arXiv:2602.06666v1 [math.DG] 6 Feb 2026

定量分割指标定理与非紧带宽

Peter Hochs*和 Jinmin Wang†

2026年2月9日

摘要

Gromov 的带宽猜想给出了紧黎曼带宽度的精确上界，前提是其标量曲率下界为正，且该带的截面不允许存在正标量曲率度量。Cecchini 和 Zeidler 分别证明了这一猜想的若干版本。本文发展了分割流形指标理论的一个定量版本，该版本适用于非紧超曲面。借助这一理论，我们证明了 Gromov 带宽估计的一个版本，使其适用于可能非紧的黎曼带。

目录

1 引言 2

2 非紧带的带宽不等式 5

2.1 一致嵌入子流形 .5

2.2 主要结果.7

3 可能具有非紧超曲面的分割流形指标定理 9

3.1 Roe 代数与粗映射 .9

3.2 分割流形指标 .12

3.3 分割流形指标定理 .14

*拉德堡德大学数学、天体物理与粒子物理研究所，荷兰奈梅亨，p.hochs@math.ru.nl

†中国科学院数学研究所，中国北京，jinmin@amss.ac.cn

4 定量分割流形指标 164.1 有界变换的估计 .164.2 奇数维中的指标构造. 184.3 偶数维情形下指标的构造 214.4 基本性质.23

5 定量分割流形指标定理 26
5.1 结果陈述.275.2 切除性质 .295.3 定量分割流形指标定理的证明 32

6 非紧带宽不等式的证明 356.1 定理 2.5 的证明.356.2 条件 1 的必要性 . 41

1 引言

2018年，Gromov 提出了以下猜想，参见 [9] 第 722 页的猜想 C。

猜想 1.1（带宽猜想；Gromov，2018年）。设 N 是一个无边界的紧致流形，其维数为 $n-1 \geq 5$。假设 N 不存在正标量曲率的黎曼度量。考虑 $N \times [-1,1]$ 上的黎曼度量 g。设 ℓ 是关于此度量的 $N \times \{-1\}$ 与 $N \times \{1\}$ 之间的距离。那么

$$\inf_{x \in N \times [-1,1]} \mathrm{Sc}_g(x) \leq \frac{4\pi^2(n-1)}{n\ell^2}.$$

这里我们用 Sc_g 表示与黎曼度量 g 相关的标量曲率。Gromov 指出，该界 $4\pi^2\ (n-1)\ n\ell^2$ 是最优的 [9，第 653–654] 页。

Gromov 猜想的若干版本已由 Zeidler [34, 定理 1.4] 和 Cecchini [4, 定理 D]证明（后者得到了最优界），其条件是 N 的 Rosenberg 指标非零。Rosenberg 指标是对紧致 Spin 流形 [19, 20, 21]上正标量曲率黎曼度量的一种精细障碍。Zeidler 将这些结果推广到了更一般形式的黎曼带。 [33, 定理 1.4] 的一个推论如下。

定理 1.2（Zeidler，2020）。设 X 是一个完备的黎曼Spin-流形，其维数为 n，并设 $N \subset X$ 是一个紧致超曲面。假设

- N 具有平凡法丛；
- 由包含映射诱导的映射 $\pi_1(N) \to \pi_1(X)$ 是单射；
- N 在 $KO_{n-1}(C^*(\pi_1(N)))$ 上的 *Rosenberg* 指标非零。

假设 M 是 N 的一个宽度为 ℓ 的邻域。那么

$$\inf_{x \in M} \mathrm{Sc}_g(x) \leq \frac{4\pi^2(n-1)}{n\ell^2}.$$

在特殊情形 $X = N \times \mathbb{R}$下，定理 1.2 变为 [4, 定理 D]，该定理指出，如果 1.1 的 Rosenberg 指标 N 非零，则猜想 [33, 推论 1。5]。）

文中 [4, 33, 34] 的结果的证明涉及狄拉克算子的分割流形指标，以及非紧流形上*Callias* 型狄拉克算子的密切相关指标。本文发展了定量分割流形指标，并利用它将定理1.2推广到非紧N。

若 X 是一个奇维完备黎曼流形，并由一个紧超曲面 $N \subset X$ 分割为两部分，则 Roe 的分割流形指标是与 X 上的狄拉克算子 D 相关联的一个整数 Ind(D, N)。Roe 证明了一个分割流形指标定理，指出

$$\mathrm{Ind}(D, N) = \mathrm{Ind}(D_N), \tag{1.1}$$

对于自然关联于 D 的狄拉克算子 D_N N。原始结果见 [17]，或参见 [11] 和 [18, 定理 4.4] 中后来更为简洁的论述。由此可立即得到紧流形上狄拉克算子指标的配边不变性、正标量曲率的障碍，以及某些高阶特征标的同伦不变量。（参见[18,第 31–32] 页。）

多年来，人们对 Roe 分割流形指标定理进行了多种变体和推广，例见 [15, 16,22, 24, 32]。对于定理1.2 中 N 可能非紧的情形，我们建立并应用了一个针对非紧超曲面的分割流形指标定理。在这一背景下，近期已有若干结果： [3,定理 4。44], [8, 推论 7。6], [14, 定理 2。23]。

就我们的目的而言，[14] 中分割流形指标的构造最为有用，因为该构造涉及一个 Callias 型算子，适用于我们将采用的、基于正标量曲率的定量估计。 [14] 中的结果有一个缺点：它假设 N 上的黎曼距离与 X上的黎曼距离的限制在粗几何意义下等价。

为了解决这一问题，我们将 [14] 中的结果细化为定量分割流形指标定理。在 [3, 8, 14], 中，等式（1.1）成立于 K局部化 Roe 代数的 K 理论中。粗略地说，它是 r邻域的 Roe 代数的归纳极限，其中 N，当 $r \to \infty$时。（见定义3.2。）在我们的定量版本中，我们在 N的一个特定邻域中得到了（1.1）的一个版本，而且可以对该邻域加以控制。这就是定理5.1，其等式形式如下：

$$\mathrm{Ind}_q(D, N) = (i_N)_*(\mathrm{Ind}(D_N)) \in K_*(C^*(M)), \tag{1.2}$$

对于一种特定类型的闭集 $M \subset X$，它在内部包含 N，其中i_N： $N \to M$ 是包含映射，而 Ind$_q$ 是分割流形指标的一个定量版本（见定义4.6 和4.9）。我们在例 [14]中说明了5.4非紧超曲面的分割流形指标理论与我们的定量版本之间的区别。

在定理1.2中，指标理论方面的假设——基本群上的诱导映射是单射，且 Rosenberg 指标非零——保证截面 N 不允许存在正标量曲率度量。在完备、可能非紧的流形情形下，一个自然的对应条件是 N 在 $K_*(C^*(N))$ 上的狄拉克算子的粗指标非零。然而，正如我们在小节 6.2中所示，仅凭这一条件不足以推出带宽估计，还需要额外假设来描述 N 在带 M 中的嵌入方式。更确切地说，我们证明了定理 1.2的如下非紧版本，这是本文的主要结果。（正文中的定理2.5。）

定理 1.3 （可能非紧带的带宽不等式）。 设(M^n, g)是一个具有边界 $\partial_- M \sqcup \partial_+ M$ 的正则 *Spin* 黎曼带。令ℓ 表示 $\partial_- M$ 与 $\partial_+ M$ 在 M中的距离。假设

1. 恒等映射

$$\mathrm{id}\colon (\partial_- M, d_{g_{\partial_- M}}) \to (\partial_- M, d_g|_{\partial_- M})$$

是粗等价，并且

2. 狄拉克算子 $D_{\partial_- M}$ 在 $K_{n-1}(C^*(\partial_- M))$中具有非零指标。

Then

$$\inf_{x\in M} \mathrm{Sc}_g(x) \leq \frac{4\pi^2(n-1)}{n\ell^2}.$$

正则 Spin 黎曼带的定义见定义2.3。特别地，总存在一个完备黎曼流形X 包含 M。为避免涉及 X上的距离函数，我们采用定量分割流形理论，并将分割流形指标局部化到 $M \subset X$。然后利用等式（1.2）证明定理1.3。

致谢

PH 得到了荷兰科学研究组织 NWO 的资助，资助项目编号为 OCENW.M.21.176 和 OCENW.M.23.063。JW 部分得到了国家自然科学基金委员会项目 12501169 的资助。

2 非紧带的带宽不等式

2.1 一致嵌入的子流形

我们回顾非紧流形的若干几何正则性条件。

设 (X^n, g) 是一个完备黎曼流形。假设 (X, g) 具有有界几何，即

1. 全局单射半径 $\mathrm{inj}_g = \inf_{x\in X}\mathrm{inj}_g(x)$ 为正，并且
2. 对每个 $k \geq 0$，黎曼曲率张量的 k 阶协变导数均一致有界。

在任意度量空间 (Y, d_Y) 中，对于 $y \in Y$ 和 $r > 0$，我们将以 y 为中心、半径为 r 的开球记为 $B_r(y)$。对于 $A \subset Y$，记

$$B_r(A) := \bigcup_{y\in A} B_r(y);$$
$$\bar{B}_r(A) := \overline{B_r(A)}$$

其中右侧的横线表示闭包。我们经常使用这个闭包，使得定义 4.6 中用到的集合 $(\mathcal{N}_\psi)$是闭集，因此它们是恰当度量空间，进而具有良好性质的 Roe 代数。

以下概念取自 [7, 第 2 节3]。

定义 2.1. 设 N^{n-1} 是完备黎曼流形（X^n, g）中的完备超曲面。若存在 $\delta > 0$，使得对于每个 $x \in N$，交集 $B_\delta(x) \cap N$都可以在 x处的正规坐标中表示为某个函数的图像，则称 N 在 X 中一致嵌入。

$$h\colon T_xN \longrightarrow (T_xN)^\perp,$$

其各阶导数都是一致有界的。

容易看出，一致嵌入超曲面（$N^{n-1}, g_N = g|_N$）本身是具有有界几何的完备黎曼流形。此外，任何一致嵌入超曲面都容许一个一致管状邻域。作为一贯假设，我们假定所考虑的所有流形都是定向的。特别地，这意味着所有超曲面都具有平凡法丛。

定理 2.2 ([7, 定理 2.31])**.** 若 $N^{n-1} \subset X^n$ 是一致嵌入超曲面，则存在常数 $\varepsilon > 0$ 和 $C > 0$ 使得下列结论成立。

1. 该映射

$$F\colon N \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow X, \qquad (x,t) \mapsto \exp_x(tn_x),$$

是到其像 U 上的微分同胚，其中 n_x 表示 N 在 X 中于 x 处的单位法向量。

2. U 上的度量 g 满足

$$C^{-1}\, F_*(dt^2 + g_N) \;\le\; g|_U \;\le\; C\, F_*(dt^2 + g_N).$$

我们称集合 U （如定理 2.2 中所述）为 一致测地线法向邻域 $N \subset X$。

我们要指出，尽管度量张量 $g|_U$ 和 $dt^2 + g_N$ 在 U上看起来相似，但 X 在 U 上的黎曼距离函数未必与乘积距离函数双 Lipschitz 等价。这一区别虽细微，却对我们的主要定理至关重要；我们将给出具体例子来说明这一点（见例5.4 及第6.2小节）。

2.2 主要结果

本文的目标是证明黎曼带带宽不等式的一个非紧版本。

定义 2.3. 设 (M^n, g) 是一个连通的带边黎曼流形，其边界为 $\partial M = \partial_- M \sqcup \partial_+ M$，其中 $\partial_\pm M$ 是 ∂M 的连通分支的并。若 (M^n, g) 可以等距嵌入到一个具有有界几何的完备黎曼流形 (X, g) 中，且 $\partial_\pm M$ 是一致嵌入超曲面，则称 (M^n, g) 为一个正则黎曼带 。

注 2.4。 如果 (M, g) 按照带边流形的意义具有有界几何，并且 $\partial_\pm M$ 是一致嵌入超曲面（类似于定义 2.1），那么 (M, g) 自动是正则的：可取

$$X = (\partial_- M \times (-\infty, 0]) \cup_{\partial_- M} M \cup_{\partial_+ M} (\partial_+ M \times [0, +\infty)),$$

配备一个度量，该度量在 $\partial_\pm M$ 附近从 g 平滑插值到乘积度量，如 [5,定理 1.9] 中所示。

对于任意黎曼流形 (M, g)，我们将 M 上的黎曼距离记为 d_g。若 $N \subset M$ 是一个子流形，则将 g 在 N 上的限制记为 g_N。距离函数 d_{g_N} 与黎曼距离在 M 上限制到 N 所得的 $d_g|_N$ 之间的差异，将在本文中发挥重要作用。

定理 2.5。 设 (M^n, g) 是一个边界为 $\partial_- M \sqcup \partial_+ M$ 的正则 Spin 黎曼带。令 ℓ 表示 $\partial_- M$ 与 $\partial_+ M$ 在 M 中的距离。假设

1. 恒等映射

$$\mathrm{id}\colon (\partial_- M, d_{g_{\partial_- M}}) \to (\partial_- M, d_g|_{\partial_- M})$$

是粗等价，并且

2. 狄拉克算子 $D_{\partial_- M}$ 在 $K_{n-1}(C^*(\partial_- M))$ 中具有非零指标。

Then

$$\inf_{x \in M} \mathrm{Sc}_g(x) \leq \frac{4\pi^2 (n-1)}{n\ell^2}. \tag{2.1}$$

定理 2.5 中的第一个假设 $\partial_- M$ 是连通的：否则， $\partial_- M$ 的不同连通分支相对于 彼此相距无穷远，但相对于 d_g 则不是。

