mathbb{E}$ 有限完备时，我们将带有内部减法和超减法的对象范畴分别记为 Sbt$\mathbb{E}$ 和 HSt$\mathbb{E}$ 。Sbt$\mathbb{E}$ 是 [15]，意义下的减性范畴，而显然 HSt$\mathbb{E}$ $\subset$ Σlom$\mathbb{E}$ 是一个原模范畴。由命题 1.4 可得：

推论 1.1。 设 $\mathbb{A}$ 是一个加性范畴。那么 HSt$\mathbb{A} \simeq \mathbb{A}$。

证明。 根据该命题中的记号，由 $d(x, 0) = x$，同构 f 为 Id。□

由此得到以下原模范畴的包含链：Gp$\mathbb{E}$ $\subset$ HSt$\mathbb{E}$ $\subset$ Σlom$\mathbb{E}$ $\subset$ Slom$\mathbb{E}$ 。因此，它们确定了一个阿贝尔对象子范畴，参见命题 2.1。相应的子范畴 Ab(Slom$\mathbb{E}$) $\simeq$ Slom(Ab$\mathbb{E}$)、Ab(Σlom$\mathbb{E}$) $\simeq$$\Sigma$lom(Ab$\mathbb{E}$) 由命题 1.4 描述。由前面的推论可得 AbHSt$\mathbb{E}$ =HStAb = Ab。

1.4. **B类：预架**。有必要对使下图交换的 B 类作一些说明：

$$\begin{array}{ccc} X\times X & \xrightarrow{\rho} & X\times X \\ {\scriptstyle p_1^X}\downarrow\uparrow{\scriptstyle s_0^X} & & {\scriptstyle p_0^X}\downarrow\uparrow{\scriptstyle s_0^X} \\ X & \xrightarrow[=]{} & X \end{array}$$

首先，回顾以下定义。该定义由 [17] 和 [18], 独立提出，与纽结理论中的三个Reidemeister变换有关，另见 [6]:

定义 1.5。架是一个集合 X，配备二元运算 $\triangleright$： $X\times X\to X$，该运算满足幂等性，并且 $-\triangleright x$ 是 $\triangleright$自同构，即满足$(x\triangleright y)\triangleright z=(x\triangleright z)\triangleright(y\triangleright z)$。

例子
1）ILO设定中的例1是一个架，即一个平凡架。2）任意群（G，$\cdot$）都能通过运算律 $x\triangleright_G y=y\cdot x\cdot y^{-1}$构成一个架。3）对于任意阿贝尔群与 $+$-自同构 f组成的配对（（A，$+$，0） f），都可定义一个亚历山大架于 A上，其定义如下： $x\triangleright_f y=f$（x）$+y-f$（y）。

当 $\mathbb{E}$是左正合范畴时，将Alex$\mathbb{E}$ 定义为如下范畴：其对象是由 $\mathbb{E}$ 中的对象 X 与 $\mathbb{E}$ 中的同构 f: $X\to X$ 构成的对(X,f)，其态射是与这些同构交换的映射 h : $X\to Y$。当 $\mathbb{A}$ 是加性的时，范畴Alex$\mathbb{A}$ 同样是加性的。Alexander quandle定义了一个左正合保守函子Al : AlexAb $\to$Qnd，因而该函子是忠实的。

于是，为B类的ILO 结构引入如下定义便有意义：

定义 1.6. *B*类的*ILO*设定（即幂等的*ILO*设定）将被称为预拟群。

我们用 $\circ_\triangleright$表示 $\triangleright$的伴随运算。 $\mathbb{E}$ 中的内预架范畴将记为PQd$\mathbb{E}$ ，内架范畴记为Qnd$\mathbb{E}$。由于预拟群的运算 $\triangleright$ 是幂等的，预拟群$(X,\triangleright)$的任一元素 x 决定PQd中的一个映射 x: $1\to(X,\triangleright)$，并且对任意映射$h:(X,\triangleright)\to(Y,\triangleright)$，任一原像 $h^{-1}(y)$都是预拟群。

我们有 Ab(Qnd) $\simeq$ AlexAb，见 [6]。对预架也有相同的结果：

命题 1.5. 函子 Al :AlexAb $\to$ Ab(PQd) 是一个同构。

证明。 函子 Al : AlexAb $\to$ PQd 实际上将其值取在 Ab(PQd) 中，因为任意$\triangleright_f:(X,+)\times(X,+)\to(X,+)$ 都是群同态：
$(x+y)\triangleright_f(x'+y')=f(x+y)+(x'+y')-f(x'+y')$，而：$(x\triangleright x')+(y\triangleright_f y')=f(x)+x'-f(x')+f(y)+y'-f(y')$。它们相等，因为 f是群同态。

现在，给定范畴 PQd 中任意内阿贝尔群：$(X,\triangleright)\times(X,\triangleright)\to(X,\triangleright)$，我们得到 $(x+x')\triangleright(y+y')=(x\triangleright y)+(x'\triangleright y')$。利用 $x'=0=y'$，我们验证$f(x)=x\triangleright 0$ 定义了一个双射群同态。利用 $x=a-b$、 $x'=b=y'$和 $y=0$，我们得到 $a\triangleright b=((a-b)\triangleright 0)+(b\triangleright b)=f(a-b)+b=a\triangleright_f b$。因此，我们得到 Al$((X,+)\ f)=((X,\triangleright)+)$，其中 $f=-\triangleright 0$。□

