arXiv:2602.06685v1 [math.NA] 6 Feb 2026

.

半无限域上的拉盖尔-Sobolev正交多项式与边值问题

CLEONICE F. BRACCIALI 和 MIGUEL A. PI ÑAR

Abstract. 我们研究一族与半无限区间 (0，+∞) 上二阶边值问题所产生的索博列夫内积相关的拉盖尔–Sobolev正交多项式。这些多项式构成一组在端点处取零的检验函数正交基，特别适用于对具有奇异势函数的薛定谔型问题进行谱逼近。我们得到了它们与经典拉盖尔多项式之间的显式连接公式，以及相应系数的递推关系和渐近性质。此外，还推导出一个涉及Bessel函数的生成函数。作为应用，我们为具有奇异势函数的Dirichlet问题开发了一种完全对角化的拉盖尔–Sobolev谱方法。该方法无需求解线性方程组，并且可以递归实现。针对含有反距离势函数的薛定谔型方程进行的数值实验验证了该方法具有谱精度和指数收敛性。

1. Introduction

基于正交多项式的谱方法是数值求解微分方程的成熟工具，对于光滑解具有高精度和指数收敛性；例如参见 [2, 4, 7]。对于定义在半无限区间上的问题，拉盖尔多项式和广义Laguerre多项式提供了自然的近似框架，并已广泛应用于 (0，+∞) 上的谱方法和伪谱方法 [3, 10]。

尽管经典的 Laguerre 谱方法十分有效，但当微分算子中存在无穷远处的边界条件或奇异系数时，其效率可能会降低。在这种情况下，Sobolev正交多项式是一种很有价值的替代方案，因为它们将导数信息和边界

Date：2026年2月9日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：33C47, 65L60, 65T50。*Key words and phrases.* 拉盖尔多项式、Sobolev正交多项式、边值问题、谱方法、傅里叶展开。Miguel A. Pi˜nar 开始这项工作时，正在圣保罗州立大学 UNESP 数学系访问 Cleonice F. Bracciali。该校位于巴西圣保罗州圣若泽杜里奥普雷图。他于2023年10月在 UNESP 访问一个月，获得巴西联邦研究生教育支持与评估机构（CAPES）资助，资助项目为 CAPES-PrInt国际合作计划，项目编号 88887.890314/2023-00。作者 MAP 衷心感谢 UNESP 数学系提供开展这项研究所需的一切支持。作者 CFB 感谢 CAPES 提供的项目资助 88881.702910/2022-01，以及巴西 FAPESP 提供的项目资助 2022/09575-5。作者 MAP 感谢由 MI-CIU/AEI/ 10.13039/501100011033 和 欧洲区域发展基金（ERDF）资助的项目 PID2023.149117NB.I00。

行为直接纳入逼近空间。这种方法促成了对角化谱方法的发展，无需求解线性方程组即可显著降低计算复杂度；例如，参见 [1, 6, 8]。

本文引入并分析了一族拉盖尔–索博列夫正交多项式，它们关联于由半直线上的二阶微分算子自然诱导的索博列夫内积。相应的正交函数构成空间 $\mathbb{P}\,x\,e^{-x/2}$ 的一组基，并在 0 和 $+\infty$ 处满足齐次Dirichlet边界条件。因此，它们特别适用于具有奇异势的薛定谔型边值问题的谱逼近。

我们建立了所提出的索博列夫正交多项式与经典Laguerre多项式之间的显式连接公式，推导了连接系数的递推关系，并利用拉盖尔多项式的精细比值渐近结果，获得了这些系数的渐近行为。这些分析结果使我们能够推导出相对渐近式，以及一个用Bessel函数表示的闭式生成函数。

作为一项应用，我们针对 $(0,+\infty)$ 上的二阶狄里克雷边值问题，开发了一种完全对角化的 Laguerre–Sobolev谱方法。所得算法递归计算 Fourier–Sobolev系数，只需计算涉及经典Laguerre多项式的积分；其计算成本与标准Laguerre方法相当，同时提高了奇异问题的稳定性。针对带有反距离势函数的非齐次薛定谔方程所进行的数值实验，验证了该方法的谱精度和指数收敛性。

本文结构如下。第2节回顾拉盖尔多项式的基本性质。第3节介绍Laguerre–Sobolev正交多项式的构造与分析，包括连接公式、渐近结果和一个生成函数。第4节给出适用于半直线边值问题的对角化谱方法。第5节报告展示该方法性能的数值实验。

2. Laguerre orthogonal polynomials

本文讨论多项式序列 $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n\geqslant 0}$, $\alpha > -1$,它们关于由下式定义的经典Laguerre内积正交

$$\langle f, g\rangle_\alpha = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^\alpha\, e^{-t}dt, \tag{2.1}$$

满足 $L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n}$。拉盖尔多项式的性质由 [11]得到。

范数的平方 $\|L_n^{(\alpha)}\|^2 = \langle L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)}\rangle_\alpha$ 由下式给出

$$\|L_n^{(\alpha)}\|^2 = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}. \tag{2.2}$$