式（2.1）中的界在紧致情形下已经是锐的，正如猜想 1.1下方所指出的，因此在这个更一般的情形下也如此。

例 2.6. 与定理 1.2 中一样，设 X 是一个完备的、 n 维黎曼 Spin 流形，其维数为 n，并设 $N \subset X$ 是一个法丛平凡的紧致超曲面。假设由包含映射诱导的映射 $\pi_1(N) \to \pi_1(X)$ 是单射。这意味着 N 的万有覆盖 $\tilde{N}$ 嵌入到 X 的万有覆盖 $\tilde{X}$ 中。设 $M \subset X$ 是 N 的一个相对紧致邻域，其宽度为 l，且其边界分解为 $\partial M = \partial_- M \sqcup \partial_+ M$，其中 $\partial_\pm M$ 是紧致超曲面。那么 M 的万有覆盖 $\tilde{M}$ 是一个正则 Spin 黎曼带。假设 $\tilde{M} = M_- \cup M_+$，其中 $M_- \cap M_+ = N$、 $\partial(M_\pm) = \partial_\pm M \sqcup N$，且 M_- 在 $\partial_- M$ 与 N 之间定义了一个配边。

假设狄拉克算子 $D_{\tilde{N}}$ 在 N 上的粗指标非零。根据由万有覆盖 $D_{\partial \tilde{M}_-}$ 定义的配边，这个指标等于 $\tilde{M}_-$ 的 M_- 的粗指标（见 [29], [30, 定理 4。12], [14, 推论 2。27]），因此也非零。根据 2.5，定理中的第一个条件现在对 M自动成立，因为 M具有相对紧致性。因此，该定理推出

$$\inf_{x \in M} \mathrm{Sc}_g(x) = \inf_{\tilde{x} \in \tilde{M}} \mathrm{Sc}_{\tilde{g}}(\tilde{x}) \leq \frac{4\pi^2(n-1)}{n\ell^2}, \tag{2.2}$$

其中 $\tilde{g}$ 是 g 到 $\tilde{X}$的提升。换言之，定理 2.5 可化为定理 1.2 的一个版本，其中将 Rosenberg 指标非零替换为 $D_{\tilde{N}}$的粗指标非零。

若要得到一个与定理 1.2 更为相似的结果，假设等变粗指标

$$\mathrm{Ind}_{\pi_1(N)}(D_{\tilde{N}}) \in K_{n-1}(C^*(\tilde{N})^{\pi_1(N)}) = K_{n-1}(C^*(\pi_1(N))) \tag{2.3}$$

非零。这个条件略强于 N 的 Rosenberg 指标非零；后者是该指标在 $KO_{n-1}(C^*(\pi_1(N)))$ 中的类比。

定理2.5 中的第二个条件的一种变体现已成立：由$D_{\partial_- \tilde{M}}$ 等于（2.3）所定义的配边给出的等变粗指标为$\tilde{M}_-$，因此是非零的。定理2.5 立即推广到这样的情形：其中 $D_{\partial_- M}$ 在 K_{n-1}（C^*（$\partial_- M$）$^\Gamma$）中具有非零指标，其中 Γ 是一个离散有限生成群，在 M上适当地自由作用，并保持所有结构。此版本的定理蕴含（2.2）。

我们将在第 2.5 节6中证明定量分割流形指标定理（针对可能非紧的超曲面），即定理5.1。本证明的主要技术工具是

3 可能非紧超曲面的分割流形指标定理

我们陈述了对主要结果的一种变体，该结果出自 [14], Roe 分割流形指标定理的一种推广 [11, 17, 18], ，其中分割超曲面可以是非紧的。此前[3, 8]也有相关结果。该结果即定理3.8。与 [14], 中的定理 2.23 相比，指标的构造略有不同，而且本文的结果适用于偶数维和奇数维超曲面。我们指出该结果为何不足以证明定理2.5，这促使我们将定理3.8 推广为定理5.1。我们在一个特殊情形下直接证明定理3.8 （命题3.9），该证明将在第5.1节4中用于证明定理

3.1 Roe 代数与粗映射

我们现在回顾 Roe 代数及其局部化变体的定义。这些代数在指标理论中起着核心作用，因为微分算子的指标自然取值于它们的 K-理论。

定义 3.1. 设 X 是一个恰当度量空间（即闭球是紧的）。希尔伯特空间 H 是一个 X-模，如果 H 带有 $C_0(X)$ 的非退化表示（即 H 中没有任何非零向量被 $C_0(X)$ 的每个元素都映为零）。模 H 称为充分的，如果 $C_0(X)$ 中没有非零函数作为紧算子作用。

例如，若 X 是完备黎曼流形，则对厄米向量丛 $E \to X$ ， $H = L^2(X, E)$ 给出一个充分的 X-模。

定义 3.2. 设 X 是一个恰当度量空间， H 是一个充分的 X-模。

1. 若对于所有 $f \in C_0(X)$， fT和 Tf都是紧算子，则算子 $T \in B(H)$ 称为局部紧。2. 若存在 $P > 0$，使得当 f、 $g \in C_c(X)$ 满足 $d(\text{supp}(f), \text{supp}(g)) > P$ 时， $fTg = 0$，则算子 $T \in B(H)$ 具有有限传播。3. 若 $M \subset X$ 是一个闭子集，则若对于任何支撑在远离 M 处的 $f \in C_c(X)$, 都有 $fT = Tf = 0$，我们称 $T \in B(H)$ 支撑在 M 中。4. 若 $N \subset X$ 是一个子集，则若存在 $R > 0$ ，使得 T 支撑在 N 的闭 R-$^-$ 邻域 $B_R(N)$ 中，我们称 $T \in B(H)$ 支撑在 N 附近。

Roe 代数 $C^*(X)$ 是局部紧算子有限传播代数在 $B(H)$ 中的范数闭包。若 $N \subset X$，则局部化 *Roe* 代数 $C^*(N \subset X)$ 是所有支撑在 N 附近的局部紧有限传播算子的范数闭包。

Roe 代数 $C^*(X)$ 与所选的 ample$X$-模的具体选择无关；参见 [28,引理 5.1。12]。

若 X 是一个维数为 n的完备 Spin流形，则其上的 Spin-Dirac算子 D_X on X 具有一个 粗指标

$$\mathrm{Ind}(D_X) \in K_n(C^*(X)),$$

其定义见 [18,定义 3.7] 或 [31,第 2.3 节1]。

Roe 代数的一个关键性质是它们在粗等价下保持不变。我们回顾一下基本概念。

定义 3.3。 设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是恰当度量空间，且f: $X \to Y$是一个适当映射。

1. 若存在一个非递减函数ρ_+: $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，满足 $\lim_{r\to\infty} \rho_+(r) = \infty$，则映射 f 是一个 粗映射 。

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \rho_+(d_X(x_1, x_2))$$

对所有 x_1， $x_2 \in X$。

2. 映射 f是粗嵌入，如果存在非递减函数$\rho_\pm$: $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，满足 li m$_{r\to\infty} \rho_-(r) = \infty$

$$\rho_-(d_X(x_1, x_2)) \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \rho_+(d_X(x_1, x_2))$$

对所有 x_1， $x_2 \in X$。

3. 粗嵌入 f是粗等价，如果 $f(X)$ 是 Y中的网，¯即存在 $R > 0$，使得 $Y = B_R(f(X))$。

定理 3.4 ([28, 定理 5.1。15])。 设 X 和 Y是恰当度量空间，并设 f: $X \to Y$是一个粗映射。那么 f 自然诱导一个同态

$$f_*\colon K_*(C^*(X)) \longrightarrow K_*(C^*(Y)).$$

这一构造是函子性的。此外，如果 f 是粗等价，那么f_* 是同构。

我们将经常使用定理3.4 的特殊情形，其中 X 是 Y的闭子集，且 f 是包含映射。更准确地说，设 (Y, d_Y) 是一个恰当度量空间，并设 $X \subset Y$ 是一个等于其内部的闭包的闭子集。设 d_X 是 X 上的距离函数，它在 X 上诱导的拓扑与 d_Y的限制所诱导的拓扑相同，并且对于所有 $x, x' \in X$,

$$d_Y(x, x') \leq d_X(x, x').$$

由此不等式以及 X的闭性可知，(X, d_X)是一个恰当度量空间。此外，包含映射 $i_X\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$是连续的。

设 H_Y是一个充足的 Y-模。表示 $C_0(Y) \to \mathcal{B}(H_Y)$可延拓到 $L^\infty(Y)$（相对于一个博雷尔测度），特别是可延拓到 X的示性函数 1_X。记作 $H_X = 1_X \cdot H_Y$。利用 X 等于其内部的闭包这一事实，可以直接验证 H_X 是一个充足的 X-模。

考虑定义在 H_Y上的 Roe 代数 $C^*(Y)$，以及定义在 H_X上的 Roe 代数 $C^*(X)$，其中使用距离函数 d_X。设$j\colon H_X \to H_Y$ 为包含映射。定义范数连续线性映射$\iota_X\colon \mathcal{B}(H_X) \to \mathcal{B}(H_Y)$如下：

$$\iota_X(T) := jTj^*,$$

对于 $T \in \mathcal{B}(H_X)$。

引理 3.5。映射 ι_X 限制为一个单射 $*$-同态 $\iota_X\colon C^*(X) \to C^*(Y)$，且在 K-理论上诱导的映射是定理 $(i_X)_*$ 中的映射*3.4*。

证明。第一个断言可通过直接验证得出。第二个断言源于以下事实：j 是覆盖包含映射 i_X 的等距映射。（例如参见 [28, 定义 4.3.3 和 5.1.4]。）□

我们将通过映射 ι_X，把 $C^*(X)$ 视为 $C^*(Y)$ 的子代数，并使用引理 3.5 中对映射 $(i_X)_*$ 的描述，而不明确引用该引理。如果 $C^*(Y)$ 中的一个元素按照定义 3.2 中第 3 点的意义支撑于 X，那么它属于 ι_X 的像，因此我们可以将其视为 $C^*(X)$ 中的一个元素。若元素 $a \in K_*(C^*(Y))$ 可由元素 $b \in K_*(C^*(X))$ 表示，是指由 i_X 在 K-理论上诱导的（可能非单射）映射 $(i_X)_*$ 将 b 映射到 a。

在 $N \subset Y$ 为闭子集、且带有距离函数 d_N使得恒等映射$\mathrm{id}\colon (N, d_N) \to (N, d_Y|_N)$为粗等价的情形下，我们将在若干处使用同构 $K_*(C^*(N)) \cong K_*(C^*(N \subset Y))$。设 $X \subset Y$ 为闭的，并假设 N 位于 X的内部，

并且包含映射 i_N: $N \to X$ 是粗等价。于是我们有同构

$$K_*(C^*(N)) \xrightarrow[\cong]{(i_N)_*} K_*(C^*(X) \xrightarrow[\cong]{((i_X)_*} K_*(C^*(N \subset Y)). \tag{3.1}$$

这是 [13], 第 93 页上的引理 1，结合定理 3.4 和引理3.5。我们还用到了映射 ι_X 在引理 3.5中的像$C^*(N \subset X)$在此情形下落在其中。

3.2 分割流形指标

我们首先回顾可能非紧的超曲面的分割流形指标的定义。

定义 3.6。设 X^n 是一个流形。嵌入的余维一子流形 $N^{n-1} \subset X^n$ 称为分割超曲面，如果

$$X = X_- \cup X_+,$$

其中 $X_\pm$ 是满足以下条件的带边界子流形

$$N = X_+ \cap X_- = \partial X_\pm.$$

定义 3.7。设 X^n 是由 N 剖分的流形。X 上的有界 Lipschitz 函数 ψ 称为该分割的定义函数，如果

- ψ 的值域是 $[-A, A]$，其中 $A > 0$,
- 存在 $R > 0$ 使得 $\psi^{-1}((-A,\ A)) \subset B_R(N)$,
- $\psi \equiv \pm A$ 在 $X_\pm \cap \big(X \backslash \psi^{-1}((-A,\ A))\big)$上，并且
- $N = \psi^{-1}(a)$，其中 $a \in (-A,\ A)$。

根据定理2.2，当 $N \subset X$ 是一致嵌入超曲面时，定义函数总是存在。

如果流形上的实向量丛 E 具有 Spin 结构，则将相应的旋量丛记为 $S(E)$。设$(X^n,\ g)$是一个具有有界几何、由一致嵌入超曲面 $N^{n-1} \subset X$分割的完备 Spin 黎曼流形。设 ψ是 N的一个定义函数。记 D 为作用在 X 上的狄拉克算子，其作用对象为 $S(TX)$。则对$(D,\ \psi)$确定一个指标类

$$\mathrm{Ind}(D, \psi) \ \in \ K_{n-1}\big(C^*(N \subset X)\big),$$

按以下方式进行。

奇维情形

首先假设 $\dim X = n$ 为奇数。定义

$$B = \begin{pmatrix} 0 & D \\ D & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\psi \\ i\psi & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \frac{B}{(1+B^2)^{1/2}} = \begin{pmatrix} 0 & V \\ U & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

其中

$$\begin{cases} U = (D + i\psi)\,(1 + (D^2 + \psi^2))^{-1/2}, \\ V = (D - i\psi)\,(1 + (D^2 + \psi^2))^{-1/2}. \end{cases}$$

我们将 C^* 代数 $\mathcal{A}$ 的乘子代数记为 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$。则 $F \in \mathcal{M}(C^*(N \subset X))$，并且

$$F^2 - 1 \ \in \ C^*(N \subset X), \tag{3.3}$$

见 [14, 命题 2。13]。因此，该算子定义了一个类

$$[F] \in K_1(\mathcal{M}(C^*(N \subset M))/C^*(N \subset M)).$$

定义

$$\mathrm{Ind}(D, \psi) = \partial[F] = [P] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \ \in \ K_0\big(C^*(N \subset X)\big), \tag{3.4}$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} 1 - (1 - UV)^2 & (2 - UV)\,U\,(1 - VU) \\ V(1 - UV) & (1 - VU)^2 \end{pmatrix}.$$

