纯化双松弛时间格子玻尔兹曼方法：从 TRT 中移除幽灵模态以增强稳定性

Yuan Y u[a, b, c, *]、Yaolong Yu[a]、Yuting Zhou[a]、Siwei Chen[a]、Haizhuan Yuan[a, *]、Shi Shu[a, *]

[a]湘潭大学数学与计算科学学院，湘潭，*411105*，中国[b]湖南省应用数学中心，湘潭，*411105*，中国[c]湖南省科学与工程计算及仿真重点实验室，湘潭大学，湘潭，*411105*，中国

arXiv:2602.06686v1 [physics.flu-dyn] 6 Feb 2026

摘要

双松弛时间（TRT）格子玻尔兹曼模型因其算法简单且边界精度可调而被广泛采用。然而，其碰撞算子会弛豫完整的对称非平衡分量，从而隐式保留非流体动力学幽灵模态，导致数值稳定性下降，尤其是在高雷诺数下。在本文中，我们建立了 TRT 框架下幽灵模态滤波与正则化之间严格的理论联系。具体而言，通过将离散速度空间正交分解为流体动力学子空间和非流体动力学子空间，我们证明了近期提出的 TRT 正则化格子玻尔兹曼（TRT-RLB）模型，在数学上等价于显式移除幽灵模态的标准 TRT 模型。对于 D2Q9 和 D3Q19 格子，该等价关系严格成立，因为其对称子空间和反对称子空间完全由物理相关的厄米特模态及有限数量的可识别幽灵模态张成。基于这一发现，我们提出了纯化 TRT（P-TRT）模型，通过简单的代数幽灵模态扣除，而非代价高昂的张量投影，实现了正则化级稳定性。对于 D2Q9格子，总非平衡碰撞成本从每节点 180 次浮点运算降低至 52 次，降幅达 71%。矩空间中的线性稳定性分析进一步表明，P-TRT 碰撞算子会湮灭幽灵特征值，从而证明其谱半径不超过标准 TRT 的谱半径，且其数值稳定性完全由流体动力学模态决定。基准模拟包括雷诺数最高达 10^7，的双剪切层、衰减 Taylor–Green 涡、力驱动 Poiseuille 流以及方柱绕流的爬行流，结果证实，P-TRT模型在保留 TRT族特有简单性的同时，保持了原始TRT-RLB公式的稳定性、二阶精度和无滑移边界特性。

关键词： 格子玻尔兹曼方法、双松弛时间、幽灵模态、正则化、非流体动力学模态、正交分解

*通讯作者电子邮箱： yuyuan@xtu.edu.cn (Yuan Yu)，yhz@xtu.edu.cn (HaizhuanYuan),shushi@xtu.edu.cn (Shi Shu)

1. 引言

过去二十年来，格子玻尔兹曼方法（LBM）已成为计算流体力学（CFD）中广受欢迎的数值工具。与离散化宏观连续介质方程的传统方法不同，LBM 从介观动力学视角模拟流体动力学。这一根本差异赋予其独特优势，尤其是固有的并行性，以及轻松处理复杂运动边界条件的能力。因此，LBM 的通用性使其广泛应用于多种复杂流动现象，包括湍流[1, 2, 3, 4], 多相流 [5, 6], 多孔介质中的输运 [7, 8], 燃烧过程 [9, 10, 11, 12], 蒸发和相变现象 [13, 14, 15],以及血流等生物系统 [16, 17, 18]。若要深入理解该方法的理论基础及其多样化应用，建议参阅几篇全面的综述[9, 19, 20] 和专著 [21, 22] 。

在大多数实际实现中，标准格子 Bhatnagar–Gross–Krook（LBGK）模型 [23, 24] 因算法简单，仍是应用最广泛的选择。尽管广受欢迎，单松弛时间形式仍存在固有局限，往往会在高雷诺数下导致数值不稳定性，并在固体边界处产生与黏度相关的误差。为克服这些局限，研究中形成了两条主要发展路线。第一条路线着重于通过引入多重松弛率来丰富碰撞算子。具有代表性的方法包括多重松弛时间（MRT）模型 [25, 26, 27], ，它以彼此独立的速率弛豫不同的矩；以及累积量模型 [28, 29, 30, 31], ，它弛豫累积量而非原始矩，从而进一步增强伽利略不变性。其中，双松弛时间（TRT）模型 [32, 33, 34] 以其简洁优雅的特点脱颖而出：它仅区分对称松弛过程和反对称松弛过程，但这一最小扩展已足以通过恰当选择自由参数，消除反弹边界处与黏度相关的数值滑移。这种简洁性与边界精度的结合，使 TRT 模型成为实践中应用最广泛的 LBM 形式之一。第二条发展路线是正则化格子 Boltzmann（RLB）方法 [35, 36, 37, 38, 39, 40], ，它在碰撞步骤之前滤除高阶非平衡模态。RLB 方法仅利用流体动力学相关分量重构非平衡分布函数，从而有效抑制伪模态，并在高雷诺数模拟中展现出更优的稳定性 [41]。然而，采用简单反弹边界格式时，标准正则化模型仍会出现数值滑移。

连接这两条发展脉络的一个关键概念是非流体动力学幽灵模态。在任何格子模型的离散速度空间中，自由度总数都多于守恒流体动力学量的数量。多出的自由度对应于非物理模态，称为幽灵模态；它们不参与宏观守恒定律，但可能在模拟过程中被激发 [25]。在对 MRT 碰撞算子的里程碑式分析中，Lallemand 和 Luo[25] 证明，这些幽灵模态的阻尼率会显著影响计算格式的数值稳定性。幽灵模态阻尼不足时，可能会不受控制地增长并引发数值发散，在分辨率不足或高雷诺数模拟中尤为明显。从这一角度看，正则化过程可解释为一种谱滤波器，它将非平衡分布投影到流体动力学子空间，从而消除所有幽灵模态。相反，标准 TRT 碰撞算子会松弛完整的对称和反对称非平衡

分量，因此会隐式保留幽灵模态。这一观察引出了一个自然的问题：能否在 TRT框架内，仅通过显式移除幽灵模态，而不借助完整的 Hermite 张量运算，实现正则化级稳定性?

为结合正则化的稳定性与 TRT 的边界精度，Yu 等人 [42] 最近提出了 TRT-RLB 模型。该模型对非平衡分布函数进行三阶 Hermite 展开，并为三阶矩引入一个自由弛豫参数 $\tau_{s,2}$ 。数值实验表明，TRT-RLB 模型兼具高稳定性和零数值滑移。然而，其原始公式仍存在两个重要问题。在实际应用方面，显式计算三阶 Hermite 投影涉及复杂的张量缩并，显著增加了每个时间步的浮点运算次数。在理论方面，基于 Hermite 的正则化与 TRT 碰撞算子的底层结构之间的关系仍不清楚：正则化究竟消除了什么？它与格子的非流体动力学模态有何关联?

在本研究中，我们同时回答这两个问题。借助离散速度空间在流体动力学子空间与非流体动力学子空间上的正交分解，我们证明，TRT-RLB 模型采用的基于 Hermite 的正则化在数学上等价于 从标准 TRT 碰撞算子中显式移除幽灵模态。对于 D2Q9 和 D3Q19 格子，这种等价关系是精确成立的：对称子空间完全由质量模态、应力模态以及有限个可识别的幽灵模态张成，而反对称子空间则恰好由动量模态和能流模态张成。因此，计算量较大的张量投影可以替换为简单的幽灵模态贡献代数减法，以极低的计算成本得到相同的碰撞后状态。基于这一发现，我们提出纯化 TRT (P-TRT)模型，通过显式滤除标准 TRT 中的幽灵模态对其进行升级。对于 TRT 的使用者，P-TRT 提供了一种改动极小且物理意义直观的方案，可将稳定性提升至正则化方法的水平。对于 TRT-RLB 的使用者，它则提供了一种等效但效率显著更高的算法。进一步的矩空间线性稳定性分析表明，消除幽灵模态可确保 P-TRT 格式的稳定性不低于标准 TRT，且幽灵特征值固定为零。基准模拟证实，P-TRT 模型在保留原始 TRT-RLB公式的稳定性、精度和无滑移边界特性的同时，将 D2Q9格子上的非平衡碰撞运算减少了 71%。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍数学框架：简要回顾原始TRT-RLB 模型、阐明 Hermite 投影与幽灵模态滤波等价性的正交分解理论、由此得到的 P-TRT 公式及其最优实现策略，以及比较 P-TRT 与标准 TRT 碰撞算子谱性质的线性稳定性分析。第 3 节通过四个基准问题进行数值验证：双剪切层、衰减 Taylor–Green 涡、力驱动 Poiseuille 流，以及方柱绕流的爬行流。最后，第 4 节给出结论。

2. 纯化 TRT（P-TRT）格子玻尔兹曼模型

2.1. 格子玻尔兹曼框架与符号

宏观流体动力学由弱可压缩 Navier–Stokes 方程（NSEs）控制。利用爱因斯坦求和约定，它们可表示为:

$$\partial_t \rho + \partial_\alpha(\rho u_\alpha) = 0, \tag{1a}$$

$$\partial_t(\rho u_\alpha) + \partial_\beta(\rho u_\alpha u_\beta + \rho c_s^2 \delta_{\alpha\beta}) = \partial_\beta[\mu(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha)] + F_\alpha, \tag{1b}$$

其中 ρ 为流体密度， μ 为动力黏度， $\delta_{\alpha\beta}$ 为克罗内克δ， c_s为格子声速。项 u_α 和 F_α 分别表示 α方向上的速度分量和体力分量。

本文采用标准 D2Q9 格子模型，其中离散速度 $\boldsymbol{e}_i$和权重系数 w_i 由下式给出:

$$\begin{pmatrix} e_{ix} \\ e_{iy} \end{pmatrix} = c \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad w_i = \begin{cases} 4/9, & i = 0, \\ 1/9, & i = 1\ldots4, \\ 1/36, & i = 5\ldots8, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $c = \Delta x/\Delta t$ 为格子速度， $c_s = c/\sqrt{3}$ 为声速。对于每个速度索引 i，索引 i 表示满足 $\boldsymbol{e}_{\bar{i}} = -\boldsymbol{e}_i$ 和 $w_{\bar{i}} = w_i$的相反方向。

平衡分布函数 f_i^{eq} 展开至三阶厄米多项式，以尽量减小离散误差:

$$f_i^{\mathrm{eq}} = w_i \rho \left\{ 1 + \frac{\mathcal{H}_{i,\alpha}^{(1)}}{c_s^2} u_\alpha + \frac{\mathcal{H}_{i,\alpha\beta}^{(2)}}{2c_s^4} u_\alpha u_\beta + \frac{\mathcal{H}_{i,\alpha\beta\gamma}^{(3)}}{6c_s^6} u_\alpha u_\beta u_\gamma \right\}, \tag{3}$$

其中埃尔米特多项式张量定义为:

$$\mathcal{H}_i^{(0)} = 1, \tag{4a}$$

$$\mathcal{H}_{i,\alpha}^{(1)} = e_{i\alpha}, \tag{4b}$$

$$\mathcal{H}_{i,\alpha\beta}^{(2)} = e_{i\alpha} e_{i\beta} - c_s^2 \delta_{\alpha\beta}, \tag{4c}$$

$$\mathcal{H}_{i,\alpha\beta\gamma}^{(3)} = e_{i\alpha} e_{i\beta} e_{i\gamma} - c_s^2 (e_{i\alpha}\delta_{\beta\gamma} + e_{i\beta}\delta_{\gamma\alpha} + e_{i\gamma}\delta_{\alpha\beta}). \tag{4d}$$

这些多项式满足奇偶性关系 $\mathcal{H}_{\bar{i}}^{(n)} = (-1)^n \mathcal{H}_i^{(n)}$ ，即偶数阶多项式具有对称性，而奇数阶多项式在速度反演下具有反对称性。该性质将在后续分析中发挥核心作用。

非平衡分布函数定义为 $f_i^{\mathrm{neq}} = f_i - f_i^{\mathrm{eq}}$。将其投影到埃尔米特基上，可得到非平衡矩:

$$\mathcal{A}_{\mathbf{k}}^{\mathrm{neq}} = \sum_i \mathcal{H}_{i,\mathbf{k}}^{(n)} f_i^{\mathrm{neq}}, \quad \mathbf{k} \in \{\alpha,\ \alpha\beta,\ \alpha\beta\gamma\}. \tag{5}$$

关于外部体力的处理，本文考虑了两种方案:

方案 *I*: *Guo* 力源格式。 Guo 等人提出的广泛使用的格式 [43]可确保二阶精度，并消除离散格子效应:

$$S_i^{\mathrm{I}} = w_i \left[\left(1 - \frac{1}{2\tau_{s,1}}\right) \frac{(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{F})}{c_s^4} + \left(1 - \frac{1}{2\tau_{s,2}}\right) \frac{(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{F}}{c_s^2} \right]. \tag{6}$$

方案 *II*：简化投影方案。 在原始TRT-RLB实现[42], 中采用了一种简化策略，由一阶力投影辅以补偿项 G_i 构成，用以校正三次速度误差：

$$S_i^{\mathrm{II}} = \left(1 - \frac{1}{2\tau_{s,1}}\right) w_i \frac{\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{F}}{c_s^2} + G_i, \tag{7}$$

其中

$$G_i = -w_i \frac{\mathcal{H}^{(2)}_{i,\alpha\beta}}{6c_s^6} \left(1 - \frac{1}{2\tau_{s,1}}\right) \partial_\gamma \Phi_{\alpha\beta\gamma}, \tag{8}$$

其中 $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$ 定义为 $\Phi_{xxx} = \rho u_x^3$、 $\Phi_{yyy} = \rho u_y^3$，否则为零。