正交拉盖尔多项式的超几何表示可写为

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{x^k}{k!}. \tag{2.3}$$

利用超几何表示式（2.3），可知拉盖尔多项式的首项系数与 $\alpha \in \mathbb{R}$ 无关，事实上

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots.$$

拉盖尔正交多项式 $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n\geqslant 0}$ 满足三项递推关系

$$\begin{aligned} &(n+1)\, L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (2n+1+\alpha-x)L_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)\, L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geqslant 0, \\ &L_{-1}^{(\alpha)}(x) = 0, \quad L_0^{(\alpha)}(x) = 1. \end{aligned} \tag{2.4}$$

拉盖尔多项式满足求导公式

$$\frac{d}{dx}\, L_n^{(\alpha)}(x) = -\, L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x), \quad n \geqslant 1. \tag{2.5}$$

此外，拉盖尔多项式满足结构关系

$$L_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha+1)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x), \tag{2.6}$$

对于 $n \geqslant 1$。

复平面中拉盖尔多项式的外强渐近（在 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ 中）当 $n \to \infty$ 时，文献中已有众所周知的结果，通常由佩龙公式给出。对于 $\alpha > -1$，我们得到

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(z) =& \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{z/2}\, (-z)^{-\alpha/2-1/4}\, n^{\alpha/2-1/4} e^{2\sqrt{-nz}} \\ &\times \left\{ \sum_{k=0}^{d-1} C_k(z) n^{-k/2} + \mathcal{O}(n^{-d/2}) \right\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

这里，$C_k(z)$与 n无关，且 $C_0(k) = 1$。该关系对复平面中沿正实半轴作割线的 z 成立。余项的界在复平面的每个与 $x > 0$ 无交集的闭区域上一致成立（参见 [11], 定理 8.22.3）。

由（2.7）可直接得到，对于任意实数 α

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(z)}{L_{n-1}^{(\alpha)}(z)} = 1, \tag{2.8}$$

在 $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty$的紧子集上一致成立）。

然而，在讨论比值渐近时，关系（2.8）通常不够精确。在 [5, 定理 3] 中，得到了任意拉盖尔多项式比值在 $n \to \infty$时更精确的渐近展开。

定理 2.1。设 α、$\beta > -1$、$j \in \mathbb{Z}$和 $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$，并固定一个整数$d \geq 1$，则任意拉盖尔多项式的比值在 $n \to \infty$时具有如下渐近展开：

$$\frac{L_{n+j}^{(\alpha)}(z)}{L_n^{(\beta)}(z)} = \left(-\frac{z}{n}\right)^{\frac{\beta-\alpha}{2}} \sum_{m=0}^{d-1} U_m(\alpha, \beta, j, z) n^{-m/2} + \mathcal{O}(n^{-d/2}), \tag{2.9}$$

其中前几个系数为

$$U_0(\alpha, \beta, j, z) = 1,$$

$$U_1(\alpha,\beta,j,z)=\frac{\beta^2-\alpha^2+2z(\beta-\alpha-2j)}{4\sqrt{-z}}.$$

误差项在 z 属于 $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ 的紧集时一致成立。

对于涉及拉盖尔多项式的生成函数，以下结果称为 Hardy-Hille 公式（参见 [11, 定理 5.1，第 102] 页）。

定理 2.2. 设 J_α 为 α 阶第一类贝塞尔函数，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\alpha}{n}^{-1}L_n^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(y)\omega^n=$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{1-\omega}e^{-\frac{(x+y)\omega}{1-\omega}}(-xy\omega)^{-\frac{\alpha}{2}}J_\alpha\left(\frac{2(-xy\omega)^{\frac{1}{2}}}{1-\omega}\right). \tag{2.10}$$

.

3. Laguerre–Sobolev orthogonal polynomials

我们要讨论的问题是，如何近似求解与具有势函数 $V(x)=1/x$ 的定态薛定谔方程相关的常微分方程边值问题（简称边值问题，BVP）。

$$\begin{aligned}-u''+\lambda\frac{1}{x}u&=f(x),\\ u(0)=\lim_{x\to+\infty}u(x)&=0,\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $\lambda>0$。通常，可以从变分观点研究此问题，方法是考虑索博列夫内积

$$\langle u,v\rangle_\lambda=\lambda\int_0^{+\infty}u(x)\,v(x)\,\frac{1}{x}\,dx+\int_0^{+\infty}u'(x)\,v'(x)\,dx, \tag{3.2}$$

与（3.1）的变分表述相关。

令 $\mathbb{P}$ 表示实系数多项式的线性空间。对于（3.1），检验函数应选自函数线性空间 $\mathbb{P}\,x\,e^{-x/2}$，其中的函数在区间 $[0,+\infty)$ 的两端取零。空间 $\mathbb{P}\,x\,e^{-x/2}$ 的一组基可由一族与索博列夫内积（3.2）相关的正交多项式构造得到。本节将构造这样一组正交基并研究其性质。