偶维情形

现在假设 $\dim X = n$ 为偶数。旋量丛 $S(TX)$ 带有自然的 $\mathbb{Z}_2$分次，分次算子为 γ。定义

$$B = D + \psi\gamma, \qquad F = \frac{B}{(1+B^2)^{1/2}}. \tag{3.5}$$

我们定义

$$p = \frac{F+1}{2}, \tag{3.6}$$

由（3.3）可知

$$p^2 - p \ \in \ C^*(N \subset X). \tag{3.7}$$

因此，它定义了

$$[p] \in K_0(\mathcal{M}(C^*(N \subset M))/C^*(N \subset M)).$$

因此我们定义

$$\mathrm{Ind}(D, \psi) = \partial[p] = [\exp(2\pi i p)] \in K_1\big(C^*(N \subset X)\big). \tag{3.8}$$

3.3 分割流形指标定理

分割流形指标定理如下。

定理 3.8. 设(X^n, g) 是一个具有有界几何的完备Spin 黎曼流形，由一致嵌入超曲面 $N^{n-1} \subset X$分割。设 $\psi\colon X \to [-A, A]$ 是该分割的定义函数。设 D 是作用在 X上的狄拉克算子。若

$$\mathrm{id}\colon (N, d_{g_N}) \longrightarrow (N, d_g|_N) \quad \textit{is a coarse equivalence}, \tag{3.9}$$

then

$$\mathrm{Ind}(D, \psi) = \mathrm{Ind}(D_N) \in K_{n-1}(C^*(N)) \cong K_{n-1}(C^*(N \subset X)),$$

其中$\mathrm{Ind}(D_N)$ 表示作用在 N上的狄拉克算子 D_N 的粗指标，该算子对应于由 X 上的 ***Spin*** 结构所诱导的 Spin 结构。

若 n 是奇数，则定理 3.8 等价于 [14]中的定理 2.23（针对 Spin-狄拉克算子的情形），尽管我们对指标类采用了略有不同的代表元。后一结果与 [3] 中的定理 7.5 以及 [8], 中较早出现的推论 7.6 密切相关。

本文中我们发展的主要技术工具是定理3.8的一种推广，即下文的定理5.1。推广的目的在于弱化关于3.9中 N上不同距离函数的假设。我们将看到，该条件过强，无法让我们利用定理3.8证明定理2.5；而定理5.1 则可以应用。参见备注6.4。

我们将把定理3.8 作为定理5.1的一个特例来证明。目前，我们回顾以下关键命题；该命题在模型乘积情形下证明了定理3.8，并且也将在定理5.1的证明中用到。

命题 3.9. 设(N^{n-1}, g_N) 是一个具有有界几何的完备 Spin 黎曼流形，并考虑赋予乘积度量 $g = dt^2 + g_N$ 的 $X = N \times \mathbb{R}$ 。考虑由 $N = N \times \{0\} \subset X$ 对 X 进行的剖分，其中 $X_+ = N \times [0, \infty)$ 且 $X_- = N \times (-\infty, 0]$。设 D_N 为狄拉克算子

作用于 N。设 ψ 是 N 的定义函数，且在 N 中$N \times \mathbb{R}$ 这一因子上为常数，并令 $\mathrm{Ind}(D, \psi)$ 表示在 (3.4) 或 (3.8) 中定义的指标类。那么

$$\mathrm{Ind}(D, \psi) = \mathrm{Ind}(D_N) \in K_*(C^*(N)).$$

证明。 证明基于 KK-理论，并遵循 [31]第 2.3.3 节中的论证。

我们先回顾，对于任意稳定的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ （即 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{K} \cong \mathcal{A}$），$KK$-群由下式给出

$$KK_0(\mathbb{C}, \mathcal{A}) = \left\{ [F] : F = \begin{pmatrix} 0 & V \\ U & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(\mathcal{A}),\ F = F^*,\ F^2 - 1 \in \mathcal{A} \right\},$$

and

$$KK_1(\mathbb{C}, \mathcal{A}) = \{ [F] : F \in \mathcal{M}(\mathcal{A}),\ F = F^*,\ F^2 - 1 \in \mathcal{A} \};$$

参见 [2, 第 17.5 节。4]此外，存在一个自然同构

$$KK_*(\mathbb{C}, \mathcal{A}) \xrightarrow[\cong]{} K_{*+1}(\mathcal{M}(\mathcal{A})/\mathcal{A}) \xrightarrow[\cong]{\partial} K_*(\mathcal{A}), \tag{3.10}$$

其中 ∂ 是边界映射；参见 [2,命题 17.5.5 和 17.5.6]。

现在取 $\mathcal{A} = C^*(N \subset X) \cong C^*(N)$。根据构造以及边界映射的定义 ∂（参见 [2, 定义 8.3.1 和 9.3.2]），指标类

$$\mathrm{Ind}(D, \psi) \in K_{n-1}(C^*(N \subset X))$$

恰好是类 $[F] \in KK_{n-1}(\mathbb{C}, C^*(N))$，其中 F是第 3.2 节中定义的算子，对 n的任一奇偶性均成立。（紧接在命题 17.5.6] 之前的酉元与投影之间的对应关系，恰如（3.6）所示。）

回顾一下，当 dim N 为偶数时，算子 B作用于 $S(T(N \times \mathbb{R}))^{\oplus 2}$；当 dim N 为奇数时，则作用于 $S(T(N \times \mathbb{R}))$。在这两种情况下，底丛都自然同构于

$$S(T(N \times \mathbb{R}) \oplus \hat{\mathbb{R}}) = S(TN \oplus \mathbb{R} \oplus \hat{\mathbb{R}}) \cong S(TN) \hat{\otimes} S(\mathbb{R} \oplus \hat{\mathbb{R}}),$$

ˆ其中 $\mathbb{R}$ 表示一个平凡平坦一维丛，其标准基向量为 ˆv。在此同一识下，当 dim N 为偶数时，Clifford作用 ic(ˆv)对应于矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$；当 dim N 为奇数时，则对应于分次算子 γ。因此，算子 B 分解为分次张量和

$$B = D_N \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} B_{\mathbb{R}}, \tag{3.11}$$

ˆ 其中 $B_{\mathbb{R}}$ 是作用于 $\mathbb{R}$上的 $S(\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})$ 的奇微分算子，定义如下：

$$B_{\mathbb{R}}=\begin{pmatrix}0 & i\frac{d}{dt}\\ i\frac{d}{dt} & 0\end{pmatrix}+\psi\cdot ic(\hat{v}).$$

考虑函数 $F(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$，并令 ~~$F$~~$(D_N)$ 和 $F(B_{\mathbb{R}})$ 表示相应的有界变换。这些算子定义了类

$$[F(D_N)]\in KK_{n-1}(\mathbb{C},C^*(N))\quad\text{and}\quad[F(B_{\mathbb{R}})]\in KK_0(\mathbb{C},\mathcal{K}),$$

分别。定义 Kasparov积的一种标准方法$[F(D_N)]\otimes_{KK}[F(B_{\mathbb{R}})]$ 是采用连接的方法，遵循 Connes–Skandalis [6]；另见 [2, 第 18]章。特别是，一旦指定了候选 Kasparov模，只需验证其满足 [2,定义 18.3.1 和 18.41]中列出的条件。在当前情形下，不难验证算子 $F(B)$ 定义了这样一个模。因此，

$$[F(B)]=[F(D_N)]\otimes_{KK}[F(B_{\mathbb{R}})]\quad\text{in } KK_{n-1}(\mathbb{C},C^*(N)).$$

另一种方法是使用无界 Kasparov模；见 [1]。

最后，我们注意到 $B_{\mathbb{R}}$ 是一个指标为一的 Fredholm算子（参见 [11] 第 2 节）。因此 $[F(B_{\mathbb{R}})]$ 表示

$$KK_0(\mathbb{C},\mathcal{K})\cong K_0(\mathcal{K})\cong\mathbb{Z}.$$

此外，对于 $\mathcal{A}=C^*(N)$，$[F(D_N)]$ 在同构（3.10）下的像恰好是指标类

$$\mathrm{Ind}(D_N)\in K_*(C^*(N)).$$

证明至此完成。 □

4 定量分割流形指标

我们对分割流形指标进行精细化，得到定量分割流形指标，见定义 4.6 和 4.9。在第 5 节中，我们将证明该指标的定量分割流形指标定理。

4.1 有界变换的估计

在本小节中，我们回顾 [26] 中的一些估计，它们将作为构造定量分割流形指标的技术基础，见定义 4.6和 4.9。

我们先固定一些记号。设 $(X^n,\ g)$ 是一个完备的、具有有界几何的 Spin 黎曼流形，并设 $N \subset X$ 是一个一致嵌入超曲面。

定义 4.1。给定分割 $N \subset X$ 的定义函数 ψ，N 的一个 ψ邻域 是一个包含

$$\mathcal{N}_\psi \subset \bar{B}_R(N) \subset X$$

$\psi^{-1}((-A,\ A))$ 的闭子集，使得对于每个 $x \in \mathcal{N}_\psi$，都存在一条测地线 γ，从 x 到 N，位于 $\mathcal{N}_\psi$ 内，且长度$(\gamma) = d_g(x,\ N) \leq R$.

从现在起固定一个 ψ邻域 $\mathcal{N}_\psi$，它属于 N。这样的邻域总是存在；例如，¯可以取 $\mathcal{N}_\psi = B_R(N)$。我们也会使用更一般的选择，参见例如 (6.11)。

设 ψ 如定义 3.7 所述。设 B 为算子 (3.2) 或 (3.5)，具体取决于 n的奇偶性。考虑算子

$$F_b = \frac{(bB)^2}{(1+b^2B^2)^{1/2}}. \tag{4.1}$$

取一个光滑函数 $\chi\colon X \to [0,1]$，使得:

- χ的支集包含于 $\bar{B}_r(\mathcal{N}_\psi)$;
- $\psi \equiv \pm A$ 在 supp$(1-\chi)$ 上;
- $\sqrt{\chi}$在 X 上是 $2/r$–利普希茨的。

这里 $r > 0$ 将在稍后选定。

我们回顾一下算子 B 的一个估计。下面的引理是引理 4.1]，的 [26, 版本，而引理 4.1]，又是引理 2.11] 的一个版本。

引理 4.2. 设 ρ 是一个满足 $0 \leq \rho \leq 1$、支撑于$\{|\psi| = A\}$的光滑函数。那么对于任意 $\lambda, b \in \mathbb{R}$,

$$\left\|(1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1/2}\rho\right\| \leq \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2+b^2A^2}}.$$

利用引理4.2，可得以下估计，见 [26, 引理 4.2].

引理 4.3。我们有

$$\|[F_b, \sqrt{\chi}]\| \leq 12\frac{\sqrt{b}}{r\sqrt{A}}; \tag{4.2}$$

$$\|(F_b^2-1)(1-\chi)\| \leq \frac{1}{bA}. \tag{4.3}$$

4.2 奇数维中的指标构造

假设 X 的维数 n为奇数。

设 $\mathcal{N}_\psi$ 如定义 3.7所述。对于任意 $r>0$，考虑其上的度量 d_r 在$B_r($ $\mathcal{N}_\psi$) 定义如下:

$$d_r(x,y) := \inf\left\{\int_\gamma |\dot\gamma(t)|_g\, dt :\ \gamma \text{ is a smooth path in } \bar B_r(\mathcal{N}_\psi) \text{ connecting } x \text{ and } y\right\}.$$

度量 d_r 在 N 上限制为一个度量，我们仍记为 d_r。显然 $d_r \le d_{g_N}$，因此恒等映射

$$\mathrm{id}\colon (N, d_{g_N}) \longrightarrow (N, d_r)$$

是一个粗映射。

记

$$F_b = \frac{(bB)^2}{(1+b^2B^2)^{1/2}} = \begin{pmatrix} 0 & V_b \\ U_b & 0 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{cases} U_b = b(D+i\psi)\,(1+b^2(D^2+\psi^2))^{-1/2}, \\ V_b = b(D-i\psi)\,(1+b^2(D^2+\psi^2))^{-1/2}. \end{cases}$$

现在定义

$$\tilde P = \sqrt{\chi} P_b \sqrt{\chi} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(1-\chi), \tag{4.4}$$

其中

$$P_b = \begin{pmatrix} 1-(1-U_bV_b)^2 & (2-U_bV_b)U_b(1-V_bU_b) \\ V_b(1-U_bV_b) & (1-V_bU_b)^2 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

命题 4.4. 我们有 $\tilde P \in M_2(C^*(\bar B_r(\mathcal{N}_\psi))^+)$，并且 $\tilde P - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(C^*($ $B_r(\mathcal{N}_\psi))$。通过选择

$$b \ge \frac{1}{A\delta} \quad \textit{and} \quad r \ge \sqrt{\frac{b}{A\delta}},$$

对于某个普适小常数 $\delta>0$，我们有

$$\|\tilde P\| \le 3 \quad \text{and} \quad \|\tilde P^2 - \tilde P\| < \frac{1}{1000}.$$

证明。 我们首先注意到

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\chi} \begin{pmatrix} -(1-U_bV_b)^2 & (2-U_bV_b)U_b(1-V_bU_b) \\ V_b(1-U_bV_b) & (1-V_bU_b)^2 \end{pmatrix} \sqrt{\chi}. \quad (4.6)$$

的每个条目 $P_b - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 都等于 $\varphi(B_b)$ 的一个矩阵分量，其中$\varphi \in C_0(X)$

属于 $C^*(X)$，由 [18, 命题 3.6] 或 [12, 命题 10.5.6]可知。因此，命题的第一句话得证。

我们有

$$\tilde{P} = \sqrt{\chi}[P_b, \sqrt{\chi}] + P_b + (1-\chi)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - P_b\right). \quad (4.7)$$

右侧第一项小于或等于一个普适常数乘以 $12\frac{\sqrt{b}}{r\sqrt{A}} \leq 12\sqrt{\delta}$，由（4.2）可知。由（4.3）可知，（4.7）中的最后一项小于或等于一个普适常数乘以 $1/(bA) = \delta$。因此，我们可以选择 $\tilde{\delta}$ 足够小，使得 $\|P - P_b\| < 1/6000$。

