arXiv:2602.06701v1 [math.PR] 6 Feb 2026

具有超线性测度变量的 McKean-Vlasov随机微分方程：适定性与混沌传播

Zhuoqi Liu[a]，Qian Guo[a]，Shuaibin Gao[b]，Chenggui Yuan[c]

[a]上海师范大学数学系，上海 *200234*，中国[b]中南民族大学数学与统计学学院，武汉 *430074*，中国[c]斯旺西大学数学系，*Bay Campus*，斯旺西 *SA1 8EN*，英国

摘要

本文研究一类 McKean-Vlasov随机微分方程（MVSDE），其漂移系数关于状态变量和测度变量均呈超线性增长，而扩散系数关于状态变量呈超线性增长。通过构造欧拉型序列，我们在局部单调条件下证明了此类 MVSDE 的强适定性。此外，本文研究了有限时域和无限时域上的混沌传播，证明相互作用粒子系统收敛于相应的非相互作用系统。为说明理论结果的合理性，我们给出漂移项包含分布高次幂和多重积分的例子，并在第 6 节展示数值模拟。

关键词：McKean-Vlasov随机微分方程；适定性；混沌传播；超线性系数；局部单调条件

1. 引言

MVSDE的理论因其在物理学、生物学和社会科学等领域的广泛应用而受到广泛关注 [1, 2, 3]。MVSDE的系数不仅取决于状态变量，还与状态变量的分布信息有关，因此也称为分布依赖随机微分方程或平均场随机微分方程。设 $b(\cdot,\cdot)$ 和 $\sigma(\cdot,\cdot)$ 在空间 $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 上连续，其中 $b: \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$ 和$\sigma: \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^{d\times m_1}$。设 $(W_t, t \geq 0)$ 是定义在完备滤过概率空间 $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\big)$ 上的标准 m_1 维布朗运动。本文致力于研究如下形式的 MVSDE:

$$dX_t = b(X_t, \mu_t)dt + \sigma(X_t, \mu_t)dW_t, \quad X_0 = \xi, \tag{1.1}$$

其中，$\mu_t := \mathcal{L}(X_t)$表示 X_t的分布。本文中，我们使用记号 $\mathcal{L}(\cdot)$表示随机变量的分布。初始值

ξ 是一个属于 $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)$的随机变量，该集合由满足 $\mathbb{E}|\zeta|^p < \infty$ 的随机变量 ζ 组成，其中 $p \geq 1$。MVSDE的研究起源于 [4], ，其灵感来自 [5]中的动力学理论。针对系数中状态变量的不同条件，MVSDE解的强适定性已得到广泛研究，例如线性增长和全局Lipschitz条件 [6], 、单边Lipschitz漂移项和全局Lipschitz扩散项 [7], ，以及超线性漂移项和扩散项[8]。对于系数不规则的MVSDE，适定性理论也已在 [9, 10, 11]中建立。[6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] 中的方程具有一个共同特点：系数中的分布分量关于瓦瑟斯坦距离满足全局Lipschitz条件。

然而，考虑以下两类具有超线性测度变量的典型MVSDE:

$$dX_t = \Big(- X_t - X_t\Big(\int_{\mathbb{R}^d} x\mu_t(dx)\Big)^2\Big)dt + \Big(X_t + \int_{\mathbb{R}^d} x\mu_t(dx)\Big)dW_t, \qquad (1.2)$$

and

$$dX_t = \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} b(X_t, y, z)\mu_t(dy)\mu_t(dz)dt + \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(X_t, y)\mu_t(dy)dW_t, \qquad (1.3)$$

其中， $\mu_\cdot$ 是 $X_\cdot$的分布， b 关于 y 和 z连续可微，且 $\partial_y b$和 $\partial_z b$ 关于（y， z）至多线性增长。(1.2)和(1.3)中关于测度变量的漂移系数不再满足全局Lipschitz条件，而是满足局部利普希茨条件。为严格证明这一观点，首先给出一些记号。令 $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 $\mathbb{R}^d$ 中的欧几里得范数和 $\mathbb{R}^{d\times m_1}$中的迹范数。对于任意实数 a、 b，记 $a \vee b =$为max$\{a, b\}$， $a \wedge b =$为min$\{a, b\}$ 。令 $\mathcal{P}$($\mathbb{R}^d$)表示 $\big($$\mathbb{R}^d$上所有概率测度的空间， $\mathcal{B}$($\mathbb{R}^d$)$\big)$，其中 $\mathcal{B}$($\mathbb{R}^d$)表示 $\mathbb{R}^d$上的Borel σ-域。对于 $p \geq 1$，定义

$$\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d) = \left\{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : \|\mu\| := \int_{\mathbb{R}^d} |x|^p\mu(dx) < \infty\right\},$$

这是具有有界矩的概率测度的子集。 μ、 $\nu \in \mathcal{P}_p$（$\mathbb{R}^d$）之间的 Wasserstein 距离定义为

$$\mathbb{W}_p(\mu, \nu) := \inf_{\pi\in\mathcal{C}(\mu,\nu)} \left(\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |x - y|^p\pi(dx, dy)\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中， $\mathcal{C}$（μ， ν）是 μ、 ν 的所有耦合构成的集合，即 π（$\cdot$， $\mathbb{R}^d$） $= \mu$（$\cdot$），且 π（$\mathbb{R}^d$， $\cdot$） $= \nu$（$\cdot$）。

首先，我们证明式 (1.2) 中的漂移项关于测度满足局部利普希茨条件。引入函数 h： $\mathcal{P}_2$($\mathbb{R}^d$) $\to \mathbb{R}$，其定义为 h(μ) $= \big(\int_{\mathbb{R}^d} x\mu(dx)\big)^2$, $\mu \in \mathcal{P}_2$($\mathbb{R}^d$)。因此，对于测度 $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2$($\mathbb{R}^d$)，有

成立:

$$\begin{aligned} h(\mu)-h(\nu) &= \big(\int_{\mathbb{R}^d} x\mu(dx)\big)^2 - \big(\int_{\mathbb{R}^d} y\nu(dy)\big)^2 \\ &= \big(\int_{\mathbb{R}^d} x\mu(dx)+\int_{\mathbb{R}^d} y\nu(dy)\big)\big(\int_{\mathbb{R}^d} x\mu(dx)-\int_{\mathbb{R}^d} y\nu(dy)\big) \\ &\le C\big(1+\|\mu\|_2+\|\nu\|_2\big)\mathbb{W}_1(\mu,\nu). \end{aligned} \tag{1.4}$$

接下来，我们说明式 (1.3) 中的漂移项关于测度变量也满足局部 Lipschitz 条件。设 u: $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}$ 为一个函数，其提升函数 $\tilde{u}$ 定义为 $\tilde{u}(X)=u(\mu)$, $X\in\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 和 $\mu=\mathcal{L}(X)$。若存在一个随机变量 X_0 满足 $\mathcal{L}(X_0)=\mu_0$, 使得提升函数 $\tilde{u}$ 在X_0处弗雷歇可微，且其导数记为 $D\tilde{u}$，则称函数u 在 $\mu_0\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 处 L-可微。根据 Riesz 表示定理，$D\tilde{u}$ 可识别为 $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 中一个 $\sigma(X_0)$-可测的随机变量，并用于表示函数 $\partial_\mu u(\mu_0)(\cdot):\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$；该函数被视为 u 在 μ_0处的 L-导数。根据 [13, 备注 2.3], ，有

$$\begin{aligned} \big|u(\mu)-u(\nu)\big| &= \Big|\int_0^1 \mathbb{E}\big[\partial_\mu u\big(\mathcal{L}(\lambda X+(1-\lambda)Y)\big)\big(\lambda X+(1-\lambda)Y\big)\big(X-Y\big)\big]d\lambda\Big| \\ &\le \|D\tilde{u}\|_2\mathbb{W}_2(\mu,\nu), \end{aligned} \tag{1.5}$$

其中， X 和 Y 是 $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$中的两个独立随机变量，满足 $\mu:=\mathcal{L}(X)$和 $\nu:=\mathcal{L}(Y)$，并且

$$\|D\tilde{u}\|_2 := \Big(\mathbb{E}\big\langle\partial_\mu u(\mathcal{L}(\cdot))(\cdot),\partial_\mu u(\mathcal{L}(\cdot))(\cdot)\big\rangle\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

估计（1.5）右端的关键在于求出 $\|D\tilde{u}\|_2$。令

$$u(\mu)=\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f(x,y)\mu_s(dx)\mu_s(dy), \tag{1.6}$$

这是测度 μ 的二次函数，其中 f： $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$。假设 f 关于(x,y)连续可微，且其一阶偏导数 ∂_x 和∂_y 关于(x,y)大多呈线性增长，也就是说，

$$\big|\partial_x f(x,y)\big|\vee\big|\partial_y f(x,y)\big|\le C(1+|x|+|y|). \tag{1.7}$$

结合 [14, 例 4，第385],页，可以看出

$$\begin{aligned} \big|\partial_\mu u(\mu)(x)\big|^2 &\le \int_{\mathbb{R}^d}\big|\partial_x f(x,y)\big|^2\mu(dy)+\int_{\mathbb{R}^d}\big|\partial_y f(x,y)\big|^2\mu(dy) \\ &\le C\int_{\mathbb{R}^d}\big(1+|x|^2+|y|^2\big)\mu(dy) \\ &\le C\big(1+|x|^2+\mathbb{E}|X|^2\big). \end{aligned} \tag{1.8}$$

然后，根据拉格朗日中值定理，可以推 deduce 出存在$\lambda^* \in$ (0,1)使得

$$\|D\tilde{u}\|_2 = \Big(\mathbb{E}\big\langle \partial_\mu u(\mathcal{L}_Z)(Z), \partial_\mu u(\mathcal{L}_Z)(Z)\big\rangle\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{1.9}$$

与 $Z = \lambda^* X + (1-\lambda^*)Y$ 结合。总之，将 (1.8) 与 (1.9) 联系起来可得

$$\Big(\mathbb{E}\big|\partial_\mu u(\mathcal{L}_Z)(Z)\big|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq C\big(1+\mathbb{E}|Z|^2\big)^{\frac{1}{2}} \leq C\big(1+\mathbb{E}|X|^2+\mathbb{E}|Y|^2\big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.10}$$

因此，(1.6) 中的测度满足局部 Lipschitz 条件，即

$$|u(\mu)-u(\nu)|^2 \leq C(1+\|\mu\|_2^2+\|\nu\|_2^2)\mathbb{W}_2^2(\mu,\nu). \tag{1.11}$$

综上，(1.2) 和 (1.3) 的漂移项均满足上述局部 Lipschitz 条件 (1.11)，但不再满足瓦瑟斯坦距离意义下的全局Lipschitz条件。

事实上，已有研究对系数中的测度满足 [15] 中局部条件的 MVSDE 进行了严格分析。当漂移项和扩散项系数关于状态变量和测度变量满足局部 Lipschitz 条件时， [16], 给出了带跳跃的 McKean-Vlasov 方程的强适定性以及混沌传播。然而，该研究要求系数具有一致有界性。 [17] 研究了在测度依赖李雅普诺夫条件下，定义域上具有无界系数的 MVSDE 弱解的存在性和轨道唯一性。在 [18], 中，作者建立了状态变量和测度变量满足局部单调条件的 MVSDE 的强适定性和弱适定性，同时还要求扩散项关于这些变量满足全局 Lipschitz条件。对于漂移项和扩散项关于测度和空间超线性增长的 MVSDE, 在 [19], 中，假设扩散项系数关于测度变量满足超线性增长条件，而在 [20], 中，测度变量方向的增长则被限制为至多线性。然而，在上述两项研究中，测度变量的超线性增长特征都要求卷积框架中的核函数满足一定条件。这两项工作均严格建立了 MVSDE 的适定性，并对相关分步欧拉格式进行了详细的收敛性分析。此外， [19] 进一步证明了底层方程的指数遍历性以及不变分布的存在性。在此基础上， [21] 建立了 MVSDE 的分部积分公式。