令 $\{S_n\,x\,e^{-x/2}\}_{n\geqslant 0}$ 表示对序列 $\{x^k\,x\,e^{-x/2}\}_{k\geqslant 0}$应用施密特正交化过程，并关于式（3.2）中定义的索博列夫内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_\lambda$ 得到的正交函数序列，其中多项式 $S_n(x)$的首项系数与拉盖尔多项式 $L_n^{(1)}(x)$的首项系数相同，具体如下

$$S_n(x)=(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\dots$$

分部积分得

$$\langle S_n x\,e^{-x/2},S_m x\,e^{-x/2}\rangle_\lambda=\lambda\int_0^{+\infty}S_n(x)S_m(x)x\,e^{-x}dx$$
$$+\int_0^{+\infty}[S_n(x)(1-\frac{x}{2}+xS_n'(x)][S_m(x)(1-\frac{x}{2}+xS_m'(x)]\,e^{-x}dx$$

$$= \int_0^{+\infty} (1+\lambda-\frac{1}{4}x) S_n(x) S_m(x)\, x\, e^{-x} dx + \int_0^{+\infty} S_n'(x) S_m'(x) x^2\, e^{-x} dx.$$

因此，多项式序列 $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ 关于索博列夫内积正交

$$\begin{aligned} \langle p, q\rangle_S = &\int_0^{+\infty} p(x)q(x)(1+\lambda-\frac{1}{4}x)\, x\, e^{-x} dx \\ &+ \int_{-1}^{1} p'(x)q'(x) x^2\, e^{-x} dx. \end{aligned} \tag{3.3}$$

注意，尽管多项式 $1+\lambda-\frac{1}{4}x$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内变号，双线性型 (3.3) 仍然是正的，因为

$$\langle p(x), p(x)\rangle_S = \langle p(x) x\, e^{-x/2}, p(x) x\, e^{-x/2}\rangle_\lambda > 0,$$

对于 $p(x) \neq 0$。

首先，我们将推导检验函数与经典拉盖尔多项式之间的联系公式。

命题 3.1。 以下关系成立：

$$L_n^{(1)}(x) = S_n(x) + a_{n-1} S_{n-1}(x), \quad n \geqslant 1, \tag{3.4}$$

with

$$a_{n-1} = \frac{n}{4} \frac{\|L_n^{(1)}\|^2}{\langle S_{n-1}, S_{n-1}\rangle_S} > 0. \tag{3.5}$$

证明。 $L_n^{(1)}$ 关于索博列夫正交多项式 $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ 的傅里叶展开给出

$$L_n^{(1)}(x) = S_n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n,i} S_i(x),$$

其中

$$a_{n,i} = \frac{\langle L_n^{(1)}, S_i\rangle_S}{\|S_i\|_S^2}.$$

考虑到（3.3）以及拉盖尔多项式的正交关系 $L_n^{(1)}$，对于 $i \leqslant n-1$，我们得到

$$\begin{aligned} \langle L_n^{(1)}, S_i\rangle_S &= \int_0^{+\infty} L_n^{(1)}(x) S_i(x)(1+\lambda-\frac{1}{4}x)\, x\, e^{-x} dx \\ &\quad - \int_0^{+\infty} L_{n-1}^{(2)}(x) S_i'(x)\, x^2\, e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} L_n^{(1)}(x) S_i(x)(1+\lambda-\frac{1}{4}x)\, x\, e^{-x} dx. \end{aligned}$$

因此 $a_{n,i} = 0, i < n-1$ ， 且 (3.4) 成立。

对于 $i = n-1$

$$\begin{aligned}\langle L_n^{(1)}, S_{n-1}\rangle_S = &\int_0^{+\infty} L_n^{(1)}(x) S_{n-1}(x)(1+\lambda-\frac{1}{4}x)\, x\, e^{-x} dx \\ &- \int_0^{+\infty} L_{n-1}^{(2)}(x) S'_{n-1}(x)\, x^2\, e^{-x} dx \\ =&-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty} L_n^{(1)}(x) S_{n-1}(x)\, x\, x\, e^{-x} dx \\ =&\frac{n}{4}\,\|L_n^{(1)}\|^2 > 0.\end{aligned}$$

□

关于 (3.3) 正交的索伯列夫多项式与 [9] 中定义的非对角拉盖尔-索伯列夫正交多项式有关。这两个族都满足类似的连接公式 (3.4)，但相似之处仅止于此，因为它们的渐近性质不同。