更一般地，设 $\mathbb{A}$是任意左正合加性范畴，且 (X,f) 是 Alex$\mathbb{A}$中的任意对象。定义内二元运算： $\triangleright_f=X\times X\xrightarrow{f\times(Id_X-f)}X\times X\xrightarrow{+}X$

这就在 $\mathbb{A}$中的 X 上赋予了内部预拟群结构，其伴随运算 $\circ$由$x \circ y = y \triangleright_{f^{-1}} x$给出。因此， $\circ = \triangleright^{op}_{f^{-1}}$。由此得到一个左正合保守函子 $\mathsf{Al}_{\mathbb{A}} : \mathsf{Alex}\mathbb{A} \to \mathsf{PQd}\mathbb{A}$。

命题 1.6. 给定任意有限完备加法范畴 $\mathbb{A}$，函子 $\mathsf{Al}_{\mathbb{A}}$ 是一个同构，它经由包含映射 $\mathsf{Qnd}\mathbb{A} \subset \mathsf{PQd}\mathbb{A}$ 分解，并产生同构 $\mathsf{PQd}\mathbb{A} = \mathsf{Qnd}\mathbb{A} \simeq \mathsf{Alex}\mathbb{A}$。

证明。 在加性情形下，$\triangleright_f$ 的定义必然满足架的公理，因此有分解 $\mathsf{Al}_{\mathbb{A}} : \mathsf{Alex}_{\mathbb{A}} \to \mathsf{Qnd}\mathbb{A} \subset \mathsf{PQd}\mathbb{A}$。
现在，设 $\triangleright$ 是 $\mathbb{A}$ 中 X 上任意的内部二元幂等运算。令$f(x) = x \triangleright 0 = f(x)$。我们得到：$(x + x') \triangleright (y + y') = (x \triangleright y) + (x' \triangleright y')$。由 $(x, y) = (x - y, 0) + (y, y)$，得到 $x \triangleright y = (x - y \triangleright 0) + (y \triangleright y) = f(x - y) + y = f(x) + y - f(y)$。此外，若 $\triangleright$ 是一个预拟群的底层结构，则映射 $f = - \triangleright 0$ 是一个同构，并且得到$\triangleright = \triangleright_f$。□

换言之，加性范畴中的内部预拟群只有 Alexander quandle。

备注。 奇怪的是，加性背景下会产生四种同构约化： $\Sigma\mathsf{lom}\mathbb{A} \simeq \mathsf{Alex}\mathbb{A} \simeq \mathsf{PQd}\mathbb{A} \simeq \mathsf{Qnd}\mathbb{A}$。

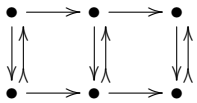
2. Some recalls about protomodular and Mal'tsev categories

一方面，我们提到，任何内部 S-lom´ın´ski 或内部超 S-lom´ın´ski 结构中的范畴 $\mathsf{Slom}\mathbb{E}$ or $\Sigma\mathsf{lom}\mathbb{E}$ 都是原模的。这是一项很强的结构性质，需要先回顾一些内容。

另一方面，内部预拟群范畴 $\mathsf{PQd}\mathbb{E}$ 的结构方面弱于原模性，但绝非无关紧要。它与 Mal'tsev 范畴这一概念有关，因此也需要先回顾一些内容。

2.1. **原模范畴**。

定义 2.1. [5] 原模范畴 $\mathbb{E}$ 是一种有限范畴，满足：对于任意一对由垂直分裂满态射构成的交换方块：



只要左侧方块和整个矩形都是拉回，右侧方块就是拉回。

主要的例子包括群范畴 Gp、环范畴 Rng，以及当 R 是一个环时，任意 R-代数范畴。任何加性范畴都是原模的。原模簇的特征见 [10]。任何原模范畴都是 Mal'tsev 范畴。关键在于，在任何基点原模范畴中，我们都能得到所有经典的同调引理，见 [1]。下一节我们将给出更多例子。

给定任意有限完备范畴，将其对象为分裂满态射（f, s）： $X \rightleftarrows Y$ 属于 $\mathbb{E}$ 、态射为它们之间的交换方块的范畴记为 $\mathsf{Pt}\mathbb{E}$ 。令 $\P_{\mathbb{E}} : \mathsf{Pt}\mathbb{E} \to \mathbb{E}$ 为函子，它将任意分裂满态射（f, s）映到其余域 Y；这是一个纤维化（称为点的纤维化），其笛卡尔态射为拉回；我们将 $\mathsf{Pt}_Y\mathbb{E}$ 记为分裂满态射在 $\mathbb{E}$ 上方的点