接下来我们重点介绍 Kac 在 [5], 的工作。他首次给出了混沌的严格数学定义，并提出，在随时间演化的系统中，混沌应当随时间传播，这一性质因而被称为“混沌传播”。在此基础上， [6] 对混沌传播进行了更加系统、全面的分析，将 Kac 最初的思想推广到更一般的情形。具体而言，对于 N-相互作用粒子系统中的随机微分方程，当粒子的初始分布为

混沌分布时， [6] 中的混沌传播理论表明，随着粒子数 N 趋于无穷，粒子的行为会越来越独立；这意味着，粒子系统的经验测度收敛于 MVSDE 的系数中出现的分布，其中 $N \to \infty$。对于系数关于测度变量满足全局利普希茨条件的 MVSDEs，已有研究考察了有限时间范围内的混沌传播 [8, 9, 11, 12, 22], ，并在 [23, 24]中得出了一致时间混沌传播的结果。相比之下，对于系数关于测度变量满足局部 Lipschitz 条件的情形，有限时间内的混沌传播已在 [16, 19, 20, 25]中得到确立。

与上述文献相比，本文对系数的假设明显更弱。本文的主要贡献总结如下:

- 在漂移项和扩散项相对于状态变量呈超线性增长，且漂移项中的测度变量在瓦瑟斯坦距离意义下呈超线性的条件下，建立了方程 (1.1) 的解的强适定性。
- 本文提出了有限时域下的混沌传播理论，表明相互作用粒子系统可用于近似非相互作用粒子系统。
- 在耗散条件下，本文还建立了无限时域下的混沌传播理论，这意味着随着时间趋于无穷，相互作用粒子系统将收敛于相应的非相互作用粒子系统。

本文其余部分安排如下。第 2 节逐一介绍主要结果。第 3 节通过构造欧拉型序列，讨论方程 (1.1) 的强适定性，相关结论表述为定理 2.6。第 4 节致力于完成定理 2.7 的证明。第 5 节旨在完成定理 2.10 的证明。第 6 节通过数值模拟验证有限和无限时间区间下混沌传播的相关理论。附录中，我们给出解的指数可积性的证明以及各项假设的验证。

2. 主要结果

本节介绍本文的主要结果，包括有限时域和无限时域下的强适定性与混沌传播。受第 1 节两个例子中系数条件的启发，我们对 (1.1) 作出以下假设。

假设 2.1. 对任意 $R > 0$，存在常数 $q, \gamma \geq 2$ 和 $L_1 > 0$，使得对任意 $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^d$ 满足 $|x| \vee |\bar{x}| \leq R$ 和 $\mu, \ \nu \in \mathcal{P}_\gamma(\mathbb{R}^d)$，

$$\begin{aligned} &2\langle x - \bar{x}, b(x,\mu) - b(\bar{x},\nu)\rangle + (q-1)\|\sigma(x,\mu) - \sigma(\bar{x},\nu)\|^2 \\ \leq &\big(L(R) + L_1\|\mu\|_\gamma^\gamma + L_1\|\nu\|_\gamma^\gamma\big)\big(|x-\bar{x}|^2 + \mathbb{W}_2^2(\mu,\nu)\big), \end{aligned}$$

其中 $L:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是满足 $L(R)<\infty$ 的函数。

假设 2.2。 存在常数 $L_2>0$ 和 $l_1,\ l_2\geq 1$ 使得

$$|b(x,\mu)-b(\bar{x},\nu)|\leq L_2(1+|x|^{l_1}+|\bar{x}|^{l_1}+\|\mu\|_{l_1}^{l_1}+\|\nu\|_{l_1}^{l_1})\left(|x-\bar{x}|+\mathbb{W}_2(\mu,\nu)\right),$$

$$\|\sigma(x,\mu)-\sigma(\bar{x},\mu)\|\leq L_2(1+|x|^{l_2}+|\bar{x}|^{l_2})|x-\bar{x}|,$$

$$\|\sigma(x,\mu)-\sigma(x,\nu)\|\leq L_2\mathbb{W}_2(\mu,\nu),$$

对任意 $x,\ \bar{x}\in\mathbb{R}^d$ 和 $\mu,\ \nu\in\mathcal{P}_{l_1\vee 2}(\mathbb{R}^d)$。

假设 2.3。 存在常数 $p\geq 2$ 和 $L_3>0$ 使得

$$2\langle x,b(x,\mu)\rangle+(p-1)\|\sigma(x,\mu)\|^2\leq L_3\big(1+|x|^2+\|\mu\|_2^2\big),$$

对任意 $x\in\mathbb{R}^d$ 和 $\mu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$。

假设 2.4。 存在常数 $L_4>0$ 和 $l_3,\ l_4\geq 1$ 使得

$$|b(x,\mu)|\leq L_4(1+|x|^{l_3}+\|\mu\|_{l_3}^{l_3}),$$

$$\|\sigma(x,\mu)\|\leq L_4(1+|x|^{l_4}+\|\mu\|_2),$$

对任意 $x\in\mathbb{R}^d$ 和 $\mu\in\mathcal{P}_{l_3\vee 2}(\mathbb{R}^d)$。

显然，假设 2.4 可由假设 2.2 推出，但为简化记号，我们仍明确陈述假设 2.4。

假设 2.5. 对任意 $x\in\mathbb{R}^d$、 $\mu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 以及初始值 $\xi\in\mathcal{F}_0$、 $\bar{}$，存在非减、可测的多项式函数 f、 $\bar{f}:\ [0,\infty)\to[0,\infty)$ 使得 $\mathbb{E}[e^{f(|\xi|)}]<\infty$，并且

$$\begin{aligned}&\langle\nabla f(|x|),b(x,\mu)\rangle+\frac{1}{2}|\nabla f(|x|)\sigma(x,\mu)|^2+\frac{1}{2}trace\left(\sigma^T(x,\mu)\nabla^2 f(|x|)\sigma(x,\mu)\right)\\ \leq&\alpha f(|x|)+\beta\bar{f}\left(\|\mu\|_2^2\right),\end{aligned}$$

and

$$\lim_{R\to\infty}\big(f(R)-\kappa L(R)\big)=\infty,\tag{2.1}$$

其中 α、 β 和 κ 为某些正常数。此处，对 $i,j=1,\cdots,d$,

$$\nabla f(|x|)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}f(|x|),\ldots,\frac{\partial}{\partial x_d}f(|x|)\right),\ \left[\nabla^2 f(|x|)\right]_{ij}=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}f(|x|).$$

注释 1. 假设 *2.5* 用于建立方程 *(1.1)* 的解的指数可积性，这对于定理 *2.6* 中分析方程 *(1.1)* 解的存在性与唯一性至关重要。指数可积性的详细证明见附录。关于指数可积性的更多细节，请参阅 *[26]*。

注 2. 若假设 *2.1* 中的函数 $L(R) \leq C \log R$ （ $C > 0$ ）成立，则假设 *2.5* 便是多余的。然而，当函数 $L(R)$ 的增长速度快于 $\log R$时，例如 $L(R) = R^a$ （ $a > 0$），则需要假设 *2.5* 来保证解具有指数可积性。

注释 3. 与 *[18]*, 相比，本文中的假设更加宽松。首先，漂移项中状态变量的指数 l_3 不再受假设 *2.1* 中 γ 的约束，这意味着漂移项中状态变量超线性的程度限制较少。其次，扩散项中的状态变量允许呈超线性。第三， *[18]* 中关于指数可积性的假设难以直接验证，而我们的假设 *2.5* 则更易于检验。

注 4. 本文中的假设相对宽泛，涵盖的平均场随机微分方程类型多于现有文献（如 *[19, 20]*）中的情形。例如，考虑以下一维平均场随机微分方程

$$dX_t = (-18X_t^5 - X_t^{\frac{1}{3}}[\mathbb{E}X_t]^4 + 2)dt + (X_t^2 + EX_t)dW_t, \tag{2.2}$$

该方程满足假设 *2.1-2.5*，但不属于上述任何一项研究所讨论的范围。我们在附录中详细说明如何验证假设 *2.1-2.5*。

以下定理在给定假设下，确立了方程 (1.1) 的强适定性。

定理 2.6. 假设假设 *2.1-2.5* 在 $p \geq \max\{\gamma, 2+2l_3, 4l_4\}$ 下成立。那么，对于任意 $T > 0$, 平均场随机微分方程 *(1.1)* 存在唯一的强解 X_t。此外，对于 $2 \leq \bar{p} \leq p/l_4$，有

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}|X_t|^p \leq C_{\xi,p,L_3,T} \quad and \quad \mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^{\bar{p}}\Big] \leq C_{\xi,l_4,L_3,T}.$$

为近似原平均场随机微分方程，我们考虑以下由 N 个相互作用粒子组成的随机系统:

$$dX_t^{i,N} = b(X_t^{i,N}, \mu_t^{X,N})dt + \sigma(X_t^{i,N}, \mu_t^{X,N})dW_t^i, \ i \in \mathbb{S}_N := \{1, 2, \cdots, N\}, \tag{2.3}$$

初始值为 $\xi^i \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)$。这里， $\mu^{X_{\cdot,t}}{}^N := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \delta_{X^{j,}_{\cdot,t}{}^N}$ 是 $(X^{i}_{\cdot,t}{}^N)_{1\leq i\leq N}$ 的经验测度，其中 $\delta_{X^{j,}_{\cdot,t}{}^N}$ 是 $X^{j}_{\cdot,t}{}^N$ 的狄拉克测度，而 (W^i, ξ^i) 是 (W, ξ) 的独立副本。随着粒子数 N 趋于无穷，经验测度 $\mu^{X_{\cdot,t}}{}^N$ 收敛于任意一组相互独立粒子 $(X_t^i)_{1\leq i\leq N}$ 的分布，这些粒子满足非相互作用粒子系统:

$$dX_t^i = b(X_t^i, \mathcal{L}(X_t^i))dt + \sigma(X_t^i, \mathcal{L}(X_t^i))dW_t^i, \tag{2.4}$$

初始值为 $\xi^i \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)$。以下定理给出了有限时域内混沌传播的结果。

定理 2.7。 假设在 $p \geq$ 最大值$\{\gamma, 2+2l_3,\ 4l_4\}$ 下，假设 *2.1-2.5* 成立。那么，对于 $2 \leq q \leq (\frac{p}{2}+1-l_3) \wedge (\frac{p}{2}+2-2l_4)$ 以及 $2 \leq \bar{q} \leq (p/l_2) \wedge q$，有

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}|X_t^{i,N} - X_t^i|^q = 0, \tag{2.5}$$

and

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\big[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{i,N} - X_t^i|^{\bar{q}}\big] = 0. \tag{2.6}$$

在前面的部分中，我们主要关注了有限时域内的适定性和混沌传播。现在，通过施加以下条件，我们进一步研究无限时域内的混沌传播:

假设 2.8。 存在常数 $p \geq 2$ 和 $L_5 > L_6 > 0$ 使得

$$2\langle x, b(x,\mu)\rangle + (p-1)\|\sigma(x,\mu)\|^2 \leq -L_5|x|^2 + L_6\|\mu\|_2^2,$$

对任意 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$。

假设 2.9。 对于任意 $R > 0$，存在正常数 $\gamma \geq 2$ 和 L_1，使得对于任意 x，$\bar{x} \in \mathbb{R}^d$，其中 $|x| \vee |\bar{x}| \leq R$ 和 $\mu,\ \nu \in \mathcal{P}_\gamma(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
&2\langle x-\bar{x}, b(x,\mu) - b(\bar{x},\nu)\rangle + \|\sigma(x,\mu) - \sigma(\bar{x},\nu)\|^2 \\
&\leq -h(R)|x-\bar{x}|^2 + \big(g(R) + L_1\|\mu\|_\gamma^\gamma + L_1\|\nu\|_\gamma^\gamma\big)\big(|x-\bar{x}|^2 + \mathbb{W}_2^2(\mu,\nu)\big),
\end{aligned}$$

其中函数 $h:\ [0,\infty) \to [0,\infty)$ 和 $g:\ [0,\infty) \to [0,\infty)$ 满足

$$h(R) - 3g(R) > (\gamma/2+1)(L_5 - L_6), \tag{2.7}$$

对于任意 $R > 0$，并且存在 $\lambda > 3$ 使得

$$\lim_{R\to\infty} \frac{h(R)}{g(R)} = \lambda, \qquad \lim_{R\to\infty} g(R) = \infty. \tag{2.8}$$

无限时域下的混沌传播由以下定理给出。

定理 2.10. 假设条件 *2.4*、*2.8* 和 *2.9* 成立，则有

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \mathbb{E}|X_t^i - X_t^{i,N}|^2 = 0.$$

在本节的最后部分，我们将准备一些结论，以实现本文的目标。

- 对于任意 $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$，我们有 $\mathbb{W}_2(\mu,\delta_0) = \|\mu\|_2$。
- 对于两个随机变量 X, Y，其分布分别记为 μ 和ν。对于 $p \geq 1$，有

$$\mathbb{W}_p(\mu,\nu) \leq \big(\mathbb{E}\big|X-Y\big|^p\big)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.9}$$

- 对于由过程 X_t 的独立同分布样本构造的经验测度 $\tilde{\mu}^{X,\ N}_{\cdot,\ t}$：
$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{X_t^j}$，对于 $p \geq 1$，存在

$$\mathbb{W}_p(\tilde{\mu}_t^{X,N}, \tilde{\mu}_t^{Y,N}) \leq \Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|X_t^j - Y_t^j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.10}$$

- （格朗沃尔引理的微分形式）假设 $\theta \in C((0,\infty);\ R)$ 满足微分不等式

$$\theta'(t) \leq a(t)\theta(t) + b(t),$$

对某些 $a(\cdot),\ \ b(\cdot)\ \in L^1(0,\infty)$ 成立。那么，θ 满足逐点估计

$$\theta(t) \leq e^{A(t)}\theta(0) + \int_0^t b(s)e^{A(t)-A(s)}ds, \tag{2.11}$$

其中，$A(t)$ 定义为

$$A(t) = \int_0^t a(s)ds.$$

3. 定理 2.6 的证明

证明。证明分为三个步骤。

步骤 1。此步骤旨在构造一个欧拉型序列 $\{X_t^{(m)}\}_{m\geq 1}$，并证明其适定。对任意整数 $m \geq 1$ 和 $T > 0$，记 $\Delta_m = \frac{T}{m}$ 和 $t_k^m = k\Delta_m$、$k = 0$、1、$\cdots$、m。随后在时间区间 $[0, t_1^m]$、$(t_1^m$、$t_2^m]$、$\cdots$、$(t_{m-1}^m$、$T]$ 上依次定义过程 $X_t^{(m)}$。我们先考虑时间区间 $[0, t_1^m]$ 上的以下经典随机微分方程，

$$dX_t^{(m)} = b(X_t^{(m)}, \mu_0^{(m)})dt + \sigma(X_t^{(m)}, \mu_0^{(m)})dW_t, \tag{3.1}$$

初始值为 $X_0^{(m)} = \xi$ 和 $\mu_0^{(m)} := \mathcal{L}(\xi)$。在假设 2.1–2.4 下，(3.1) 的系数满足 [27] 中 $Theorem\ 3.1.1$ 的条件。因此，可以证明该具有超线性漂移项和扩散系数的方程在区间$[0, t_1^m]$上的解存在且唯一，并且还可以推导出 (3.1) 的解具有矩有界性，这

$$\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq t\leq t_1^m}|X_t^{(m)}|^2\big] \leq C_{L_3,T}(1 + \mathbb{E}|\xi|^2).$$

由于该证明与下文引理 3.1 的证明类似，此处从略。归纳地，我们考虑 $t \in (t_k^m$，$t_{k+1}^m]$, $k = 1, \cdots, m-1$, 的经典随机微分方程

$$dX_t^{(m)} = b(X_t^{(m)}, \mu_{t_k^m}^{(m)})dt + \sigma(X_t^{(m)}, \mu_{t_k^m}^{(m)})dW_t, \tag{3.2}$$

其初始值为 $X_{t_k^m}^{(m)}$ 和 $\mu_{t_k^m}^{(m)} := \mathcal{L}(X_{t_k^m}^{(m)})$。同样地，也可得到 (3.2) 的解的存在性与唯一性，并且

$$\mathbb{E}\big[\sup_{t_k^m \le t \le t_{k+1}^m} |X_t^{(m)}|^2\big] \le C_{L_3,T}(1 + \mathbb{E}|X_{t_k^m}^{(m)}|^2)$$

成立。记 $\lceil t \rceil_m = t_k^m$为 $t \in (t_k^m, t_{k+1}^m]$。那么对于任意 $t \in [0,T]$，我们引入以下随机微分方程:

$$dX_t^{(m)} = b(X_t^{(m)}, \mu_{\lceil t \rceil_m}^{(m)})dt + \sigma(X_t^{(m)}, \mu_{\lceil t \rceil_m}^{(m)})dW_t, \tag{3.3}$$

其初始值为 ξ，且 $\mu_{\lceil t \rceil_m}^{(m)} := \mathcal{L}(X_{\lceil t \rceil_m}^{(m)})$。下文的引理 3.1 给出了随机微分方程 (3.3) 的解的矩有界性，并表明该界与 m 无关。随后，欧拉型序列 $\{X_t^{(m)}\}_{m\ge1}$ 的适定性也随之得到。

步骤 2. 这一步揭示了方程 (1.1) 的解的存在性。我们将在下文的引理 3.2 中证明，对于某个 $q \ge 2$，序列 $\{X_t^{(m)}\}_{m\ge1}$ 是 $L^q(\Omega; C([0,T]; \mathbb{R}^d))$ 中的柯西序列，其中 $L^q(\Omega; C([0,T]; \mathbb{R}^d))$ 表示配备范数 $\|X\|_{L^q} := \big(\mathbb{E}[\sup_{0\le t\le T} |X_t|^q]\big)^{\frac{1}{q}}$ 的巴拿赫空间。由于 $L^q(\Omega; C([0,T]; \mathbb{R}^d))$ 的完备性，存在一个过程 $X_t \in L^q(\Omega; C([0,T]; \mathbb{R}^d))$，它是一个 $\{\mathcal{F}_t\}$-适应连续过程，满足

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\big[\sup_{0\le t\le T} |X_t^{(m)} - X_t|^2\big] = 0.$$

因此，方程 (1.1) 的解的存在性得以证明。

步骤 3. 本步骤旨在讨论方程 (1.1) 的解的唯一性和矩有界性。由于证明可直接由引理 3.1 和引理 3.2 的步骤得出，我们省略细节。

□

引理 3.1. 设假设 *2.1–2.4* 成立。

(i) 对于 $2 \le p_0 \le p$，存在正常数 $C_{\xi,p_0,L_3,T}$，使得

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}|X_t^{(m)}|^{p_0} \le C_{\xi,p_0,L_3,T}.$$

(ii) 对于 $2l_4 \le p_0 \le p$ 和 $2 \le \bar{p}_0 \le p_0/l_4$，存在正常数 $C_{\xi,l_4,\bar{p}_0,L_3,L_4,T}$，使得

$$\mathbb{E}\big[\sup_{0\le t\le T} |X_t^{(m)}|^{\bar{p}_0}\big] \le C_{\xi,l_4,\bar{p}_0,L_3,L_4,T}.$$

这里，$C_{\xi,p_0,L_3,T}$ 和 $C_{\xi,l_4,\bar{p}_0,L_3,L_4,T}$ 与 m 无关。

证明。对于任意 $t \in [0,T]$，利用伊藤公式可得

$$\begin{aligned}
&|X_t^{(m)}|^{p_0} \\
=&|X_0^{(m)}|^{p_0} + \frac{p_0}{2}\int_0^t |X_s^{(m)}|^{p_0-2}\Big(2\langle X_s^{(m)}, b(X_s^{(m)}, \mu_{\lceil s \rceil_m}^{(m)})\rangle \\
&+ (p_0-1)\|\sigma(X_s^{(m)}, \mu_{\lceil s \rceil_m}^{(m)})\|^2\Big)ds + p_0\int_0^t |X_s^{(m)}|^{p_0-2}\langle X_s^{(m)}, \sigma(X_s^{(m)}, \mu_{\lceil s \rceil_m}^{(m)})\rangle dW_s.
\end{aligned}$$

由假设 2.3、杨氏不等式和霍尔德不等式可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_t^{(m)}|^{p_0} \leq& \mathbb{E}|\xi|^{p_0} + \frac{p_0 L_3}{2}\mathbb{E}\Big[\int_0^t |X_s^{(m)}|^{p_0-2}\big(1+|X_s^{(m)}|^2 + \|\mu_{\lceil s\rceil_m}^{(m)}\|_2^2\big)ds\Big]\\ \leq& \mathbb{E}|\xi|^{p_0} + L_3\mathbb{E}\Big[\int_0^t \big(1+(\frac{3p_0}{2}-2)|X_s^{(m)}|^{p_0} + \mathbb{E}|X_{\lceil s\rceil_m}^{(m)}|^{p_0}\big)ds\Big].\end{aligned}$$

因此，对于任意 $t\in[0,T]$,

$$\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}|X_t^{(m)}|^{p_0} \leq \mathbb{E}|\xi|^{p_0} + L_3 T + (\frac{3p_0}{2}-1)L_3\int_0^T \sup_{0\leq s\leq t}\mathbb{E}|X_s^{(m)}|^{p_0}dt.$$

利用格朗沃尔不等式，我们得到

$$\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}|X_t^{(m)}|^{p_0} \leq (\mathbb{E}|\xi|^{p_0} + L_3 T)\exp\left((\frac{3p_0}{2}-1)L_3 T\right). \tag{3.4}$$