引理 3.2。 *(3.4)* 中的序列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 满足递推关系

$$a_n = \frac{n+2}{4\lambda + 2(n+1) - n a_{n-1}} \tag{3.6}$$

with

$$a_0 = \frac{2}{4\lambda+2},$$

并且对所有 $n = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 0 < a_n < 1$

证明。 对关系 (3.4) 迭代，得到

$$\begin{aligned}L_{n+1}^{(1)}(x) &= S_{n+1}(x) + a_n S_n(x) \\ &= S_{n+1}(x) + a_n L_n^{(1)}(x) - a_{n-1}a_n S_{n-1}(x),\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\langle L_{n+1}^{(1)}(x), L_n^{(1)}(x)\rangle_S &= \langle S_{n+1}(x), L_n^{(1)}(x)\rangle_S \\ &+ a_n\langle L_n^{(1)}(x), L_n^{(1)}(x)\rangle_S - a_{n-1}a_n\langle S_{n-1}(x), L_n^{(1)}(x)\rangle_S.\end{aligned}$$

现在，直接计算可得

$$\begin{aligned}&\langle S_{n+1}(x), L_n^{(1)}(x)\rangle_S = 0, \\ &\langle L_{n+1}^{(1)}(x), L_n^{(1)}(x)\rangle_S = \frac{n+1}{4}\,\|L_{n+1}^{(1)}\|^2, \\ &\langle S_{n-1}(x), L_n^{(1)}(x)\rangle_S = \frac{n}{4}\,\|L_n^{(1)}\|^2,\end{aligned}$$

而三项递推关系 (2.4) 给出

$$\langle L_n^{(1)}(x), L_n^{(1)}(x)\rangle_S = (\lambda+1)\|L_n^{(1)}\|^2 + \|L_{n-1}^{(2)}\|^2 - \frac{1}{4}(2n+2)\|L_n^{(1)}\|^2.$$

由此，根据 (2.2) 可得

$$n+2 = a_n\,(4\lambda + 2n + 2) - n\,a_n a_{n-1},$$

且（3.6）成立。

最后，由（3.5）可得

$$a_0 = \frac{1}{4}\frac{\|L_1^{(1)}\|^2}{\langle S_0, S_0\rangle_S} = \frac{1}{2\lambda+1} < 1,$$

并对 n进行归纳可得

$$a_n < \frac{n+2}{4\lambda+n+2} < 1$$

对所有 $n = 0, 1, \ldots\ldots$ □

系数 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 在式（3.4）中可用拉盖尔多项式显式表示，因此我们可以得到它们的一阶渐近展开。

引理3.3。 序列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 在（3.4）中满足

$$a_n = \frac{n+2}{n+1}\frac{L_n^{(1)}(-4\lambda)}{L_{n+1}^{(1)}(-4\lambda)}, \tag{3.7}$$

对于 $n \geqslant 0$，因此

$$a_n = 1 - \frac{\sqrt{4\lambda}}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}(\frac{1}{n}). \tag{3.8}$$

证明。 首先，我们考虑 λ, $\{q_n(\lambda)\}_{n\geqslant 0}$ 中满足递推关系的多项式序列

$$q_{n+1}(\lambda) = [4\lambda + 2(n+1)]q_n(\lambda) - n(n+1)q_{n-1}(\lambda), \quad n \geqslant 1, \tag{3.9}$$

其中 $q_0(\lambda) = 1$ 且 $q_1(\lambda) = 4\lambda + 2$。

我们看到，对于 $n = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{4\lambda+2} = \frac{2\,q_0(\lambda)}{q_1(\lambda)}.$$

接下来，我们假设

$$a_{n-1} = \frac{(n+1)q_{n-1}(\lambda)}{q_n(\lambda)},$$

因此，由 (3.6) 可得

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{n+2}{4\lambda + 2(n+1) - n(n+1)\frac{q_{n-1}(\lambda)}{q_n(\lambda)}} \\ =& \frac{(n+2)q_n(\lambda)}{[4\lambda+2(n+1)]q_n(\lambda) - n(n+1)q_{n-1}(\lambda)}. \end{aligned}$$

并且由 (3.9) 可得

$$a_n = \frac{(n+2)q_n(\lambda)}{q_{n+1}(\lambda)}, \quad n \geqslant 0.$$

将含 $\alpha = 1$ 的三项递推关系 (2.4) 化为

$$(n+1)\,L_{n+1}^{(1)}(x) = [-x + 2(n+1)]L_n^{(1)}(x) - (n+1)\,L_{n-1}^{(1)}(x), \quad n \geqslant 1,$$

其中 $L_0^{(1)}(x) = 1$，以及 $L_1^{(1)}(x) = -x + 2$. 通过与三项递推关系（3.9）进行比较，并令 $x = -4\lambda$，我们得到

$$q_n(\lambda) = n!\,L_n^{(1)}(-4\lambda), \quad n \geqslant 0.$$

因此，对于 $n \geqslant 0$,

$$a_n = \frac{(n+2)q_n(\lambda)}{q_{n+1}(\lambda)} = \frac{n+2}{n+1}\frac{L_n^{(1)}(-4\lambda)}{L_{n+1}^{(1)}(-4\lambda)},$$