在两种方案中，宏观量通过半步力修正来计算，以达到二阶时间精度 [44]:

$$\rho = \sum_i f_i, \qquad \rho \boldsymbol{u} = \sum_i \boldsymbol{e}_i f_i + \frac{\Delta t}{2} \boldsymbol{F}. \tag{9}$$

2.2. TRT-RLB 模型：通过 *Hermite* 投影进行正则化

Yu 等人 [42], 最近提出的 TRT-RLB 模型，将正则化碰撞算子增强的稳定性与双弛豫时间方案固有的边界精度相结合。其演化方程为：

$$f_i(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i \Delta t,\, t + \Delta t) = f_i^{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{x}, t) + \left(1 - \frac{1}{\tau_{s,1}}\right) \mathcal{R}_i^{(2)} + \left(1 - \frac{1}{\tau_{s,2}}\right) \mathcal{R}_i^{(3)} + S_i \Delta t, \tag{10}$$

其中 $\tau_{s,1}$ 控制一阶和二阶非平衡矩的弛豫，这些矩与物理输运系数直接相关；而 $\tau_{s,2}$ 是一个自由参数，仅用于控制三阶非平衡矩。源项 S_i 由方案 I (6) 或方案 II (7) 给出。物理黏度与对称弛豫时间的关系为 $\mu = \rho c_s^2(\tau_{s,1} - \Delta t/2)$，而 $\tau_{s,2}$ 是一个控制奇非平衡模态弛豫的自由参数。

该模型的关键特征在于正则化项 $\mathcal{R}_i^{(2)}$ 和 $\mathcal{R}_i^{(3)}$ 。TRT-RLB 模型并非在碰撞步骤中使用原始非平衡分布，而是仅根据其 Hermite 投影重构非平衡部分：

$$\mathcal{R}_i^{(2)} = w_i \frac{\mathcal{H}^{(2)}_{i,\alpha\beta}}{2c_s^4} \mathcal{A}^{\mathrm{neq}}_{\alpha\beta}, \qquad \mathcal{R}_i^{(3)} = w_i \frac{\mathcal{H}^{(3)}_{i,\alpha\beta\gamma}}{6c_s^6} \mathcal{A}^{\mathrm{neq}}_{\alpha\beta\gamma}. \tag{11}$$

该过程本质上是将非平衡分布投影到由水动力学相关 Hermite 多项式张成的子空间上。f_i^{neq} 中位于该子空间之外的任何分量——即任何非水动力学模态——都会在重构过程中被舍弃。正是这种滤波使 TRT-RLB 模型相较于标准 TRT 具有更优的稳定性。

然而，显式计算公式（11）的计算开销很大。二阶项需要通过对所有离散速度求和，计算应力张量的 $D(D+1)/2$ 个独立分量$\mathcal{A}^{\mathrm{neq}}_{\alpha\beta}$ ，随后进行张量缩并以重构分布函数。三阶项对能量通量张量 $\mathcal{A}^{\mathrm{neq}}_{\alpha\beta\gamma}$ 也涉及类似的过程。这种“投影–重构”循环构成了原始TRT-RLB 算法的主要计算开销。因此，一个自然而然的问题是：能否通过更简单的代数运算，在不显式计算 Hermite 投影的情况下实现相同的滤波效果？正如我们将在下一小节中展示的那样，答案是肯定的。

2.3. 正交分解与幽灵模态识别

本文的核心理论贡献在于证明，上文所述的基于 Hermite 的正则化可在正交子空间分解框架下重新表述为一种幽灵模态滤波操作。本小节将建立所需的数学结构。

2.3.1. 速度空间的奇偶分解

定义在具有反演对称性 ($\boldsymbol{e}_{\bar{i}} = -\boldsymbol{e}_i, w_{\bar{i}} = w_i$) 的格子上的任意分布函数 f_i，均可唯一分解为对称部分和反对称部分 [21]:

$$f_i^+ = \frac{1}{2}(f_i + f_{\bar{i}}), \qquad f_i^- = \frac{1}{2}(f_i - f_{\bar{i}}), \tag{12}$$

满足 $f_i^+ = f_{\bar{i}}^+$ 和 $f_i^- = -f_{\bar{i}}^-$。所有对称分布构成对称子空间 $\mathcal{S}$，所有反对称分布构成反对称子空间 $\mathcal{A}$。这两个子空间彼此正交，且共同张成完整的 Q 维速度空间: $\mathbb{R}^Q = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$。

对于具有 Q 个速度的格子，其中 Q_0 个为自反演速度 ($\boldsymbol{e}_i = \mathbf{0}$)，其余 $Q_p =$ 个速度 $(Q - Q_0)/2$ 构成反演对，子空间的维数为:

$$\dim(\mathcal{S}) = Q_0 + Q_p, \qquad \dim(\mathcal{A}) = Q_p. \tag{13}$$

对于 D2Q9 格子（$Q = 9, Q_0 = 1, Q_p = 4$），这给出 $\dim(\mathcal{S}) = 5$ 和 $\dim(\mathcal{A}) = 4$。

厄米多项式的奇偶关系 $\mathcal{H}_{\bar{i}}^{(n)} = (-1)^n \mathcal{H}_i^{(n)}$ 表明，偶数阶厄米多项式（$n = 0$，2）属于 $\mathcal{S}$，而奇数阶多项式（$n = 1$，3）属于 $\mathcal{A}$。非平衡分布继承了这种分解:

$$f_i^{\mathrm{neq},+} = \frac{1}{2}(f_i^{\mathrm{neq}} + f_{\bar{i}}^{\mathrm{neq}}), \qquad f_i^{\mathrm{neq},-} = \frac{1}{2}(f_i^{\mathrm{neq}} - f_{\bar{i}}^{\mathrm{neq}}). \tag{14}$$

2.3.2. 对称子空间中的幽灵模态

现在我们来考察对称子空间 $\mathcal{S}$ 的内部结构。位于 $\mathcal{S}$ 中的偶数阶厄米多项式由零阶模态（$\mathcal{H}^{(0)} = 1$，张成一维子空间 $\mathcal{S}^{(0)}$）和二阶应力模态（$\mathcal{H}_{\alpha\beta}^{(2)}$，张成维数为 $M_2 = D(D+1)/2$ 的子空间 $\mathcal{S}^{(2)}$）组成。然而，对于大多数标准格子而言，这些流体动力学模态并未涵盖整个对称子空间。其余维度对应于没有宏观物理对应物的高阶偶模态——这些就是幽灵模态。

形式上，对称子空间可进行如下正交分解:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}^{(0)} \oplus \mathcal{S}^{(2)} \oplus \mathcal{S}^{(G)}, \tag{15}$$

其中，$\mathcal{S}^{(G)}$ 表示幽灵模态子空间，其维数为

$$N_G = \dim(\mathcal{S}) - 1 - \frac{D(D+1)}{2}. \tag{16}$$

对于 D2Q9 格子，$N_G = 5 - 1 - 3 = 1$，这意味着存在一个幽灵模态。其显式形式为:

$$\phi_i^{(G)} = (e_{ix}^2 - c_s^2)(e_{iy}^2 - c_s^2), \tag{17}$$

表1：常见格子模型的对称子空间结构。

格子	dim($\mathcal{S}$)	dim($\mathcal{S}^{(0)}$)	dim($\mathcal{S}^{(2)}$)	N_G	幽灵模态阶数
D2Q9	5	1	3	1	4th
D3Q19	10	1	6	3	4th
D3Q27	14	1	6	7	第 4 阶和第 6 阶

其加权范数为 $N_G^{(\phi)} = \sum_i w_i [\phi_i^{(G)}]^2 = 4c_s^8$。对于 D3Q19 格子，$N_G = 10 - 1 - 6 = 3$，可针对每一对 $\alpha \neq \beta$ 确定三个正交幽灵模态，形式为 $(e_{i\alpha}^2 - c_s^2)(e_{i\beta}^2 - c_s^2)$。对于 D3Q27 格子，$N_G = 7$，其中包含四阶和六阶幽灵模态。附录A列出了每种格子的幽灵模态完整清单。

幽灵子空间上的投影算子定义为：

$$(\hat{P}^{(G)} f^{\mathrm{neq}})_i = \sum_{k=1}^{N_G} \frac{w_i \, \phi_{i,k}^{(G)}}{N_{G,k}^{(\phi)}} \sum_j \phi_{j,k}^{(G)} \, f_j^{\mathrm{neq}}, \tag{18}$$

其中，对所有 N_G 正交的幽灵基函数 $\phi_{i\,k}^{(G)}$，求和。

2.3.3. 反对称子空间的零空间性质

反对称子空间 $\mathcal{A}$ 由奇数阶厄米多项式张成：一阶动量模态（$\mathcal{H}_\alpha^{(1)}$，张成维数为 D 的 $\mathcal{A}^{(1)}$）以及三阶能量通量模态（$\mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma}^{(3)}$，张成维数为 N_3的 $\mathcal{A}^{(3)}$）。与对称情形不同，对于 D2Q9 和 D3Q19 格子，这些模态完全穷尽了反对称子空间：

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(1)} \oplus \mathcal{A}^{(3)}, \qquad \text{with} \quad \dim(\mathcal{A}) = D + N_3. \tag{19}$$

也就是说，不存在反对称幽灵模态。这是格子混叠性质的结果：对于满足 $|e_{i\alpha}| \in \{0, c\}$ 的标准格子，恒等式 $e_{i\alpha}^3 = c^2 e_{i\alpha}$ 意味着纯三次厄米多项式（$\mathcal{H}_{\alpha\alpha\alpha}^{(3)}$）恒等于零，并且无法利用现有速度分量构造独立的五阶或更高阶反对称模态。

表 2 总结了反对称子空间的结构。值得注意的是，对于 D2Q9格子，$D + N_3 = 2 + 2 = 4 =$维数为 $\mathcal{A}$；对于 D3Q19 格子，$D + N_3 = 3 + 6 = 9 =$维数为 $\mathcal{A}$。完备性条件 (19) 严格成立。然而，对于 D3Q27 格子，$D + N_3 = 3 + 7 = 10 < 13 =$维数为 $\mathcal{A}$，缺少的 3 个维度对应于五阶反对称模态（例如，$e_{ix}(e_{iy}^2 - c_s^2)(e_{iz}^2 - c_s^2)$及其循环置换）。

表 2：常见格子模型的反对称子空间结构。完备性条件 dim($\mathcal{A}$) $= D + N_3$ 决定三阶等价性是否精确。

格子	dim($\mathcal{A}$)	D	N_3	$D + N_3$	完备性
D2Q9	4	2	2	4	精确
D3Q19	9	3	6	9	精确
D3Q27	13	3	7	10	亏缺为3（五阶模态）

注 2.1。 D2Q9 和 D3Q19 不存在反对称幽灵模态，这是这些格子的结构属性，而非近似。这保证了任何反对称分布都可以精确表示为一阶和三阶

厄米特模态的线性组合。这一属性是下一小节所确立的精确等价关系的关键。

2.4. 等价定理：从投影到纯化

在建立正交分解后，我们现在证明核心结论：TRT-RLB 模型中采用的 Hermite 投影，在数学上等价于从原始非平衡分布中移除幽灵模态。

2.4.1. 二阶项：应力投影与幽灵模态扣除

定理 2.2 (二阶等价性**)**。 设对称子空间具有正交分解 $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{(0)} \oplus \mathcal{S}^{(2)} \oplus \mathcal{S}^{(G)}$，且 f_i^{neq} 满足质量守恒$\sum_i f_i^{\mathrm{neq}} = 0$。则二阶 ***Hermite*** 投影（方法 ***A***）等同于对称非平衡部分减去幽灵模态贡献（方法 ***B***）：

$$\underbrace{w_i \frac{\mathcal{H}^{(2)}_{i,\alpha\beta}}{2c_s^4} \mathcal{A}^{\mathrm{neq}}_{\alpha\beta}}_{\textit{Method A: Hermite projection}} = \underbrace{f_i^{\mathrm{neq},+} - (\hat{P}^{(G)} f^{\mathrm{neq}})_i}_{\textit{Method B: ghost subtraction}}. \tag{20}$$

证明。 分别用 $\hat{}P^{(0)}$、$\hat{}P^{(2)}$和 $\hat{}P^{(G)}$表示到 $\mathcal{S}^{(0)}$、 $\mathcal{S}^{(2)}$和 $\mathcal{S}^{(G)}$ 上的投影算子。对称子空间的正交完备性给出：

$$f_i^{\mathrm{neq},+} = (\hat{P}^{(0)} f^{\mathrm{neq}})_i + (\hat{P}^{(2)} f^{\mathrm{neq}})_i + (\hat{P}^{(G)} f^{\mathrm{neq}})_i, \tag{21}$$

其中我们利用了这一事实： $f^{\mathrm{neq}}{}_{,i}{}^{+}$是 $f_{\mathrm{neq}\,i}$在 $\mathcal{S}$上的投影，因为反对称分量 $f^{\mathrm{neq}}{}_{,i}{}^{-} \in \mathcal{A}$ 与 $\mathcal{S}$ 正交。

根据质量守恒， $\sum_i f_i^{\mathrm{neq}} = 0$，零阶投影为零：

$$(\hat{P}^{(0)} f^{\mathrm{neq}})_i = \frac{w_i \cdot 1}{\sum_j w_j \cdot 1^2} \sum_j f_j^{\mathrm{neq}} = w_i \cdot 0 = 0. \tag{22}$$

代入式 **(21)** 并重新整理可得：

$$(\hat{P}^{(2)} f^{\mathrm{neq}})_i = f_i^{\mathrm{neq},+} - (\hat{P}^{(G)} f^{\mathrm{neq}})_i. \tag{23}$$