接下来，通过应用 BDG 不等式、杨氏不等式以及假设 2.3–2.4，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^{(m)}|^{\bar{p}_0}\big]\\ \leq& \mathbb{E}|\xi|^{\bar{p}_0} + \frac{\bar{p}_0 L_3}{2}\mathbb{E}\Big[\int_0^t |X_s^{(m)}|^{\bar{p}_0-2}\big(1+|X_s^{(m)}|^2 + \|\mu_{\lceil s\rceil_m}^{(m)}\|_2^2\big)ds\Big]\\ &+ \bar{p}_0 4\sqrt{2}\mathbb{E}\Big(\int_0^t |X_s^{(m)}|^{2\bar{p}_0-2}\|\sigma(X_s^{(m)},\mu_{\lceil s\rceil_m}^{(m)})\|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}}\\ \leq& \mathbb{E}|\xi|^{\bar{p}_0} + L_3\mathbb{E}\Big[\int_0^t \big(1+(\frac{3\bar{p}_0}{2}-2)|X_s^{(m)}|^{\bar{p}_0} + \mathbb{E}|X_{\lceil s\rceil_m}^{(m)}|^{\bar{p}_0}\big)ds\Big]\\ &+ \frac{1}{2}\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^{(m)}|^{\bar{p}_0}\big] + K_{\bar{p}_0,T}\mathbb{E}\Big[\int_0^t \|\sigma(X_s^{(m)},\mu_{\lceil s\rceil_m}^{(m)}\|^{\bar{p}_0}ds\Big]\\ \leq& \mathbb{E}|\xi|^{\bar{p}_0} + L_3\mathbb{E}\Big[\int_0^t \big(1+(\frac{3\bar{p}_0}{2}-2)|X_s^{(m)}|^{\bar{p}_0} + \mathbb{E}|X_{\lceil s\rceil_m}^{(m)}|^{\bar{p}_0}\big)ds\Big]\\ &+ \frac{1}{2}\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^{(m)}|^{\bar{p}_0}\big] + K_{\bar{p}_0,T}3^{\bar{p}_0-1}L_4^{\bar{p}_0}\mathbb{E}\Big[\int_0^t \big(1+|X_s^{(m)}|^{\bar{p}_0 l_4} + \mathbb{E}|X_{\lceil s\rceil_m}^{(m)}|^{\bar{p}_0}\big)ds\Big],\end{aligned}$$

其中 $K_{\bar{p}_0,\ T} := 4\sqrt{2}\big(8\sqrt{2}(\bar{p}_0-1)\big)^{\bar{p}_0-1}T^{\frac{\bar{p}_0-2}{2}}$。于是,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{(m)}|^{\bar{p}_0}\big]\\ \leq& 2\mathbb{E}|\xi|^{\bar{p}_0} + 2(L_3 + K_{\bar{p}_0,T}3^{\bar{p}_0-1}L_4^{\bar{p}_0})T\\ &+ ((3\bar{p}_0-3)L_3 + 2K_{\bar{p}_0,T}3^{\bar{p}_0-1}L_4^{\bar{p}_0})\int_0^T \mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^{(m)}|^{\bar{p}_0}\big]dt\\ &+ 2K_{\bar{p}_0,T}3^{\bar{p}_0-1}L_4^{\bar{p}_0}\int_0^T \mathbb{E}|X_t^{(m)}|^{\bar{p}_0 l_4}dt.\end{aligned}$$

应用格朗沃尔不等式和 (3.4)，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\sup_{0\le t\le T}|X_t^{(m)}|^{\bar p_0}\big]\\
\le&\big(2\mathbb{E}|\xi|^{\bar p_0}+2(L_3+K_{\bar p_0,T}3^{\bar p_0-1}L_4^{\bar p_0})T+2K_{\bar p_0,T}3^{\bar p_0-1}L_4^{\bar p_0}T\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}|X_t^{(m)}|^{\bar p_0 l_4}\big)\\
&\cdot\exp\left((3\bar p_0-3)L_3+2K_{\bar p_0,T}3^{\bar p_0-1}L_4^{\bar p_0}\right),
\end{aligned}$$

如所要求。 □

引理 3.2。 假设假设 *2.1-2.5* 在 $p\ge\max\{\gamma,2+2l_3,4l_4\}$ 条件下成立。对于 $2\le q\le(\frac{p}{2}+1-l_3)\wedge(\frac{p}{2}+2-2l_4)$ 和 $2\le\bar q\le(p/l_2)\wedge q$，我们有

$$\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}\big[|X_t^{(m)}-X_t^{(n)}|^q\big]\to 0,$$

and

$$\mathbb{E}\big[\sup_{0\le t\le T}|X_t^{(m)}-X_t^{(n)}|^{\bar q}\big]\to 0,$$

当 $m,n\to\infty$ 时。

证明。 对任意 $t\in[0,T]$，由伊藤公式可得

$$\begin{aligned}
&|X_t^{(m)}-X_t^{(n)}|^q\\
=&q\int_0^t|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|^{q-2}\langle X_s^{(m)}-X_s^{(n)},b(X_s^{(m)},\mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m})-b(X_s^{(n)},\mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n})\rangle ds\\
&+\frac{q(q-1)}{2}\int_0^t|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|^{q-2}\|\sigma(X_s^{(m)},\mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m})-\sigma(X_s^{(n)},\mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n})\|^2ds\\
&+q\int_0^t|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|^{q-2}\langle X_s^{(m)}-X_s^{(n)},\sigma(X_s^{(m)},\mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m})-\sigma(X_s^{(n)},\mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n})\rangle dW_s\\
=:&I_1(t)+I_2(t)+I_3(t).
\end{aligned}$$

通过采用第 7.1 节中证明指数可积性的类似方法，在假设 2.5 下，可以证明存在一个非递减函数 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$，其中 $\mathbb{E}e^{f(|\xi|)}<\infty$ 满足

$$\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}[\exp(f(|X_t^{(m)}|))]<\infty. \tag{3.5}$$

定义

$$\Omega^{m,n}(R)=\big\{\omega\in\Omega:|X_t^{(m)}|>R,\ |X_t^{(n)}|>R\big\}$$

对于足够大的 R。对于任意 $q^*\ge 2$ 以及给定函数 $f(\cdot)$，利用切比雪夫不等式可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\Omega^{m,n}(R))\\
\le&\exp(-2q^*f(R))\left(\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}\big[\exp(2q^*f(|X_t^{(m)}|))\big]+\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}\big[\exp(2q^*f(|X_t^{(n)}|))\big]\right)\\
\le&C_{\xi,q^*,\alpha,\beta,L_3,T,f,\bar f}\exp(-2q^*f(R)).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

值得注意的是，该概率的估计与 m和 n均无关。根据假设 2.1、2.4 和 (2.9)，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[|X_t^{(m)}-X_t^{(n)}|^q\big]\\
=&\frac{q}{2}\mathbb{E}\Big[\int_0^t|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|^{q-2}\big(2\langle X_s^{(m)}-X_s^{(n)},b(X_s^{(m)},\mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m})-b(X_s^{(n)},\mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n})\rangle ds\\
&\quad+(q-1)\|\sigma(X_s^{(m)},\mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m})-\sigma(X_s^{(n)},\mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n})\|^2\big)ds\Big]\\
\le&\frac{q}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|^{q-2}\big(2\langle X_s^{(m)}-X_s^{(n)},b(X_s^{(m)},\mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m})-b(X_s^{(n)},\mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n})\rangle\\
&\quad+(q-1)\|\sigma(X_s^{(m)},\mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m})-\sigma(X_s^{(n)},\mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n})\|^2\big)ds\Big)\cdot\mathbb{I}_{\Omega\setminus\Omega^{m,n}(R)}\Big]\\
&+q\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|^{q-1}|b(X_s^{(m)},\mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m})-b(X_s^{(n)},\mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n})|ds\Big)\cdot\mathbb{I}_{\Omega^{m,n}(R)}\Big]\\
&+\frac{q(q-1)}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|^{q-2}\|\sigma(X_s^{(m)},\mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m})\\
&\qquad\qquad-\sigma(X_s^{(n)},\mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n})\|^2ds\Big)\cdot\mathbb{I}_{\Omega^{m,n}(R)}\Big]\\
\le&\frac{q}{2}\mathbb{E}\Big[\int_0^t|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|^{q-2}\big(L(R)+L_1\|\mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m}\|_\gamma^\gamma+L_1\|\mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n}\|_\gamma^\gamma\big)\big(|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|^2\\
&\quad+\mathbb{W}_2^2(\mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m},\mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n})\big)ds\Big]\\
&+qL_4\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t\big(|X_s^{(m)}|+|X_s^{(n)}|\big)^{q-1}\big(2+|X_s^{(m)}|^{l_3}+\|\mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m}\|_{l_3}^{l_3}+|X_s^{(n)}|^{l_3}\\
&\qquad+\|\mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n}\|_{l_3}^{l_3}\big)ds\Big)\cdot\mathbb{I}_{\Omega^{m,n}(R)}\Big]\\
&+3q(q-1)L_4^2\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t\big(|X_s^{(m)}|+|X_s^{(n)}|\big)^{q-2}\big(2+|X_s^{(m)}|^{2l_4}+\|\mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n}\|_2^2\\
&\qquad\qquad+|X_s^{(n)}|^{2l_4}+\|\mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n}\|_2^2\big)ds\Big)\cdot\mathbb{I}_{\Omega^{m,n}(R)}\Big]\\
\le&\frac{q}{2}\mathbb{E}\Big[\int_0^t|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|^{q-2}\big(L(R)+L_1\mathbb{E}|X^{(m)}_{\lceil s\rceil}|^\gamma+L_1\mathbb{E}|X^{(n)}_{\lceil s\rceil}|^\gamma\big)\big(|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|^2\\
&\quad+3\mathbb{W}_2^2(\mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m},\mu_s^{(m)})+3\mathbb{W}_2^2(\mu_s^{(m)},\mu_s^{(n)})+3\mathbb{W}_2^2(\mu_s^{(n)},\mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n})\big)ds\Big]\\
&+qL_4\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t\big(|X_s^{(m)}|+|X_s^{(n)}|\big)^{q-1}\big(2+|X_s^{(m)}|^{l_3}+\mathbb{E}|X^{(m)}_{\lceil s\rceil_m}|^{l_3}+|X_s^{(n)}|^{l_3}\\
&\qquad+\mathbb{E}|X^{(n)}_{\lceil s\rceil_n}|^{l_3}\big)ds\Big)\cdot\mathbb{I}_{\Omega^{m,n}(R)}\Big]\\
&+3q(q-1)L_4^2\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t\big(|X_s^{(m)}|+|X_s^{(n)}|\big)^{q-2}\big(2+|X_s^{(m)}|^{2l_4}+\mathbb{E}|X^{(m)}_{\lceil s\rceil_m}|^2\\
&\qquad\qquad+|X_s^{(n)}|^{2l_4}+\mathbb{E}|X^{(n)}_{\lceil s\rceil_n}|^2\big)ds\Big)\cdot\mathbb{I}_{\Omega^{m,n}(R)}\Big].
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