且 (3.7) 成立。

最后，由 (3.7) 和 (2.9) 可得 (3.8)，其中 $\alpha = \beta = 1$，$j = -1$，以及 $d = 2$。 □

由 (3.7)，我们可以用拉盖尔多项式完整表示多项式 $S_n(x)$。利用 (3.7) 中给出的 a_n 表达式，关系 (3.1) 可写为：

$$L_n^{(1)}(x) = S_n(x) + \frac{n+1}{n}\frac{L_{n-1}^{(1)}(-4\lambda)}{L_n^{(1)}(-4\lambda)}S_{n-1}(x)$$

因此

$$\frac{S_n(x)L_n^{(1)}(-4\lambda)}{n+1} = \frac{L_n^{(1)}(x)L_n^{(1)}(-4\lambda)}{n+1} - \frac{S_{n-1}(x)L_{n-1}^{(1)}(-4\lambda)}{n}. \tag{3.10}$$

对这个等式反复迭代，我们得到

$$\frac{S_n(x)L_n^{(1)}(-4\lambda)}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{L_k^{(1)}(x)L_k^{(1)}(-4\lambda)}{k+1}. \tag{3.11}$$

这一关系包含了某些渐近性质的关键。

定理 3.4。

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n(x)}{\sqrt{n+1}L_n^{(1)}(x)} = 0, \tag{3.12}$$

在复平面的每个与$(0, +\infty)$无交集的闭区域上一致成立。

证明。 将（3.10）应用两次可得

$$\frac{S_n(x)}{L_n^{(1)}(x)} = 1 - \frac{n+1}{n}\frac{L^{(1)}(x)L_{n-1}^{(1)}(-4\lambda)}{L_n^{(1)}(x)L_n^{(1)}(-4\lambda)} + \frac{n+1}{n-1}\frac{S_{n-2}(x)L_{n-2}^{(1)}(-4\lambda)}{L_n^{(1)}(x)L_n^{(1)}(-4\lambda)}.$$

定义

$$Y_n(x) := \sqrt{n+1}\frac{S_n(x)}{L_n^{(1)}(x)},$$

于是，我们可以写成

$$Y_n(x) = \alpha_n(x) + \beta_n(x)Y_{n-2}(x),$$

with

$$\alpha_n(x) = \sqrt{n+1}\left[1 - \frac{n+1}{n}\frac{L^{(1)}(x)L_{n-1}^{(1)}(-4\lambda)}{L_n^{(1)}(x)L_n^{(1)}(-4\lambda)}\right],$$

$$\beta_n(x) = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}}\frac{n+1}{n-1}\frac{L_{n-2}^{(1)}(x)L_{n-2}^{(1)}(-4\lambda)}{L_n^{(1)}(x)L_n^{(1)}(-4\lambda)}.$$

显然， $\alpha_n(x)$ 在与 $(0, +\infty)$ 无交集的复平面紧域上一致收敛于 $\sqrt{-x} + \sqrt{4\lambda}$，因此存在一个正常数 C（取决于 λ 和该紧域），使得 $|\alpha_n(x)| < C$。另一方面， $\beta_n(x)$ 收敛于 1，但再次由 (2.9) 可得

存在一个正整数 n_0，使得 $|\beta_n| < 1$ 对于 $n \geqslant n_0$ 成立。这样，我们可以写成

$$|Y_n(x)| \leqslant C + |Y_{n-2}(x)|, \quad n \geqslant n_0,$$

并且我们可以得出 $|Y_n(x)| \leqslant (n+1)C+K$ 对于某个正常数 K，该结论在 $\mathbb{C} \setminus (0, +\infty)$ 的每个紧子集上一致成立。因此，该序列

$$\frac{1}{n+1} Y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{S_n(x)}{L_n^{(1)}(x)}$$

一致有界，并且通过对恒等式取极限即可得到 (3.12)

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{S_n(x)}{L_n^{(1)}(x)} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} a_{n-1} \frac{S_{n-1}(x)}{L_n^{(1)}(x)}.$$

□

下面的结果给出了 Laguerre–Sobolev正交多项式的生成函数。

命题 3.5。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(x) L_n^{(1)}(-4\lambda)}{n+1} \omega^n = \frac{1}{1-\omega^2} e^{-\frac{(x-4\lambda)\omega}{1-\omega}} \frac{1}{2\sqrt{x\lambda\omega}} J_1\left(\frac{4\sqrt{x\lambda\omega)}}{1-\omega}\right). \tag{3.13}$$

证明。 对于 $|\omega| < 1$，将 (3.11) 乘以 ω^n，得到

$$\frac{S_n(x) L_n^{(1)}(-4\lambda)}{n+1} \omega^n = \sum_{k=0}^{n} (-\omega)^{n-k} \frac{L_k^{(1)}(x) L_k^{(1)}(-4\lambda)}{k+1} \omega^k.$$

因此，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(x) L_n^{(1)}(-4\lambda)}{n+1} \omega^n$$

