arXiv:2602.06679v1 [math.NT] 6 Feb 2026

斐波那契数与卢卡斯数上的超同余幻想（继 Guillera 之后）

Wadim Zudilin

To Jes´us Guillera，感谢你带来的诸多数学灵感——你的工作值得一项大奖!

Abstract. 受 Guillera 的观察启发，我们将所谓的拉马努金型超同余推广到更高的层次，在这一层次中，斐波那契数列、卢卡斯数列、Ap´ery 数及其相关数列都自然而然地出现。

在拉马努金于 $1/\pi$ 1914年 [6] 记录的十七个级数中，只有一个“无理数”项

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^3\big((30+45\sqrt{5})n+(-1+5\sqrt{5})\big)\frac{(-1/\varphi)^{8n}}{2^{12n}}=\frac{32}{\pi},\tag{1}$$

其中 $\varphi=(1+\sqrt{5})/2$ 表示黄金比例；注意，$-1/\varphi=(1-\sqrt{5})/2$ 是 φ 的代数共轭。一个世纪之后，即 2020年，Guillera [4] 观察到，将该公式与其“共轭伴式”结合起来

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^3\big((30-45\sqrt{5})n+(-1-5\sqrt{5})\big)\frac{\varphi^{8n}}{2^{12n}}=-\frac{96}{\pi},\tag{2}$$

（其收敛速度不及（1））导出了一对“有理的”拉马努金型级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^3\frac{(-30F_{8n}+42L_{8n})n+(F_{8n}+5L_{8n})}{2^{12n}}=\frac{128}{\pi\sqrt{5}},\tag{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^3\frac{(210F_{8n}-30L_{8n})n+(25F_{8n}+L_{8n})}{2^{12n}}=\frac{64}{\pi};\tag{4}$$

这里 F_n 和 L_n 分别是通过展开式生成的斐波那契数和卢卡斯数

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_nt^n=\frac{t}{1-t-t^2}=t+t^2+\cdots\quad\text{and}\quad\sum_{n=0}^{\infty}L_nt^n=\frac{2-t}{1-t-t^2}=2+t+3t^2+\cdots.$$

日期：2026年2月5日。2020年 数学主题分类。11F33（主要），11B39、11B65、11B83、11Y55、33C20（次要）。关键词和短语。 π、拉马努金、超同余、Ap´ery 数。

在 [4], 单页的幂后，有一些同余式

$$S_1(p)\stackrel{?}{\equiv}10\biggl(\frac{-5}{p}\biggr)p\pmod{p^3}\quad\text{and}\quad S_2(p)\stackrel{?}{\equiv}2\biggl(\frac{-1}{p}\biggr)p\pmod{p^3},\\ \text{where } p>2 \text{ is a prime},\tag{5}$$

对于截断和

$$S_1(N)=\sum_{n=0}^{N-1}\binom{2n}{n}^3\frac{(-30F_{8n}+42L_{8n})n+(F_{8n}+5L_{8n})}{2^{12n}},$$
$$S_2(N)=\sum_{n=0}^{N-1}\binom{2n}{n}^3\frac{(210F_{8n}-30L_{8n})n+(25F_{8n}+L_{8n})}{2^{12n}}$$

以及勒让德符号 $\binom{m}{p}$。Guillera在 [3], 中讨论了这类拉马努金超同余，我们现在更一般地预期其推广 [5, 7]的有效性

$$S_1(p^s)\stackrel{?}{\equiv}\biggl(\frac{-5}{p}\biggr)pS_1(p^{s-1})\pmod{p^{3s}}\quad\text{and}\quad S_2(p^s)\stackrel{?}{\equiv}\biggl(\frac{-1}{p}\biggr)pS_2(p^{s-1})\quad(\text{模 }p^{3s}),\tag{6}$$