此外，方程 (3.3) 的解有界，这意味着对于任意$q \geq 2$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}|X_t^{(m)} - X_{\lceil t\rceil_m}^{(m)}|^q \\
\leq& 2^{q-1}\Big(\mathbb{E}\Big|\int_{\lceil t\rceil_m}^t b(X_s^{(m)}, \mu_{\lceil s\rceil_m}^{(m)})ds\Big|^q + \mathbb{E}\Big|\int_{\lceil t\rceil_m}^t \sigma(X_s^{(m)}, \mu_{\lceil s\rceil_m}^{(m)})dW_s\Big|^q\Big) \\
\leq& 2^{q-1}\Big(\Delta_m^{q-1}\int_{\lceil t\rceil_m}^t \mathbb{E}|b(X_s^{(m)}, \mu_{\lceil s\rceil_m}^{(m)})|^q ds + \mathbb{E}\big(\int_{\lceil t\rceil_m}^t \|\sigma(X_s^{(m)}, \mu_{\lceil s\rceil_m}^{(m)})\|^2 ds\big)^{\frac{q}{2}}\Big) \\
\leq& 2^{q-1}\Big(\Delta_m^{q-1}\int_{\lceil t\rceil_m}^t \mathbb{E}|b(X_s^{(m)}, \mu_{\lceil s\rceil_m}^{(m)})|^q ds + \Delta_m^{\frac{q}{2}-1}\int_{\lceil t\rceil_m}^t \|\sigma(X_s^{(m)}, \mu_{\lceil s\rceil_m}^{(m)})\|^q ds\Big) \\
\leq& C_{\xi,l_3,l_4,q,L_3,L_4,t}\Delta_m^{\frac{q}{2}},
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

其中我们运用了霍尔德不等式和假设 2.4。

因此，利用霍尔德不等式、杨氏不等式、(2.9) 和 (3.8)，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\big[|X_t^{(m)} - X_t^{(n)}|^q\big] \\
\leq& \big(L(R) + C_{\xi,\gamma,L_1,L_3,T}\big)\int_0^T \Big((5q-6)\sup_{0\leq s\leq t}\mathbb{E}\big[|X_s^{(m)} - X_s^{(n)}|^q\big] + 3\mathbb{E}\big[|X_t^{(m)} - X_{\lceil t\rceil_m}^{(m)}|^q\big] \\
&\qquad + 3\mathbb{E}\big[|X_t^{(n)} - X_{\lceil t\rceil_n}^{(n)}|^q\big]\Big)dt \\
&+ C_{q,L_4,T}\Big(1 + \sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\big[|X_t^{(m)}|^{2(q+l_3-1)}\big] + \sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\big[|X_t^{(n)}|^{2(q+l_3-1)}\big]\Big)^{\frac{1}{2}}\big(\mathbb{P}(\Omega^{m,n}(R))\big)^{\frac{1}{2}} \\
&+ C_{q,L_4,T}\Big(1 + \sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\big[|X_t^{(m)}|^{2(q+2l_4-2)}\big] + \sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\big[|X_t^{(n)}|^{2(q+2l_4-2)}\big]\Big)^{\frac{1}{2}}\big(\mathbb{P}(\Omega^{m,n}(R))\big)^{\frac{1}{2}} \\
\leq& (5q-6)\big(L(R) + C_{\xi,\gamma,L_1,L_3,T}\big)\int_0^T \sup_{0\leq s\leq t}\mathbb{E}\big[|X_s^{(m)} - X_s^{(n)}|^q\big]dt \\
&+ \bar{L}(R)(\Delta_m^{\frac{q}{2}} + \Delta_n^{\frac{q}{2}}) + C_{\xi,l_3,l_4,q,L_3,L_4,T}\big(\mathbb{P}(\Omega^{m,n}(R))\big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

其中 $L(\cdot): [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是与 $L(\cdot)$ 相关的函数。借助格朗沃尔不等式和式 (3.6)，我们推得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\big[|X_t^{(m)} - X_t^{(n)}|^q\big] \\
\leq& C_{\xi,l_3,l_4,q,L_3,L_4,T}\big(\mathbb{P}(\Omega^{m,n}(R))\big)^{\frac{1}{2}}\exp\left((5q-6)(L(R) + C_{\xi,\gamma,L_1,L_3,T})\right) \\
&+ \bar{L}(R)(\Delta_m^{\frac{q}{2}} + \Delta_n^{\frac{q}{2}})\exp\left((5q-6)(L(R) + C_{\xi,\gamma,L_1,L_3,T})\right) \\
\leq& C_{\xi,\gamma,\alpha,\beta,l_3,l_4,q,L_1,L_3,L_4,T,f,\bar{f}}\exp\left(-(5q-6)(f(R) - L(R))\right) \\
&+ \bar{L}(R)(\Delta_m^{\frac{q}{2}} + \Delta_n^{\frac{q}{2}})\exp\left((5q-6)(L(R) + C_{\xi,\gamma,L_1,L_3,T})\right).
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

由式 (2.1) 可知，对于任意 $\eta_1 > 0$，存在一个足够大的 R_{η_1}，使得当 $R \geq R_{\eta_1}$ 时，不等式 (3.10) 右端的第一项小于 $\eta_1/2$。随着 m、$n \to \infty$、Δ_m 和 Δ_n 趋于 0，存在一个整数 U_0，使得对于所有 m、$n \geq U_0$,

$$\bar{L}(R_{\eta_1})(\Delta_m^{\frac{q}{2}} + \Delta_n^{\frac{q}{2}}) \exp\left((5q-6)(L(R_{\eta_1}) + C_{\xi,\gamma,L_1,L_3,T})\right) \leq \eta_1/2.$$

也就是说，对于任意 $\eta_1 > 0$，可以先选取一个常数 $R_{\eta_1} > 0$，然后找到一个整数 U_0，使得对于所有 $R \geq R_{\eta_1}$ 和 m，$n \geq U_0$,

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\big[|X_t^{(m)} - X_t^{(n)}|^q\big] \leq \eta_1.$$

接下来证明引理 3.2 的第二个结论。容易验证,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^{(m)} - X_s^{(n)}|^{\bar{q}}\big] \\
\leq&\frac{\bar{q}}{2}\mathbb{E}\Big[\int_0^t |X_s^{(m)} - X_s^{(n)}|^{\bar{q}-2}\big(L(R) + L_1\|\mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m}\|_\gamma^\gamma + L_1\|\mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n}\|_\gamma^\gamma\big)\big(|X_s^{(m)} - X_s^{(n)}|^2 \\
&\quad + \mathbb{W}_2^2(\mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m}, \mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n})\big)ds\Big] \\
+&\bar{q}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t |X_s^{(m)} - X_s^{(n)}|^{\bar{q}-1}|b(X_s^{(m)}, \mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m}) - b(X_s^{(n)}, \mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n})|ds\Big)\cdot \mathbb{I}_{\Omega^{m,n}(R)}\Big] \\
+&\frac{\bar{q}(\bar{q}-1)}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t |X_s^{(m)} - X_s^{(n)}|^{\bar{q}-2}\|\sigma(X_s^{(m)}, \mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m}) \\
&\qquad - \sigma(X_s^{(n)}, \mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n})\|^2 ds\Big)\cdot \mathbb{I}_{\Omega^{m,n}(R)}\Big] \\
+&\bar{q}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq s\leq t}\int_0^s |X_u^{(m)} - X_u^{(n)}|^{\bar{q}-2}\langle X_u^{(m)} - X_u^{(n)}, \sigma(X_u^{(m)}, \mu^{(m)}_{\lceil u\rceil_m}) \\
&\quad - \sigma(X_u^{(n)}, \mu^{(n)}_{\lceil u\rceil_n})\rangle dW_u\Big].
\end{aligned} \tag{3.11}$$

利用 BDG 不等式、杨氏不等式、霍尔德不等式、假设 2.2、(2.9) 和引理 3.1，我们得到

$$\begin{aligned}
&\bar{q}\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq t}\int_0^s |X_u^{(m)} - X_u^{(n)}|^{\bar{q}-2}\langle X_u^{(m)} - X_u^{(n)}, \sigma(X_u^{(m)}, \mu^{(m)}_{\lceil u\rceil_m})\sigma(X_u^{(n)}, \mu^{(n)}_{\lceil u\rceil_n})\rangle dW_u\big] \\
\leq&\bar{q}(32/\bar{q})^{\bar{q}/2}\mathbb{E}\left(\int_0^t |X_s^{(m)} - X_s^{(n)}|^{2\bar{q}-2}\|\sigma(X_s^{(m)}, \mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m}) - \sigma(X_s^{(n)}, \mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n})\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq&\frac{1}{2}\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^{(m)} - X_s^{(n)}|^{\bar{q}}\big] + C_{\bar{q},T}\mathbb{E}\left[\int_0^t \|\sigma(X_s^{(m)}, \mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m}) - \sigma(X_s^{(n)}, \mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n})\|^{\bar{q}} ds\right] \\
\leq&\frac{1}{2}\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^{(m)} - X_s^{(n)}|^{\bar{q}}\big] + C_{\bar{q},T}\mathbb{E}\left[\int_0^t \|\sigma(X_s^{(m)}, \mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m}) - \sigma(X_s^{(n)}, \mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m})\|^{\bar{q}} ds\right] \\
&+ C_{\bar{q},T}\mathbb{E}\left[\int_0^t \|\sigma(X_s^{(n)}, \mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m}) - \sigma(X_s^{(n)}, \mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n})\|^{\bar{q}} ds\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|^{\bar{q}}\big] \\
&\quad + C_{\bar{q},L_2,T}\mathbb{E}\left[\int_0^t\Big(1+|X_s^{(m)}|^{\bar{q}l_2}+|X_s^{(n)}|^{\bar{q}l_2}\Big)|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|^{\bar{q}}ds\right] \\
&\quad + C_{\bar{q},L_2,T}\mathbb{E}\left[\int_0^t\Big(\mathbb{W}_2^{\bar{q}}(\mu^{(m)}_{\lceil s\rceil_m},\mu_s^{(m)})+\mathbb{W}_2^{\bar{q}}(\mu_s^{(m)},\mu_s^{(n)})+\mathbb{W}_2^{\bar{q}}(\mu_s^{(n)},\mu^{(n)}_{\lceil s\rceil_n})\Big)ds\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|^{\bar{q}}\big] \\
&\quad + C_{\bar{q},L_2,T}\int_0^t\left(1+\mathbb{E}|X_s^{(m)}|^{\frac{\bar{q}l_2(\bar{q}+\varepsilon_1)}{\varepsilon_1}}+\mathbb{E}|X_s^{(n)}|^{\frac{\bar{q}l_2(\bar{q}+\varepsilon_1)}{\varepsilon_1}}\right)^{\frac{\varepsilon_1}{\bar{q}+\varepsilon_1}} \\
&\qquad\qquad \cdot\Big(\mathbb{E}|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|^{\bar{q}+\varepsilon_1}\Big)^{\frac{\bar{q}}{\bar{q}+\varepsilon_1}}ds \\
&\quad + C_{\bar{q},L_2,T}\int_0^t\Big(\mathbb{E}\big[|X_s^{(m)}-X^{(m)}_{\lceil s\rceil_m}|^{\bar{q}}\big]+\mathbb{E}\big[|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|^{\bar{q}}\big]+\mathbb{E}\big[|X_s^{(n)}-X^{(n)}_{\lceil s\rceil_n}|^{\bar{q}}\big]\Big)ds
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

其中，任意正数 ε_1 满足 $\bar{q}^2l_2/(p-\bar{q}l_2)\leq\varepsilon_1\leq q-\bar{q}$。将 (3.12) 代入 (3.11)，并参照 (3.7) 和 (3.9) 中的类似证明，我们得出