纤维。容易验证， $\mathbb{E}$ 是原模范的，当且仅当纤维化 $\P_{\mathbb{E}}$ 的任意基变函子都是保守的。当 $\mathbb{E}$ 是有指点的，只需沿初始映射的任意基变函子 $\alpha_Y^*\colon \mathrm{Pt}_Y\mathbb{E} \to \mathbb{E}$ （即任意“核函子”）都是保守的。上一节中我们系统地使用了以下

命题 2.1。 [1]设 $\mathbb{E}$ 是一个基点原模范畴。在任意对象X 上，至多存在一种内幺半群结构，而该结构必然是内阿贝尔群。若是如此，我们称 X 为阿贝尔对象。由此，我们得到一个全忠实包含 阿贝尔范畴$\mathbb{E} \subset \mathbb{E}$，其中 阿贝尔范畴$\mathbb{E}$ 是一个加性范畴。

命题 2.2。 设 $\mathbb{E}$ 是一个基点原模范畴。那么，(X, d) 是一个内超减法 *S-lom´ınski* 结构，当且仅当 $d(-,0)$ 是一个同构。

证明。 对下图应用定义公理：

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\iota_0^X} & X \times X & \xrightarrow{d} & X \\ \downarrow\uparrow & & p_1^X \downarrow\uparrow s_0^X & & \downarrow\uparrow \\ \bullet & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \bullet \end{array}$$

其中左侧图是一个核图。因此，右侧方块是一个拉回，当且仅当 $d.\iota_0^X$是一个同构。□

命题 2.3。 设 $\mathbb{E}$ 是一个原模范畴。我们得到 $\mathsf{Slom}\mathbb{E} = \mathsf{SlomAb}\mathbb{E}$，以及 $\Sigma\mathsf{lom}\mathbb{E} = \Sigma\mathsf{lomAb}\mathbb{E} \simeq \mathsf{Alex}$(阿贝尔范畴$\mathbb{E}$)。

证明。设 $(X, d, \circ, 1)$ 是 $\mathbb{E}$ 中的一个 S-lom´ınski 设定。那么 $p(x, y, z) = x \circ d(z, y)$ 在 $\mathbb{E}$ 中产生一个内三元运算，它满足 $p(x, x, z) = x \circ d(z, x) = z$且 $p(x, y, y) = x \circ d(y, y) = x \circ 1 = x$。于是，由 $x * y = p(x, 1, y)$ 定义在 X 上的相应内幺半群使 X 成为 $\mathbb{E}$ 中的阿贝尔对象，因此在子范畴 $\mathsf{Ab}\mathbb{E}$ 中产生一个 S-lom´ınski 设定。由此 $\mathsf{Slom}\mathbb{E} = \mathsf{SlomAb}\mathbb{E}$。因此，根据命题 1.4， $\Sigma\mathsf{lom}\mathbb{E} = \Sigma\mathsf{lomAb}\mathbb{E} \simeq \mathsf{Alex}$(阿贝尔范畴$\mathbb{E}$)。□

2.2. **预拟群的结构方面**。 内部预架范畴 $\mathsf{PQd}\mathbb{E}$ 的结构方面，在一定程度上与 Mal’tsev 范畴的概念有关。

定义 2.2。 [12]*Mal’tsev* 范畴是指一种有限完备范畴，其中任何内自反关系都是等价关系。

任何原模范畴，以及更进一步说，任何加性范畴，都是 Mal’tsev 范畴。

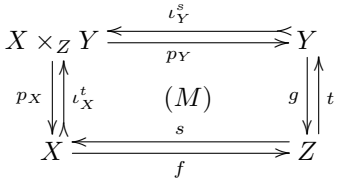
命题 2.4。 设 $\mathbb{E}$是一个 *Mal’tsev* 范畴。那么其中的任何内部预拟群$(X, \triangleright)$ 都是一个架。因此 $\mathsf{PQd}\mathbb{E} = \mathsf{Qnd}\mathbb{E}$。

证明。 我们需要验证 $(x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$。只需在 $x = y$ 且 $y = z$ 时验证即可。事实上，我们得到：$(x \triangleright x) \triangleright z = x \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (x \triangleright z)$；以及：$(x \triangleright z) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (z \triangleright z)$。□

Mal’tsev 范畴可以通过点的纤维化来刻画：

命题 2.5。 [1] 有限完备范畴 $\mathbb{E}$ 是 *Mal’tsev* 范畴，当且仅当对于任意一对$((f, s)$、$(g, t))$ 具有公共陪域 Z的分裂满态射，

典范对(ι^t_X, ι^s_Y)是指向拉回 $X \times_Z Y$的包含映射



是联合强满的。

其中:

定义 2.3。 左边所示的 X 的一对子对象(u, v) 称为联合强满，



若 X 的任何包含 u 和 v 的子对象 w 必然是一个同构。

当 (u, v) 联合强满时，使右侧图表交换的垂直分解至多有一个：给定任意一对这样的映射，取它们的等化子。现在我们将证明，PQd$\mathbb{E}$ 满足 Mal'tsev 性质，但仅相对于 $\mathbb{E}$ 的某个类 Θ 分裂满态射而言。