左侧恰好是 Hermite 应力投影 $\mathcal{R}_i^{(2)}$，右侧则是幽灵模态扣除公式。

□ □

对于 D2Q9格子，单个幽灵模态 **(17)** 给出显式公式：

$$\mathcal{R}_i^{(2)}\big|_{\mathrm{D2Q9}} = f_i^{\mathrm{neq},+} - \frac{w_i\, \phi_i^{(G)}}{4c_s^8} \sum_{j=0}^{8} \phi_j^{(G)} f_j^{\mathrm{neq}}, \tag{24}$$

这将张量投影替换为单个标量扣除。

2.4.2. 三阶项：能量通量投影与反对称分量**定理 2.3** （三阶等价性）。设反对称子空间满足完备性条件 $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(1)} \oplus \mathcal{A}^{(3)}$，且 f_i^{neq} 满足动量约束$\sum_i e_{i\alpha} f_i^{\mathrm{neq}} = 0$ （即没有外力，或经过适当修正）。那么，三阶 ***Hermite*** 投影与反对称非平衡分量相同：

$$\underbrace{w_i \frac{\mathcal{H}^{(3)}_{i,\alpha\beta\gamma}}{6c_s^6} \mathcal{A}^{\mathrm{neq}}_{\alpha\beta\gamma}}_{\textit{Method A: Hermite projection}} = \underbrace{f_i^{\mathrm{neq},-}}_{\textit{Method B: antisymmetric part}}. \tag{25}$$

证明。根据完备性条件，反对称子空间由一阶和三阶厄米特模态张成。将相应的投影记为 $\hat{P}^{(1)}$ 和 $\hat{P}^{(3)}$:

$$f_i^{\mathrm{neq},-} = (\hat{P}^{(1)} f^{\mathrm{neq}})_i + (\hat{P}^{(3)} f^{\mathrm{neq}})_i. \tag{26}$$

一阶投影为:

$$(\hat{P}^{(1)} f^{\mathrm{neq}})_i = \sum_\alpha \frac{w_i\, e_{i\alpha}}{c_s^2} \underbrace{\sum_j e_{j\alpha} f_j^{\mathrm{neq}}}_{=0} = 0, \tag{27}$$

其中使用了动量约束。代入式（26）:

$$f_i^{\mathrm{neq},-} = (\hat{P}^{(3)} f^{\mathrm{neq}})_i = \mathcal{R}_i^{(3)}. \tag{28}$$

□ □

当存在外力 $\boldsymbol{F}$ 时，动量约束被修正为$\sum_i e_{i\alpha} f_{\mathrm{neq}_i} = -\frac{\Delta t}{2} F_\alpha$（参见式（9）），因此一阶投影不再为零。随后，通过一个简单的修正恢复等价性:

$$\mathcal{R}_i^{(3)} = f_i^{\mathrm{neq},-} + \frac{\Delta t}{2} \frac{w_i\, e_{i\alpha}}{c_s^2} F_\alpha. \tag{29}$$

注 2.4（D2Q9 和 D3Q19 格子的精确性）。 完备性条件 $\dim(\mathcal{A}) = D+N_3$ 对于 D2Q9 和 D3Q19 格子严格成立（参见表 2）。因此，定理 2.2 和 2.3 共同证明，对于这些格子，P-TRT 碰撞算子与 TRT-RLB碰撞算子在数学上完全相同。这两个模型在每个网格点和时间步产生相同的碰撞后分布函数，因而得到相同的数值解。

备注 2.5（D3Q27 的近似）。 对于 D3Q27 格子， $\mathcal{A}^{(1)} \oplus \mathcal{A}^{(3)}$之外存在三个五阶反对称模态。在这种情况下，反对称分量$f^{\mathrm{neq}}{}_{,i}^{-}$ 包含这些模态带来的少量残余贡献，因此式（25）仅近似成立。然而，在 Chapman–Enskog框架中，非平衡分布由克努森数的一阶项和二阶项主导，因此五阶贡献在实际应用中可以忽略不计。如果需要更高精度，可以通过减去五阶投影显式移除残余项，详情见附录A。

*2.5. P-TRT*模型

基于第 2.4 节确立的等价定理，本文现给出完整的 P-TRT 公式。该模型以代数上等价的幽灵模态扣除和反对称分解操作，取代计算开销巨大的厄米特张量投影，同时为 D2Q9 和 D3Q19 格子生成完全相同的碰撞后分布函数。

2.5.1. 演化方程

对于 D2Q9 和 D3Q19 格子，二阶和三阶等价性均严格成立，其 P-TRT演化方程为:

$$f_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_i\Delta t,\,t+\Delta t) = f_i^{\mathrm{eq}} + \left(1-\frac{1}{\tau_{s,1}}\right)\left(f_i^{\mathrm{neq},+} - \sum_{k=1}^{N_G}\frac{w_i\,\phi_{i,k}^{(G)}}{N_{G,k}^{(\phi)}}S_{G,k}\right) + \left(1-\frac{1}{\tau_{s,2}}\right)\left(f_i^{\mathrm{neq},-} + \frac{\Delta t}{2}\frac{w_i\,e_{i\alpha}}{c_s^2}F_\alpha\right) + S_i\Delta t, \tag{30}$$

其中，$S_{G,\,k} = \sum_j \phi_{j\,,\,k}^{(G)}\, f_j^{\mathrm{neq}}$ 是第 k 个幽灵模态对应的幽灵标量矩。对于 D2Q9，只需要一个幽灵模态（$k=1$）；对于 D3Q19，则有三个幽灵模态参与。

对于 D3Q27 格子，采用附录 A.3 中讨论的混合策略：二阶项保留原始张量投影（因为 $N_G = 7 > M_2 = 6$），而三阶项则采用反对称近似:

$$f_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_i\Delta t,\,t+\Delta t) = f_i^{\mathrm{eq}} + \left(1-\frac{1}{\tau_{s,1}}\right) w_i \frac{\mathcal{H}_{i,\alpha\beta}^{(2)}}{2c_s^4}\mathcal{A}_{\alpha\beta}^{\mathrm{neq}} + \left(1-\frac{1}{\tau_{s,2}}\right)\left(f_i^{\mathrm{neq},-} + \frac{\Delta t}{2}\frac{w_i\,e_{i\alpha}}{c_s^2}F_\alpha\right) + S_i\Delta t. \tag{31}$$

式（30）的物理含义十分明了：P-TRT 碰撞算子采用标准 TRT 结构——以不同速率松弛对称分量和反对称分量——但通过去除幽灵模态污染，对对称部分进行了净化 。这一项修改便使 TRT 格子玻尔兹曼格式达到正则化级稳定性。

2.5.2. 计算复杂度分析

为量化效率提升，我们比较了计算非平衡碰撞项所需的浮点运算（FLOPs）。计数约定如下：每次加/减法或乘法均计为一次运算。可预计算常数（权重、依赖于格子的系数）不计入。

对于二阶项，原始方法（张量投影）需要通过对 Q 个速度求和来计算 $M_2 = D(D+1)/2$ 个矩分量，然后进行分布函数重构，约需 $4M_2Q$ 次运算。P-TRT 幽灵模态扣除法的奇偶分解需要 $2Q_p$ 次运算，幽灵矩计算与扣除还需 $4N_GQ$ 次运算，总计 $2Q_p + 4N_GQ$ 次。

对于三阶项，原始方法涉及 N_3 个张量矩分量，约需 $4N_3Q$ 次运算。P-TRT 反对称方法仅需 $2Q_p$ 次运算（奇偶分解），因为反对称部分可作为二阶项所用同一分解的副产品获得。

表 3 列出了各项的详细运算次数，表 4 对比了不同模型的总非平衡碰撞成本。

有几点值得注意。首先，三阶项的效率提升最为显著，反对称分解在所有格子上都将成本降低了近一个数量级（89–97%）。其次，当 $N_G < M_2$ (D2Q9 和 D3Q19) 时，二阶项的幽灵模态扣除法具有优势；但当 $N_G > M_2$ (D3Q27) 时则不然，这正是采用混合策略的原因。第三，P-TRT 的总成本远比原始 TRT-RLB 更接近标准 TRT 基准，这证实了

表 3：二阶正则化项和三阶正则化项的每节点浮点运算次数。P-TRT方法会为每个项和每种格子选择计算成本较低的方案。

格子	二阶项		三阶项		P-TRT选择	
	原始项	幽灵子空间	原始项	反对称	2nd	3rd
D2Q9	108	**44**	72	**8**	幽灵子空间	反对称
D3Q19	456	**246**	456	**18**	幽灵子空间	反对称
D3Q27	**648**	782	756	**26**	原始项	反对称

表 4：不同模型的总非平衡碰撞成本（每节点浮点运算次数）。“标准 TRT”表示不进行正则化时奇偶分解和双速率弛豫的基准成本。

格子标准 TRT		原始TRT-RLB	P-TRT	相较于TRT-RLB的降幅
D2Q9	16	180	**52**	**71%**
D3Q19	36	912	**264**	**71%**
D3Q27	52	1404	**674**	**52%**

正则化开销已基本消除。第 3.1.2 节使用双剪切层基准对这些理论预测进行了经验验证。

2.6. 通过 *Chapman–Enskog* 分析验证宏观一致性

在本小节中，我们通过 Chapman–Enskog（CE）展开，验证 P-TRT 模型能够正确恢复 Navier–Stokes 方程 (1)。由于等价性定理（定理 2.2 和 2.3）表明，对于 D2Q9 和 D3Q19 格子，P-TRT 和 TRT-RLB 碰撞算子会产生相同的碰撞后分布函数，因此这两个模型必然得到相同的 CE 展开。尽管如此，我们仍在此使用 P-TRT 公式（方案 II）给出完整推导，使分析自成一体，并明确确认自由参数 $\tau_{s,\,2}$ 不会出现在恢复的宏观方程中。

We 采用关于小参数的标准多尺度展开 ε:

$$\begin{aligned} f_i = f_i^{(0)} + \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)}, \quad \partial_t = \varepsilon\partial_t^{(1)} + \varepsilon^2\partial_t^{(2)}, \quad \partial_\alpha = \varepsilon\partial_\alpha^{(1)}, \\ G_i = \varepsilon G_i^{(1)}, \quad F_i = \varepsilon F_i^{(1)}, \quad F_\alpha = \varepsilon F_\alpha^{(1)}. \end{aligned} \tag{32}$$

非平衡量也具有相应的展开：

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta}^{\mathrm{neq}} = \mathcal{A}_{\alpha\beta}^{\mathrm{neq},(0)} + \varepsilon\mathcal{A}_{\alpha\beta}^{\mathrm{neq},(1)} + \varepsilon^2\mathcal{A}_{\alpha\beta}^{\mathrm{neq},(2)}, \tag{33a}$$

$$f_i^{\mathrm{neq},-} = f_i^{\mathrm{neq},-,(0)} + \varepsilon f_i^{\mathrm{neq},-,(1)} + \varepsilon^2 f_i^{\mathrm{neq},-,(2)}. \tag{33b}$$

平衡分布 (3) 的矩为：

$$\sum_i e_{i\alpha} f_i^{\mathrm{eq}} = \rho u_\alpha, \tag{34a}$$

$$\sum_i e_{i\alpha} e_{i\beta} f_i^{\mathrm{eq}} = \rho u_\alpha u_\beta + \rho c_s^2 \delta_{\alpha\beta}, \tag{34b}$$

$$\sum_i e_{i\alpha} e_{i\beta} e_{i\gamma} f_i^{\mathrm{eq}} = \rho u_\alpha u_\beta u_\gamma + \rho c_s^2 u_\zeta \Delta_{\alpha\beta\gamma\zeta} - \frac{1}{3c_s^2}\Phi_{\alpha\beta\gamma}, \tag{34c}$$

其中 $\Delta_{\alpha\beta\gamma\zeta} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\zeta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\zeta} + \delta_{\alpha\zeta}\delta_{\beta\gamma}$。源项 (8)–(7) 的矩满足

$$\sum_i G_i = 0, \quad \sum_i e_{i\alpha} G_i = 0, \quad \sum_i e_{i\alpha} e_{i\beta} G_i = -\left(1 - \frac{1}{2\tau_{s,1}}\right) \partial_\gamma \Phi_{\alpha\beta\gamma}, \tag{35a}$$

$$\sum_i F_i = 0, \quad \sum_i e_{i\alpha} F_i = F_\alpha, \quad \sum_i e_{i\alpha} e_{i\beta} F_i = 0. \tag{35b}$$

泰勒展开。对 P-TRT演化方程 (30) 应用二阶泰勒展开，并代入多尺度展开 (32)–(33)，可得以下按尺度分解的方程。为简化记号，$\mathcal{R}_i^{(2)}$ 中的幽灵项扣除项省略不写，因为根据定理 2.2，它与 Hermite 应力投影完全相同。

在 ε^0 阶：

$$f_i^{(0)} = f_i^{\mathrm{eq}} + \left(1 - \frac{1}{\tau_{s,1}}\right) w_i \frac{\mathcal{H}_{i,\alpha\beta}^{(2)}}{2c_s^4} \mathcal{A}_{\alpha\beta}^{\mathrm{neq},(0)} + \left(1 - \frac{1}{\tau_{s,2}}\right) f_i^{\mathrm{neq},-,(0)}. \tag{36}$$