利用 F_b 和 $F_b^2 - 1$ 的算子范数至多为 1 这一事实，可得对所有 $b > 0$, $\|P_b\| \leq 2$. 均成立。因此，对于任意选取的上述 b 和 r，我们有 $\|\tilde{P}\| \leq 3$。此外，利用 $P_b^2 = P_b$这一事实可写为

$$\tilde{P}^2 - \tilde{P} = (\tilde{P} - P_b)\tilde{P} + P_b(\tilde{P} - P_b) + (P_b - \tilde{P}),$$

我们看到

$$\|\tilde{P}^2 - \tilde{P}\| \leq \|\tilde{P} - P_b\|(\|\tilde{P}\| + \|P_b\| + 1) < \frac{1}{1000}.$$

由此得到所需的界。 □

根据命题 4.4， P 的谱不包含直线 $\{z : \mathrm{Re}(z) = 1/2\}$。因此，它位于全纯函数 Θ 在 $\{z : \mathrm{Re}(z) \neq 1/2\}$ 定义的区域内

$$\Theta(z) = \begin{cases} 0, & \mathrm{Re}(z) < 1/2, \\ 1, & \mathrm{Re}(z) > 1/2. \end{cases}$$

由函数演算定义的算子 $\Theta(P)$ 是一个真正的幂等元，并且接近 $\tilde{P}$。它属于 $M_2(C^*(\bar{B}_r(\mathcal{N}_\psi))^+)$，因为该代数与所有 C^*-代数一样，在全纯函数演算下封闭。

引理 4.5。 设 $\varepsilon \in (0, 1/4)$。若 P 是希尔伯特空间上的有界算子，且 $\|P^2 - P\| < \varepsilon$，则

$$\|\Theta(P) - P\| < \frac{8\varepsilon}{1-4\varepsilon}(\|P\| + 2\varepsilon).$$

证明。 若 $\lambda \in$ 属于P谱，则 $|\lambda| \cdot |\lambda - 1| = |\lambda^2 - \lambda| < \varepsilon$. 因此 $|\lambda| < 2\varepsilon$ （若 $\mathrm{Re}(\lambda) < 1/2$），或 $|\lambda - 1| < 2\varepsilon$ （若 $\mathrm{Re}(\lambda) > 1/2$）。所以

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=2\varepsilon} \xi(\xi - P)^{-1} d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-1|=2\varepsilon} \xi(\xi - P)^{-1} d\xi,$$

and

$$\Theta(P) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-1|=2\varepsilon} (\xi - P)^{-1} d\xi.$$

因此,

$$\Theta(P) - P = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-1|=2\varepsilon} (1-\xi)(\xi-P)^{-1} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=2\varepsilon} \xi(\xi-P)^{-1} d\xi. \quad (4.8)$$

因此，只需估计 $\|(\xi - P)^{-1}\|$。

对于任意满足 $|\xi - 1| = 2\varepsilon$ 的 $\xi \in \mathbb{C}$，令 $\eta = 1 - \xi$ 满足 $|\eta| = 2\varepsilon$，并且

$$w = \xi - \xi^2 = \eta - \eta^2$$

满足 $2\varepsilon(1 - 2\varepsilon) \le |w| \le 2\varepsilon(1 + 2\varepsilon)$。并且

$$(\xi - P)^{-1} = (\eta - P)(w - (P - P^2))^{-1}.$$

我们估计

$$\begin{aligned}
\|(w - (P - P^2))^{-1}\| &= \left\| w^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(w^{-1}(P - P^2)\right)^k \right\| \\
&\le |w|^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \|w^{-1}(P - P^2)\|^k \\
&= \frac{1}{|w| - \|P - P^2\|} \\
&< \frac{1}{\varepsilon(1 - 4\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

So

$$\|(\xi - P)^{-1}\| < \frac{\|P\| + 2\varepsilon}{\varepsilon(1 - 4\varepsilon)}.$$

我们得到

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-1|=2\varepsilon} (1-\xi)(\xi-P)^{-1} d\xi \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 4\pi\varepsilon \cdot 2\varepsilon \cdot \frac{\|P\|+2\varepsilon}{\varepsilon(1-4\varepsilon)} = \frac{4\varepsilon}{1-4\varepsilon}(\|P\|+2\varepsilon).$$

右侧另一项的范数可用类似的方法估计（4.8）。

□

根据定义 4.1，对于任意点 $x \in \bar{B}_r(\mathcal{N}_\psi)$，存在一条光滑的路径，位于 $B_r(\mathcal{N}_\psi)$ 中，连接 x 与 N，且长度至多为 $r+R$。因此 $N \subset B_R(N)$ 是一个网。因此，包含映射

$$i_N \colon (N, d_r) \longrightarrow (\bar{B}_r(\mathcal{N}_\psi), d_r) \tag{4.9}$$

是一个粗等价，它由定理 3.4诱导出 Roe 代数的 K-理论上的一个同构。

定义 4.6 (奇数 n的定量分割流形指标)。设δ、 r、 $b > 0$ 如命题 4.4所述。则 定量分割流形指标关于 D 相对于 ψ 定义为

$$\mathrm{Ind}_q(D, \psi) = [\Theta(\tilde{P})] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \in K_0(C^*(\bar{B}_r(\mathcal{N}_\psi))) \cong K_0(C^*(N, d_r)), \tag{4.10}$$

其中 $C^*(N, d_r)$ 表示（N, d_r）的 Roe 代数，并且我们使用了粗等价（4.9）。

4.3 偶数维中指标的构造

现在假设 X 的维数 n是偶数。

引理 4.7。 在 $\mathbb{C}$中存在序列$(a_k)_{k=0}^{\infty}$ ，使得对所有 $z \in \mathbb{C}$， $a_k z^k$ 在 k 中有界，并且对希尔伯特空间上的每一个有界自伴算子 T，

$$\exp(2\pi i T) - 1 = (T^2 - T) \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k. \tag{4.11}$$

证明。 函数 $z \mapsto e^{2\pi i z} - 1$ 是整函数，在整数处为零。因此， $z \mapsto \frac{e^{2\pi i z}-1}{z\ z-1}$ () 是一个整函数，故可表示为一个在整个 $\mathbb{C}$ 上收敛的幂级数。该幂级数的系数 a_n 具有所需性质。

□

设 δ， b， $r>0$。设 χ如引理 4.2中所述，并且

$$B=D+\psi\gamma, \qquad F_b=\frac{bB}{(1+(bB)^2)^{1/2}}.$$

如（3.5）中所示。定义

$$p_b=\frac{F_b+1}{2}, \quad \text{and} \quad Q_b=\exp(2\pi i p_b)\in C^*(N\subset X)^+$$

如第 3.2 节所示。考虑算子

$$\tilde{Q}=\sqrt{\chi}Q_b\sqrt{\chi}+(1-\chi)=1+\sqrt{\chi}(Q_b-1)\sqrt{\chi}. \tag{4.12}$$

由于 $Q_b-1=\varphi(bB)$，对于函数 $\varphi\in C_0(\mathbb{R})$，由命题 3.6], 可得 $Q_b-1\in C^*$ (X) [18, ，因此 $\tilde{Q}\in C^*(\bar{B}_r(\mathcal{N}_\psi))^+$。

命题 4.8。对于足够小的通用 δ， $b\geq\frac{1}{A\delta}$ 和 $r\geq$ — $\sqrt{-}$ $_{bA\delta}$，我们有

$$\|\tilde{Q}-Q_b\|\leq\frac{1}{100}.$$

证明。我们有

$$\tilde{Q}-Q_b=\sqrt{\chi}[Q_b,\sqrt{\chi}]+(1-\chi)(1-Q_b). \tag{4.13}$$

And

$$[Q_b,\sqrt{\chi}]=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2\pi i)^j}{j!2^j}[(F_b+1)^j,\sqrt{\chi}].$$

右侧的范数小于或等于

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\pi^j}{(j-1)!}\right)\|F_b+1\|\cdot\|[F_b,\sqrt{\chi}]\|.$$

由（4.2），当 δ足够小时，此量可以任意小。

对于（4.13）右侧的第二项，我们使用引理 4.7 中的数a_k，将其写为

$$Q_b-1=(p_b^2-p_b)\sum_{k=0}^{\infty}a_kp_b^k=\frac{1}{4}(F_b^2-1)\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(\frac{F_b+1}{2}\right)^k. \tag{4.14}$$

右侧级数的范数关于 b一致有界，因为 $\|F_b\|\leq 1$。因此由（4.3）可知，若选择足够小的 δ，则（4.13）右侧第二项的范数可以任意小。

□

算子 Q_b 是酉的，因此在命题 4.8的情形下，算子 $\tilde{Q}$ 在 $C^*(\bar{B}_r(\mathcal{N}_\psi))^+$中可逆。

定义 4.9 (偶数 n的定量分割流形指标)。 设$\delta, b, r > 0$ 如命题 4.8所述。则定量分割流形指标 关于 D 且相对于 ψ 定义为

$$\mathrm{Ind}_q(D,\psi) = [\tilde{Q}] \in K_1(C^*(\bar{B}_r(\mathcal{N}_\psi))) \cong K_1(C^*(N, d_r)). \tag{4.15}$$

注 4.10。 在命题 4.4 和4.8中，因此在定义 4.6 和4.9中，自然的选择是 $b = r = \frac{1}{A\delta}$。 于是得到

$$\mathrm{Ind}_q(D,\psi) \in K_{n-1}(C^*(\bar{B}_{(A\delta)^{-1}}(\mathcal{N}_\psi))).$$

在引理4.14中，我们采用了不同的选择。我们在下文的引理 b和 r 中讨论指标对 4.11 的依赖性。

4.4 基本性质

我们讨论定义 4.6 和 4.9中定量分割流形指标的一些基本性质：所作选择的无关性（引理4.11）、与第 3.2 小节中的分割流形指标之间的关系（引理 4.13），以及一个消失结果（引理4.14）。

引理 4.11. （*a*）给定 δ 和 r 如命题 *4.4* 或 *4.8*中所述，指标$\mathrm{Ind}_q(D,\psi)$ 不依赖于 b，如命题 *4.4* 或 *4.8*中所述。

（*b*）给定 δ， b 和 r 如命题 *4.4* 或 *4.8*中所述，指标 $\mathrm{Ind}_q(D,\psi)$不依赖于函数 χ，如引理*4.2*上方所述。

（*c*）设 δ 和 b 如命题 *4.4* 或 *4.8*中所述，并设 $r_1 \geq r_0 \geq \sqrt{\frac{b}{A\delta}}$。将相应的定量指标记为

$$\mathrm{Ind}_q^{r_j}(D,\psi) \in K_{n-1}(C^*(\bar{B}_{r_j}(\mathcal{N}_\psi))).$$

关于包含映射 $i_{\bar{B}_{r_0}(\mathcal{N}_\psi)}\colon \bar{B}_{r_0}(\mathcal{N}_\psi) \to \bar{B}_{r_1}(\mathcal{N}_\psi)$，我们有

$$(i_{\bar{B}_{r_0}(\mathcal{N}_\psi)})_*(\mathrm{Ind}_q^{r_0}(D,\psi)) = \mathrm{Ind}_q^{r_1}(D,\psi). \tag{4.16}$$

证明。 （a）部分由一个简单的同伦得出。

对于部分（b），设 χ_0 和 χ_1 是引理 4.2 上述的函数。对于 $t \in [0,1]$，考虑函数

$$\chi_t := ((1-t)\sqrt{\chi_0} + t\chi_1)^2. \tag{4.17}$$

那么 χ_t 对所有 $t \in [0,1]$都具有引理 4.2 上述的性质。事实上，通过直接验证，第一和第三个性质对所有 t 都成立。第二个性质成立，这是因为

$$\operatorname{supp}(1-\chi_t) \subset \operatorname{supp}(1-\chi_0) \cup \operatorname{supp}(1-\chi_1)$$

对所有 t。

相对于函数 χ_t 定义的定量指标给出了相对于 χ_0 和 χ_1 定义的定量指标之间的一个同伦，因此 (b) 得证。

对于 (c)，令 χ_j 为引理 4.2 上述条件中的一个函数，其中 $j = 0,\ 1$ 且 $r = r_j$。式 χ_t (4.17) 中的函数满足引理 4.2 上述第一项条件，其中 $r = r_1$; 也满足第二项条件（该条件不涉及 r），并且当 $r = r_0$ 时满足第三项条件。

˜首先，假设 n 是奇数。对于 $t \in [0,1]$，令 P_t 为投影（4.4），其定义基于 $\chi = \chi_t$。命题 4.4 的证明表明，该结果的˜结论对 P_t 均成立，对所有 $t \in [0,1]$，当 $r = r_1$ 时。因此我们有相应的类

$$[\Theta(\tilde{P}_t)] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \in K_0(C^*(\bar{B}_{r_1}(\mathcal{N}_\psi))).$$

（这些并非定义4.6中所定义的定量指标，因为函数 χ_t 不一定满足引理 4.2 上方关于 $r = r_1$的第三个条件。）这些类定义了（4.16）两边之间的一个同伦。

˜类似地，若 n 为偶数，则我们将 Q_t 定义为算子（4.12），其中$\chi = \chi_t$。根据上文提到的 χ_t 的性质，命题˜4.8 的证明表明，命题 4.8 的结论对 Q_t成立，其中 $r = r_1$。因此，这些算子定义了（4.16）两边之间的一个同伦。 □

注 4.12。 定义 r 4.6 和4.9中的参数未包含在记号 Ind$_\mathcal{G}$中，但它在定量分割流形指标定理（定理 5.1）及其应用中发挥着重要作用。根据引理4.11（c）部分，定量指标对 r 的依赖是自然的（给定 r 的指标表示 引理 $r' > r$ 3.5下文意义上的 ）。

回忆第3.1 小节，包含映射 $i_{\bar{B}_r(\mathcal{N}_\psi)}$ 所诱导的从 $C^*(\bar{B}_r(\mathcal{N}_\psi))$˜到 $C^*(X)$ 的映射的像 $B_r(\mathcal{N}_\psi) \to X$ 包含于 $C^*(N \subset X)$ 中。