对 $|\omega| < 1$收敛，因为它是两个收敛级数的柯西乘积。此外，由(2.10)我们得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(x) L_n^{(1)}(-4\lambda)}{n+1} \omega^n = \frac{e^{-\frac{(x-4\lambda)\omega}{1-\omega}}}{(1+\omega)(1-\omega)} \frac{1}{2\sqrt{x\lambda\omega}} J_1\left(\frac{4\sqrt{x\lambda\omega)}}{1-\omega}\right)$$

且(3.13)成立。 □

4. The diagonalized spectral method for BVP

让我们考虑边值问题(3.1)的解关于正交序列 $\{S_n(x)xe^{-x/2}\}_{n\geqslant 0}$的傅里叶-索博列夫展开

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{u}_n S_n(x) x e^{-x/2},$$

here

$$\widehat{u}_n = \frac{\langle u, S_n(x) x e^{-x/2} \rangle_\lambda}{\|S_n(x) x e^{-x/2}\|_\lambda^2}.$$

再次通过分部积分可得

$$\widehat{u}_n \|S_n(x) x e^{-x/2}\|_\lambda^2 = \lambda \int_0^{+\infty} u(x) S_n(x) \frac{1}{x} x e^{-x/2} dx + \int_0^{+\infty} u'(x) [S_n(x) x e^{-x/2}]' dx$$

$$= \int_0^{+\infty} [-u''(x) + \lambda \frac{1}{x} u(x)] S_n(x) x e^{-x/2} dx$$
$$= \int_0^{+\infty} f(x) S_n(x) x e^{-x/2} dx.$$

因此，要计算边值问题解 $u(x)$ 的傅里叶-索博列夫系数，我们不需要求解任何线性方程组，只需计算积分

$$f(n) := \int_0^{+\infty} f(x) S_n(x) x e^{-x/2} dx,$$

以及 Sobolev 范数 $s(n) = \|S_n(x) x e^{-x/2}\|_\lambda^2$。

利用拉盖尔多项式与拉盖尔-索博列夫多项式之间的连接公式，可以推导出递归生成序列 $\{f(n)\}_{n\geqslant 0}$ 的方法。事实上，若记

$$g(n) := \int_0^{+\infty} f(x) L_n^{(1)}(x) x e^{-x/2} dx$$

由 (3.4) 得

$$g(n) = f(n) + a_{n-1} f(n-1),$$

这就给出了所述的递归方法，假设初始条件为

$$f(0) = g(0) = \int_0^{+\infty} f(x) x e^{-x/2} dx.$$

Sobolev 范数 $s(n)$ 满足类似的递推关系。由 (3.4) 得

$$\|L_n^{(1)}(x) x e^{-x/2}\|_\lambda^2 = s(n) + a_{n-1}^2 s(n-1),$$

并利用 (3.3)，我们得到递推关系

$$s(n) = (n+1)\left(\lambda + \frac{n+1}{2}\right) - a_{n-1}^2 s(n-1),$$

初始条件为 $s(0) = \lambda + 1/2$.

一般而言，边值问题 (3.1) 的解的拉盖尔-索博列夫展开的部分和可以递归地求得。记

$$\mathcal{S}_n(u,x) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{u}_k S_k(x) x e^{-x/2}.$$

初始条件为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\lambda+1}, \\ f(0) = g(0) &= \int_0^{+\infty} f(x) x e^{-x/2} dx, \\ s(0) &= \lambda + 1/2, \\ S_0(x) &= 1, \\ \mathcal{S}_0(u,x) &= x e^{-x/2}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

递推关系可按如下方式进行

$$a_n = \frac{n+2}{4\lambda + 2(n+1) - n a_{n-1}},$$

$$
\begin{aligned}
g(n) &= \int_0^{+\infty} f(x) L_n^{(1)}(x) x e^{-x/2} dx, \\
f(n) &= g(n) - a_{n-1} f(n-1), \\
s(n) &= (n+1)\left(\lambda + \frac{n+1}{2}\right) - a_{n-1}^2 s(n-1), \\
S_n(x) &= L_n^{(1)}(x) - a_{n-1} S_{n-1}(x), \\
\mathcal{S}_n(u,x) &= \mathcal{S}_{n-1}(u,x) + \frac{f(n)}{s(n)} S_n(x) x e^{-x/2}.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

请注意，在此计算中，唯一需要的积分是 $g(n)$的值，它仅取决于 $f(x)$和 $L_n^{(1)}(x)$。这些正是基于拉盖尔多项式的谱方法中需要计算的积分。

5. 数值实验

本节中，我们考察了一些数值实验，旨在评估索博列夫谱方法在区间 $(0, +\infty)$ 上求解狄利克雷边值问题的可靠性和精度。

我们重点研究一个与非齐次薛定谔方程相关的二阶狄利克雷边值问题，其势函数为 $V(x) = 1/x$

$$
\begin{aligned}
-u''(x) + \lambda \frac{1}{x} u(x) &= f(x), \\
u(0) = u(+\infty) &= 0,
\end{aligned}
$$