对方程 (36) 取二阶矩和三阶矩，得到 $\mathcal{A}^{\mathrm{neq},(0)}_{\alpha\beta} = 0$ 以及 $f^{\mathrm{neq},-,(0)}_{i} = 0$，由此：

$$f_i^{(0)} = f_i^{\mathrm{eq}}. \tag{37}$$

在 ε^1 阶：

$$f_i^{(1)} + \Delta t \left(\partial_t^{(1)} + e_{i\alpha}\partial_\alpha^{(1)}\right) f_i^{(0)} = -\frac{\Delta t}{2}\left(1 - \frac{1}{\tau_{s,1}}\right) w_i \frac{\mathcal{H}_{i,\alpha}^{(1)}}{c_s^2} F_\alpha^{(1)} + \left(1 - \frac{1}{\tau_{s,1}}\right) w_i \frac{\mathcal{H}_{i,\alpha\beta}^{(2)}}{2c_s^4} \mathcal{A}_{\alpha\beta}^{\mathrm{neq},(1)}$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{\tau_{s,2}}\right)\left(f_i^{\mathrm{neq},-,(1)} + \frac{1}{2} F_i^{(1)} \Delta t\right) + \left(1 - \frac{1}{2\tau_{s,1}}\right) F_i^{(1)} \Delta t + G_i^{(1)} \Delta t. \tag{38}$$

取零阶矩和一阶矩可得主阶守恒律：

$$\partial_t^{(1)} \rho + \partial_\alpha^{(1)} (\rho u_\alpha) = 0, \tag{39a}$$

$$\partial_t^{(1)} (\rho u_\alpha) + \partial_\beta^{(1)} (\rho u_\alpha u_\beta + \rho c_s^2 \delta_{\alpha\beta}) = F_\alpha^{(1)}. \tag{39b}$$

对式（38）取二阶矩，得到一阶非平衡应力：

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta}^{\mathrm{neq},(1)} = -\tau_{s,1} \Delta t \left\{ \partial_t^{(1)} (\rho u_\alpha u_\beta + \rho c_s^2 \delta_{\alpha\beta}) + \partial_\gamma^{(1)} (\rho u_\alpha u_\beta u_\gamma + \rho c_s^2 u_\zeta \Delta_{\alpha\beta\gamma\zeta}) - \frac{1}{2\tau_{s,1}} \partial_\gamma^{(1)} \Phi_{\alpha\beta\gamma} \right\}. \tag{40}$$

在 ε^2 阶：

$$f_i^{(2)} + \Delta t \left(\partial_t^{(1)} + e_{i\alpha}\partial_\alpha^{(1)}\right) f_i^{(1)} + \Delta t\, \partial_t^{(2)} f_i^{(0)} + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\partial_t^{(1)} + e_{i\alpha}\partial_\alpha^{(1)}\right)^2 f_i^{(0)}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{\tau_{s,1}}\right) w_i \frac{\mathcal{H}_{i,\alpha\beta}^{(2)}}{2c_s^4} \mathcal{A}_{\alpha\beta}^{\mathrm{neq},(2)} + \left(1 - \frac{1}{\tau_{s,2}}\right) f_i^{\mathrm{neq},-,(2)}. \tag{41}$$

利用式 (38) 消去 $(\partial_t^{(1)} + e_{i\alpha}\partial_\alpha^{(1)})^2$ 项，并对所得方程取零阶矩和一阶矩，可得：

$$\partial_t^{(2)} \rho = 0, \tag{42a}$$

$$\partial_t^{(2)} (\rho u_\alpha) + \partial_\beta^{(1)} \left(1 - \frac{1}{2\tau_{s,1}}\right) \mathcal{A}_{\alpha\beta}^{\mathrm{neq},(1)} - \frac{\Delta t}{2} \partial_\beta^{(1)} \left(1 - \frac{1}{2\tau_{s,1}}\right) \partial_\gamma^{(1)} \Phi_{\alpha\beta\gamma} = 0. \tag{42b}$$

将式 (40) 代入式 (42b)，并利用主阶守恒律 (39) 化简，可得：

$$\partial_t^{(2)}(\rho u_\alpha) = \partial_\beta^{(1)}\left(\tau_{s,1} - \frac{1}{2}\right)\Delta t\left[\rho c_s^2(\partial_\alpha^{(1)}u_\beta + \partial_\beta^{(1)}u_\alpha) + (F_\alpha^{(1)}u_\beta + u_\alpha F_\beta^{(1)})\right]. \tag{43}$$

恢复的宏观方程。结合式 (39a)$\times\varepsilon +$（42a）$\times\varepsilon^2$ 和式 (39b)$\times\varepsilon +$ （43）$\times\varepsilon^2$，可得：

$$\partial_t\rho + \partial_\alpha(\rho u_\alpha) = 0, \tag{44a}$$

$$\partial_t(\rho u_\alpha) + \partial_\beta(\rho u_\alpha u_\beta + \rho c_s^2\delta_{\alpha\beta}) = \partial_\beta\left[\mu(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha)\right] + F_\alpha + \partial_\beta\left[\mu(F_\alpha u_\beta + u_\alpha F_\beta)/(\rho c_s^2)\right], \tag{44b}$$

其中，动力黏度为：

$$\mu = \rho c_s^2\left(\tau_{s,1} - \frac{1}{2}\right)\Delta t. \tag{45}$$

动量方程右端的最后一项是简化力方案（方案 II）引入的伪影。正如 Guo 等人 [43], 所指出的，对于低马赫数流动，该项不会损害精度；Postma 等人 [45]也证实了其对双松弛时间模型的适用性。当采用方案 I（Guo 力项）时，该伪影会消失，并可准确恢复标准的纳维–斯托克斯方程。

自由参数的作用$\tau_{s,\ 2}$。上述分析的一个关键观察是，自由松弛参数 $\tau_{s,\ 2}$ 完全没有出现在恢复的宏观方程（44）和黏度关系（45）中。这证实了 $\tau_{s,\ 2}$ 不会影响物理输运系数。它的作用局限于非流体动力学层级：控制三阶（反对称）非平衡模态的阻尼速率，而这些模态会在正则化过程中被滤除。P-TRT 框架使这一作用变得清晰——$\tau_{s,\ 2}$ 控制反对称非平衡分量向零弛豫的速度；该分量已通过力修正（29）消除了任何一阶残差。

对数值稳定性的影响.. 尽管 Chapman–Enskog 分析证实了宏观一致性，但其本质上是渐近的，并不能直接处理数值稳定性，而数值稳定性取决于全离散演化算子的谱性质。为弥合这一差距，下一小节给出线性稳定性分析，其中将 P-TRT 碰撞算子的特征值结构与标准 TRT 模型进行比较。

2.7. 线性稳定性分析

Chapman–Enskog 展开确立了 P-TRT 模型的宏观一致性，但无法直接提供有关数值稳定性的信息，而数值稳定性取决于全离散演化算子的谱半径。本小节将在矩空间中进行线性稳定性分析（LSA），严格刻画与标准 TRT 模型相比，P-TRT 碰撞算子中的幽灵模态消除如何影响该格式的特征值谱。

2.7.1. 线性化与傅里叶分析

考虑一个均匀静止态 $f_i^{(0)} = w_i\rho_0$, $\boldsymbol{u}^{(0)} = \mathbf{0}$。引入一个小扰动：

$$f_i(\boldsymbol{x},t) = f_i^{(0)} + \epsilon\,\delta f_i(\boldsymbol{x},t), \quad |\epsilon| \ll 1, \tag{46}$$

其中，扰动采用傅里叶正规模形式：

$$\delta f_i(\boldsymbol{x},t) = \hat{f}_i\, z^n\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \tag{47}$$

其中，$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y)$ 为波矢，n 为离散时间索引，$z \in \mathbb{C}$ 为时间放大因子。当且仅当对所有 $\boldsymbol{k} \in [-\pi/\Delta x,\, \pi/\Delta x]^2$ 均满足 $|z| \le 1$ 时，该数值格式线性稳定。

格子玻尔兹曼算法的一个完整时间步由碰撞和随后进行的迁移组成。在傅里叶空间中，迁移步骤由对角相位移矩阵表示：

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}\!\left(e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e}_i}\right)_{i=0}^{Q-1}, \tag{48}$$

线性化的碰撞步骤则由作用于扰动向量 $\delta\boldsymbol{f} = (\delta f_0, \ldots, \delta f_{Q-1})^T$ 的碰撞矩阵 $\boldsymbol{C}$ 表示。整体演化由下式支配：

$$\delta\boldsymbol{f}^{\,n+1} = \boldsymbol{L}\,\delta\boldsymbol{f}^{\,n}, \qquad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C}, \tag{49}$$

稳定性由演化算子 $\boldsymbol{L}$ 的特征值决定。

2.7.2. 矩空间表示

Th在矩空间中进行分析最为直观。定义矩向量 r

$$\delta\boldsymbol{m} = \boldsymbol{M}\,\delta\boldsymbol{f}, \tag{50}$$

其中，$\boldsymbol{M}$ 是变换矩阵，其各行对应于第 2.3 节中确定的正交矩基向量。对于 D2Q9格子，九个矩分为四组：

$$\delta\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} \delta\boldsymbol{m}_{\text{cons}} \\ \delta\boldsymbol{m}_{(2)} \\ \delta\boldsymbol{m}_{(3)} \\ \delta m_G \end{pmatrix}, \tag{51}$$

其中，$\delta\boldsymbol{m}_{\text{cons}} = (\delta\rho,\ \delta j_x,\ \delta j_y)^T$ 包含守恒量（3 个模态），$\delta\boldsymbol{m}_{(2)} = (\delta\pi_{xx},\ \delta\pi_{yy},\ \delta\pi_{xy})^T$ 为二阶应力模态（3 个模态），$\delta\boldsymbol{m}_{(3)} = (\delta q_x,\ \delta q_y)^T$ 为三阶能量通量模态（2 个模态），而 δm_G 为幽灵模态（1 个模态）。前八个模态构成流体动力学扇区 H，最后一个模态则构成幽灵扇区 G。

在此基底下，两个模型的线性化碰撞矩阵呈对角形式。对于 P-TRT模型：

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_{\text{P-TRT}} = \operatorname{diag}\left(\underbrace{1,\,1,\,1}_{\text{cons.}},\ \underbrace{1-\frac{1}{\tau_{s,1}},\ 1-\frac{1}{\tau_{s,1}},\ 1-\frac{1}{\tau_{s,1}}}_{\text{2nd order}},\ \underbrace{1-\frac{1}{\tau_{s,2}},\ 1-\frac{1}{\tau_{s,2}}}_{\text{3rd order}},\ \underbrace{0}_{\text{ghost}} \right), \tag{52}$$

而对于标准 TRT 模型：

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_{\text{TRT}} = \operatorname{diag}\left(\underbrace{1,\,1,\,1}_{\text{cons.}},\ \underbrace{1-\frac{1}{\tau_{s,1}},\ 1-\frac{1}{\tau_{s,1}},\ 1-\frac{1}{\tau_{s,1}}}_{\text{2nd order}},\ \underbrace{1-\frac{1}{\tau_{s,2}},\ 1-\frac{1}{\tau_{s,2}}}_{\text{3rd order}},\ \underbrace{1-\frac{1}{\tau_{s,1}}}_{\text{ghost}} \right). \tag{53}$$

唯一的区别在于对幽灵模态的处理：P-TRT 将其弛豫因子设为零（完全消除），而标准 TRT 保留因子 $1-1/\tau_{s,1}$，与应力模态相同。等价地说，P-TRT 对幽灵子空间采用有效弛豫率 $1/\tau_G = 1$（瞬时平衡），而 TRT 则采用 $1/\tau_G = 1/\tau_{s,1}$。

2.7.3. 演化算子的分块结构

矩空间演化算子为 $\tilde{\boldsymbol{L}} = \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{C}}$，其中 $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}^{-1}$是~矩空间迁移矩阵。迁移矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在~矩空间中通常不是 对角矩阵；它通过对流步骤耦合不同的矩。将 $\boldsymbol{A}$ 写成按流体动力学（H，8 个模态）和幽灵（G，1 个模态）扇区划分的2×2 分块形式：

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}}_{HH} & \tilde{\boldsymbol{A}}_{HG} \\ \tilde{\boldsymbol{A}}_{GH} & \tilde{A}_{GG} \end{pmatrix}, \tag{54}$$

碰撞矩阵 (52)–(53) 具有相应的分块形式：

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_{\text{P-TRT}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{HH} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{C}}_{\text{TRT}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{HH} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 1-1/\tau_{s,1} \end{pmatrix}, \tag{55}$$

其中 $\boldsymbol{C}_{HH}$ 是 8×8 流体动力学碰撞块，在两个模型中完全相同 。P-TRT 碰撞矩阵中的零列确保幽灵模态不会对碰撞后状态产生任何贡献，无论其碰撞前的取值如何。

展开相乘后，演化算子变为：

$$\tilde{\boldsymbol{L}}_{\text{P-TRT}} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}}_{HH}\boldsymbol{C}_{HH} & \boldsymbol{0} \\ \tilde{\boldsymbol{A}}_{GH}\boldsymbol{C}_{HH} & 0 \end{pmatrix}, \tag{56}$$

$$\tilde{\boldsymbol{L}}_{\text{TRT}} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}}_{HH}\boldsymbol{C}_{HH} & (1-1/\tau_{s,1})\,\tilde{\boldsymbol{A}}_{HG} \\ \tilde{\boldsymbol{A}}_{GH}\boldsymbol{C}_{HH} & (1-1/\tau_{s,1})\,\tilde{A}_{GG} \end{pmatrix}. \tag{57}$$

~显然存在两个结构差异。首先，$\boldsymbol{L}_{\text{P-TRT}}$ 是分块下三角 ，~因此，其特征值可分解为 $\boldsymbol{A}_{HH}\boldsymbol{C}_{HH}$ 的特征值和标量零项。其次，~$\boldsymbol{L}_{\text{TRT}}$ 具有一个非零的右上块 $(1-1/\tau_{s,\,1})\ \boldsymbol{A}_{HG}$，该块会在迁移过程中将幽灵模态耦合回流体动力学扇区；此外还具有一个非零的幽灵对角项~（$1-1/\tau_{s,\,1})\ A_{GG}$。

2.7.4. 特征值结构与稳定性解耦

锁　定理（56）的下三角结构直接导出以下结果 t.