以及

$$S_1\bigl((p^s+1)/2\bigr)\stackrel{?}{\equiv}\biggl(\frac{-5}{p}\biggr)pS_1\bigl((p^{s-1}+1)/2\bigr)\pmod{p^{3s}}\quad\text{and}\\ S_2\bigl((p^s+1)/2\bigr)\stackrel{?}{\equiv}\biggl(\frac{-1}{p}\biggr)pS_2\bigl((p^{s-1}+1)/2\bigr)\pmod{p^{3s}},\tag{7}$$

其中 $p>2$ 为素数，且 $s=1$，2，.....。

以非常相　　同的思路，我们可以将

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^4\binom{3n}{n}\bigl(20(61-27\sqrt5)n^2+9(101-45\sqrt5)n+3(56-25\sqrt5)\bigr)\frac{(1/\varphi)^{15n}}{2^{6n}}\stackrel{?}{=}\frac{3}{\pi^2},\tag{8}$$

Almkvist 和 Guillera 发现的拉马努金–Guillera 型公式 [1], “有理化”，并为其配上一个形式共轭伴随级数（如今它发散了！）以及相关的截断和

$$S_3(N)=\sum_{n=0}^{N-1}\binom{2n}{n}^4\binom{3n}{n}(-1)^n\frac{(2440F_{15n}+1080L_{15n})n^2+(1818F_{15n}+810L_{15n})n+(336F_{15n}+150L_{15n})}{2^{6n}},$$
$$S_4(N)=\sum_{n=0}^{N-1}\binom{2n}{n}^4\binom{3n}{n}(-1)^n\frac{(5400F_{15n}+2440L_{15n})n^2+(4050F_{15n}+1818L_{15n})n+(750F_{15n}+336L_{15n})}{2^{6n}}.$$

与之前一样，我们通过数值计算观察到这些超同余

$$S_3(p^s)\stackrel{?}{\equiv}\biggl(\frac{5}{p}\biggr)p^2S_3(p^{s-1})\pmod{p^{5s}}\quad\text{and}\quad S_4(p^s)\stackrel{?}{\equiv}p^2S_4(p^{s-1})\pmod{p^{5s}},\tag{9}$$

而较短截断的类似结果则稍弱一些:

$$S_3\bigl((p^s+1)/2\bigr)\stackrel{?}{\equiv}\biggl(\frac{5}{p}\biggr)p^2S_3\bigl((p^{s-1}+1)/2\bigr)\pmod{p^{4s}}\quad\text{and}\\ S_4\bigl((p^s+1)/2\bigr)\stackrel{?}{\equiv}p^2S_4\bigl((p^{s-1}+1)/2\bigr)\pmod{p^{4s}},\tag{10}$$

其中 $p>2$ 是一个素数，$s=1$，2，.....。

作为数值检验的一种合理简化，我们给出超几何和 $S_1(N)$、$S_2(N)$、 $S_3(N)$ 和 $S_4(N)$ 中涉及的稀疏化斐波那契数列和卢卡斯数列的生成函数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{8n}t^n = \frac{21t}{1-47t+t^2} \quad \text{and} \quad \sum_{n=0}^{\infty} L_{8n}t^n = \frac{2-47t}{1-47t+t^2},$$

以及

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{15n}t^n = \frac{610t}{1-1364t-t^2} \quad \text{and} \quad \sum_{n=0}^{\infty} L_{15n}t^n = \frac{2-1364t}{1-1364t-t^2}.$$

请注意，此类斐波那契型数列满足阶数高于 1 的递推关系（其系数为常数有理数），这与纯幂数列 $\{z^n\}_{n\geq 0}$不同；对于固定的有理数 $z \neq 0$，后者满足的是一阶递推关系。这表明，拉马努金型公式和超同余式的经典版本与类斐波那契版本之间存在一项主要差异。不过请注意，上述公式中的超几何输入项

$$\frac{1}{2^{12n}}\binom{2n}{n}^3 \quad \text{and} \quad \frac{(-1)^n}{2^{6n}}\binom{2n}{n}^4\binom{3n}{n}$$