以及 $\lambda = 1$。

根据 Boyd [3], ，基于拉盖尔多项式构造的近似解的收敛性受解在趋于无穷大时的行为影响。因此，就这一点而言，我们无法预期拉盖尔-索博列夫近似解会有更好的表现。不过，正如预期的那样，对于趋于零时呈指数衰减的解，基于拉盖尔-索博列夫多项式构造的近似解能够实现谱收敛。为说明这一点，我们分析 $f(x) = e^{-x}(3\cos x - 2(-1+x)\sin x)$ 的情形。注意，该边值问题的解为 $u(x) = x\cos x e^{-x}$。

关于索博列夫内积正交的正交函数序列 $\{S_n\, x\, e^{-x/2}\}_{n \geqslant 0}$

$$
\langle u, v \rangle_\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda \frac{1}{x} u(x)\, v(x)\, dx + \int_0^{+\infty} u'(x)\, v'(x)\, dx
$$

可通过应用递推关系（4.1）和（4.2）轻松计算。特别是，前五个索伯列夫多项式为

$$
\begin{aligned}
S_0(x) &= 1, \\
S_1(x) &= \frac{5}{3} - x, \\
S_2(x) &= \frac{x^2}{2} - \frac{60x}{23} + \frac{54}{23}, \\
S_3(x) &= -\frac{x^3}{6} + \frac{189x^2}{106} - \frac{258x}{53} + \frac{158}{53},
\end{aligned}
$$

$$S_4(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{1285x^3}{1701} + \frac{25x^2}{6} - \frac{1460x}{189} + \frac{2045}{567}.$$

记为

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \hat{u}_n S_n \, x \, e^{-x/2}$$

$u(x)$ 的傅里叶–索博列夫展开，其中系数 $\hat{}u_n$ 满足

$$\begin{aligned}\hat{u}_n \|S_n \, x \, e^{-x/2}\|_\lambda^2 &= \int_0^{+\infty} \lambda \frac{1}{x} u(x) S_n \, x \, e^{-x/2} dx + \int_0^{+\infty} u'(x) [\int_0^{+\infty}]' dx \\ &= \int_0^{+\infty} [-u''(x) + \lambda \frac{1}{x} u(x)] S_n \, x \, e^{-x/2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} f(x) S_n \, x \, e^{-x/2} dx.\end{aligned}$$

边值问题解的拉盖尔–索博列夫展开的部分和，可以利用递推关系 (4.2) 并结合初始条件 (4.1) 得到。

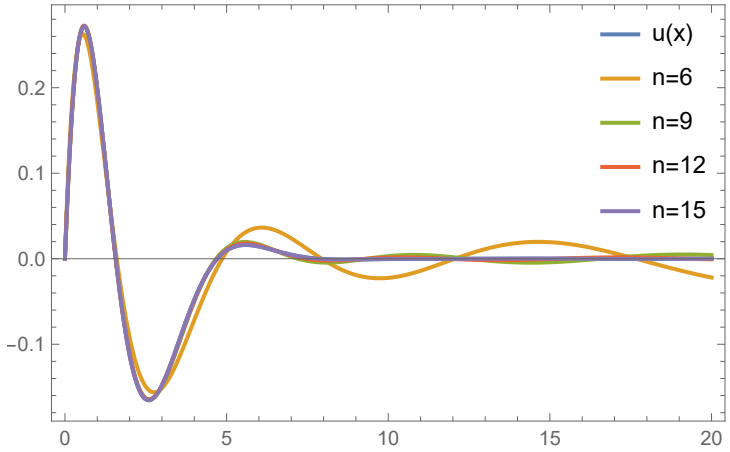

FIGURE 5.1. 解 $u(x)$ 及其傅里叶-索博列夫部分和 $\mathcal{S}_n(u,x)$，对应 $n = 6,9,12,15$。

在图 5.1 中，我们绘出了解 $u(x)$ 及其对应的傅里叶–索博列夫部分和

$$\mathcal{S}_n(u,x) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{u}_k S_k(x) x e^{-x/2},$$

对于 $n = 6,9,12,15$.