引理 4.13. 定义 *4.6* 和*4.9* 中的指标满足

$$(i_{\bar{B}_r(\mathcal{N}_\psi)})_*(\mathrm{Ind}_q(D,\psi)) = \mathrm{Ind}(D,\psi).$$

证明。 我们首先假设 n是奇数。与命题4.4的证明一样，对于所选参数 b 和 r，我们有

$$\|\tilde{P} - P_b\| < \frac{1}{1000} \quad \text{in } M_2(C^*(N \subset X)^+).$$

引理 4.5 因此推出 $\|\Theta(\tilde{P}) - \Theta(P_p)\| \leq \frac{3}{100}$，所以幂等元 $\Theta(P)$ 与 $\Theta(P_p)$ 同伦。因此

$$\begin{aligned}[\Theta(\tilde{P})] - \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right] &= [\Theta(P_b)] - \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right] \\ &= [P_b] - \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right] = \mathrm{Ind}(D,\psi) \in K_0(C^*(N \subset X)).\end{aligned}$$

这证明了定理 5.1 的第一点在 n 为奇数时成立。

当 n 为偶数时，情形可由估计类似地推出

$$\|\tilde{Q} - Q_b\| < \frac{1}{100},$$

在命题 4.8中得到。 □

引理 4.14。 存在常数 $a, c_1 > 0$，使得若算子$D \pm i\psi$ 在 X上可逆，且

$$(D \pm i\psi)^*(D \pm i\psi) \geq L^2 \tag{4.18}$$

对于某个 $L > 0$ 和 $A \geq aL$，则

$$\mathrm{Ind}_q(D,\psi) = 0 \in K_{n-1}\Big(C^*\big(\bar{B}_{c_1(AL)^{-1/2}}(\mathcal{N}_\psi)\big)\Big) \cong K_{n-1}(C^*(N, d_{c_1(AL)^{-1/2}})).$$

证明。 令 δ 如命题4.4 或 4.8所述，具体取决于n的奇偶性。假设（4.18）成立。那么 B 的谱包含于 $(-\infty, -L] \cup [L, \infty)$ 中。选取 $b_1 = \frac{1}{\delta_1 L}$，使 $\delta_1 \in (0, \delta)$ 足够小，具体如下文所述，并令 F_{b_1} 如（4.1）所述。于是

$$\|F_{b_1}^2 - 1\| = \left\|\frac{1}{1 + b_1^2 B^2}\right\| \leq \frac{1}{1 + b_1^2 L^2} < \delta_1^2. \tag{4.19}$$

接下来，令 $r_1 = \sqrt{\frac{b_1}{A\delta_1}}$，并选取截断函数 χ_1 如引理4.2上文所述，满足 $r = r_1$。由引理 4.3，得到

$$\|[F_{b_1}, \sqrt{\chi_1}]\| \leq 12\frac{\sqrt{b_1}}{r_1\sqrt{A}} = 12\sqrt{\delta_1}.$$

~如果 n 是奇数，那么由（4.6）和（4.19），与这些数据相关联的算子 P_1 如（4.4）中所述，满足

$$\left\|\tilde{P}_1 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\| < \frac{1}{100},$$

只要 δ_1 取得足够小即可。因此

$$[\Theta(\tilde{P}_1)] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = 0 \quad \in K_0(C^*(\bar{B}_{r_1}(\mathcal{N}_\psi))). \tag{4.20}$$

~如果 n 是偶数，则类似的论证表明，算子 Q_1 如（4.12）中所述，满足

$$\|\tilde{Q}_1 - 1\| < \frac{1}{100}.$$

So

$$[\tilde{Q}_1] = 0 \quad \in K_1(C^*(\bar{B}_{r_1}(\mathcal{N}_\psi))). \tag{4.21}$$

现在令 $a = \delta_1/\delta$，并假设 $A \geq aL$。那么 $b_1 \geq \frac{1}{A\delta}$，且由于$\delta_1 < \delta$,

$$r_1 \geq \sqrt{\frac{b_1}{A\delta}}.$$

因此 $b = b_1$ 和 $r = r_1$ 满足命题 4.4 和 4.8的条件，故有

$$\mathrm{Ind}_q(D, \psi) \in K_*(C^*(\bar{B}_{r_1}(\mathcal{N}_\psi))).$$

这个指标恰好是类（4.20）或（4.21），因此为零。

最后，请注意 $r_1 = c_1(AL)^{-1/2}$，其中 $c_1 = 1/\delta_1$。 □

5 定量分割流形指标定理

在本节中，我们陈述并证明非紧流形的分割流形指标定理的一个定量版本，即定理5.1，从而改进定理3.8。这是我们证明定理2.5的关键步骤。

5.1 结果陈述

定理 5.1 （定量分割流形指标定理）。 设（X^n， g）为具有有界几何的完备 Spin 流形，被一致嵌入的超曲面 $N^{n-1} \subset X$ 所分割。设 ψ： $X \to [-A, A]$ 为 $N \subset X$ 的定义函数，使得

$$\psi^{-1}((-A, A)) \subset \mathcal{N}_\psi \subset \bar{B}_R(N).$$

设 D 是作用在 X上的狄拉克算子。设 $r > 0$ 如命题 *4.4* 或*4.8*所述，具体取决于 n的奇偶性。存在一个普适常数 $c_2 > 0$，使得相对于粗映射

$$\mathrm{id}\colon (N, d_{g_N}) \longrightarrow (N, d_{c_2 A^{-1}}),$$

我们有

$$\mathrm{Ind}_q(D, \psi) = \mathrm{id}_*(\mathrm{Ind}(D_N)) \in K_{n-1}(C^*(N, d_{c_2 A^{-1}})),$$

其中 $\mathrm{Ind}(D_N)$ 是作用在 N 上的狄拉克算子的粗指标。

注 5.2. 在定理 3.8的设定下，引理 4.13与定理 5.1结合可推出

$$(i_{\bar{B}_{c_2 A^{-1}}(\mathcal{N}_\psi)})_*(\mathrm{Ind}(D_N)) = \mathrm{Ind}(D, \psi).$$

由于复合映射

$$K_*(C^*(N)) \xrightarrow{\cong} K_*(\bar{B}_{c_2 A^{-1}}(\mathcal{N}_\psi)) \xrightarrow[\cong]{(i_{\bar{B}_{c_2 A^{-1}}(\mathcal{N}_\psi)})_*} K_*(C^*(N \subset X))$$

是定理 3.1) 中使用的同构，因此定理 3.8, 可知定理 3.8是定理5.1的特例。

注 5.3. 在本文中，尤其是在定理5.1中，我们考虑 Spin-狄拉克算子。不过，定量分割流形指标的构造以及定理 5.1可推广到更一般的狄拉克型算子。在定理 5.1中，还需要明确 D与 D_N之间的关系，如 [11, 定理 1。5]所示。此处我们只讨论 Spin-狄拉克算子的情形，因为证明定理2.5需要用到这一情形。

下面通过一个例子说明定理 3.8 与 5.1 之间的区别。

例 5.4。 设 $Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ 为带有 $n \geq 3$ 的平坦欧几里得空间， $\delta > 0$ 为一个小数。设 $\mathcal{L}$ 为 $\mathbb{R}^{n-1}$中的格 $\mathbb{Z}^{n-1}$ ，并令 $S\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ 表示关于垂直于 x_1轴的超平面的反射。用 $\mathcal{L}^+$ 表示 $\mathcal{L}$ 中x_1坐标为正的点的集合。

在 $[0,\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$ 中，对每个 $q \in \mathcal{L}^+$，移除集合 $B_\delta([1,+\infty) \times \{q\})$ 和 $B_\delta([1,+\infty) \times \{S(q)\})$。在每个被移除区域处接上一个圆柱 $T_q \cong \partial B_\delta([1,+\infty) \times \{q\}) \times [0,1]$。这样便得到一个黎曼流形 (X, g)。更确切地说，

$$X = \left(Y \setminus \bigcup_{q \in \mathcal{L}^+} \left(B_\delta([1,+\infty) \times \{q\}) \cup B_\delta([1,+\infty) \times \{S(q)\}) \right) \right) \cup \left(\bigcup_{q \in \mathcal{L}^+} T_q \right).$$

我们假设所有 T_q 都彼此等距，并且 g 是 $\partial B_\delta([2,+\infty) \times \{q\}) \times [0,1] \subset T_q$ 上的乘积度量。

注意，(X, g) 具有有界几何。设 ρ 是切片 $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ 的有符号距离函数的一个光滑修正；特别地， ρ 本质上是到 Y 中第一因子 $\mathbb{R}$ 的投影。

设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的一个 2-利普希茨、光滑、非递减函数，满足对于 $|x| \geq 1$，$f(x) \equiv \pm 1$。定义 $\psi_a = f \circ (\rho - a)$，这是一个由 $a \in \mathbb{R}$ 参数化的、定义在 X 上的光滑函数族。如第 3.2 节和 [14]，中所示，指标类 $\mathrm{Ind}(D, \psi_a) \in K_*(C^*(\rho^{-1}(a) \subset X))$ 与 a 无关，且等于零。事实上，取 $a = 10$。$\rho^{-1}(10)$ 是由 $\mathbb{R}^{n-1}$ 移除 δ-球 $B_\delta(q)$ 和 $B_\delta(S(q))$（对所有 $q \in \mathcal{L}^+$ ）并接上圆柱 $T_q' \cong S^{n-2} \times [0,1]$ 后得到的。在这种情况下， $N = \rho^{-1}(10)$ 满足定理 3.8 的假设；特别是，恒等映射

$$\mathrm{id}\colon (N, d_{g_N}) \longrightarrow (N, d_g|_N)$$

是粗等价。因此，由定理D， $\psi_a \in K_*(C^*(N \subset X))$ 的 Ind 消失，因为3.8，因为

$$K_*(C^*(N)) \cong K_*(C^*(\mathcal{L}^+)) = 0.$$

然而，根据引理 4.13，$\mathrm{Ind}(D, \psi_a)$ 存在一个原像

$$\mathrm{Ind}_q(D, \psi_a) \in K_*\big(C^*([a-c, a+c] \times \mathbb{R}^{n-1})\big)$$

在映射下

$$i_{a,*}\colon K_*\big(C^*([a-c, a+c] \times \mathbb{R}^{n-1})\big) \longrightarrow K_*(C^*(\{a\} \times \mathbb{R}^{n-1} \subset X))$$

由包含映射诱导，对某个 $a \ll 0$ 和 $c > 0$。特别是，尽管$i_{a,*}(\mathrm{Ind}_q(D, \psi_a)) = 0$ 对每个 $a \in \mathbb{R}$都成立，但根据定理 5.1，我们仍有 $\mathrm{Ind}_q(D, \psi_a) \neq 0$对 $a \ll 0$ 成立。5.1。

5.2 切除性质

在证明定理5.1之前，我们先引入 $\mathrm{Ind}_q(D,\psi)$ 的另一种表示形式。它与原表示等价，但有一个优点：它只取决于 $\mathcal{N}_\psi$附近的几何。这带来了定量分割指标的切除性质，并将用于证明定理5.1。

令 B 为算子（3.2）或（3.5），具体取决于 n。给定 $b>0$，令 $F_b=\frac{bB}{\sqrt{1+(bB)^2}}$ 如前所述。

引理 5.5. 设 $\delta\in(0,1/2)$。设 $b=r=\frac{1}{A\delta}$。存在一个有界算子G_δ，其传播不超过 $(A\delta^2)^{-1}$，使得 $F_{(A\delta)^{-1}}-G_\delta$ 是局部紧的，并且

$$\|F_{(A\delta)^{-1}}-G_\delta\|\le\frac{2}{\pi}e^{-\delta^{-1}};\tag{5.1}$$

$$\|[G_\delta,\sqrt{\chi}]\|\le 12\delta^{1/2}+4e^{-\delta^{-1}};\tag{5.2}$$

$$\|(G_\delta^2-1)(1-\chi)\|\le\delta+4e^{-\delta^{-1}}.\tag{5.3}$$

此外，G_δ^2-1 属于 $M_2(C^*(X))$，若 n 为奇数；若 n 为偶数，则属于 $C^*(X)$。

证明。函数 $x\mapsto x(1+x^2)^{-1/2}$ 的分布傅里叶变换为

$$\xi\mapsto\frac{2}{i}\operatorname{sgn}(\xi)\,K_1(|\xi|),$$

其中 sgn 表示符号函数，K_1 是第二类修正贝塞尔函数。该函数在 $\xi=0$ 处有奇点，但光滑，并且当 $|\xi|\to\infty$时呈指数衰减。因此，

$$F_b=\frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}}\operatorname{sgn}(\xi)\,K_1(|\xi|)\,e^{i\xi bB}\,d\xi$$

在弱算子拓扑中（见 [12] 中的命题 10.3.5或 [28]中的命题 D.2.3）。

对任意 $K\ge 2$，定义截断算子

$$G_{b,K}:=F_b-\frac{1}{\pi i}\int_{|\xi|\ge K}\operatorname{sgn}(\xi)\,K_1(|\xi|)\,e^{i\xi bB}\,d\xi=\frac{1}{\pi i}\int_{-K}^{K}\operatorname{sgn}(\xi)\,K_1(|\xi|)\,e^{i\xi bB}\,d\xi.$$

该算子的传播距离至多为 bK。

由于 K_1 呈指数衰减，且满足

$$|K_1(\xi)| \le e^{-|\xi|} \qquad (\xi \ge 2),$$

尾积分绝对收敛，且

$$\left\| \frac{1}{\pi i} \int_{|\xi|\ge K} \operatorname{sgn}(\xi)\, K_1(|\xi|)\, e^{i\xi bB}\, d\xi \right\| \le \frac{2}{\pi} e^{-K}.$$