定义 2.4。 设 $\mathbb{E}$ 为一个有限完备范畴， Θ 为 $\mathbb{E}$ 中一类分裂满态射，其中包含所有同构，且对沿 $\mathbb{E}$中任意映射的拉回封闭。当图表 (M) 的性质仅要求对属于 Θ的分裂满态射 (g, t) 成立时，称 $\mathbb{E}$ 为 Θ-*Mal'tsev* 范畴。

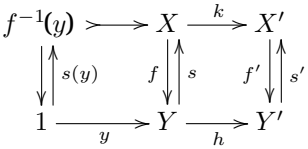
我们现在可以在 PQd 中定义一类对拉回封闭的分裂满态射 Θ ：

定义 2.5。 若元素 $x \in (X, \triangleright)$ 对应的映射$y \mapsto x \triangleright y$是双射，则称其为穿刺。若对任意 $y \in Y$，元素 $s(y)$ 在预拟群$f^{-1}(y)$中都是穿刺的，则称分裂满态射 $(f, s) : (X, \triangleright) \to (Y, \triangleright)$ 为穿刺。

预拟群 $(X, \triangleright)$ 是拉丁 ILO 结构，当且仅当每个元素都可被穿刺。我们将 PQd 中可穿刺分裂满态射的类记为 Θ ，并将对象为拉丁预拟群的 PQd 子范畴记为 LPq。

命题 2.6. 类 Θ 在拉回下稳定，且包含同构。

证明。 给定 PQd 中如下右图所示的任意一个拉回，其中 $(f', s') \in \Theta$:



我们有 $f^{-1}(y) = f'^{-1}(h(y))$ 和 $s'(h(y)) = k(s(y))$。因此， $s(y)$ 在 $f^{-1}(y)$ 中是穿刺的，因为 $s'(h(y))$ 在 $f'^{-1}(h(y))$ 中是穿刺的；所以，(f, s) 属于 Θ。第二点显而易见。□

假设 $(g,\ t) : (Y,\ \triangleright) \rightleftarrows (Z,\ \triangleright) \in \Theta$。 $t(z)$ 在 $g^{-1}(z)$ 中是穿刺的这一事实定义了一个双射 $\theta_z :\ g^{-1}(z) \to g^{-1}(z)$，使得，对于 $\forall y \in g^{-1}(z)$，我们得到$t(z) \triangleright \theta_z(y) = y$。

命题 2.7。 范畴PQd 是一个 Θ-*Mal'tsev* 范畴。

证明。 考虑任意一个拉回，其中 $(g, t) \in \Theta$ ：

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \overset{\iota_Y^s}{\underset{p_Y}{\rightleftarrows}} & Y \\ {\scriptstyle p_X}\downarrow\uparrow{\scriptstyle \iota_X^t} & & {\scriptstyle g}\downarrow\uparrow{\scriptstyle t} \\ X & \underset{f}{\overset{s}{\rightleftarrows}} & Z \end{array}$$

以及一个 $U \subset X \times_Z Y$子拟群，使得对所有 $x \in X$，都有 $\iota_X^t(x) = (x, tf(x)) \in U$；并且对所有 $y \in Y$，都有 $\iota_Y^s(y) = (sg(y)\ y) \in U$。对于任意的 $(x, y) \in X \times_Z Y$，若$f(x) = z = g(y)$，则有：$(x, y) = (((s(z) \circ_\triangleright x) \triangleright s(z)\ t(z) \triangleright \theta_z(y))) = ((s(z) \circ_\triangleright x)\ t(z)) \triangleright (s(z)\ \theta_z(y)) = \iota_X^t(s(z) \circ_\triangleright x) \triangleright \iota_Y^s(\theta_z(y))$，其中 $\circ_\triangleright$是 ⊳的伴随运算。因此，任意的 $(x, y) \in X \times_Z Y$都属于 U。 □

简要提及这一 Θ-Mal'tsev 性质的两个重要推论。设 $(d_0^R,\ d_1^R) :\ R \rightarrowtail X \times X$ 是 PQd 中任意一个内部自反关系。记$s_0^R : X \to R$ 为刻画其自反性的映射。接着，将自反关系R 定义为穿刺的，当且仅当分裂满态射 $(d_0^R,\ s_0^R)$ 是穿刺的。

命题 2.8。 任意内部穿刺自反关系 R 都是传递的。内部等价关系是穿刺的，当且仅当其任意等价类 $\bar{x}$ 都是拉丁预拟群。

证明。 考虑 PQd 中以下拉回：

$$\begin{array}{ccc} R \times_X R & \overset{s_1^R}{\underset{d_2^R}{\rightleftarrows}} & R \\ {\scriptstyle d_0^R}\downarrow\uparrow{\scriptstyle s_0^R} & & {\scriptstyle d_0^R}\downarrow\uparrow{\scriptstyle s_0^R} \\ R & \underset{d_1^R}{\overset{s_0^R}{\rightleftarrows}} & X \end{array}$$

$R \times_X R$是由这些对 $(uRv,\ vRw)$ 构成的预拟群。考虑子拟群$U \subset R \times_X R$，其对象满足 uRw。映射 $s_0^X :\ R \to r \times_X R$ 定义为 $s_0^R(uRv) = (uRv,\ vRv)$，映射 $s_0^X :\ R \to R \times_X R$ 定义为 $s_1^R(uRv) = (uRu,\ uRv)$。这两个映射都经由 U分解。由于自反关系 R是穿刺的，$U = R \times_X R$，且自反关系 R 是传递的。