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{(m)}-X_t^{(n)}|^{\bar{q}}\big] \\
\leq&(10\bar{q}-12)\big(L(R)+C_{\xi,\gamma,\bar{q},L_1,L_2,L_3,T}\big)\int_0^T\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|^{\bar{q}}\big]dt \\
&+\hat{L}(R)(\Delta_m^{\frac{\bar{q}}{2}}+\Delta_n^{\frac{\bar{q}}{2}})+C_{\xi,l_3,l_4,\bar{q},L_3,L_4,T}\big(\mathbb{P}(\Omega^{m,n}(R))\big)^{\frac{1}{2}} \\
&+C_{\xi,l_2,\bar{q},\varepsilon_1,L_2,L_3,T}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}|X_t^{(m)}-X_t^{(n)}|^{\bar{q}+\varepsilon_1}\right)^{\frac{\bar{q}}{\bar{q}+\varepsilon_1}},
\end{aligned}
$$

其中 $\hat{L}(\cdot):[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是一个与 $L(\cdot)$ 相关的函数。根据 (3.10)，我们可推出

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{(m)}-X_t^{(n)}|^{\bar{q}}\big] \\
\leq&(10\bar{q}-12)\big(L(R)+C_{\xi,\gamma,\bar{q},L_1,L_2,L_3,T}\big)\int_0^T\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|^{\bar{q}}\big]dt \\
&+\hat{L}(R)(\Delta_m^{\frac{\bar{q}}{2}}+\Delta_n^{\frac{\bar{q}}{2}})+C_{\xi,l_3,l_4,\bar{q},L_3,L_4,T}\big(\mathbb{P}(\Omega^{m,n}(R))\big)^{\frac{1}{2}} \\
&+C_{\xi,\gamma,\alpha,\beta,l_2,l_3,l_4,\varepsilon_1,\bar{q},L_1,L_2,L_3,L_4,T,f,\bar{f}}\exp\left(-(5\bar{q}-6)(f(R)-L(R))\right) \\
&+(2\bar{L}(R))^{\frac{\bar{q}}{\bar{q}+\varepsilon_1}}(\Delta_m^{\frac{\bar{q}}{2}}+\Delta_n^{\frac{\bar{q}}{2}})\exp\left(5\bar{q}L(R)+C_{\xi,\gamma,L_1,L_3,T}\right).
\end{aligned}
$$

由 (3.6) 和格朗沃尔不等式可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\sup_{0\le t\le T}|X_t^{(m)}-X_t^{(n)}|^{\bar q}\big]\\
\le& C_{\xi,\gamma,\bar q,\alpha,\beta,l_3,l_4,L_1,L_2,L_3,L_4,T,f,\bar f}\exp\left(-(10\bar q-12)(f(R)-L(R))\right)\\
&+C_{\xi,\gamma,\alpha,\beta,l_2,l_3,l_4,\varepsilon_1,\bar q,L_1,L_2,L_3,L_4,T,f,\bar f}\exp\left(-(5\bar q-6)(f(R)-3L(R))\right)\\
&+C_{\xi,\gamma,\bar q,L_1,L_2,L_3,T}\left(\hat L(R)(\Delta_m^{\frac{\bar q}{2}}+\Delta_n^{\frac{\bar q}{2}})+(2\bar L(R))^{\frac{\bar q}{\bar q+\varepsilon_1}}(\Delta_m^{\frac{\bar q}{2}}+\Delta_n^{\frac{\bar q}{2}})\right)\cdot\\
&\quad\exp\left((15\bar q-12)f(R)\right).
\end{aligned}\tag{3.13}$$

根据 (2.1)，对于任意 $\eta_2>0$，选取充分大的 R_{η_2}，使得只要 $R\ge R_{\eta_2}$，(3.13) 右端的前两项就小于 $\eta_2/2$。类似地，还可以进一步选取一个整数 U_0，使得对于所有 $m,n\ge U_0$，(3.13) 右端的最后一项小于 $\eta_2/2$。也就是说，

$$\lim_{m,n\to\infty}\mathbb{E}\big[\sup_{0\le t\le T}|X_t^{(m)}-X_t^{(n)}|^{\bar q}\big]\to 0.$$

因此，证明完成。 □

4. 定理 2.7 的证明

本节旨在证明，在关于状态变量和测度变量满足局部单调条件时，混沌传播理论成立。首先，证明相互作用粒子系统的适定性。

引理 4.1。 设假设 *2.1–2.4* 成立，且 $p\ge 2l_4\vee\gamma$。系统 *(2.3)* 存在唯一的强解。此外，对于 $i\in\mathbb{S}_N$ 和 $2\le\bar p\le p/l_4$，有

$$\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}|X_t^{i,N}|^p\le C_{\xi,p,L_3,T},$$

and

$$\mathbb{E}\big[\sup_{0\le t\le T}|X_t^{i,N}|^{\bar p}\big]\le C_{\xi,l_4,L_3,T}.$$

证明。 对于 $\mathbf{x}:=(x_1^\top,x_2^\top,\cdots,x_N^\top)^\top\in\mathbb{R}^{dN}$, $x_i\in\mathbb{R}^d$，定义

$$\mathbf{b}(\mathbf{x})=\left(b(x_1,\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{x_j})^\top,b(x_2,\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{x_j})^\top,\cdots,b(x_N,\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{x_j})^\top\right)^\top,$$

and

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}\sigma\left(x_1,\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{x_j}\right)&\mathbf{0}&\cdots&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\sigma\left(x_2,\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{x_j}\right)&\cdots&\mathbf{0}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\cdots&\sigma\left(x_N,\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{x_j}\right)\end{pmatrix},$$

其中 0 表示 $d\times m_1$ 零矩阵。记 $\mathbf{X}_t^N=(X^1_t{}^\top, X^2_t{}^\top,\cdots,X^N_t{}^\top)^\top$。因此，(2.3) 可转化为

$$d\mathbf{X}_t^N=\mathbf{b}(\mathbf{X}_t^N)dt+\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t^N)d\mathbf{W}_t^N, \tag{4.1}$$

其初始值为 $\xi^N:=\left(\xi^{1\top},\xi^{2\top},\cdots,\xi^{N\top}\right)^\top$，并且

$$\mathbf{W}_t^N:=\left(W_t^{1\top},W_t^{2\top},\cdots,W_t^{N\top}\right)^\top,$$

其中 m_1N 维布朗运动。应用 (2.10) 可得

$$\mathbb{W}_2^2\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{x_j},\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{\bar{x}_j}\Big)\le\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|x_j-\bar{x}_j|^2.$$

根据假设 2.1，可以验证，对于任意 $|\mathbf{x}|\vee|\bar{}\mathbf{x}|\le R$,

$$\begin{aligned}
&2\langle\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}},\mathbf{b}(\mathbf{x})-\mathbf{b}(\bar{\mathbf{x}})\rangle+(p-1)\|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}})\|^2\\
=&\sum_{i=1}^N\Big(2\langle x_i-\bar{x}_i,b(x_i,\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{x_j})-b(\bar{x}_i,\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{\bar{x}_j})\rangle\\
&\quad+(p-1)\|\sigma(x_i,\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{x_j})-\sigma(\bar{x}_i,\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{\bar{x}_j})\|^2\Big)\\
\le&\sum_{i=1}^N\Big(L(R)+L_1\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|x_j|^\gamma+L_1\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|\bar{x}_j|^\gamma\Big)\big(|x_i-\bar{x}_i|^2+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|x_j-\bar{x}_j|^2\big)\\
\le&\big(L(R)+L_1|\mathbf{x}|^\gamma+L_1|\bar{\mathbf{x}}|^\gamma\big)\big(\sum_{i=1}^N|x_i-\bar{x}_i|^2+\sum_{j=1}^N|x_j-\bar{x}_j|^2\big)\\
=:&\tilde{L}(R)|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|^2.
\end{aligned}\tag{4.2}$$

此外，利用假设 2.4 可得

$$\begin{aligned}
|\mathbf{b}(\mathbf{x})|=\sum_{i=1}^N\Big|b(x_i,\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{x_j})\Big|\le&L_4\sum_{i=1}^N\Big(1+|x_i|^{l_3}+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|x_j|^{l_3}\Big)\\
\le&2L_4N\big(1+|\mathbf{x}|^{l_3}\big),
\end{aligned}\tag{4.3}$$

and

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\|^2=\sum_{i=1}^N\Big\|\sigma(x_i,\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{x_j})\Big\|^2\le&L_4^2\sum_{i=1}^N\Big(1+|x_i|^{l_4}+\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|x_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^2\\
\le&3L_4^2\sum_{i=1}^N\Big(1+|x_i|^{2l_4}+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|x_j|^2\Big)\\
\le&6L_4^2N\Big(1+|\mathbf{x}|^{2l_4}\Big).
\end{aligned}\tag{4.4}$$

由 (4.2)、(4.4) 和 [27, 定理 3.1.1],, 可以确立 (4.1) 的解的存在性与唯一性。验证了 ((2.3)) 的适定性后，由假设 2.3 以及粒子同分布这一事实可知，其解具有矩有界性。证明与定理 2.6 的证明类似。值得注意的是，所得界与粒子数 N 无关。因此，我们不加证明地陈述该结果。

□

现在我们可以证明定理 2.7。

证明。 对任意 $i \in \mathbb{S}_N$，取足够大的 $R > 0$，定义

$$\Omega^i(R) = \big\{\omega \in \Omega : |X_t^i| > R,\ |X_t^{i,N}| > R\big\}.$$

根据假设 2.5，可以发现存在一个非递减函数 $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$，满足 $\mathbb{E}e^{f(|\xi^i|)} < \infty$

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}[\exp(f(|X_t^{i,N}|))] < \infty, \quad \sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}[\exp(f(|X_t^i|))] < \infty. \tag{4.5}$$

对于任意 $q^* \ge 2$ 以及给定函数 $f(R)$，应用切比雪夫不等式和 (4.5) 可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\Omega^i(R))\\
\le& \exp(-2q^* f(R)) \left(\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}\big[\exp(2q^* f(|X_t^{i,N}|))\big] + \sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}\big[\exp(2q^* f(|X_t^i|))\big] \right)\\
\le& C_{\xi,q^*,\alpha,\beta,L_3,T,f,\bar f} \exp(-2q^* f(R)).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

利用伊藤公式可得

$$\begin{aligned}
&|X_t^{i,N} - X_t^i|^q\\
=&q\int_0^t |X_s^{i,N} - X_s^i|^{q-2}\langle X_s^{i,N} - X_s^i, b(X_s^{i,N}, \mu_s^{X,N}) - b(X_s^i, \mu_s^i)\rangle ds\\
&+ \frac{q(q-1)}{2}\int_0^t |X_s^{i,N} - X_s^i|^{q-2}\|\sigma(X_s^{i,N}, \mu_s^{X,N}) - \sigma(X_s^i, \mu_s^i)\|^2 ds\\
&+ q\int_0^t |X_s^{i,N} - X_s^i|^{q-2}\langle X_s^{i,N} - X_s^i, \sigma(X_s^{i,N}, \mu_s^{X,N}) - \sigma(X_s^i, \mu_s^i)\rangle dW_s^i.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