这表明$\|F_b - G_{b,\ K}\| \le \frac{2}{\pi} e^{-K}$。类似于引理 4.3的证明，我们得到

$$\|[G_{b,K}, \sqrt{\chi}]\| \le 12\, \frac{\sqrt{b}}{r\sqrt{A}} + 4e^{-K};$$
$$\|(G_{b,K}^2 - 1)(1-\chi)\| \le \frac{1}{bA} + 4e^{-K}.$$

若 $\delta \in (0,\ 1/2)$，并且我们选取 $r = b = (A\delta)^{-1}$ 和 $K = \delta^{-1} > 2$，则算子 $G_\delta := G_{(A\delta)^{-1},\ \delta^{-1}}$ 具有性质（5.1）–（5.3）。

算子 $G_\delta^2 - 1$ 具有有限传播。设 $f \in C_0(X)$。利用$(F_{(A\delta)^{-1}} - G_\delta)f$的紧性以及 $[F_{(A\delta)^{-1}}, f]$ （[12, 引理10.6.4]），我们看到

$$(G_\delta^2 - 1)f \sim (F_{(A\delta)^{-1}}^2 - 1)f \sim 0.$$

其中 $\sim$表示模紧算子相等。类似地， $f(G_\delta^2 - 1)$是紧的，因此 $G_\delta^2 - 1$ 是局部紧的。故最后的结论成立。 □

命题 5.6. 假设与定理 5.1中的假设相同。那么存在一个普适常数 $c_3 > 0$ 以及一个.....的代表元

$$\mathrm{Ind}_q(D, \psi) \in K_{n-1}\big(C^*(\bar{B}_{c_3 A^{-1}}(\mathcal{N}_\psi))\big) \cong K_{n-1}\big(C^*(N, d_{c_3 A^{-1}})\big)$$

它仅取决于 $\bar{B}_{c_3 A^{-1}}(\mathcal{N}_\psi)$的几何；具体而言，若 $\bar{B}_{c_3 A^{-1}}(\mathcal{N}_\psi)$等距嵌入到两个满足定理 5.1中假设的完备流形中，则它们的指标类与上述指标类相同。

证明。 我们先考虑 n为奇数的情形。令 δ、 b、 r 和 G_δ 如引理 5.5中所述。记

$$G_\delta = \begin{pmatrix} 0 & V_\delta \\ U_\delta & 0 \end{pmatrix}.$$

令 P 为由 G_δ 按照（4.4）定义的算子，即

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\chi} \begin{pmatrix} -(1 - U_\delta V_\delta)^2 & (2 - U_\delta V_\delta) U_\delta (1 - V_\delta U_\delta) \\ V_\delta (1 - U_\delta V_\delta) & (1 - V_\delta U_\delta)^2 \end{pmatrix} \sqrt{\chi}. \quad (5.4)$$

根据引理 5.5中的最后一点，该算子属于 M_2（C^*（X）$^+$）。由于 $\operatorname{supp}(\chi)$ $\subset B_{(A\delta)^{-1}}$（$\mathcal{N}_\psi$），实际上

$$\bar{P} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2\big(C^*(\bar{B}_{(\delta A)^{-1}}(\mathcal{N}_\psi))\big).$$

仿照命题的证明4.4，使用（5.2）代替（4.2），并使用（5.3）代替（4.3），我们发现，对于 δ 足够小的情形，

$$\|\bar{P}\| \leq 3 \quad \text{and} \quad \|\bar{P}^2 - \bar{P}\| < \frac{1}{1000}.$$

此外，$\bar{P}$ 的传播有界于 $5(A\delta^2)^{-1}$，因为（5.4）中的元素是局部算子的复合，且至多涉及 G_δ的 5 个矩阵分量。令

$$c_3^0 = \delta^{-1} + 5\delta^{-2}.$$

于是我们可以将 P 视为以下空间的一个元素：

$$M_2\big(C^*(\bar{B}_{c_3^0 A^{-1}}(\mathcal{N}_\psi))^+\big),$$

特别地，$\bar{P}$ 仅依赖于 $\bar{B}_{c_3^0 A^{-1}}$（$\mathcal{N}_\psi$）的几何。

利用（5.1）和引理 4.5，通过取足够小的 δ，可以确保 $\|\Theta$（P）$-\Theta$（$\bar{P}$）$\|$ 小于（例如）$1\,100$。那么幂等元 Θ（$\bar{P}$）和Θ（P）同伦。因此，指标类 Ind_q（D，ψ）也可由以下元素表示：

$$[\Theta(\bar{P})] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \in K_0\big(C^*(\bar{B}_{c_3^0 A^{-1}}(\mathcal{N}_\psi))\big),$$

其中，代表元仅取决于 $\bar{B}_{c_3^0 A^{-1}}(\mathcal{N}_\psi)$ 的几何。

现在假设 n是偶数。回顾一下，指标类由以下算子表示：$\tilde{Q}$ 见（4.12）。令 a_k 如引理 4.7中所述，对于 $N \in \mathbb{N}$，我们记为

$$\tilde{Q}_N := 1 + \sqrt{\chi}\left(\frac{1}{4}(F_b^2 - 1)\sum_{k=0}^{N} a_k \left(\frac{F_b + 1}{2}\right)^k\right)\sqrt{\chi}. \tag{5.5}$$

由（4.14），$\|Q - Q_N\|$ 以比任意指数函数更快的速度衰减，N，且关于 b一致，因为 $\|F_b\| \leq 1$。取 N使得 $\|Q - Q_N\| < 1/2000$。定义

$$\bar{Q} = 1 + \sqrt{\chi}\left(\frac{1}{4}(G_\delta^2 - 1)\sum_{k=0}^{N} a_k \left(\frac{G_\delta + 1}{2}\right)^k\right)\sqrt{\chi}. \tag{5.6}$$

该算子属于 $C^*(X)^+$ 根据引理 5.5中的最后一点可知。由（5.1），我们可以选取 δ 足够小，使得 $\|Q - Q_N\| < 1/2000$。于是

$$\|\bar{Q} - \tilde{Q}\| < \frac{1}{1000}, \tag{5.7}$$

因此 Q 是可逆的。此外， Q 的传播范围不超过$N(\delta^2 A)^{-1}$，根据引理 5.5。令

$$c_3^1 = \delta^{-1} + N\delta^{-2}.$$

那么 $\bar{Q}$ 可以视为 $C^*(\bar{B}_{c_3^1 A^{-1}}(\mathcal{N}_\psi))^+$中的一个元素，并且只依赖于 $B_{c_3^1 A^{-1}}(\mathcal{N}_\psi)$的几何。在这种情况下，(5.7)表明，指标类 $\mathrm{Ind}_q(D,\psi)$由

$$[\bar{Q}] \in K_1\big(C^*(\bar{B}_{c_3^1 A^{-1}}(\mathcal{N}_\psi))\big),$$

它再次只依赖于 $\bar{B}_{c_3^1 A^{-1}}(\mathcal{N}_\psi)$ 的几何。

最后，令 $c_3 = \max\{c_3^0, c_3^1\}$.，即可完成证明。 □

注 5.7。 在 [14, 小节 4。5] 中，针对非紧超曲面的分割流形指标定理的证明基于这样一个想法：该指标“由分割超曲面 N附近决定”。这一想法用于将问题归结为环境流形为 $N \times \mathbb{R}$([14, 定理 3。1], 或命题 3.9)的情形。该论证基于假设 (3.9)：度量空间 (N, d_{g_N}) 和 $(N, d_g|_N)$粗等价（在 [14, 命题 4。16]的证明中用到）。命题 5.6 是对这一想法的定量改进，无需这一假设。

5.3 定量分割流形指标定理的证明

定理的证明 *5.1*。 令 $B_\varepsilon(N) = U \cong N \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ 为定理 N 中 X 的一个一致测地正规邻域，如定理 2.2 中所述。选取 ε 足够小，使得 $B_\varepsilon(N) \subset \psi^{-1}((-A, A))$。令 $\varphi\colon X \to [-1,1]$为一个满足以下条件的光滑函数

- $|\varphi(x)| = 1$ 对所有 $x \in X \setminus B_{\varepsilon/4}(N)$ 都成立；
- 若 $\psi(x) = \pm A$，则 $\varphi(x) = \pm 1$，且符号相同；

在 $U \cong N \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ 上，函数 φ 是参数在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中的函数，并且在因子 N 上为常数。

对于 $u, v \geq 0$，定义

$$\psi_{u,v} = u\varphi + v\psi.$$

注意

$$\psi_{u,v} = \pm(u + Av) \quad \text{on} \quad \{p \in X : \ |\psi(p)| = A\}.$$

So

$$\psi_{u,v}^{-1}((-(u + vA, u + vA))) \subset \psi^{-1}((-A, A)) \subset \mathcal{N}_\psi.$$

因此，与定义4.6 和 4.9中一样，令 b 和 r 如注记 4.10所述，数对 $(D, \psi_{u,v})$ 定义了一个指标类

$$\mathrm{Ind}_q(D, \psi_{u,v}) \in K_{n-1}\big(C^*(\bar{B}_{(\delta(u+Av))^{-1}}(\mathcal{N}_\psi))\big)$$

只要 u 和 v 不同时为零。由同伦不变性以及引理 4.11的 (c) 部分可知，将类 $\mathrm{Ind}_q(D, \psi_{u,v})$ 映入时，它与 u 和 v无关

$$K_{n-1}\big(C^*(\bar{B}_{(\delta A)^{-1}}(\mathcal{N}_\psi))\big),$$

前提是 $u + Av \geq A$。

现在考虑 $v = 0$的情形，因此 $\psi_{u,0} = u\varphi$。定义

$$\mathcal{N}_\varphi \coloneqq \{p \in X : \ |\varphi(p)| < 1\} \subset B_{\varepsilon/4}(N) \cong N \times (-\varepsilon/4, \varepsilon/4).$$

令 c_3 如命题 5.6中所述。若 u 足够大，使得 $c_3 u^{-1} < \varepsilon/4$且 $u > A$，则有

$$\mathrm{Ind}_q(D, u\varphi) \in K_{n-1}\big(C^*(\bar{B}_{c_3 u^{-1}}(\mathcal{N}_\varphi))\big),$$

并且根据命题 5.6，此类只取决于

$$\bar{B}_{c_3 u^{-1}}(\mathcal{N}_\varphi) \subset \bar{B}_{\varepsilon/2}(N).$$

由同伦不变性和引理 4.11的 (c) 部分可得

$$\mathrm{Ind}_q(D, \psi) = (i_{\bar{B}_{c_3 u^{-1}}(\mathcal{N}_\varphi)})_*\big(\mathrm{Ind}_q(D, u\varphi)\big) \quad \in K_{n-1}(C^*(\bar{B}_{(\delta A)^{-1}}(\mathcal{N}_\psi))), \tag{5.8}$$

其中

$$i_{\bar{B}_{c_3 u^{-1}}(\mathcal{N}_\varphi)} \colon \bar{B}_{c_3 u^{-1}}(\mathcal{N}_\varphi) \longrightarrow \bar{B}_{(\delta A)^{-1}}(\mathcal{N}_\psi)$$

是包含映射。

根据定理 2.2的第 2 部分， U 由 g 诱导的距离函数与乘积度量诱导的距离函数双利普希茨等价。因此，由包含映射诱导的映射

$$K_*(C^*(N)) \to K_*(C^*(\bar{B}_{c_3u^{-1}}(\mathcal{N}_\varphi)))$$

是一个同构，因此我们可以将其视为

$$\mathrm{Ind}_q(D, u\varphi) \in K_*\big(C^*(N)\big).$$

根据定理 2.2 第 2 部分以及 [5, 定理 1，9],存在一个完备黎曼度量 $\bar{g}$ ，它在 $N \times \mathbb{R}$ 上具有有界几何，并满足：

- $\bar{g} = g$ 在 $N \times (-\varepsilon/2,\ \varepsilon/2)$ 上；
- $\bar{g} = dt^2 + g_N$ 对于 $|t| > \varepsilon$；
- $\bar{g}$ 与 $dt^2 + g_N$ 双 Lipschitz 等价。

利用上述构造以及命题 5.6，我们得到一个指标类

$$\mathrm{Ind}_q(\bar{D}, u\varphi) \in K_*\big(C^*(N \times [-\varepsilon/2, \varepsilon/2], d_{\bar{g}})\big) \cong K_*\big(C^*(N)\big),$$

其中 D 表示与 $\bar{g}$相关联的狄拉克算子。由命题 5.6中的切除性质可得

$$\mathrm{Ind}_q(\bar{D}, u\varphi) = \mathrm{Ind}_q(D, u\varphi) \in K_*\big(C^*(N)\big). \tag{5.9}$$

同样由 [5, 定理 1.9], ， 存在一条完备黎曼度量路径 $\{g_s\}_{s\in[0,1]}$ ，其在 $N \times \mathbb{R}$ 上具有一致有界几何，使得

$$g_0 = dt^2 + g_N, \qquad g_1 = \bar{g},$$

并且所有 g_s 都与 $dt^2 + g_N$一致双 Lipschitz 等价。由同伦不变性和（5.9），我们得到

$$\mathrm{Ind}_q(D_{N\times\mathbb{R}}, u\varphi) = \mathrm{Ind}_q(\bar{D}, u\varphi) = \mathrm{Ind}_q(D, u\varphi) \in K_*\big(C^*(N)\big), \tag{5.10}$$

其中 $D_{N\times\mathbb{R}}$ 表示与乘积度量相关联的狄拉克算子。由引理 4.13、命题 3.9 以及其中使用的同构（3.1）的形式， （5.10）左边等于 $\mathrm{Ind}(D_N)$。由（5.8），我们得出

$$\mathrm{Ind}_q(D, \psi) = (i_{\bar{B}_{c_3u^{-1}}(\mathcal{N}_\varphi)})_*\big(\mathrm{Ind}(D_N)\big) \quad \in K_{n-1}(C^*(\bar{B}_{(\delta A)^{-1}}(\mathcal{N}_\psi))).$$

由定理 3.4 的函子性，右侧等于 $(\mathrm{id})_*(\mathrm{Ind}(D_N))$. 因此定理 5.1 得证，其中 $c_2 = \delta^{-1}$。 □