定理 2.6（幽灵模态消除与稳定性解耦）。 对于 *P-TRT* 模型，~演化算子 $\boldsymbol{L}_{\text{P-TRT}}$ 的特征值包括：

（*i*）幽灵特征值 $z_G = 0$，它无条件稳定 *e.*

（*ii*）八个水动力特征值 $\{z_\alpha\}_{\alpha=1}^{8}$，由以下因素决定

$$\det\!\Big(\tilde{\boldsymbol{A}}_{HH}\boldsymbol{C}_{HH} - z\,\boldsymbol{I}_8\Big) = 0. \tag{58}$$

因此，*P-TRT* 方案的数值稳定性完全由水动力特征值决定，且与幽灵模态无关。

证明。T 分块下三角矩阵 (56) 的特征多项式可分解为 s:

$$\det\Big(\tilde{\boldsymbol{L}}_{\text{P-TRT}} - z\,\boldsymbol{I}_9\Big) = \det\Big(\tilde{\boldsymbol{A}}_{HH}\boldsymbol{C}_{HH} - z\,\boldsymbol{I}_8\Big)\cdot(-z) = 0. \tag{59}$$

因子 $(-z) = 0$ 得到 $z_G = 0$，其中 $|z_G| = 0 < 1$。 □ □

相比之下，对于标准 TRT 模型，幽灵特征值通常不为零。当幽灵扇区与流体动力学扇区之间通过迁移产生的耦合较弱时˜ ˜（即非对角块 $\boldsymbol{A}_{HG}$ 和 $\boldsymbol{A}_{GH}$ 相对于对角块较小时），幽灵特征值可近似为：

$$z_G^{\text{TRT}}(\boldsymbol{k}) \approx \left(1 - \frac{1}{\tau_{s,1}}\right)\tilde{A}_{GG}(\boldsymbol{k}), \tag{60}$$

˜其中，A_{GG}（$\boldsymbol{k}$）是矩空间中迁移矩阵的幽灵扇区元素。在高雷诺数下，$\tau_{s,\,1} \to 1/2$（即 $1/\tau_{s,\,1} \to 2$），因此前置因子 $|1 - 1/\tau_{s,\,1}| \to 1$，且 $|z_G^{\text{TRT}}|$ 趋近于 $|\tilde{A}_{GG}$（$\boldsymbol{k}$）|。对于某些高波数模态，$|\tilde{A}_{GG}|$ 可能大于 1，导致幽灵特征值逸出单位圆并引发数值不稳定性。

这些观察引出如下比较。

注记 2.7（谱半径比较）。令 $\rho(\cdot)$ 表示谱半径。对于任意固定的参数组（$\tau_{s,\,1}$，$\tau_{s,\,2}$）和波矢 $\boldsymbol{k}$:

$$\rho\Big(\tilde{\boldsymbol{L}}_{\text{P-TRT}}\Big) = \max_{\alpha\in H}|z_\alpha| \;\le\; \max\Big\{\max_{\alpha\in H}|z_\alpha|,\; |z_G^{\text{TRT}}|\Big\} = \rho\Big(\tilde{\boldsymbol{L}}_{\text{TRT}}\Big). \tag{61}$$

等式成立当且仅当 TRT 的幽灵特征值不超过最大的流体力学特征值。当标准 TRT 的稳定性瓶颈位于幽灵模态（即 $|z_G^{\text{TRT}}| > \max_{\alpha\in H}|z_\alpha|$）时，P-TRT模型严格更为稳定，从而允许更大的临界松弛率，因而可达到更低的黏度。

结合定理 2.6 与定理 2.2 和 2.3 的等价性结果，相同的谱性质适用于原始 TRT-RLB模型，因为这两种表述对 D2Q9 和 D3Q19 格子产生相同的碰撞后状态。

注记 2.8（关于 $\tau_{s,\,2}$ 的最优值）。在幽灵模态被消除后，P-TRT 格式的稳定性取决于八个水动力特征值 $\{z_\alpha(\boldsymbol{k},\ \tau_{s,\,1},\ \tau_{s,\,2})\}$，其模通过作用于三阶模态的碰撞因子（$1 - 1/\tau_{s,\,2}$）依赖于 $\tau_{s,\,2}$。$\tau_{s,\,2}$ 的最优值对应于一个极小极大条件：

$$\tau_{s,2}^{\text{opt}} = \arg\min_{\tau_{s,2}}\ \max_{\boldsymbol{k},\,\alpha\in H}|z_\alpha(\boldsymbol{k},\,\tau_{s,1},\,\tau_{s,2})|. \tag{62}$$

确定这一最优值需要在整个布里渊区 $\boldsymbol{k} \in[-\pi/\Delta x,\,\pi/\Delta x]^2$内，对 8×8 水动力演化矩阵进行参数化数值特征值计算；这本身就是一项相当复杂的数值代数问题。如此全面的参数研究超出了本文的范围，将留待未来研究。尽管如此，第 3 节报告的在 $1/\tau_{s,\,2} \approx 1.6$ 附近出现最优稳定性平台这一经验观察，与这种极小极大解释相符。我们注意到，经典 TRT 框架中类似的问题——如何解析确定最优“魔法参数” Λ——在现有文献中同样悬而未决，最优值通常通过数值实验 [32, 33]来确定。

3. 数值结果与讨论

本节从三个互补的角度开展一系列基准模拟，以验证 P-TRT 模型：计算效率、数值稳定性和物理准确性。根据第 2.4 节确立的数学等价性，核心预期是：P-TRT 模型应产生与原始 TRT-RLB 模型完全相同的结果，同时显著降低计算开销。本文考虑了四个基准问题：双剪切层流（稳定性与效率）、二维衰减Taylor–Green涡（准确性与收敛性）、力驱动 Poiseuille 流（边界特性），以及方柱绕流的爬行流（超低雷诺数下的鲁棒性）。为进行定量评估，相对 L_2 误差范数定义如下：

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum_{\mathbf{x}}(q_n(\mathbf{x},t) - q_a(\mathbf{x},t))^2}{\sum_{\mathbf{x}} q_a^2(\mathbf{x},t)}}, \tag{63}$$

其中， $q_a(\mathbf{x}\ t)$ 和 $q_n(\mathbf{x}\ t)$ 分别表示解析解和数值解。对于稳态流动，收敛判据为：

$$\max\left(\left|\frac{u_\alpha(\mathbf{x}, t+10000\Delta t) - u_\alpha(\mathbf{x},t)}{u_c}\right|\right) < 10^{-7}. \tag{64}$$

3.1. 双剪切层：稳定性与效率

本文选用双剪切层流来评估高雷诺数下的数值稳定性。其周期性边界条件还能通过消除边界处理开销，实现对计算效率的精确量化。计算区域为一个二维正方形区域，所有边均采用周期性边界条件，定义为 $(x, y) \in [0, L]^2$ [42]。初始速度场由两个纵向剪切层和一个横向扰动组成，表示为：

$$u_x(\mathbf{x},0) = \begin{cases} u_c \tanh\left[\kappa\left(\dfrac{y}{L} - \dfrac{1}{4}\right)\right], & \dfrac{y}{L} \le \dfrac{1}{2}, \\ u_c \tanh\left[\kappa\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{y}{L}\right)\right], & \dfrac{y}{L} > \dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{65}$$

and

$$u_y(\mathbf{x},0) = u_c\delta \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{L} + \frac{1}{4}\right)\right]. \tag{66}$$

这里， u_c 表示特征速度， κ 控制剪切层的厚度， δ 决定初始扰动的幅度。

在本文的模拟中，参数设置如下： $\kappa = 80$、 $\delta = 0.05$、 $L = 1$、 $c = 1$ 和 $\rho_0 = 1$。采用分辨率为 $N \times N = 128^2$ 的均匀网格，得到 $\Delta x = L/N$。该流动由雷诺数和马赫数表征：

$$Re = \frac{\rho_0 u_c L}{\mu}, \quad Ma = \frac{u_c}{c_s}, \tag{67}$$

且特征时间为 $t_c = L/u_c$。

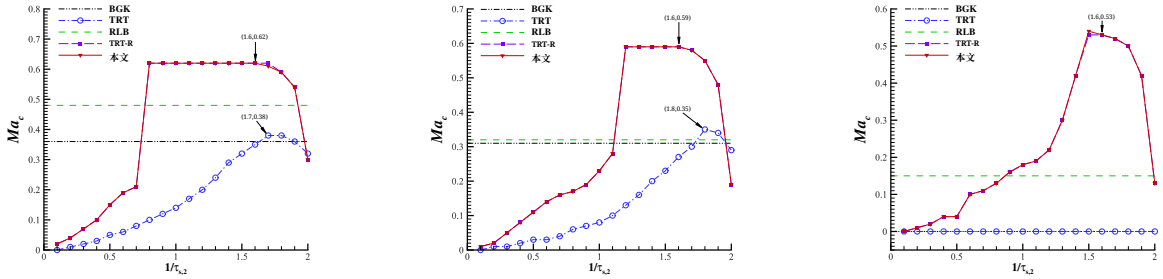
3.1.1. 超高雷诺数下的稳定性

为量化自由松弛参数 $\tau_{s,\ 2}$ 对数值稳定性的影响，我们测量了最大临界马赫数（Ma_c）。如果模拟运行至 $t = 2t_c$ 且未发散，则认为其稳定。Ma_c 的精度设为 $\Delta Ma = 0.01$。我们在广泛的雷诺数范围内考察了稳定性，其中逆弛豫参数 $1/\tau_{s,\ 2}$ 在 0.1 至 2.0 之间变化。为进行全面比较，在相同条件下对 P-TRT模型以及 BGK、TRT、RLB 和原始TRT-RLB模型 [42] 进行了测试。

稳定性比较见图 1。SRT型模型（BGK 和 RLB）以无标记的水平线表示，这表明它们的稳定性不受 $\tau_{s,2}$影响。当 $Re \geq 5 \times 10^4$时，标准 BGK 和 TRT 模型都会发散，从而导致 $Ma_c = 0$。相比之下，P-TRT模型始终表现出更优的数值稳定性。值得注意的是，在整个参数空间内，P-TRT模型的稳定性曲线几乎与原始 TRT-RLB 模型完全相同。这种数值上的一致性直接体现了定理 2.2 和 2.3 所确立的数学等价性：由于这两个模型在 D2Q9格子上产生相同的碰撞后分布函数，因此它们必然具有相同的稳定性边界。

稳定性在 $1/\tau_{s,2} \approx 1.6$附近达到最佳状态。即使在从 5×10^4 到 1×10^7的超高雷诺数范围内，最大 Ma_c仍稳健地高于 0.51。这些观察结果与第 2.7 节的线性稳定性分析完全一致。根据定理 2.6，P-TRT 碰撞算子会消去幽灵特征值（$z_G = 0$），因此该方案的稳定性完全由八个水动力特征值决定。相比之下，标准 TRT 模型以与应力模态相同的速率弛豫幽灵模态（两者均由 $\tau_{s,1}$控制）；随着 $\tau_{s,1} \to 1/2$ 在高雷诺数下，鬼模放大因子 $|z_G^{\mathrm{TRT}}|$ 可能接近或超过 1，从而触发不稳定性（参见注 2.7）。P-TRT模型通过在碰撞步骤中移除幽灵模态，彻底消除了这一失效机制。

参数$\tau_{s,\ 2}$控制反对称（三阶）松弛，为优化其余流体动力学模态的谱性质提供了额外的自由度。观测到的最优值接近$1/\tau_{s,\ 2} \approx 1.6$，这体现了注记2.8所述的极小极大平衡：在此取值下，布里渊区内水动力特征值的最大模达到最小。要精确解析地确定这一最优值，需要对 8×8 水动力演化矩阵进行参数化特征值研究，这超出了本文的研究范围。尽管如此，跨越六个数量级雷诺数范围所观察到的稳健平台（图1）证实，该最优值不受$\tau_{s,\ 1}$的影响，这与理论预测一致：鬼模式解耦使稳定性图景仅取决于流体动力学扇区。



(a) $Re = 5 \times 10^3$ (b) $Re = 1 \times 10^4$ (c) $Re = 5 \times 10^4$

(d) $Re = 1 \times 10^5$ (e) $Re = 1 \times 10^6$ (f) $Re = 1 \times 10^7$

图 1：不同雷诺数下双剪切层模拟中最大临界马赫数 Ma_c 与逆弛豫参数 $1/\tau_{s,\,2}$ 的关系。P-TRT模型（标记为“本文”）在标准 BGK 和 TRT 模型无法收敛的超高雷诺数下，仍表现出稳健的稳定性。其稳定性曲线与原始 TRT-RLB 模型完全相同，证实了两者在数学上等价。

3.1.2. 计算效率评估

这一测试案例也用于评估P-TRT模型的计算效率。周期性边界消除了与边界相关的计算成本，从而使评估聚焦于碰撞算子。我们针对雷诺数从10到 10^4的范围进行了模拟。为确保公平比较，所有模拟均在同一计算平台上进行，并且只有在满足严格的收敛判据后才终止运行。加速比定义为：

$$S_p = \frac{T_{\text{TRT-RLB}}}{T_{\text{P-TRT}}}. \tag{68}$$

比较结果汇总于表5。P-TRT模型的表现始终优于原始 TRT-RLB框架。计算成本相对降低了 29% 至 35%，平均加速比约为 1.45。实测加速比与表 4 中预测的理论浮点运算次数减少一致：对于 D2Q9格子，非平衡态碰撞成本降低了 71%，而实际运行时间减少约 30%，这证实了在这一周期性基准测试中，碰撞步骤占总计算工作量的相当大一部分。