称等价关系 R 是穿刺的，就是说，对于任意$x_0 \in X$，元素 $(x_0,\ x_0)$ 在集合 $\{(x_0,\ x)/\ x_0 R x\}$中是穿刺的。这等价于说，元素 x_0 在类 x_0中是穿刺的。因此，这对任意 $x \in x_0$都成立，而 x_0 是一个拉丁预拟群。□

命题 2.9。 子范畴 LPq ↪ PQd 在有限极限下稳定。因此，LPq 是一个 *Mal'tsev* 范畴。

证明。 容易验证，LPq 在积和等化子下稳定，因而在拉回下也稳定。因此，LPq 中的任意分裂满态射都是穿刺的，而 LPq 是 Mal'tsev 范畴。□

由于 LPq 是一个簇，经典的 Mal'tsev 刻画蕴含存在一个三元项 $p(x,y,z)$，使得 $p(x,x,y) = y = p(y,x,x)$。如果我们将 d 其所伴随的二元运算记为 $\triangleright$，则可以令 $p(x,y,z) = (y \circ x) \triangleright d(z,y)$。事实上，我们验证 $p(x,y,y) = (y \circ x) \triangleright d(y,y) = (y \circ x) \triangleright y = x$，而$p(x,x,z) = (x \circ x) \triangleright d(z,x) = x \triangleright d(z,x) = z$。

命题 2.10. 设 $\mathbb{E}$ 是一个基点原模范畴。那么 LPq$\mathbb{E}$ 同构于 LPq(阿贝尔范畴$\mathbb{E}$)。当 $\mathbb{A}$ 是加性的，LPq$\mathbb{A}$ 同构于LAlex$\mathbb{A}$ 在Alex$\mathbb{A}$ 中的全子范畴，其对象为满足 f和 $Id_X - f$ 都是同构的对(X, f)。

证明。给定任意拉丁预拟群 $(X, \triangleright)$，它是 $\mathbb{E}$。那么，$p(x,y,z) = (y \circ x) \triangleright d(z,y)$ 在基点原模范畴 $\mathbb{E}$中成为一个内部 Mal'tsev 运算。因此，由 $(x,y) \mapsto p(x,1,y)$ 给出的 X 上的幺元岩浆结构使对象X 成为 $\mathbb{E}$ 中的阿贝尔对象，而 $(X, \triangleright)$ 是 Ab$\mathbb{E}$中的一个拉丁预拟群。

当 $\mathbb{A}$是加性的，且 f是 X上的一个自同构时，预拟群 $(X, \triangleright_f)$ 是拉丁预拟群，当且仅当 $x \mapsto 0 \triangleright_f x = f(0 - x) + x = (Id_X - f)(x)$ 是一个同构。□

2.3. **自主动拉丁预拟群**。

定义 2.6. $\mathbb{E}$ 中的内部预拟群$(X, \triangleright)$ 称为自主的，当$(x \triangleright x') \triangleright (y \triangleright y') = (x \triangleright y) \triangleright (x' \triangleright y')$。

任意 Alexander 拟群 Al$(X, +)$ 都是自主的。利用 $y = y'$，我们可以验证任意自主预拟群实际上都是架。因此，自主预拟群与自主架一致。用 APq$\mathbb{E} \subset$ PQd $\mathbb{E}$ 表示内部自主预拟群构成的子范畴。

现在，给定集合 X 上一对二元运算 $(\circ, *)$，定义关系 $\circ\mathbb{H}*$：“$\circ$ 是一个 $*$-同态”。它是对称的，并且满足：$\circ\mathbb{H}*$ 当且仅当 $\circ\mathbb{H}*^{op}$。由于在 PQd 中，一个映射是 $\triangleright$同态，当且仅当它是一个
在范畴 APq 中的 $\circ$-同态，由 $\triangleright\mathbb{H}\triangleright$可得 $\triangleright\mathbb{H}\circ$、$\circ\mathbb{H}\triangleright$，进而得到 $\circ\mathbb{H}\circ$。

现在考虑由自主动拉丁预拟群构成的子范畴 ALPq$\mathbb{E} \subset$ APq$\mathbb{E}$。由 $\triangleright\mathbb{H}\triangleright$ 可得 $\triangleright\mathbb{H}d$。相应地，由 $\triangleright\mathbb{H}\triangleright$ $\circ\mathbb{H}\triangleright$ 和 $d\mathbb{H}\triangleright$ 三元项 $p(x,y,z) = (y \circ x) \triangleright d(z,y)$ 成为 ALPq$\mathbb{E}$ 的内在结构。由此，任何对象 $(X, \triangleright) \in$ ALPq$\mathbb{E}$ 都自然地带有一个三元 Mal'tsev 运算。由此立即得到以下