在图 5.2 中，我们展示了 Sobolev 范数意义下误差平方的对数图

$$\epsilon_n = \|u(x) - \mathcal{S}_n(u,x)\|_\lambda^2,$$

对 $n = 0$，1、.....、20。图中清楚地显示了指数收敛率。值得注意的是，这不仅适用于傅里叶-索博列夫部分和，也适用于其一阶导数。

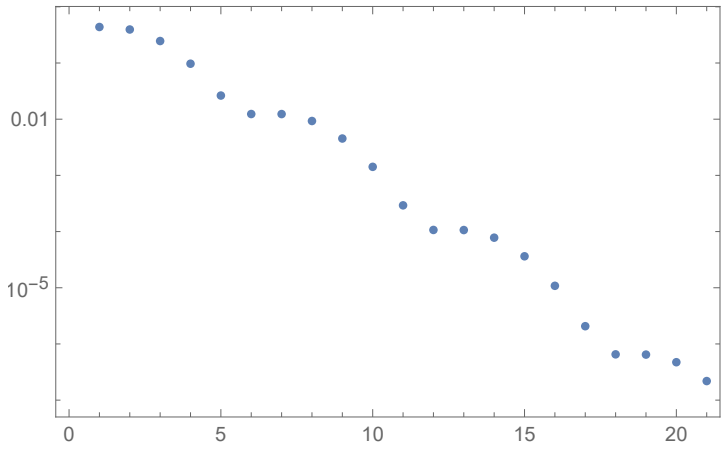

FIGURE 5.2. $n = 0$的 1、.....、20 的误差对数图。

在下面的例子中，我们考虑一个在无穷远处不呈指数衰减的解。

$$u(x) = 10\frac{x\cos x}{(x+1)^3}.$$

在这种情况下

$$f(x) = 10\frac{(7 + x(-3 + x(3 + x)))\cos x - 2(-1 + x + 2x^2)\sin x}{(x+1)^5}.$$

我们再次计算了 $n = 0$ 1、.....、20 的 Laguerre–Sobolev 逼近。

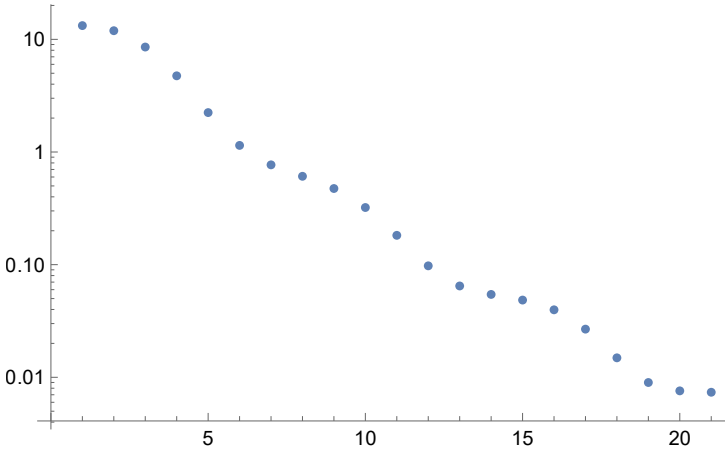

FIGURE 5.3. $n = 0$的 1、.....、20 的误差对数图，针对具有有理衰减的解。

图 5.3 展示了 Sobolev 范数下误差平方的对数图

$$\epsilon_n = \|u(x) - \mathcal{S}_n(u, x)\|_\lambda^2,$$

对于 $n = 0$，1，.....，20。该图清楚地表明逼近式的性能更差。

References

[1] Q. Ai, H. Li, Z. Wang, *Diagonalized Legendre spectral methods using Sobolev orthogonal polynomals for elliptic boundary value problems* **127** 2018 196 210 , 《应用数值数学》（），-。[2] C. Bernardi, Y. Maday, *Spectral methods*。《数值分析手册》，第V卷，209-485，北荷兰，阿姆斯特丹，1997。[3] J. Boyd, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods, 2nd edn.* Dover，纽约，2001。[4] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang, *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains* 2006 。Springer，柏林。[5] A. Dea ˜ ´ *Strong and ratio asymptotics for Laguerre polynomials revisited* **403** 2013 477 486 no, E. J. Huertas, F. Marcellan, 。《数学分析与应用杂志》，（），-。[6] L. Fern ´ ´ ´ ˜ *Sobolev orthogonal polynomials and* andez, F. *spectral methods in boundary value problems* **200** 2024 254 272 Marcellan, T. E. Perez, M. A. Pinar, 。《应用数值数学》（），-。[7] D. Funaro, *Polynomial Approximation of Differential Equations*。Springer-Verlag，柏林，1992。[8] F. Liu, Z. *A fully diagonalized spectral method using generalized Laguerre* Wang, H. Li, *functions on the half line* **43** 2017 1227 1259 。《计算数学进展》，（），-。[9] F. Marcell ´ ´ *Strong and Plancherel–Rotach asymptotics of nondiag-* an, J. J. *onal Laguerre–Sobolev orthogonal polynomials* **110** 2001 54 73 Moreno-Balcazar, 。《逼近论杂志》（），-。[10] J. Shen, L.L. Wang, *Some recent advances on spectral methods for unbounded domains*。《计算物理通讯》**5**（2009），195-241。[11] G. Szeg˝o, *Orthogonal Polynomials*。美国数学会专题论文集第23卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1975。第四版。

(C. F. Bracciali) Departamento de Matemática, IBILCE, UNESP - Universidade Estad-ual Paulista, 15054-000, São José do Rio Preto, SP (Brazil)
Email address: cleonice.bracciali@unesp.br(M. A. Pi ˜ Instituto de Matemáticas UGR – IMAG & Departamento de Matemática nar), Aplicada Facultad de Ciencias. Universidad de Granada (Spain)
Email address: mpinar@ugr.es