6 非紧带宽不等式的证明

本节中，我们证明定理2.5，并通过一个例子说明该定理中的条件 1 是必要的。

6.1 定理 2.5的证明

我们从完备流形的带宽不等式开始。

定理 6.1。 设 (X^n, g) 是一个具有有界几何的完备 Spin 黎曼流形，由一致嵌入超曲面 N^{n-1} 分割。给定 $\ell > 0$ 和 $a \in (-\ell/2, \ell/2)$，考虑 1-利普希茨有符号距离函数

$$\rho(x) = \begin{cases} \min\{\, a + d_g(x, N),\, \ell/2 \,\}, & x \in X_+ \cup N, \\ \max\{\, a - d_g(x, N),\, -\ell/2 \,\}, & x \in X_-. \end{cases}$$

假设

1. 对于每个 $0 < t < \ell/2$，恒等映射

$$\mathrm{id}\colon (N, d_{g_N}) \longrightarrow (N, d_{\rho^{-1}((-t,t))})$$

是粗等价，其中 $d_{\rho^{-1}((-t,t))}$ 是 $\rho^{-1}((-t,t))$上黎曼距离的限制，并且

2. 狄拉克算子 D_N 在 $K_{n-1}(C^*(N))$中具有非零指标。

Then

$$\inf_{x \in X;\, |\rho(x)| < \ell/2} \mathrm{Sc}_g(x) \le \frac{4\pi^2 (n-1)}{n\ell^2}. \tag{6.1}$$

令 $\kappa = \inf_{x \in X;\, |\rho(x)| < \ell/2} \mathrm{Sc}_g(x)$。我们假设

$$\frac{\kappa n}{4(n-1)} > \frac{\pi^2}{\ell^2} \tag{6.2}$$

并导出矛盾，从而可得（6.1）。

取 $\ell_1, \ell_2 > 0$ 和 $\delta > 0$，使得

$$\ell > \ell_1 > \ell_2, \qquad \frac{\kappa n}{4(n-1)} > \frac{\pi^2}{\ell_2^2} + \delta, \qquad |a| < \ell_2/2.$$

根据假设，$\rho^{-1}((-\ell_1/2,\ \ell_1/2))$ 位于 N 的 ℓ_1 邻域内。

引理 6.2. 当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，存在 $A_\varepsilon \geq \frac{1}{2\varepsilon}$ 以及定义在 X 上的光滑函数 ψ，使得 $\psi \equiv \pm A_\varepsilon$ 在 $X \setminus \rho^{-1}((-\ell_2/2, \ell_2/2))$ 上成立，并且

$$\frac{n}{4(n-1)}\mathrm{Sc}_g + \psi^2 - |\nabla\psi| \geq \frac{\delta}{2}$$

关于 X。

证明。设

$$r = \frac{\pi(1+\varepsilon)}{\ell_2 - 2\varepsilon}.$$

取一个光滑非负函数 $\xi\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，满足以下假设，对所有 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} 0 \leq (1+\varepsilon)\xi(x,y) &\leq y^2 + r^2; \\ \xi(-x, y) &= \xi(x, y); \\ \xi(x,y) &= \begin{cases} \dfrac{y^2+r^2}{1+\varepsilon}, & |x| \leq \ell_2/2 - 2\varepsilon, \\ 0, & |x| \geq \ell_2/2 - \varepsilon. \end{cases} \end{aligned} \tag{6.3}$$

令 f 为满足初始条件的以下微分方程的唯一解:

$$\begin{cases} f'(x) = \xi(x, f(x)), \\ f(0) = 0. \end{cases} \tag{6.4}$$

该解总是在 $x = 0$的一个小邻域内存在。根据比较定理和假设（6.3），对所有 $x \in \big(-(l_2/2 - \varepsilon)\ l_2/2 - \varepsilon\big)$,

$$f(x) \leq r\tan\left(\frac{rx}{1+\varepsilon}\right), \tag{6.5}$$

因为函数 $h(x) = r\tan(\frac{rx}{1+\varepsilon})$ 是微分方程的唯一解

$$\begin{cases} h'(x) = \frac{h(x)^2 + r^2}{1+\varepsilon}, \\ h(0) = 0. \end{cases}$$

因此，当 $|x| < \ell_2/2 - \varepsilon$ 时，至少存在一个解 f。特别地，若 $|x| \leq \ell_2/2 - 2\varepsilon$，则 $f(x) = r\tan(\frac{rx}{1+\varepsilon})$，并且

$$f(\ell_2/2 - 2\varepsilon) = \frac{\pi(1+\varepsilon)}{\ell_2 - 2\varepsilon}\tan\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ell_2/2 - 2\varepsilon}{\ell_2/2 - \varepsilon}\right). \tag{6.6}$$

由构造可知，$f'(x) = 0$ 当 $|x| \geq \ell_2/2 - \varepsilon$ 时，我们得到 f 对所有 $x \in \mathbb{R}$ 均有定义。特别地，$f(x) = \pm A_\varepsilon$ 当 $|x| \geq \ell_2/2 - \varepsilon$ 时，由 (6.6) 及 f' 的非负性可得，

$$A_\varepsilon \geq \frac{\pi(1+\varepsilon)}{\ell_2 - 2\varepsilon} \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\ell_2/2 - 2\varepsilon}{\ell_2/2 - \varepsilon}\right). \tag{6.7}$$

利用对所有 $a > 0$ 都成立这一事实，我们有

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{a-2\varepsilon}{a-\varepsilon}\right) = \frac{2a}{\pi\varepsilon} + O(1)$$

因为 $\varepsilon \downarrow 0$，我们发现 (6.7) 的右端是 $\frac{1}{\varepsilon} + O(1)$。因此 $A_\varepsilon > \frac{1}{2\varepsilon}$，若 $\varepsilon > 0$ 足够小。

设 ρ_ε 是定义在 X 上的光滑函数，使得

$$\|\rho - \rho_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon; \tag{6.8}$$
$$\|\nabla \rho_\varepsilon\|_\infty < (1+\varepsilon). \tag{6.9}$$

对所有 $p \in X$，定义 $\psi(p) = f(\rho_\varepsilon(p))$。

- 若 $p \in \rho^{-1}((-\ell_2/2, \ell_2/2))$，则 $\mathrm{Sc}_g(p) \geq \kappa > 0$。因此，由 (6.9)，

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{4(n-1)}\mathrm{Sc}_g + \psi^2 - |\nabla\psi|\right)(p) &\geq \frac{\kappa n}{4(n-1)} + f(\rho_\varepsilon(p))^2 - (1+\varepsilon)f'(\rho_\varepsilon(p)) \\ &= \frac{\kappa n}{4(n-1)} + f(\rho_\varepsilon(p))^2 - (1+\varepsilon)\xi(\rho_\varepsilon(p), f(\rho_\varepsilon(p))) \\ &\geq \frac{\kappa n}{4(n-1)} - r^2 \\ &= \frac{\kappa n}{4(n-1)} - \frac{\pi^2(1+\varepsilon)^2}{(\ell_2 - 2\varepsilon)^2},\end{aligned}$$

其中第三行用到了 (6.3)。当 ε 足够小时，右端大于或等于 $\delta/2$。

- 如果 $p \notin \rho^{-1}((-\ell_2/2, \ell_2/2))$，那么 $|\rho_\varepsilon(p)| > \ell_2/2 - \varepsilon$ 根据（6.8）。因此 $f(\rho_\varepsilon(p)) = \pm A_\varepsilon$ 以及 $\nabla\psi(p) = 0$。由于 X 具有有界几何性，我们可以假设 $\mathrm{Sc}_g \geq -C$ on X，其中某个 $C > 0$。于是

$$\left(\frac{n}{4(n-1)}\mathrm{Sc}_g + \psi^2 - |\nabla\psi|\right)(p) \geq \frac{n}{4(n-1)}(-C) + A_\varepsilon^2,$$

当 ε 足够小时，其大于或等于 $\delta/2$。

□

令 D 为作用在 X上的狄拉克算子，并令 ε和 ψ 如引理6.2中所述。

引理 6.3。我们有

$$(D \pm i\psi)^*(D \pm i\psi) \geq \frac{\delta}{2}. \tag{6.10}$$

证明。 对于任意紧支撑光滑旋量 σ 在 X上，我们有

$$\begin{aligned}\int_X |(D \pm i\psi)\sigma|^2 d\,\mathrm{vol}_g &= \int_X \big(|D\sigma|^2 + \psi^2|\sigma|^2 \pm \langle i(D\psi - \psi D)\sigma, \sigma\rangle\big) d\,\mathrm{vol}_g \\ &= \int_X \big(|D\sigma|^2 + \psi^2|\sigma|^2 \pm \langle ic(\nabla\psi)\sigma, \sigma\rangle\big) d\,\mathrm{vol}_g \\ &\geq \big(\int_X |D\sigma|^2 + \psi^2|\sigma|^2 - |\nabla\psi|^2|\sigma|^2\big) d\,\mathrm{vol}_g\,.\end{aligned}$$

由利希nerowicz公式，我们有

$$\int_X |D\sigma|^2 d\,\mathrm{vol}_g = \int_X \big(|\nabla\sigma|^2 + \frac{\mathrm{Sc}_g}{4}|\sigma|^2\big) d\,\mathrm{vol}_g,$$

由柯西–施瓦茨不等式，我们有

$$|D\sigma|^2 = |\sum_{j=1}^n c(e_j)\nabla_{e_j}\sigma|^2 \leq n|\nabla\sigma|^2.$$

因此，

$$\int_X |D\sigma|^2 d\,\mathrm{vol}_g \geq \frac{1}{n}\int_X |D\sigma|^2 d\,\mathrm{vol}_g + \int_X \frac{\mathrm{Sc}_g}{4}|\sigma|^2 d\,\mathrm{vol}_g\,.$$

因此

$$\int_X |D\sigma|^2 d\,\mathrm{vol}_g \geq \frac{n}{n-1}\int_X \frac{\mathrm{Sc}_g}{4}|\sigma|^2 d\,\mathrm{vol}_g\,.$$

根据这些计算和引理 6.2，

$$\begin{aligned}\int_X |(D \pm i\psi)\sigma|^2 d\,\mathrm{vol}_g &\geq \int_X \left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{\mathrm{Sc}_g}{4} + \psi^2 - |\nabla\psi|\right)|\sigma|^2 d\,\mathrm{vol}_g \\ &\geq \frac{\delta}{2}\int_X |\sigma|^2 d\,\mathrm{vol}_g\,.\end{aligned}$$

因此得到（6.10）。 □

定理的证明 *6.1*。 设

$$\mathcal{N}_\psi \coloneqq \overline{\rho^{-1}((-\ell_2/2, \ell_2/2))}, \tag{6.11}$$

它与 ε无关。应用定义4.6 或 4.9，其中 δ 如命题 4.4 或 4.8中所述，并且 b以及 r 如备注 4.10中所述，可得

$$\mathrm{Ind}_q(D, \psi) \in K_{n-1}(C^*(\bar{B}_{(\delta A_\varepsilon)^{-1}}(\mathcal{N}_\psi))).$$

定理5.1 表明

$$\mathrm{Ind}_q(D, \psi) = \mathrm{id}_*(\mathrm{Ind}(D_N)) \in K_{n-1}(C^*(\bar{B}_{(\delta A_\varepsilon)^{-1}}(\mathcal{N}_\psi))). \tag{6.12}$$

由引理 4.14 和 6.3，对于 $A_\varepsilon \geq a\sqrt{\delta}/2$，有

$$\mathrm{Ind}_q(D, \psi) = 0 \in K_{n-1}(C^*(\bar{B}_{2^{1/4}c_1\delta^{-1/4}A_\varepsilon^{-1/2}}(\mathcal{N}_\psi))). \tag{6.13}$$

由于 δ 与 ε无关，我们有

$$2^{1/4}c_1\delta^{-1/4}A_\varepsilon^{-1/2} \geq (\delta A_\varepsilon)^{-1}$$

如果 A_ε 足够大，即当 ε 足够小时。以这种方式选取 ε，并考虑包含映射

$$i_{\bar{B}_{(\delta A_\varepsilon)^{-1}}(\mathcal{N}_\psi)} \colon \bar{B}_{(\delta A_\varepsilon)^{-1}}(\mathcal{N}_\psi) \to \bar{B}_{2^{1/4}c_1\delta^{-1/4}A_\varepsilon^{-1/2}}(\mathcal{N}_\psi).$$

根据引理 4.11的(c)部分，(6.12)和(6.13)，

$$\begin{aligned}(i_{\bar{B}_{(\delta A_\varepsilon)^{-1}}(\mathcal{N}_\psi)})_* \circ \mathrm{id}_*(\mathrm{Ind}(D_N)) = \mathrm{Ind}_q(D, \psi) = 0 \\ \in K_{n-1}(C^*(\bar{B}_{2^{1/4}c_1\delta^{-1/4}A_\varepsilon^{-1/2}}(\mathcal{N}_\psi))).\end{aligned} \tag{6.14}$$

Now

$$i_{\bar{B}_{(\delta A_\varepsilon)^{-1}}(\mathcal{N}_\psi)} \circ \mathrm{id} \tag{6.15}$$

是 N 到 $\bar{B}_{2^{1/4}c_1\delta^{-1/4}A_\varepsilon^{-1/2}}(\mathcal{N}_\psi)$ 的包含映射。对于 ε足够小的情形，后一集合包含于 $\rho^{-1}((-\ell_1/2, \ell_1/2))$。因此，(6.15) 依定理6.1的第一个假设是粗等价。于是K-理论上的诱导映射依定理3.4是同构。因此，(6.14) 蕴含 $\mathrm{Ind}(D_N) = 0$，这与定理6.1的第二个假设矛盾。我们得出结论：(6.2) 不成立。