于是，由假设 2.1、2.4 以及杨氏不等式，我们推得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|X_t^{i,N} - X_t^i|^q\\
=&\frac{q}{2}\mathbb{E}\Big[\int_0^t |X_s^{i,N} - X_s^i|^{q-2}\big(2\langle X_s^{i,N} - X_s^i, b(X_s^{i,N}, \mu_s^{X,N}) - b(X_s^i, \mu_s^i)\rangle ds\\
&+ (q-1)\|\sigma(X_s^{i,N}, \mu_s^{X,N}) - \sigma(X_s^i, \mu_s^i)\|^2\big) ds\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\le&\frac{q}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t |X_s^{i,N}-X_s^i|^{q-2}\big(2\langle X_s^{i,N}-X_s^i, b(X_s^{i,N},\mu_s^{X,N})-b(X_s^i,\mu_s^i)\rangle ds\\
&+(q-1)\|\sigma(X_s^{i,N},\mu_s^{X,N})-\sigma(X_s^i,\mu_s^i)\|^2\big)ds\Big)\cdot\mathbb{I}_{\Omega\setminus\Omega^i(R)}\Big]\\
&+q\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t |X_s^{i,N}-X_s^i|^{q-1}|b(X_s^{i,N},\mu_s^{X,N})-b(X_s^i,\mu_s^i)|ds\Big)\cdot\mathbb{I}_{\Omega^i(R)}\Big]\\
&+\frac{q(q-1)}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t |X_s^{i,N}-X_s^i|^{q-2}\|\sigma(X_s^{i,N},\mu_s^{X,N})-\sigma(X_s^i,\mu_s^i)\|^2 ds\Big)\cdot\mathbb{I}_{\Omega^i(R)}\Big]\\
\le&\frac{q}{2}\mathbb{E}\Big[\int_0^t |X_s^{i,N}-X_s^i|^{q-2}\big(L(R)+L_1\mathbb{E}|X_s^{i,N}|^\gamma+L_1\mathbb{E}|X_s^i|^\gamma\big)\\
&\quad\cdot\big(|X_s^{i,N}-X_s^i|^2+\mathbb{W}_2^2(\mu_s^{X,N},\mu_s^i)\big)ds\Big]\\
&+qL_4\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t \big(|X_s^{i,N}|+|X_s^i|\big)^{q-1}\\
&\qquad\cdot\big(2+|X_s^{i,N}|^{l_3}+\mathbb{E}|X_s^{i,N}|^{l_3}+|X_s^i|^{l_3}+\mathbb{E}|X_s^i|^{l_3}\big)ds\Big)\cdot\mathbb{I}_{\Omega^i(R)}\Big]\\
&+3q(q-1)L_4^2\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t \big(|X_s^{i,N}|+|X_s^i|\big)^{q-2}\big(2+|X_s^{i,N}|^{2l_4}+\mathbb{E}|X_s^{i,N}|^2\\
&\qquad+|X_s^i|^{2l_4}+\mathbb{E}|X_s^i|^2\big)ds\Big)\cdot\mathbb{I}_{\Omega^i(R)}\Big].
\end{aligned}
$$

根据记号 $\tilde{\mu}^{X,N}_t:=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{X_t^j}$、杨氏不等式、霍尔德不等式，以及 $(X^j,X^j-X^j)_{j\in\mathbb{S}_n}$ 具有相同分布这一事实，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}|X_t^{i,N}-X_t^i|^q\\
\le&\big(L(R)+C_{\xi,\gamma,L_1,L_3,T}\big)\frac{q}{2}\mathbb{E}\Big[\int_0^t |X_s^{i,N}-X_s^i|^q ds\Big]\\
&+\big(L(R)+C_{\xi,\gamma,L_1,L_3,T}\big)q\mathbb{E}\Big[\int_0^t |X_s^{i,N}-X_s^i|^{q-2}\big(\mathbb{W}_2^2(\mu_s^{X,N},\tilde{\mu}_s^{X,N})\\
&\qquad+\mathbb{W}_2^2(\tilde{\mu}_s^{X,N},\mu_s^i)\big)ds\Big]\\
&+qL_4\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t \big(|X_s^{i,N}|+|X_s^i|\big)^{q-1}\\
&\qquad\cdot\big(2+|X_s^{i,N}|^{l_3}+\mathbb{E}|X_s^{i,N}|^{l_3}+|X_s^i|^{l_3}+\mathbb{E}|X_s^i|^{l_3}\big)ds\Big)\cdot\mathbb{I}_{\Omega^i(R)}\Big]\\
&+3q(q-1)L_4^2\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t \big(|X_s^{i,N}|+|X_s^i|\big)^{q-2}\big(2+|X_s^{i,N}|^{2l_4}+\mathbb{E}|X_s^{i,N}|^2\\
&\qquad+|X_s^i|^{2l_4}+\mathbb{E}|X_s^i|^2\big)ds\Big)\cdot\mathbb{I}_{\Omega^i(R)}\Big]\\
\le&(L(R)+C_{\xi,\gamma,L_1,L_3,T})(\frac{5q}{2}-4)\int_0^t\mathbb{E}|X_s^{i,N}-X_s^i|^q ds\\
&+2(L(R)+C_{\xi,\gamma,L_1,L_3,T})\int_0^t\mathbb{E}\big[\mathbb{W}_2^q(\mu_s^{X,N},\tilde{\mu}_s^{X,N})\big]ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2(L(R)+C_{\xi,\gamma,L_1,L_3,T})\int_0^t \mathbb{E}\big[\mathbb{W}_2^q(\tilde{\mu}_s^{X,N},\mu_s^i)\big]ds\\
&+C_{\xi,l_3,l_4,q,L_3,L_4,T}\big(\mathbb{P}(\Omega^i(R))\big)^{\frac{1}{2}}\\
\leq&(L(R)+C_{\xi,\gamma,L_1,L_3,T})(\frac{5q}{2}-2)\int_0^t \mathbb{E}|X_s^{i,N}-X_s^i|^q ds\\
&+2(L(R)+C_{\xi,\gamma,L_1,L_3,T})\int_0^T \mathbb{E}\big[\mathbb{W}_2^q(\tilde{\mu}_s^{X,N},\mu_s^i)\big]ds+C_{\xi,l_3,l_4,q,L_3,L_4,T}\big(\mathbb{P}(\Omega^i(R))\big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

这里我们用到了 (2.10)、定理 2.6 和引理 4.1。

利用格朗沃尔不等式和 (4.6)，可得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}|X_t^{i,N}-X_t^i|^q\\
\leq&\big(2L(R)+C_{\xi,\gamma,L_1,L_3,T}\big)\exp\big((\frac{5q}{2}-2)(L(R)+C_{\xi,\gamma,L_1,L_3,T})\big)\int_0^T \mathbb{E}\big[\mathbb{W}_2^q(\tilde{\mu}_s^{X,N},\mu_s^i)\big]ds\\
&+C_{\xi,l_3,l_4,q,L_3,L_4,T}\exp\big((\frac{5q}{2}-2)(L(R)+C_{\xi,\gamma,L_1,L_3,T})\big)\big(\mathbb{P}(\Omega^i(R))\big)^{\frac{1}{2}}\\
\leq&C_{\xi,\gamma,q,L_1,L_3,T}\exp\left(\frac{5q}{2}L(R)\right)\int_0^T \mathbb{E}\big[\mathbb{W}_2^q(\tilde{\mu}_s^{X,N},\mu_s^i)\big]ds\\
&+C_{\xi,\gamma,\alpha,\beta,l_3,l_4,q,L_1,L_3,L_4,T,f,\bar{f}}\exp\left(-(\frac{5q}{2}-2)(f(R)-L(R))\right).
\end{aligned}
$$

由于 R 与 N 相互独立，令 $N\to\infty$，由勒贝格控制收敛定理可得结果

$$
\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\big[\mathbb{W}_2^q(\tilde{\mu}_s^{X,N},\mu_s^i)\big]=0
$$

由 [14, 定理 5.8] 可知

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}|X_t^{i,N}-X_t^i|^q\\
\leq&C_{\xi,\gamma,\alpha,\beta,l_3,l_4,q,L_1,L_3,L_4,T,f,\bar{f}}\exp\left(-(\frac{5q}{2}-2)(f(R)-L(R))\right).
\end{aligned}
$$

令 $R\to\infty$，即可完成证明。因此，应用与引理 3.2 相同的证明思路即可得到 (2.6)。 □

5. 定理 2.10 的证明

本节旨在完成定理 2.10 的证明。以下引理作为预备步骤给出。由于其证明与 [28] 中的证明类似，故省略。

引理 5.1. 设假设 *2.8* 和 *2.9* 成立。对于 $i\in\mathbb{S}_N$ 以及任意 a_1，$a_2\in(0,\ p(L_5-L_6)/2]$，方程 *(2.3)* 的解 $X^{i,\ _t\ N}$ 和方程 *(2.4)* 的解 X_t^i 在 p-th 阶矩意义下指数稳定，即

$$
\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\big(\mathbb{E}|X_t^{i,N}|^p\big)\leq -a_1,
$$

and

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\left(\mathbb{E}|X_t^i|^p\right)\le -a_2.$$

现在我们给出定理 2.10 的证明。

证明。 我们首先对（4.7）两边取期望，然后关于 t 求导。根据假设 2.8 和 2.9，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathbb{E}|X_t^{i,N}-X_t^i|^2\\
=&2\mathbb{E}\langle X_t^{i,N}-X_t^i, b(X_t^{i,N},\mu_t^{X,N})-b(X_t^i,\mu_t^i)\rangle+\mathbb{E}\|\sigma(X_t^{i,N},\mu_t^{X,N})-\sigma(X_t^i,\mu_t^i)\|^2\\
\le& -h(R)\mathbb{E}|X_t^{i,N}-X_t^i|^2\\
&+\left(g(R)+L_1\mathbb{E}|X_t^{i,N}|^\gamma+L_1\mathbb{E}|X_t^i|^\gamma\right)\left(\mathbb{E}|X_t^{i,N}-X_t^i|^2+\mathbb{E}[\mathbb{W}_2^2(\mu_t^{X,N},\mu_t^i)]\right)\\
\le&\left(-h(R)+3g(R)+C_{\xi,\gamma,L_1}e^{-at}\right)\mathbb{E}|X_t^{i,N}-X_t^i|^2\\
&+\left(2g(R)+C_{\xi,\gamma,L_1}e^{-at}\right)\mathbb{E}[\mathbb{W}_2^2(\tilde{\mu_t}^{X,N},\mu_t^i)],
\end{aligned}\tag{5.1}$$

其中 $a:=\gamma(L_5-L_6)/2$。接下来，将（5.1）对 $j=1$ 至 N 求和，并除以 N，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\mathbb{E}|X_t^{j,N}-X_t^j|^2\\
\le&\left(-h(R)+3g(R)+C_{\xi,\gamma,L_1}e^{-at}\right)\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\mathbb{E}|X_t^{j,N}-X_t^j|^2\\
&+\left(2g(R)+C_{\xi,\gamma,L_1}e^{-at}\right)\mathbb{E}[\mathbb{W}_2^2(\tilde{\mu_t}^{X,N},\mu_t^i)].
\end{aligned}$$

通过在 [29, 中取 $p=2$ 定理 1], , 我们得到对任意 $\tilde{q}>2$,

$$\mathbb{E}[\mathbb{W}_2^2(\tilde{\mu_t}^{X,N},\mu_t^i)]\le C_{d,\tilde{q}}\left(\mathbb{E}|X_t|^{\tilde{q}}\right)^{\frac{2}{\tilde{q}}}\Phi(N),$$