命题 2.11。范畴 ALPq$\mathbb{E}$是一个自然 *Mal'tsev* 范畴。

这一概念由 [16] 引入，指的是一种范畴 $\mathbb{A}$，其中每个对象 X 都带有自然的 Mal'tsev 运算；它加强了 Mal'tsev 范畴这一概念，其特征是每个内图都带有唯一的群胚结构。一个带基点范畴是自然 Mal'tsev 范畴，当且仅当它是加性的。

3. 半直积指标与超指标

现设 $U : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 是有限完备的带基点范畴之间的一个左正合函子。令 Pt$_U$: Pt$\mathbb{C} \to$ Pt$\mathbb{D}$ 为它的自然扩张。记 W_U : Pt$\mathbb{C} \to$Pt$\mathbb{D}$ 为如下函子：它将 $\mathbb{C}$ 中的任意分裂满态射 $(f, s) : X \rightleftarrows Y$ 映为 $\mathbb{D}$ 中的分裂满态射 $(p_{U(Y)} \ \iota_{U(Y)}) : U(Y) \times U(\mathrm{Ker} f) \rightleftarrows U(Y)$。

定义 3.1。 U 的半直指标是 Pt_U 与 W_U 之间的一个自然同构 ρ，它由一个同构 $\rho_{(f,s)}$ 给出，使得对于 $\mathbb{C}$ 中任意分裂满态射 $(f,s): X \rightleftarrows Y$，下方左侧图表在 $\mathbb{D}$ 中交换：

$$\begin{array}{ccc} U(X) & \xrightarrow{\rho_{(f,s)}} & U(Y)\times U(\mathrm{Ker}f) \\ {\scriptstyle U(f)}\downarrow\uparrow{\scriptstyle U(s)} & & {\scriptstyle p_{U(Y)}}\downarrow\uparrow{\scriptstyle \iota_{U(Y)}} \\ U(Y) & \xrightarrow[=]{} & U(Y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} U(X) & \xrightarrow{\gamma_{(f,s)}} & U(\mathrm{Ker}f) \\ {\scriptstyle U(f)}\downarrow\uparrow{\scriptstyle U(s)} & & \downarrow\uparrow \\ U(Y) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

或者，等价地，赋予一个自然映射 $\gamma_{(f,s)}: \ U(X) \to U(\mathrm{Ker}f)\ in\ \mathbb{D}$，使右侧方块成为分裂满态射的拉回；也就是说，这是一个满足 $\gamma_{(f,s)}.U(s) = 0\ (*)\ in\ \mathbb{D}$ 的拉回。

定义 3.2。 对于 U，半直积超指标是一个半直指标 ρ，它使下列左侧图表在 $\mathbb{D}$ 中对任意分裂满态射 $(f,s): X \rightleftarrows Y\ in\ \mathbb{C}$ 均交换：

$$\begin{array}{ccccc} U(Y) & \underset{U(f)}{\overset{U(s)}{\rightleftarrows}} & U(X) & \underset{\gamma_{(f,s)}}{\overset{U(k_f)}{\rightleftarrows}} & U(\mathrm{Ker}f) \\ {\scriptstyle =}\downarrow & & {\scriptstyle \rho_{(f,s)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle =} \\ U(Y) & \underset{p_{U(Y)}}{\overset{\iota_{U(Y)}}{\rightleftarrows}} & U(Y)\times U(\mathrm{Ker}f) & \underset{p_{U(K)}}{\overset{\iota_{U(K)}}{\rightleftarrows}} & U(\mathrm{Ker}f) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} U(X) & \underset{\gamma_{(f,s)}}{\overset{U(k_f)}{\rightleftarrows}} & U(\mathrm{Ker}f) \\ {\scriptstyle U(f)}\downarrow\uparrow{\scriptstyle U(s)} & & \downarrow\uparrow \\ U(Y) & \rightleftarrows & 1 \end{array}$$

或者，等价地，使下列右侧方块成为分裂满态射的拉回；也就是说，在指标 γ 上添加公理 $\gamma_{(f,s)}.U(k_f) = Id_{U(\mathrm{Ker}f)}$。

例子

1）考虑遗忘函子 V: Gp $\to$Set$_*$，它从群范畴映到带点集范畴。给定 Gp 中任意分裂满态射 (f,s): $X \rightleftarrows Y$，由 $\gamma_{(f,s)}(x) = sf(x)^{-1}.x$ 定义的映射 $\gamma_{(f,s)}$: $V(X) \to V(\mathrm{Ker}f)$ 是 U 的半直积超指标，其逆元由 $(y,k) \mapsto s(y) \circ k$ 给出。

2）从任意有限完备范畴 $\mathbb{E}$ 出发。记纤维 $\mathrm{Pt}_1\mathbb{E}$ 为 $\mathbb{E}_*$，记 $\mathbb{E}$ 中内群构成的范畴为 Gp$\mathbb{E}$，显然，前述公式为遗忘函子 $V_{\mathbb{E}}: \mathrm{Gp}\mathbb{E} \to \mathbb{E}_*$ 确定了一个半直积超指标。3）设 R 为一个环，$\mathbb{C}$ 为任意一种 R-代数所构成的范畴，则遗忘函子 $U: \mathbb{C} \to$Ab 具有一个半直积超指标，其群同态 $\gamma_{(f,s)}$: $U(X) \to U(\mathrm{Ker}f)$ 定义为 $\gamma_{(f,s)}(x) = x - sf(x)$。