3.2. 二维衰减*Taylor–Green*涡：精度与收敛性

为严格验证 P-TRT模型的精度和网格收敛性，我们模拟了二维衰减泰勒–格林涡流。这一经典基准问题具有精确解析解，可用于准确量化数值误差。该流动

表5：在宽雷诺数范围内，原始TRT-RLB与P-TRT模型在双剪切层模拟中的执行时间（秒）及计算效率比较。

Re	TRT-RLB（秒）	P-TRT（秒）	减少（%）	加速比
10	6.93	4.53	34.63	1.53
100	43.40	30.75	29.14	1.41
1,000	328.34	232.14	29.30	1.41
10,000	2,503.53	1747.91	30.18	1.43

定义在一个正方形区域 $(x,\ y) \in [0,1]^2$ 中，并采用周期性边界条件。速度场和密度的解析解为 [21, 46]:

$$u_x(\mathbf{x},t) = -u_0 \cos(2\pi x)\sin(2\pi y)\, e^{-t/t_d}, \tag{69a}$$

$$u_y(\mathbf{x},t) = u_0 \cos(2\pi y)\sin(2\pi x)\, e^{-t/t_d}, \tag{69b}$$

$$\rho(\mathbf{x},t) = \rho_0 - \rho_0 \frac{u_0^2}{4c_s^2}\left[\cos(4\pi x) + \cos(4\pi y)\right] e^{-t/t_d}, \tag{69c}$$

其中 $t_d = 1/(8\nu\pi^2)$为涡旋衰减时间。

在我们的模拟中，物理参数设置为 $u_0 = 0.01$、 $\rho_0 = 1$和 $\nu = 0.01$，其中 $L = 1$。时间步由尺度关系 $\Delta x^2/\Delta t = 0.01\pi^2$确定。魔法参数定义为:

$$\Lambda_s = \left(\tau_{s,1} - \frac{1}{2}\right)\left(\tau_{s,2} - \frac{1}{2}\right), \tag{70}$$

并在本测试算例中设置为 $\Lambda_s = 1/4$ 。

为评估准确性，我们采用网格分辨率 $N = 64$进行了模拟。图2将不同时刻计算得到的速度剖面 $u_x(L/2,\ y)$ 和 $u_y(x,\ L/2)$ 与解析解进行了比较。结果显示，两者吻合极佳，证实幽灵模态扣除不会引入额外的数值误差。

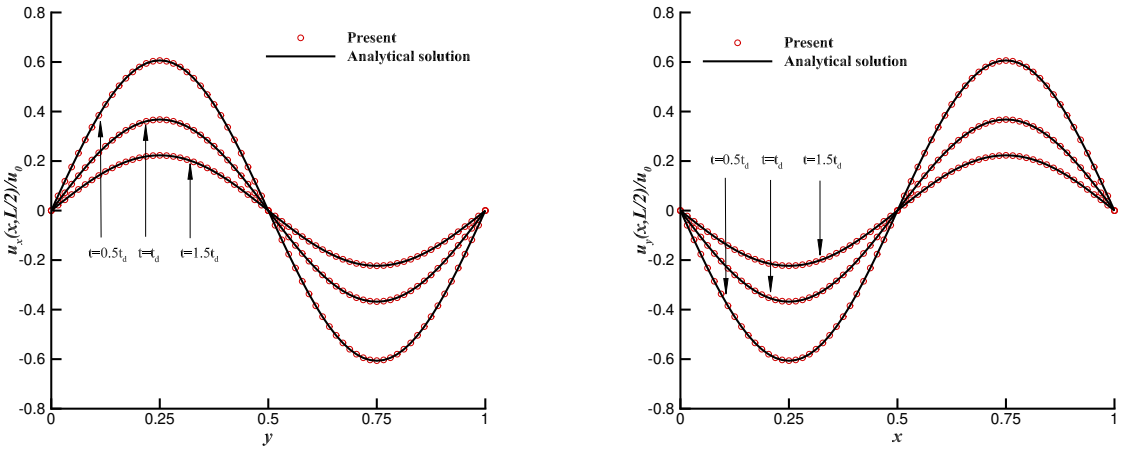


图2：在 64×64 网格上、$\nu = 0.01$ 条件下，不同时刻由P-TRT模型计算得到的二维衰减泰勒–格林涡流速度分量 u_x （左）和 u_y （右）与解析解的比较。

我们还采用五种分辨率进行了网格收敛性研究： $N^2 = 32^2$、64^2、128^2、256^2和 512^2。计算得到的 L_2 误差见图3。P-TRT模型保持了原始TRT-RLB公式的二阶空间收敛性，且在整个网格分辨率范围内，误差大小均一致。根据等价定理，这一结果是预期之中的：由于两个模型产生相同的碰撞后分布函数，它们必然具有相同的截断误差结构。

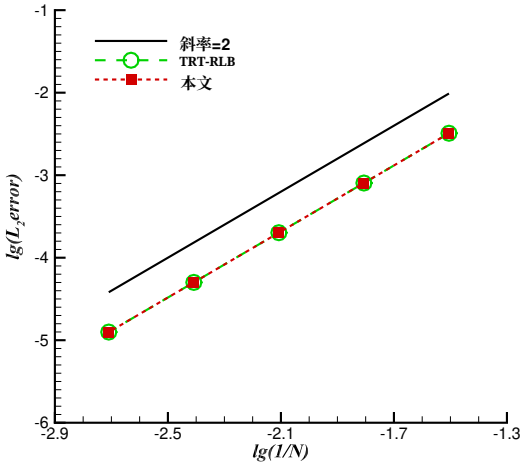


图3：G　　网格收敛性研究，展示了TRT-RLB和P-TRT模型的 L_2 误差范数针对二维衰减
在 $t = t_d$ 处的 Taylor–Green 涡流（$\nu = 0.01$）。

3.3. 力驱动 *Poiseuille* 流：消除数值滑移

TRT框架的一个关键特点是能够消除标准半程反弹（HWBB）格式固有的与黏度相关的数值滑移 [47]。已有研究证实，原始TRT-RLB 模型能够有效消除这种数值滑移 [42]。由于 P-TRT模型在数学上等价于TRT-RLB，因此必然也具备这一特性。为通过数值方法验证这一点，我们对两块平行板之间的二维力驱动 Poiseuille 流进行了模拟。

我们考虑由恒定体力驱动的稳态、充分发展层流。在这些条件下 [48]:

$$\rho = \text{const.}, \quad \partial_x u_x = 0, \quad \partial_x u_y = 0, \tag{71}$$

整个计算域内均满足 $u_y = 0$ 。体力仅沿流向作用： $F_x = \rho g$, $F_y = 0$。在 HWBB格式下，速度剖面的离散解析解为：

$$u = \frac{4u_c}{N^2} y_i (N - y_i), \tag{72}$$

其中， $N = L/\Delta x$，且 $y_i = i - 0.5$ 在 $i = 1$、.....、N中体现了HWBB格式的半格偏移。中心线速度为 $u_c = L^2 g/\ (8\nu)$ 。

在数值实验中， $L = 1$，网格尺寸为 $N_x \times N_y = 4 \times 32$、 $c = 1$、$\rho_0 = 1$、$u_c = 0.1$，模拟在 $Re = 1$下进行。首先考察魔法参数 Λ_s 对数值精度的影响。图4给出了 L_2 误差随 Λ_s的变化。当 $\Lambda_s = 3/16$时，数值滑移被完全消除，这与TRT-RLB框架的理论预测一致 [42]。这证实了

幽灵模态纯化保留了TRT族的滑移消除机制：$\tau_{s,1}$ 与$\tau_{s,2}$ 之间能够抵消黏度相关的边界误差的特定关系不受正则化过程的影响。

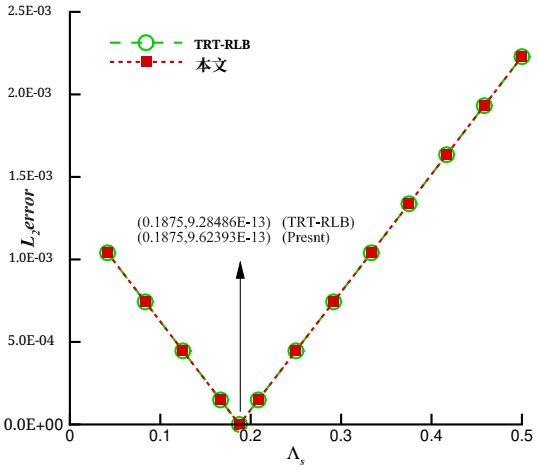


图4：P-TRT模型的 L_2 误差随魔法参数 Λ_s 的变化。$\Lambda_s = 3/16$ 处误差消失，证实了从TRT框架继承而来的滑移消除性质。

此外，在 $Re = 1$、5和10时进行模拟，取值为 $\Lambda_s = 3/16$。图5将速度剖面与解析解进行了比较。表6列出了 L_2 误差，其结果与原始TRT-RLB模型一致，精确到机器精度。这是数学等价性的直接结果：两个模型产生相同的碰撞后分布函数，因此得到相同的稳态解。

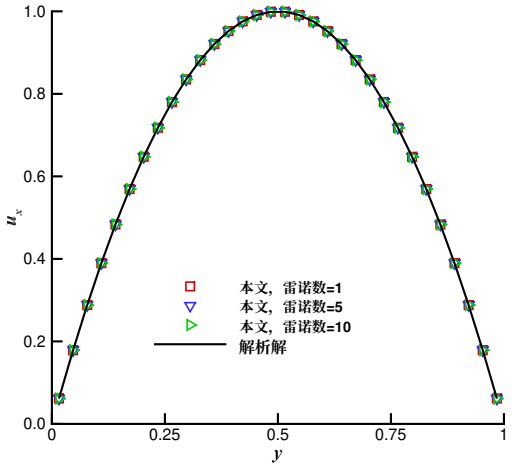


图5： $Re = 1$、5、10时，P-TRT模型与解析解的水平速度剖面对比。

3.4. 方柱绕流的爬行流：鲁棒性

为验证 P-TRT模型在低雷诺数下的鲁棒性，我们模拟了方柱绕流的爬行流。如图 6 所示，计算域

表 6：力驱动泊肃叶流中，原始TRT-RLB 模型与 P-TRT模型的 L_2 误差对比。

Re	$\tau_{s,1}$	L_2 误差	
		TRT-RLB	P-TRT
1	10.1	9.3×10^{-13}	9.6×10^{-13}
5	2.42	5.3×10^{-13}	4.2×10^{-13}
10	1.46	1.2×10^{-12}	1.1×10^{-12}

是边长为 $L = 50D$ 的正方形区域，其中 D 是方柱的边长。方柱位于计算域中心。左边界采用 HWBB格式施加均匀速度 u_c ，右边界通过 Zou–He方法设置恒定压力出口，上下边界则施加周期条件。方柱表面的无滑移条件通过 HWBB格式实现。该模拟由三个无量纲参数控制： Re、 Ma，以及 Gsell等人引入的不可压缩性参数 [49]:

$$\mathcal{T} = \frac{Ma^2}{Re}. \tag{73}$$

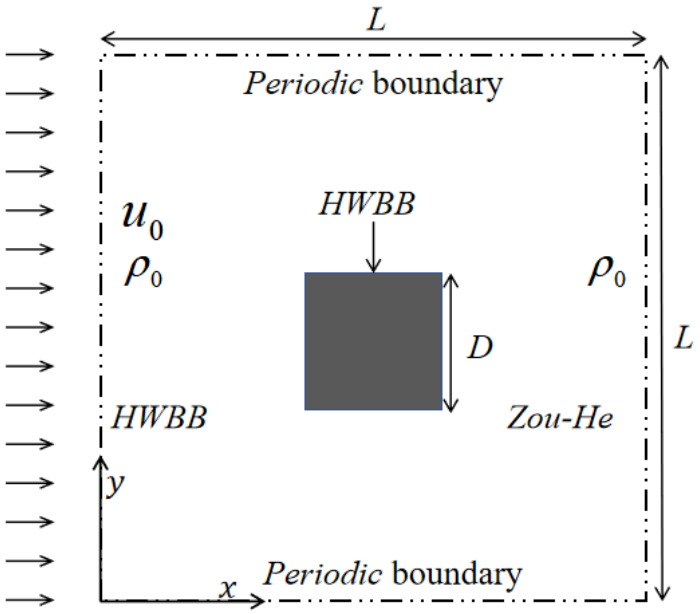


图 6：方柱绕流的爬行流的计算域和边界条件示意图。

本节将收敛判据设为 $L_2 < 10^{-9}$ ，以适应较小的特征速度。参数为 $\rho_0 = 1$、 $c = 1$、 $\Delta x = 1$和 $\Lambda_s = 3/16$。研究分为三个部分：网格无关性分析、精度验证，以及超低雷诺数下的性能。

首先，在 $Re = 1$ 和 $Ma = 0.1$ 条件下进行了网格无关性测试，采用了六种网格分辨率。阻力系数定义为:

$$C_d = \frac{2F_x}{\rho_0 u_0^2 D}, \tag{74}$$

其中， F_x 通过动量交换法计算：

$$F_x = \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \sum_{i \in I_w} e_{ix} \left[f_{\bar{i}}^*(\boldsymbol{x}_s, t) + f_i^*(\boldsymbol{x}_f, t) \right]. \tag{75}$$