也来自满足线性递推的数列，不过这次数列的递推系数是关于 n的有理函数，且递推阶数为 1。已有研究（例如，参见 [1,2]）表明，这类二项式乘积表达式可以替换为其他“Ap´ery 型”算术数列；这些数列满足类似但阶数高于 1 的递推关系。文献中将这类关于 $1/\pi$ 及其幂的公式称为拉马努金–佐藤型公式。

例如，可以通过对拉马努金–佐藤型公式 [2, eq. (6.2)]进行“有理化”，生成这两类公式的进一步混合形式。

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(8n+4-\sqrt{6})\rho^{2n+1} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}},$$

wh其中 $\rho = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 5-2\sqrt{6}$ 是多项式 $1-10t+t^2$ a 的一个根 nd

$$A_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2$$

a为阿佩里数。为此，我们引入类斐波那契数

$$U_n = \frac{(5+2\sqrt{6})^{2n}-(5-2\sqrt{6})^{2n}}{40\sqrt{6}} \quad \text{and} \quad V_n = \frac{(5+2\sqrt{6})^{2n}+(5-2\sqrt{6})^{2n}}{2}$$

及其生成函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n t^n = \frac{t}{1-98t+t^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} V_n t^n = \frac{1-49t}{1-98t+t^2},$$

以及相关的截断伴随和

$$S_5(N)=\sum_{n=0}^{N-1}A_n\big((800U_n+16V_n)n+(640U_n+13V_n)\big),$$
$$S_6(N)=\sum_{n=0}^{N-1}A_n\big((1920U_n+40V_n)n+(1560U_n+32V_n)\big).$$

Then

$$S_5(p^s)\stackrel{?}{\equiv}\left(\frac{-3}{p}\right)pS_5(p^{s-1})\pmod{p^{3s}}\quad\text{and}\quad S_6(p^s)\stackrel{?}{\equiv}\left(\frac{-2}{p}\right)pS_6(p^{s-1})\pmod{p^{3s}}\quad(11)$$

对于所有素数 $p>2$ 和 $s=1$，2，.....，唯一的例外是情形 $S_6(3^1)$.

所有这些同余式都遵循最初在 [8], [3]和 [7], 中观察到的模式；近年来，人们投入了大量工作来涵盖“纯超几何型和有理型”情形的具体实例——但对于斐波那契及其相关对象而言，确实没有什么可借鉴之处。如果能建立一个统一的概念框架，以理解这一相当普遍的算术现象，那将十分理想。

References

[1] G. Almkvist 和 J. Guillera，关于 $1/\pi^2$ 与弦理论的类拉马努金级数，《实验数学》**21** (2012)，第3期，223–234.[2] H.H. Chan和 W. Zudilin，Ap´ery型序列的新表示，《*Mathematika*》**56** (2010)，第1期，107–117.[3] J. Guillera，拉马努金型镶嵌超同余，《实验数学》**21** (2012)，第1期，65–68.
[4] J. Guillera，当拉马努金遇见斐波那契与卢卡斯，《美国数学月刊》**127** (2020)，第2期，159.
[5] V.J.W. Guo 和 W. Zudilin，通过创造性的 q-显微镜研究德沃克型超同余，《组合理论杂志》*A*辑 **178** (2021)，文章105362.[6] S. Ramanujan，模方程与对 π的逼近，《牛津季刊数学杂志》(2) **45** (1914)，350–372；重印于《斯里尼瓦瑟·拉马努金论文集》，G.H. Hardy、P. V. Sechu Aiyar 和 B. M. Wilson（编）（剑桥大学出版社，剑桥，1927年 & Chelsea 出版社，纽约，1962年），23–39.
[7] H. Swisher，关于van Hamme的超同余猜想，《数学科学研究》**2** (2015)，文章18.[8] W. Zudilin，拉马努金型超同余，《数论杂志》**129**(2009)，第8期，1848–1857。

Department of Mathematics, IMAPP, Radboud University, PO Box 9010,
6500 GL Nijme-gen, Netherlands网址：https://www.math.ru.nl/~wzudilin/