4）考虑有限完备范畴 $\mathbb{D}$ 中内超 S-lom′ 结构所构成的范畴 $\Sigma\mathrm{lom}\mathbb{D}$。那么，对于 $\Sigma\mathrm{lom}\mathbb{D}$ 中任意一个分裂满态射 (f,s)，遗忘函子 $\Sigma_{\mathbb{D}}: \Sigma\mathrm{lom}\mathbb{D} \to D_*$ 都具有一个半直指标，其映射 γ^{Σ} 定义为 $\gamma^{\Sigma}_{(f,s)}(x) = d(x, sf(x))$；$(f, \gamma^{\Sigma}_{(f,s)}): X \to Y \times \mathrm{Ker}f$ 的逆元由 $(y,k) \mapsto s(y) \circ k$ 给出。

5) 考虑有限完备范畴 $\mathbb{D}$中的内部超减法范畴 HSt$\mathbb{D}$。那么遗忘函子 $H_{\mathbb{D}}$： HSt $\mathbb{D} \to D_*$ 对于 HSt$\mathbb{D}$中的任意分裂满态射 (f,s)，都有一个半直积超指标，其映射 γ^{HS} 定义为$\gamma^{HS}_{(f,s)}(x) = d(x, sf(x))$；逆元 $(f, \gamma^{HS}_{(f,s)}): X \to Y \times \mathrm{Ker}f$则以同样的方式由 $(y,k) \mapsto s(y) \circ k$给出。

6）设 DiGp 为双群范畴，即由集合 X 上的四元组 $(X, *, \circ, 1)$ 构成，其中该集合带有两种具有相同单位元的群结构；SkB 为左斜括号 [14] 的子范畴，其中两种运算满足以下公理：

$a \circ (b * c) = (a \circ b) * a^{-*} * (a \circ c)$，其中 a^{-*} 表示群 $(X, *)$ 中 a 的逆元。它们都是原模范的，见 [8]。显然，两个指向 Gp 的可能的遗忘函子与遗忘函子 $V : \mathrm{Gp} \to \mathrm{Set}_*$ 复合后，会产生两个完全独立的（外在）半直积超指标。因此，函子的超指标远非唯一。文献 [7] 表明，要完整描述 DiGp 和 SkB 中的分裂满态射，实际上还需要一个超出这两个超指标之外的额外项。

引理 3.1。 设 U： $\mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 是有限完备带基点范畴之间的左正合函子，并且带有半直指标 ρ。此外，若函子 U 是保守的，则范畴 $\mathbb{C}$是原模范的，而无需对范畴 $\mathbb{D}$ 作任何假设。

证明。 考虑如下右侧所示的任意一个分裂满态射之间的态射 h:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker} f \arrow[r, "k_f"] \arrow[d, shift right] & X \arrow[r, "h"] \arrow[d, shift right, "f"'] & X' \arrow[d, shift right, "f'"'] \\
1 \arrow[r, tail, "\alpha_Y"'] \arrow[u, shift right] & Y \arrow[r, equal] \arrow[u, shift right, "s"'] & Y \arrow[u, shift right, "s'"']
\end{tikzcd}$$

说 $\alpha_Y^*(h)$ 是同构，等价于说整个矩形是一个拉回。现在，由于 ρ来自一个自然变换，我们在 $\mathbb{D}$中有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
U(X) \arrow[r, "U(h)"'] \arrow[rr, bend left, "\gamma_{(f,s)}"] \arrow[d, shift right] & U(X') \arrow[r, "\gamma_{(f',s')}"'] \arrow[d, shift right] & \mathrm{Ker} f \arrow[d, shift right] \\
U(Y) \arrow[r, equal] \arrow[u, shift right] & U(Y) \arrow[r] \arrow[u, shift right] & 1 \arrow[u, shift right]
\end{tikzcd}$$

其中右侧的方块和整个矩形都是拉回。因此，左侧的方块是拉回，或者等价地说，$U(h)$ 是同构。由于 U 是保守的， h也如此；基变换 α_Y^* 也同样保守。□

上文中的第四个和第五个例子将为我们提供带半直指标和超指标的函子的刻画。

定理 3.1。 设 $U : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 是一个带有半直指标 ρ的左正合函子，作用于有限完备带基点范畴之间。则函子 U 可以经由遗忘函子 $\Sigma_{\mathbb{D}}$： $\Sigma\mathrm{lom}\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 分解$\bar{\ }$，通过函子 U： $\mathbb{C} \to \Sigma\mathrm{lom}\mathbb{D}$，使得 $\rho = \rho^{\Sigma}.\bar{U}$。当它具有半直积超指标时，函子 U 可以$\bar{\ }$经由遗忘函子 $H_{\mathbb{D}} : \mathrm{HSt}\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 分解，通过函子 U： $\mathbb{C} \to \mathrm{HSt}\mathbb{D}$，使得 $\rho = \rho^{HS}.\bar{U}$。