□

定理2.5的证明。由定理2.2，存在一致测地正规邻域 $U \cong [0,\varepsilon) \times \partial_- M$，即 $\partial_- M$ 在 M中的邻域。设 $\varepsilon_1 > 0$ 小于ε 与 $\ell/2$，并令 $N = \{\varepsilon_1\} \times \partial_- M$。设 (X, g) 为定义2.3中的完备流形。则 X 分解为

$$X = X_1 \cup_{\partial_- M} M \cup_{\partial_+ M} X_2,$$

由 N 分割为 $X_\pm$。

设函数 ρ 如定理 6.1中所述，取 $a = \frac{\ell}{2} + \varepsilon_1$，并将定理 ℓ6.1 中的 $\ell - \varepsilon_1$替换为 ℓ，如当前情形所示。定理 6.1 中的第一个条件由定理 2.5中的第一个条件保证。定理 6.1 中的第二个条件由定理 2.5 中的第二个条件以及粗指标的同伦不变性保证。（这种同伦不变性众所周知，但也可以应用 [29], 中的较新配边不变性结果，或 [30, 定理 4。12] 或 [14,推论 2。27]中的后续版本。）定理6.1因此推出

$$\inf_{|\rho(x)|<(\ell-\varepsilon_1)/2} \mathrm{Sc}_g(x) \le \frac{4\pi^2(n-1)}{n(\ell-\varepsilon_1)^2}. \tag{6.16}$$

我们断言

$$\rho^{-1}\left(-\left(\frac{\ell-\varepsilon_1}{2}\right), \frac{\ell-\varepsilon_1}{2}\right) \subset M. \tag{6.17}$$

由于对于任意小的 ε_1，(6.16) 都成立，因此我们得到 (2.1)。

令 $x \in X$，其中 $|\rho(x)| < \frac{\ell-\varepsilon_1}{2}$。先假设 $x \in X_+$。则

$$\rho(x) = \frac{\ell}{2} + \varepsilon_1 + d_g(x, N),$$

so

$$d_g(x, N) < \ell - \frac{3\varepsilon_1}{2},$$

这意味着 $x \in M$。类似地，若 $x \in X_-$，则有

$$\rho(x) = \frac{\ell}{2} - \varepsilon_1 + d_g(x, N),$$

so

$$d_g(x, N) < \frac{\varepsilon_1}{2},$$

再次 $x \in M$。因此（6.17），定理 2.5得证。 □

注 6.4。在定理 2.5 的设定下，取 X 如定义 2.3 所述，定理 3.8 中的条件（3.9）未必成立。例如，在例 5.4 中，超曲面 $\rho^{-1}(-1)$ 不具备这一性质。在这种情况下，定理 3.8 不适用。但当 t 足够小时，定理 2.5 中的条件 1 确实蕴含定理 6.1 中的条件 1，其中 N 如定理 2.5 的证明中所述。这使我们能够使用基于定理 5.1 的定理 6.1 来证明定理 2.5。这正是我们将定理 3.8 推广为定理 5.1 的动机。

6.2 条件 1 的必要性

我们以讨论一个例子作为本文的结尾，该例子表明，定理 6.1 和定理 2.5 中的条件 1 确实是必要的。我们先回顾一个关于连通和上正标量曲率度量的命题，这基本上归功于 Gromov–Lawson [10, 命题 5。1] 以及 Schoen–Yau[23, 推论 7]。以下定量版本是 [25, 命题 4。2]。

命题 6.5。设(M^n, g)是一个黎曼流形，满足 $n \geq 3$和$p, p' \in M$。假设$\mathrm{Sc}_g \geq \kappa$。那么，对于任意 $d, \delta, \varepsilon > 0$，存在一个黎曼流形$(P^n, g')$，可通过在 p和 p'附近移除两个 δ-球并连接一个圆柱 $T \cong S^{n-1} \times [0, 1]$构造而成，即

$$P = (M \backslash (B_\delta(p) \cup B_\delta(p',)) \cup T,$$

使得

1. $\mathrm{Sc}_{g'} \geq \kappa - \varepsilon$,
2. g 与 g' 在 p 和 p'周围的 $[\delta/2, \delta]$-环带上重合，并且
3. T的直径为 $\leq C(d + \delta)$，其中 C 是一个普适常数。

现在固定 $n \geq 3$，并取 $\delta > 0$ 为一个小的正数。考虑扭曲积度量

$$g_\varphi = dt^2 + \varphi(t)^2 g_{\mathrm{eu}}$$

在 $[-\delta, \delta] \times \mathbb{R}^{n-1}$ 上。其标量曲率为

$$\mathrm{Sc}_{g_\varphi} = -\frac{(n-1)(n-2)\varphi'^2}{\varphi^2} - \frac{2(n-1)\varphi''}{\varphi}.$$

Take

$$\varphi(t) = \left(\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right)^{2/n},$$

并且我们得到

$$\mathrm{Sc}_{g_\varphi} = n(n-1) > 0.$$

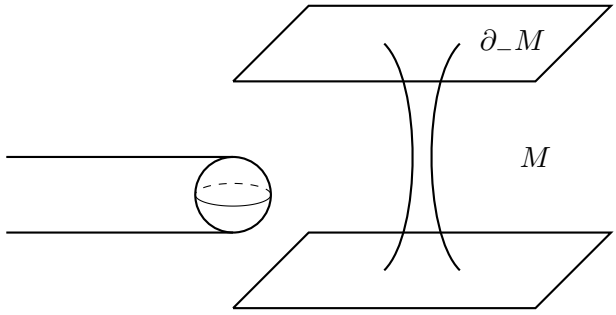


图1：具有无限长度、正标量曲率和非零指标的带

令 $O \in \mathbb{R}^{n-1}$ 为原点。在 $[-\delta,\delta]\times\{O\}$ 附近选取一条小管（同胚于 $[-\delta,\delta]\times S^{n-2}$），使其平滑地连接截面 $\{\pm\delta\}\times\mathbb{R}^{n-1}$。令开子集 $M_1 \subset [-\delta,\delta]\times\mathbb{R}^{n-1}$ 为这条管的外部。将其视为一个黎曼流形，其度量为 g_φ 的限制。它的边界为

$$N := \partial M_1 = (\{\delta\}\times\mathbb{R}^{n-1}) \# (\{-\delta\}\times\mathbb{R}^{n-1})$$

是两个 $\mathbb{R}^{n-1}$的连通和。（见图1。）

取一点 $p =$ ，使其距管足够远，坐标为$(0, \ p_1) \in M_1$ ；对于充分小的 $r > 0$，记 $B_r(p)$为以 p 为中心、半径为 r的测地球，其边界为$S_r(p)$。令 Y 为从 M_1 中移除 $B_r(p)$并接上一段圆柱后得到的流形

$$Y := (S^{n-1}\times(-\infty,0]) \cup_{S_r(p)} (M_1 \setminus B_r(p)),$$

根据命题 6.5，存在一个完备黎曼度量 g ，定义在 Y 上，具有有界几何；在g_φ 之外 p 的内部 M_1，它等于 $dt^2 + g_{S^{n-1}}$上的乘积度量 $S^{n-1}\times(-\infty,0]$远离粘合区域，并且满足

$$\mathrm{Sc}_g \geq n(n-1) - 1 > 0.$$

对于任意 $R \gg 0$，定义带

$$M = (S^{n-1}\times[-R,0]) \cup_{S_\delta(p)} (M_1 \setminus B_\delta(p))$$

赋予诱导度量 g。则 M 是一个正则 Spin 黎曼带，且

$$\partial_- M = \mathbb{R}^{n-1} \# \mathbb{R}^{n-1}, \qquad \partial_+ M = \{-R\} \times S^{n-1},$$

且在 M 上，$_g \geq n$ 的 Sc$n-1$ 为 $-1 > 0$。$\partial_- M = \mathbb{R}^{n-1} \# \mathbb{R}^{n-1}$ 上狄拉克算子的粗指标非零：在上述识别下

$$K_{n-1}\big(C^*(\mathbb{R}^{n-1} \# \mathbb{R}^{n-1})\big) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

该指标等于 (1,1) $\neq 0$。这可以通过分别将狄拉克算子与两份 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的近乎平坦的 Bott 类配对看出，所用代表元在它们之间的管附近为常数。

然而，通过令 R 任意大，$\partial_- M$与 $\partial_+ M$ 之间的距离可以任意长，同时仍保持正的标量曲率下界和非零指标。在此例中，除定理 6.1 和定理 2.5 的条件 1 外，其余假设均满足，也就是说，恒等映射

$$\mathrm{id}\colon (\partial_- M, d_{g_{\partial_- M}}) \longrightarrow (\partial_- M, d_M)$$

不是粗等价。（事实上，$(\partial_- M, d_M)$ 与 $\mathbb{R}^{n-1}$ 粗等价，而 $\mathbb{R}^{n-1}$ 与 $\mathbb{R}^{n-1} \# \mathbb{R}^{n-1}$ 不粗等价。）

参考文献

[1] S. Baaj 和 P. Julg. Kasparov 双变量理论及 Hilbert ´-模上的非有界算子。*C. R. Acad. Sci. Paris S´er. IMath.*, 296(21):875–878, 1983.[2] B. Blackadar. K算子代数的 K 理论，第 5 卷，收录于数学科学研究所出版物。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，1998.[3] U. Bunke 和 M. Ludewig. 粗几何中的余冠与 Callias 型算子。arXiv:2411.01646, 2024. [4] S. Cecchini. 正标量曲率黎曼自旋流形的长颈原理。*Geom. Funct. Anal.*, 30(5):1183–1223, 2020.[5] J. Choi 和 Y.-G. Oh. 温和黎曼度量凸和的单射半径下界及其在辛拓扑中的应用。*Adv. Math.*, 479:论文编号 110443, 49 页, 2025.

[6] A. Connes 和 G. Skandalis. 叶状结构的纵向指标定理。*Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 20(6):1139–1183, 1984.[7] J. Eldering. 正规双曲不变流形，第 2 卷，收录于*Atlantis* 动力系统研究丛书。Atlantis Press，巴黎，2013。非紧情形。[8]A. Engel 和 C. Wulff. 粗指标理论中的相对指标及一致正标量曲率的子流形障碍。arXiv:2506.14301, 2025.[9] M. Gromov. 标量曲率的度量不等式。*Geom. Funct.Anal.*, 28(3):645–726, 2018.[10] M. Gromov 和 H. B. Lawson, Jr. 基本群存在时的 Spin 与标量曲率。I. *Ann. of Math. (2)*, 111(2):209–230, 1980.[11] N. Higson. 关于指标的配边不变性的一则注记。《拓扑》, 30(3):439–443, 1991.[12] N. Higson 和 J. Roe. 解析 KK 同调。牛津数学专著丛书。牛津大学出版社，牛津，2000。牛津科学出版物丛书。[13] N. Higson、J. Roe 和 G. Yu. 粗 Mayer–Vietoris 原理。*Math.Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 114(1):85–97, 1993.[14] P. Hochs 和 T. de Kok. 非紧超曲面的分割流形指标定理。arXiv:2507.16591, 2025.[15] M. Karami、M. Zadeh 和 A. Sadegh. 粗相对分割指标定理。*Bull. Sci. Math.*, 153:57–71, 2019.[16] M. Ludewig 和 G. Thiang. 迹的大尺度量子化 I：有限传播算子。*arXiv* 预印本 *arXiv:2506.10957*, 2025.[17] J. Roe. 非紧流形的剖分与对偶 Toeplitz 问题。载于算子代数及其应用，第 *1* 卷，第 135 卷，收录于伦敦数学学会讲义丛书，第 187–228 页。剑桥大学出版社，剑桥，1988。

[18] J. Roe. 指标理论、粗几何与流形拓扑，第90卷，收录于*CBMS*区域会议数学丛书。数学科学会议委员会，华盛顿哥伦比亚特区；由美国数学会出版，罗得岛州普罗维登斯，1996年。[19] J. Rosenberg。 C^*-代数、正标量曲率与诺维科夫猜想。高等科学研究所 ´科学出版物，(58):197–212 (1984)，1983。[20] J. Rosenberg。 C^*-代数、正标量曲率与诺维科夫猜想。II。载于算子代数中的几何方法（京都，*1983*），第123卷，收录于*Pitman*数学研究笔记丛书，第341–374页。Longman科技出版社，哈洛，1986。[21] J. Rosenberg。 C^*-代数、正标量曲率与诺维科夫猜想。III。《拓扑》，25(3):319–336，1986。[22] T. Schick和M. Zadeh。多重分割流形的大尺度指标。《非交换几何杂志》，12(2):439–456，2018年。[23] R. Schoen和丘成桐。关于具有正标量曲率的流形的结构。《数学手稿》，28(1-3):159–183，1979。[24] T. Seto。Toeplitz算子与Roe-Higson型指标定理。《非交换几何杂志》，12(2):637–670，2018年。[25] P. S weeney, Jr. 数量球面稳定性的例子。《变分法与偏微分方程》，64(6):论文编号188，33页，2025。[26] J. Wang。自旋手术上的非负数量曲率与诺维科夫猜想。arXiv:2512.16535，2025。[27] J. Wang、Z. Xie、G. Yu和B. Zhu。 l^p-粗Baum–Connes猜想，适用于 l^q-粗可嵌入空间。arXiv:2411.15070，2024。[28] R. Willett和G. Yu。高指标理论，第189卷，收录于剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2020。[29] C. Wulff。粗指标的配边不变性。《美国数学会会刊》，140(8):2693–2697，2012。[30]C. Wulff。扭曲算子的粗指标。《拓扑与分析杂志》，11(4):823–873，2019。

[31] Z. Xie和G. Yu。正标量曲率、高阶rho不变量与局部化代数。$Adv. Math.$，262:823–866，2014。[32] M. Zadeh。指标理论与可扩大超曲面的剖分。《非交换几何杂志》，4(3):459–473，2010。[33] R. Zeidler。宽度、宏观性与指标理论。*SIGMA*《对称、可积性与几何：方法与应用》，16:论文编号127，15页，2020。[34] R. Zeidler。通过狄拉克算子得到的带宽估计。微分几何杂志，122(1):155–183，2022。