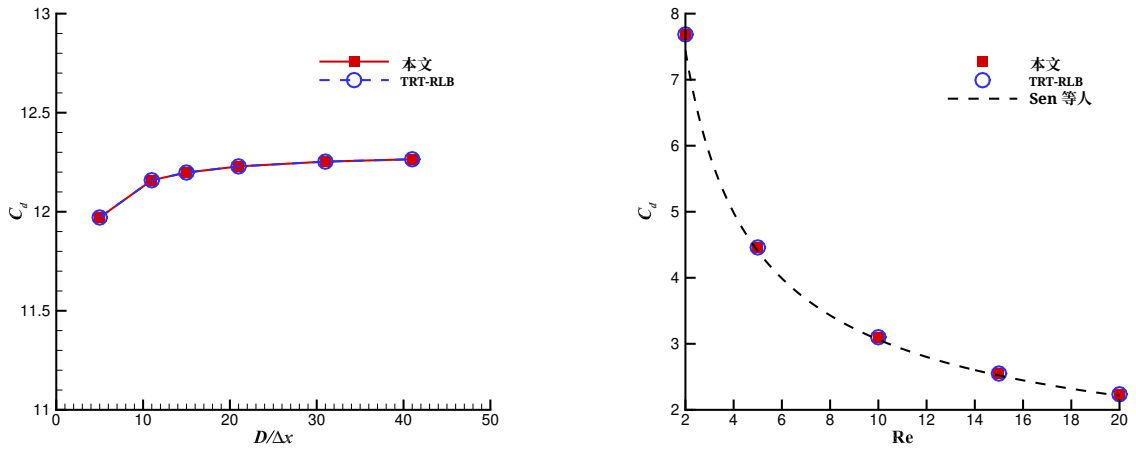
这里， I_w 表示从流体节点指向壁面的离散方向集合， $\boldsymbol{x}_f$ 是壁面附近的一个流体节点， $\boldsymbol{x}_s$ 是对应的固体节点。结果如图 7a 所示。随着分辨率提高，阻力系数逐渐收敛，且 P-TRT 的结果与 TRT-RLB 的结果完全相同。后续模拟采用分辨率 $D = 21\Delta x$ 。

随后，我们通过模拟雷诺数为 2 至 20 的五种情况，并与 Sen 等人的经验阻力定律进行比较，验证了准确性 [50]:

$$C_d = 0.7496 + 10.5767\, Re^{-0.66}, \quad Re \in [2, 40]. \tag{76}$$

图 7b 中的结果表明，与参考数据高度吻合，并且与 TRT-RLB 模型保持一致。

最后，我们使用 $\mathcal{T} = 0.1$研究了低雷诺数区间（$Re \leq 0.1$）。在斯托克斯极限下与雷诺数无关的黏性阻力系数 $C_{d,\ \mu} = C_d \cdot Re$记录于表 7 中。当雷诺数从 10^{-1}降至 10^{-6}时， $C_{d,\ \mu}$ 收敛至约 8.252。在所有测试的雷诺数下，P-TRT 的结果均与原始 TRT-RLB 模型相同。此外，弛豫时间 $\tau_{s,\ 1}$ 可高达 11503 而不发生发散，展现出远超 BGK 和 RLB 等单弛豫时间模型的鲁棒性；这些模型通常需要$\tau_{s,\ 1} < 3$ 才能保持稳定 [49]。这种鲁棒性源于 P-TRT 碰撞算子显式去除了幽灵模态：即使在 $\tau_{s,\ 1}$的极端取值下，经过纯化的碰撞步骤也能防止非物理模态累积，避免其导致计算不稳定。



(a) (b)

图 7：使用 P-TRT 模型对方柱绕流进行数值分析。(a) 阻力系数 C_d随网格分辨率 $D/\Delta x$ 增加而收敛的情况 ($Re = 1,\ Ma = 0.1$)；(b) 不同雷诺数下计算所得 C_d 与参考数据的比较 ($D/\Delta x = 21$)。两组结果均与原始TRT-RLB模型的结果一致。

Re	Ma	$\tau_{s,1}$	$C_{d,\mu}$	
			TRT-RLB	P-TRT
10^{-1}	1.00×10^{-1}	37	8.449	8.449
10^{-2}	3.16×10^{-2}	116	8.260	8.260
10^{-3}	1.00×10^{-2}	364	8.253	8.253
10^{-4}	3.16×10^{-3}	1151	8.253	8.253
10^{-5}	1.00×10^{-3}	3638	8.252	8.252
10^{-6}	3.16×10^{-4}	11503	8.252	8.252

表 7：低雷诺数下 TRT-RLB 与 P-TRT 的黏性阻力系数对比 $C_{d,\mu}$ 。参数： $\mathcal{T} = 0.1$, $D/\Delta x = 21$, $L = 50D$。

4. 结论

本文建立了正则化格子玻尔兹曼方法与双松弛时间碰撞算子的幽灵模态结构之间严格的理论联系。通过将离散速度空间正交分解为流体动力学子空间和非流体动力学子空间，我们证明，Yu 等人 [42] 在 TRT-RLB 模型中采用的基于 Hermite 的正则化，在数学上等价于从标准 TRT 碰撞算子中显式去除幽灵模态。具体而言，二阶 Hermite 投影等价于对称非平衡部分减去幽灵模态贡献（定理 2.2）；在动量守恒条件下，三阶 Hermite 投影则等价于反对称非平衡部分（定理 2.3）。对于 D2Q9 和 D3Q19 格子，这两种等价关系均严格成立，这意味着两种形式在每个网格点和每个时间步产生完全相同的碰撞后分布函数。

基于这一等价关系，我们提出了净化 TRT（P-TRT）模型。该模型通过简单的代数运算明确滤除其幽灵模态，从而改进了标准 TRT。根据用户的视角，P-TRT 模型有两种解读方式：

对于 TRT 实践者而言，该模型提供了一种改动极小且物理含义清晰的方案——从对称碰撞项中减去少量可识别的幽灵模态贡献，使经典 TRT 格子玻尔兹曼格式的稳定性提升至正则化水平，同时不牺牲其算法简洁性或边界精度特性。

对于 TRT-RLB 用户而言，该模型提供了一种数学上等价但效率显著更高的算法，以奇偶分解和标量幽灵模态减除取代计算成本高昂的厄米特张量投影，使 D2Q9 和 D3Q19 格子的非平衡碰撞运算减少 71%。

通过四个基准问题的大量数值验证证实，P-TRT模型保留了原始TRT-RLB公式的全部优良特性：在雷诺数高达 10^7, 时具有稳健的稳定性、二阶空间收敛、在反弹边界处精确消除与黏度相关的数值滑移（$\Lambda_s = 3/16$），以及在松弛时间超过10^4的超低雷诺数下具有可靠性能。当碰撞步骤主导计算成本时，D2Q9格子测得的约30%实际运行时间加速比与理论上的浮点运算次数减少相一致。

除了直接的实际优势外，矩空间中的线性稳定性分析表明，P-TRT 碰撞算子会消去幽灵特征值（$z_G = 0$），从而使数值稳定性与非流体动力学扇区完全解耦

（定理 2.6）。这为数值基准测试中观察到的优越稳定性提供了严格的理论解释：P-TRT 演化算子的谱半径不超过标准 TRT 的谱半径（注 2.7），而稳定性瓶颈则从幽灵模态转移到了具有实际物理意义的流体动力学模态。确定最优自由参数 $\tau_{s,\,2}$ 的解析方法，需要在整个布里渊区内对水动力演化矩阵进行参数化特征值研究，这被认为是未来一项重要的研究方向。

更广泛地说，本文的分析揭示了一个更深层的认识：正则化提升格子玻尔兹曼方法碰撞算子稳定性的核心机制，是消除非流体动力学幽灵模态。这一认识在原始的厄米张量形式中并不明显，而在正交分解框架下则一目了然。我们认为，这种从幽灵模态角度出发的观点，或许有助于格子玻尔兹曼领域其他先进碰撞算子的分析与设计。

致谢

本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12101527、12271464和12371373）、湖南省自然科学基金（项目编号：2026JJ60005）、高等学校学科创新引智计划（项目编号：D23017）以及湖南省高等学校科技创新团队计划的资助。计算资源由湘潭大学高性能计算平台提供。

附录A. 幽灵模态枚举与显式公式

本附录完整列举了 D2Q9、D3Q19 和 D3Q27 格子上的 P-TRT 模型的幽灵模态，并给出了明确的实现公式。表 A.8 总结了关键结构参数。

表 A.8：常见格子模型的结构参数。这里，Q 表示离散速度的数量，Q_0 表示静止速度的数量，Q_p 表示反演对的数量，N_G 表示对称幽灵模态的数量，N_3 表示独立三阶厄米多项式的数量。

格子	Q	D	c_s^2	Q_0	Q_p	dim($\mathcal{S}$)	dim($\mathcal{A}$)	N_G / N_3
D2Q9	9	2	$c^2/3$	1	4	5	4	1 / 2
D3Q19	19	3	$c^2/3$	1	9	10	9	3 / 6
D3Q27	27	3	$c^2/3$	1	13	14	13	7 / 7

附录 *A.1. D2Q9*格子

对称性 *ic* 幽灵模态 *(*$N_G = 1$*)..* 唯一的幽灵模态是四阶乘积：

$$\phi_i^{(G)} = (e_{ix}^2 - c_s^2)(e_{iy}^2 - c_s^2), \tag{A.1}$$

各速度方向上的取值：

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\phi_i^{(G)}$	c_s^4	$-2c_s^4$	$-2c_s^4$	$-2c_s^4$	$-2c_s^4$	$4c_s^4$	$4c_s^4$	$4c_s^4$	$4c_s^4$

加权范数为 $N_G^{(\phi)} = \sum_i w_i [\phi_i^{(G)}]^2 = 4c_s^8$。幽灵标量矩和投影为:

$$S_G = \sum_{j=0}^{8} \phi_j^{(G)} f_j^{\mathrm{neq}} = c_s^4 \left[f_0^{\mathrm{neq}} - 2\sum_{j=1}^{4} f_j^{\mathrm{neq}} + 4\sum_{j=5}^{8} f_j^{\mathrm{neq}} \right], \tag{A.2}$$

$$(\hat{P}^{(G)} f^{\mathrm{neq}})_i = \frac{w_i\, \phi_i^{(G)}}{4c_s^8}\, S_G. \tag{A.3}$$

反对称子空间（$\dim(\mathcal{A}) = 4 = D + N_3$）。不存在反对称幽灵模态。两个相互独立的三阶厄米特模态为:

$$\psi_i^{(xxy)} = e_{iy}(e_{ix}^2 - c_s^2), \qquad \psi_i^{(xyy)} = e_{ix}(e_{iy}^2 - c_s^2), \tag{A.4}$$

其范数为 $N^{(xxy)} = N_{(xyy)} = 2c_s^6$。纯三次模态 $\mathcal{H}_{xxx}^{(3)}$ 和 $\mathcal{H}_{yyy}^{(3)}$ 因格子混叠 $e_{i\alpha}^3 = c^2 e_{i\alpha}$ 而消失。

P-TRT 实现. 二阶正则化项为:

$$\mathcal{R}_i^{(2)} = f_i^{\mathrm{neq},+} - \frac{w_i\, \phi_i^{(G)}}{4c_s^8}\, S_G. \tag{A.5}$$

（无外力时的）三阶正则化项为:

$$\mathcal{R}_i^{(3)} = f_i^{\mathrm{neq},-}. \tag{A.6}$$

这两个关系均为精确关系。

附录 *A.2. D3Q19* 格子

D3Q19 格子由 1 个静止速度、6 个轴向速度（3 对反演对）和 12 个面体对角线速度（6 对反演对）组成。不包含体对角线速度。

$Symm$对称幽灵模态（$N_G = 3$）。存在三个相互正交的四阶幽灵模态 t:

$$\phi_i^{(G_1)} = (e_{ix}^2 - c_s^2)(e_{iy}^2 - c_s^2), \tag{A.7}$$

$$\phi_i^{(G_2)} = (e_{iy}^2 - c_s^2)(e_{iz}^2 - c_s^2), \tag{A.8}$$

$$\phi_i^{(G_3)} = (e_{iz}^2 - c_s^2)(e_{ix}^2 - c_s^2). \tag{A.9}$$

这些模态在加权内积下相互正交。每个模态的加权范数为 $N_{G,\,k}^{(\phi)} = 4c_s^8$。不存在体对角线速度（$e_{ix}$，$e_{iy}$，$e_{iz}$同时非零），这保证了正交性，也确保不会出现更高阶对称幽灵模态。

反对称子空间（$\dim(\mathcal{A}) = 9 = D + N_3$）。不存在反对称幽灵模态。六个独立三阶厄米特模态为:

$$\psi_i^{(xxy)} = e_{iy}(e_{ix}^2 - c_s^2), \quad \psi_i^{(xxz)} = e_{iz}(e_{ix}^2 - c_s^2), \quad \psi_i^{(xyy)} = e_{ix}(e_{iy}^2 - c_s^2), \tag{A.10}$$

$$\psi_i^{(yyz)} = e_{iz}(e_{iy}^2 - c_s^2), \quad \psi_i^{(xzz)} = e_{ix}(e_{iz}^2 - c_s^2), \quad \psi_i^{(yzz)} = e_{iy}(e_{iz}^2 - c_s^2). \tag{A.11}$$

混合模态 $\mathcal{H}_{xyz}^{(3)}$ 在 D3Q19 上消失，因为没有任何速度的三个分量同时非零。

P-TRT 实现.. 这些公式在结构上与 D2Q9 cas 相同 e:

$$\mathcal{R}_i^{(2)} = f_i^{\mathrm{neq},+} - \sum_{k=1}^{3} \frac{w_i\, \phi_{i,k}^{(G)}}{4c_s^8} \sum_j \phi_{j,k}^{(G)} f_j^{\mathrm{neq}}, \qquad \mathcal{R}_i^{(3)} = f_i^{\mathrm{neq},-}. \tag{A.12}$$