证明。 给定任意对象 $X \in \mathbb{C}$，考虑分裂满态射 (p_1^X, s_0^X)： $X \times X \rightleftarrows X$，其中 p_1^X是第二投影， s_0^X: $X \rightarrowtail X \times X$ 是对角态射。接着考虑由半直指标给出的以下同构:

$$\begin{tikzcd}
U(X) \times U(X) \arrow[r, "\rho_{(p_1^X, s_0^X)}"] \arrow[d, shift right, "p_1^{U(X)}"'] & U(X) \times U(X) \arrow[d, shift right, "p_0^{U(X)}"'] \\
U(X) \arrow[r, "="'] \arrow[u, shift right, "s_0^{U(X)}"'] & U(X) \arrow[u, shift right, "\iota_0^{U(X)}"']
\end{tikzcd}$$

根据定义1.3，映射 $\gamma_{(p_1^X,s_0^X)}$：$U(X) \times U(X) \to U(X)$（为简便起见记作 d_X ）赋予 $U(X)$ 一个超-¯ ¯S-lom´ınski 结构。因此，存在因子分解 $U : \mathbb{C} \to \Sigma\mathrm{lom}\mathbb{D}$，它经由遗忘函子 $\Sigma\mathrm{lom}\mathbb{D} \to \mathbb{D}$，由 $U(X) = (U(X)\ d_X, \alpha_X)$ 定义；显然它满足$\rho^{\Sigma}_{(U(f),U(s))} = \rho_{(f,s)}$。当该指标是超指标时，映射 d_X 赋予 $U(X)^{-}$ 一个超减法结构，并产生因子分解 $U : \mathbb{C} \to \mathrm{HSt}\mathbb{D}$，它经由遗忘函子 $\mathrm{HSt}\mathbb{D} \to \mathbb{D}$，由 $U(X) = (U(X)\ d_X, \alpha_X)$ 定义；显然它满足 $\rho^{HS}_{(U(f),U(s))} = \rho_{(f,s)}$。
□

超指标的例子3）只有在得知阿贝尔范畴 =UMag(HSt) =HSt(UMag)之后，才获得其完整含义。

References

[1] F. Borceux与D. Bourn： *Mal'cev, Protomodular, Homological and Semi-Abelian Categories*, Kluwer, 《数学及其应用》，第566卷（2004年），479页。[2] F. Borceux与D. Bourn, *Split extension classifier and centrality*, 载于《代数、几何与数学物理中的范畴》，《当代数学》431（2007年），85-14。[3] F. Borceux、G. Janelidze与G.M. Kelly, *Internal object actions*, 《卡罗来纳大学数学评论》46（2005年），235-255。[4] F. Borceux、G. Janelidze与G.M. Kelly, *On the representability of actions*, 《范畴论及其应用》14（2005年），244-286。[5] D. Bourn, *Normalization equivalence, kernel equivalence and affine categories*, Springer讲义1488（1991年），43-62。[6] D. Bourn, *Split epimorphims and Baer sums of skew left braces*, 《代数杂志》，652（2024年），188-207。[7] D. Bourn, *A structural aspect of the category of quandles*, 《纽结理论及其分枝杂志》24（2015年），1550060。[8] D. Bourn、A. Facchini与M. Pompili, *Aspects of the category SKB of skew braces*, 《代数通讯》51（2023年），2129-2143。[9] D. Bourn与G. Janelidze, *Protomodularity, descent and semi-direct product*, 《范畴论及其应用》4（1998年），37-46。[10] D. Bourn与G. Janelidze, *Characterization of protomodular varieties of universal albebras*, 《范畴论及其应用》11（2003年），143-147。[11] D. Bourn与Z. Janelidze, *Subtractive categories and extended subtractions*, 《应用范畴结构》17（2009年），317-343。[12] A. Carboni、J. Lambek与M.C. Pedicchio, *Diagram chasing in Mal'cev categories*, 《纯粹与应用代数杂志》，**69** 1991 271 284 ( ) - J.R.A Gray, [13] *Algebraic exponentiation in general categories*, 《应用范畴结构》，20（2012年），543-567。[14] L. Guarnieri与L. Vendramin, *Skew braces and the Yang-Baxter equation*, 《计算数学》86（2017年），2519-2534。[15] Z. Janelidze, *Subtractive categories*, 《应用范畴结构》，13（2005年），343-350。[16] P.T. Johnstone, *Affine categories and naturally Mal'cev categories*, 《纯粹与应用代数杂志》，61（1989年），251-256。[17] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, 《纯粹与应用代数杂志》，23（1982年），37-65。[18] S.V. Matseev, *Distributive groupoids in knot theory*, 《数学汇刊》（新辑），119（1982年），78-88。[19] J. S - ´ *On the determining of the form of congruences in abstract algebras with equa-*l *tionally constant definable elements* **48** 1960 325 341 omınski, , 《数学基础》，( )，-。[20] A. Ursini, *On subtractive varieties*, 《泛代数》31（1994年），204-222。

Univ. Littoral Côte d'Opale, UR 2597, LMPA, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville, F-62100 Calais, France*Email address*: bourn@univ-littoral.fr