这两个关系都是精确的。

附录 *A.3. D3Q27* 格子

D3Q27 格子由 1 个静止速度、6 个轴向速度、12 个面体对角速度和 8 个体对角线速度组成（$Q_0 = 1,\ \ Q_p = 13$）。

对称幽灵模态（$N_G = 7$）.. 共有七个正交幽灵模态，分为两组：

第 *1* 组：四阶对角耦合模态（*3* 个）和六阶全耦合模态（*1* 个）。

$$\phi_i^{(G_1)} = (e_{ix}^2 - c_s^2)(e_{iy}^2 - c_s^2), \tag{A.13}$$
$$\phi_i^{(G_2)} = (e_{iy}^2 - c_s^2)(e_{iz}^2 - c_s^2), \tag{A.14}$$
$$\phi_i^{(G_3)} = (e_{iz}^2 - c_s^2)(e_{ix}^2 - c_s^2), \tag{A.15}$$
$$\phi_i^{(G_4)} = (e_{ix}^2 - c_s^2)(e_{iy}^2 - c_s^2)(e_{iz}^2 - c_s^2)/c_s^2. \tag{A.16}$$

第 *2* 组：四阶剪切–能量耦合模态（*3* 个）。

$$\phi_i^{(G_5)} = e_{ix}e_{iy}(e_{iz}^2 - c_s^2), \tag{A.17}$$
$$\phi_i^{(G_6)} = e_{iy}e_{iz}(e_{ix}^2 - c_s^2), \tag{A.18}$$
$$\phi_i^{(G_7)} = e_{iz}e_{ix}(e_{iy}^2 - c_s^2). \tag{A.19}$$

反对称子空间（$\dim(\mathcal{A}) = 13 > D + N_3 = 10$）...亏缺为3的维数对应五阶反对称模态：

$$\psi_i^{(5,x)} = e_{ix}(e_{iy}^2 - c_s^2)(e_{iz}^2 - c_s^2), \tag{A.20}$$

及其循环置换 $\psi_i^{(5,y)}$ 和 $\psi_i^{(5,z)}$。这些模态仅在体对角速度处非零。

P-TRT 实现（混合策略）。由于 $N_G = 7 > M_2 = 6$，针对二阶项的幽灵模态扣除法比直接 Hermite 投影开销更大。因此，建议对 D3Q27 采用混合策略：

$$\mathcal{R}_i^{(2)} = w_i \frac{\mathcal{H}_{i,\alpha\beta}^{(2)}}{2c_s^4} \mathcal{A}_{\alpha\beta}^{\mathrm{neq}} \quad (\text{tensor projection, exact}), \tag{A.21}$$

$$\mathcal{R}_i^{(3)} \approx f_i^{\mathrm{neq},-} \quad (\text{antisymmetric approximation}). \tag{A.22}$$

$\mathcal{R}_i^{(3)}$ 忽略了五阶残差，该残差在 Chapman–Enskog 展开中为 $O(\mathrm{Kn}^3)$，在实际应用中可忽略不计。若需要严格等价，则可以显式减去五阶投影：

$$\mathcal{R}_i^{(3)} = f_i^{\mathrm{neq},-} - \sum_{k\in\{x,y,z\}} (\hat{P}^{(5,k)} f^{\mathrm{neq}})_i + \frac{\Delta t}{2} \frac{w_i\, e_{i\alpha}}{c_s^2} F_\alpha. \tag{A.23}$$

参考文献

[1] H. Oh、H. Jo，使用具有先进出口边界条件的格子玻尔兹曼方法研究结构化冷却通道中的湍流流动沸腾传热，《Physics of Fluids》37（1）（2025）。[2] A. Montessori、M. La Rocca、G. Amati、M. Lauricella、A. Tiribocchi、S. Succi，面向高性能计算湍流流动模拟的高阶线程安全格子玻尔兹曼模型，《Physics of Fluids》36（3）（2024）。[3] S. Guo、Y. Feng、P. Sagaut，采用混合递归正则化改进的标准热格子玻尔兹曼模型，用于可压缩层流和湍流，《Physics of Fluids》32（12）（2020）。[4] K. Suga、Y. Kuwata、K. Takashima、R. Chikasue，用于湍流的 D3Q27 多弛豫时间格子玻尔兹曼方法，《计算机与数学及其应用》69（6）（2015）518–529。[5] M. Lulli、L. Biferale、G. Falcucci、M. Sbragaglia、D. Yang、X. Shan，多相格子玻尔兹曼中的亚稳态与不稳定流体动力学，《物理评论 E》109（4）（2024）045304。[6] R. Huang、Q. Li、Y. Qiu，具有自调节状态方程的三维格子玻尔兹曼模型用于多相流，《物理评论 E》109（6）（2024）065306。[7] X. Zhang、T. Huang、Z. Ge、T. Man、H. E. Huppert，基于耦合格子玻尔兹曼离散元方法的浆体在多孔介质中的渗流特性，《计算机与岩土工程》177（2025）106865。[8] D. P. Sourya、P. S. Gurugubelli、S. Bhaskaran、N. Vorhauer-Huget、E. Tsotsas、V. K. Surasani，电解槽阳极多孔传输层中氧传输的格子玻尔兹曼方法与 VOF-连续介质方法对比研究，《国际氢能杂志》92（2024）1091–1098。[9] S. A. Hosseini、P. Boivin、D. Thévenin、I. Karlin，用于燃烧应用的格子玻尔兹曼方法，《能源与燃烧科学进展》102（2024）101140。[10] C. Stockinger、A. Raiolo、R. Alamian、A. Hadjadj、U. Nieken、M. S. Shadloo，用于多孔介质中非均质燃烧反应的格子玻尔兹曼模拟，《边界元工程分析》166（2024）105817。[11] T. Lei、Z. Wang、K. H. Luo，使用格子玻尔兹曼方法研究多孔介质中的孔隙尺度焦炭燃烧，《燃烧与火焰》225（2021）104–119。[12] M. Tayyab、S. Zhao、Y. Feng、P. Boivin，预混和非预混燃烧过程的混合正则化格子玻尔兹曼建模，《燃烧与火焰》211（2020）173–184。[13] L. Fei、F. Qin、J. Zhao、D. Derome、J. Carmeliet，多孔介质中等温双组分蒸发的格子玻尔兹曼建模，《流体力学杂志》955（2023）A18。

[14] S. Kumar, D. Panda, P. Ghodke, K. M. Gangawane, 《相变材料传热的格子玻尔兹曼方法：综述》, 《热分析与量热学杂志》148 (17) (2023) 9263–9287。[15] Q. Li, P. Zhou, H. Yan, 《化学图案化表面蒸发过程中接触线的钉扎–解钉机制：一项格子玻尔兹曼研究》, Langmuir 32 (37) (2016) 9389–9396。[16] I. Cherkaoui, S. Bettaibi, A. Barkaoui, F. Kuznik, 《采用格子玻尔兹曼方法（LBM）数值研究动脉瘤动脉中的脉动热磁流体动力学血流》, 《非线性科学与数值模拟通讯》123 (2023) 107281。[17] I. Cherkaoui, S. Bettaibi, A. Barkaoui, F. Kuznik, 《采用格子玻尔兹曼方法研究狭窄冠状动脉中的磁流体动力学血流》, 《生物医学中的计算机方法与程序》221 (2022) 106850。[18] S. S. Esfahani, X. Zhai, M. Chen, A. Amira, F. Bensaali, J. AbiNahed, S. Dakua, G. Younes, A. Baobeid, R. A. Richardson 等, 《格子玻尔兹曼交互式血流模拟流程》, 《国际计算机辅助放射学与外科学杂志》15 (4) (2020) 629–639。[19] A. Tiribocchi, M. Durve, M. Lauricella, A. Montessori, J.-M. Tucny, S. Succi, 《软流动物质的格子玻尔兹曼模拟》, 《物理学报告》1105 (2025) 1–52。[20] P. Lallemand, L.-S. Luo, M. Krafczyk, W.-A. Yong, 《近似不可压缩流的格子玻尔兹曼方法》, Journal of Computational Physics 431 (2021) 109713。[21] T. Krüger, H. Kusumaatmaja, A. Kuzmin, O. Shardt, G. Silva, E. M. Viggen, 《格子玻尔兹曼方法》, Springer, 2017。[22] Z. Guo, C. Shu, 《格子玻尔兹曼方法及其在工程中的应用》, 第3卷, World Scientific, 2013。[23] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, M. Krook, 《气体碰撞过程模型：I. 带电与中性单组分系统中的小振幅过程》, 《物理评论》94 (3) (1954) 511。[24] Y.-H. Qian, D. d’Humières, P. Lallemand, 《纳维–斯托克斯方程的格子BGK模型》, 《欧洲物理学快报》17 (6) (1992) 479。[25] P. Lallemand, L.-S. Luo, 《格子玻尔兹曼方法理论：色散、耗散、各向同性、伽利略不变性与稳定性》, Physical Review E 61 (6) (2000) 6546。[26] D. d’Humières, 《三维多松弛时间格子玻尔兹曼模型》, 《伦敦皇家学会哲学汇刊：A辑》360 (1792) (2002) 437–451。[27] R. Du, B. Shi, X. Chen, 《不可压缩流的多松弛时间格子玻尔兹曼模型》, 《物理快报A》359 (6) (2006) 564–572。

[28] Y. Ning, K. N. Premnath, D. V. Patil, 《中心矩格子玻尔兹曼方法性质的数值研究》, International Journal for Numerical Methods in Fluids 82 (2) (2016) 59–90。[29] L. Fei, K. H. Luo, 《级联格子玻尔兹曼方法中的一致强迫格式》, Physical Review E 96 (5) (2017) 053–307。[30] M. Geier, A. Greiner, J. G. Korvink, 《用于高雷诺数流动的级联数字格子玻尔兹曼自动机》, Physical Review EStatistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics 73 (6) (2006) 066705。[31] K. N. Premnath, S. Banerjee, 《通过中心矩方法在级联格子玻尔兹曼方法中引入强迫项》, Physical Review E–Statistical, Non- linear, and Soft Matter Physics 80 (3) (2009) 036702。[32] I. Ginzburg, F. Verhaeghe, D. d'Humieres, 《利用双松弛时间格子玻尔兹曼格式研究简单流体动力学解》, Communications in Computational Physics 3 (3) (2008) 519–581。[33] I. Ginzburg, F. Verhaeghe, D. d'Humieres, 《双松弛时间格子玻尔兹曼格式：关于参数化、速度、压力和混合边界条件》, Communications in Computational Physics 3 (2) (2008) 427–478。[34] I. Ginzburg, 《用于一般对流与各向异性色散方程的平衡型和链路型格子玻尔兹曼模型》, Advances in Water Resources 28 (11) (2005) 1171–1195。[35] J. Latt, B. Chopard, 《采用正则化碰撞前分布函数的格子玻尔兹曼方法》, Mathematics and Computers in Simulation 72 (2-6) (2006) 165–168。[36] A. Jonnalagadda, A. Sharma, A. Agrawal, 《Onsager正则化格子玻尔兹曼方法：一种基于非平衡热力学的正则化格子玻尔兹曼方法》, Physical Review E 104 (1) (2021) 015313。[37] C. Coreixas, G. Wissocq, G. Puigt, J.-F. Boussuge, P. Sagaut, 《高阶格子玻尔兹曼方法的递归正则化步骤》, Physical Review E 96 (3) (2017)。[38] K. K. Mattila, P. C. Philippi, L. A. Hegele, 《格子玻尔兹曼方程中的高阶正则化》, Physics of Fluids 29 (4) (2017)。[39] X. Yang, Y. Zhang, 《一种高效的正则化格子玻尔兹曼方法，用于求解一致守恒相场模型并模拟不可压缩两相流》, Advances in Applied Mathematics and Mechanics 16 (5) (2024) 1277–1296。[40] Y. Yu, S. Chen, Y. Zhou, L. Wang, H.-Z. Yuan, S. Shu, 《一种用于黏弹性流体流动、采用新型守恒边界格式的改进格子玻尔兹曼方法》, Journal of Computational Physics (2026) 114667。[41] Y. Feng, S. Guo, J. Jacob, P. Sagaut, 《可压缩流混合递归正则化格子玻尔兹曼方法中的固壁与开放边界条件》, Physics of Fluids 31 (12) (2019)。

[42] Y. Yu、Z. Qin、S. Chen、S. Shu、H. Yuan, 《用于纳维–斯托克斯方程的双松弛时间正则化格子玻尔兹曼模型》, Advances in Applied Mathematics and Mechanics 17 (2) (2025) 489–516。 doi:10.4208/aamm.OA-2024-0203。[43] Z. Guo、C. Zheng、B. Shi, 《格子玻尔兹曼方法中强迫项的离散格子效应》, Physical Review E 65 (4) (2002) 046308。[44] X. He、X. Shan、G. D. Doolen, 《非理想气体的离散玻尔兹曼方程模型》, Physical Review E 57 (1) (1998) R13。[45] B. Postma、G. Silva, 《双松弛时间格子玻尔兹曼方法的力方法》, Physical Review E 102 (6) (2020) 063307。 doi:10.1103/PhysRevE.102.063307。[46] C. E. Pearson, 《黏性流动问题的一种计算方法》, 《流体力学杂志》21 (4) (1965) 611–622。[47] A. J. Ladd, 《通过离散化玻尔兹曼方程模拟颗粒悬浮液。第一部分：理论基础》, 《流体力学杂志》271 (1994) 285–309。[48] X. He、Q. Zou、L.-S. Luo、M. Dembo, 《格子玻尔兹曼 BGK 模型中简单流动的解析解及无滑移边界条件分析》, 统计物理学杂志 87 (1) (1997) 115–136。[49] S. Gsell、U. d'Ortona、J. Favier, 《爬行广义牛顿流动的格子玻尔兹曼模拟：理论与指南》, Journal of Computational Physics 429 (2021) 109943。[50] S. Sen、S. Mittal、G. Biswas, 《低雷诺数下绕方柱流动》, International Journal for Numerical Methods in Fluids 67 (9) (2011) 1160–1174。