其中 $C_{d,\ \tilde{q}}$ 是一个仅依赖于 d、$\tilde{q}$ 的常数，并且

$$\Phi(N):=\begin{cases}N^{-\frac{1}{2}}+N^{-\frac{\tilde{q}-2}{\tilde{q}}}, & d<4 \text{ and } \tilde{q}\neq 4,\\ N^{-\frac{1}{2}}\log(1+N)+N^{-\frac{\tilde{q}-2}{\tilde{q}}}, & d=4 \text{ and } \tilde{q}\neq 4,\\ N^{-\frac{2}{d}}+N^{-\frac{\tilde{q}-2}{\tilde{q}}}, & d>4 \text{ and } \tilde{q}\neq\frac{d}{d-2}.\end{cases}$$

由引理 5.1 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\mathbb{E}|X_t^{j,N}-X_t^j|^2\\
\le&\left(-h(R)+3g(R)+C_{\xi,\gamma,L_1}e^{-at}\right)\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\mathbb{E}|X_t^{j,N}-X_t^j|^2\\
&+\left(2g(R)+C_{\xi,\gamma,L_1}e^{-at}\right)C_{d,\tilde{q}}\left(\mathbb{E}|\xi|^{\tilde{q}}\right)^{\frac{2}{\tilde{q}}}e^{-bt}\Phi(N),
\end{aligned}\tag{5.2}$$

其中 $b := L_5 - L_6$。记

$$\theta(t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}|X_t^{j,N} - X_t^j|^2.$$

由 (5.2)，我们有

$$\begin{aligned}\theta'(t) \leq & \left(-h(R) + 3g(R) + C_{\xi,\gamma,L_1}e^{-at}\right)\theta(t) \\ & + \left(2g(R) + C_{\xi,\gamma,L_1}e^{-at}\right)C_{d,\tilde{q}}\left(\mathbb{E}|\xi|^{\tilde{q}}\right)^{\frac{2}{\tilde{q}}}e^{-bt}\Phi(N),\end{aligned}$$

其中 $\theta(0) = 0$。由格朗沃尔不等式 (2.11) 的微分形式，可得

$$A(t) = \left(-h(R) + 3g(R)\right)t + \frac{C_{\xi,\gamma,L_1}}{a}(1 - e^{-at}),$$

and

$$\begin{aligned}&\theta(t) \\ \leq & e^{A(t)}2g(R)C_{\xi,d,\tilde{q}}\Phi(N)\int_0^t e^{-A(s)-bs}ds + e^{A(t)}C_{\xi,\gamma,L_1,d,\tilde{q}}\Phi(N)\int_0^t e^{-A(s)-as-bs}ds \\ \leq & \frac{2g(R)C_{\xi,\gamma,L_1,d,\tilde{q},a}\varphi(N)}{h(R) - 3g(R) - b}\left(e^{-bt} - e^{(-h(R)+3g(R))t}\right) \\ & + \frac{C_{\xi,\gamma,L_1,d,\tilde{q},a}\varphi(N)}{h(R) - 3g(R) - a - b}\left(e^{-(a+b)t} - e^{(-h(R)+3g(R))t}\right) \\ \leq & \frac{2g(R)C_{\xi,\gamma,L_1,d,\tilde{q},a}\varphi(N)e^{-bt}}{h(R) - 3g(R) - b} + \frac{C_{\xi,\gamma,L_1,d,q,a}\varphi(N)e^{-(a+b)t}}{h(R) - 3g(R) - a - b}.\end{aligned}$$

应当强调， R 与 N 相互独立。然后，令 $R \to \infty$。由 (2.8) 可得

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\varphi(N)e^{-(a+b)t}}{h(R) - 3g(R) - a - b} = 0,$$

and

$$\theta(t) \leq C_{\xi,\gamma,L_1,d,\tilde{q},a,\lambda}\varphi(N)e^{-bt},$$

这意味着

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}|X_t^{j,N} - X_t^j|^2 = 0.$$

□

6. 数值模拟

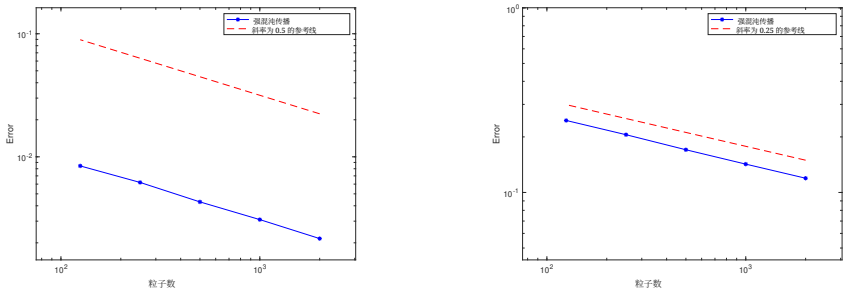
考虑一维平均场随机微分方程

$$dX_t = (-18X_t^5 - X_t^{\frac{1}{3}}[\mathbb{E}X_t]^4 + 2)dt + (X_t^2 + EX_t)dW_t, \tag{6.1}$$

初始值为 $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$，其中 $\mathcal{N}(\cdot,\cdot)$ 服从正态分布。在给定的时间网格下，强路径混沌传播通过以下方式进行评估：

$$\text{error} := \sqrt{\frac{1}{N_l}\sum_{j=1}^{N_l}\left(X_T^{j,N_l} - \tilde{X}_T^{j,N_l}\right)^2},$$

在时间 T。粒子系统 $\{\tilde{X}_T^{i,N_l}\}_{i\in\mathbb{S}_{N_l}}$ 由将驱动该系统的布朗运动集合 $\{X_T^{i,N_l}\}_{i\in\mathbb{S}_{N_l}}$ 拆分为两个相等的组构成，每组包含 $N_l/2$ 个粒子。因此，子系统 $\{\tilde{X}^{i,N_l,(1)}_T\}_{i\in\{1,\cdots,N_l/2\}}$和 $\{\tilde{X}^{i,N_l,(2)}_T\}_{i\in\{N_l/2+1,\cdots,N_l\}}$ 分别由布朗运动 $(W^i)_{i\in\{1,\cdots,N_l/2\}}$ 和 $(W^i)_{i\in\{N_l/2+1,\cdots,N_l\}}$驱动，并且每个子系统仅使用 $N_l/2$ 个粒子来近似平均场项。设 $N_{l+1} = 2N_l$ 以及路径数为 $U = 500$。数值模拟分别在终止时间 $T = 1$ 和 $T = 30$ 下进行，以验证定理 2.7 和定理 2.10。结果如图 1 所示。



(a) $T = 1$　　(b) $T = 30$

图 1：关于粒子数的强收敛

7. 附录

7.1. 注释 1 中所述指数可积性的证明

设假设 2.5 成立。定义 $V(t,X_t) = exp(e^{-\alpha t}f(|X_t|))$。根据伊藤公式，我们有

$$\begin{aligned}
&V(t,X_t)-V(0,\xi)\\
=&\int_0^t e^{-\alpha s}V(s,X_s)\Big[\langle\nabla f(|X_s|),b(X_s,\mu_s)\rangle+\frac{e^{-\alpha s}}{2}|\nabla f(|X_s|)\sigma(X_s,\mu_s)|^2\\
&+\frac{1}{2}\mathrm{trace}\left(\sigma^T(X_s,\mu_s)\nabla^2 f(|X_s|)\sigma(X_s,\mu_s)\right)-\alpha f(|X_s|)\Big]ds\\
&+\int_0^t e^{-\alpha s}V(s,X_s)\langle\nabla f(|X_s|),\sigma(X_s,\mu_s)dW_s\rangle.
\end{aligned}\tag{7.1}$$

对 (7.1) 两边取期望，并利用假设 2.5，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[V(t,X_t)]-\mathbb{E}[V(0,\xi)]\\
\le&\mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-\alpha s}V(s,X_s)\langle\nabla f(|X_s|),\sigma(X_s,\mu_s)dW_s\rangle\right]\\
&+\beta\mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-\alpha s}V(s,X_s)\bar{f}(\|\mu_s\|_2^2)ds\right].
\end{aligned}$$

由于 $\mu_s\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$，$\|\mu_s\|_2^2$ 是 $[0,t]$上的 s 的连续函数，且 $\bar{f}$ 是多项式函数，因此 $\int_0^t \bar{f}(\|\mu_s\|_2^2)ds<\infty$。于是可得

$$\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}[V(t,X_t)]\le\mathbb{E}[V(0,\xi)]+\beta\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\alpha t}V(t,X_t)\bar{f}(\|\mu_t\|_2^2)dt\right].$$

因此，由格朗沃尔不等式可得

$$\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}[V(t,X_t)]\le\mathbb{E}[V(0,\xi)]\exp\left(\beta\int_0^t e^{-\alpha s}\bar{f}(\|\mu_s\|_2^2)ds\right)<\infty,$$

这意味着 $\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}[\exp(f(|X_t|))]<\infty$，因此证明了指数可积性。

7.2. 注释 4 中例 (2.2) 的系数条件验证

Let

$$b(x,\mu)=-18x^5-x^{\frac{1}{3}}\left(\int_{\mathbb{R}}x\mu(dx)\right)^4+2$$

and

$$\sigma(x,\mu)=x^2+\int_{\mathbb{R}}x\mu(dx).$$

由于假设 2.2 和 2.4 很容易验证，我们仅对假设 2.1、2.3 和 2.5 进行详细验证。

7.2.1. 假设 *2.1* 的验证可以验证

$$
\begin{aligned}
&2\langle x-y, b(x,\mu)-b(y,\nu)\rangle + |\sigma(x,\mu)-\sigma(y,\nu)|^2 \\
\leq& -36\langle x-y, x^5-y^5\rangle - 2\langle x-y, x^{\frac{1}{3}}\big(\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx)\big)^4 - y^{\frac{1}{3}}\big(\int_{\mathbb{R}} y\nu(dy)\big)^4\rangle \\
&+ 2|x^2-y^2|^2 + 2\Big|\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx) - \int_{\mathbb{R}} y\nu(dy)\Big|^2 \\
\leq& -36(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)|x-y|^2 + 2|x+y|^2|x-y|^2 \\
&- 2\langle x-y, x^{\frac{1}{3}}\big(\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx)\big)^4 - y^{\frac{1}{3}}\big(\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx)\big)^4\rangle \\
&- 2\langle x-y, y^{\frac{1}{3}}\big(\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx)\big)^4 - y^{\frac{1}{3}}\big(\int_{\mathbb{R}} y\nu(dy)\big)^4\rangle + 2\mathbb{W}_1^2(\mu,\nu) \\
\leq& (-36x^4-36x^3y-36x^2y^2-36xy^3-36y^4+4x^2+4y^2)|x-y|^2 + 2\mathbb{W}_1^2(\mu,\nu) \\
&+ 4|x-y||y|^{\frac{1}{3}}\Big|\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx) - \int_{\mathbb{R}} y\nu(dy)\Big|\big(\Big|\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx)\Big|^3 + \Big|\int_{\mathbb{R}} y\nu(dy)\Big|^3\big) \\
\leq& (-36x^4-36x^3y-36x^2y^2-36xy^3-36y^4+4x^2+4y^2)|x-y|^2 + 2\mathbb{W}_1^2(\mu,\nu) \\
&+ \big(|y|^{\frac{2}{3}} + 2\|\mu\|_6^6 + 2\|\nu\|_6^6\big)\big(|x-y|^2 + \mathbb{W}_1^2(\mu,\nu)\big).
\end{aligned}
$$

定义

$$\varphi(x,y) = -36x^4-36x^3y-36x^2y^2-36xy^3-36y^4+4x^2+4y^2.$$

通过分析函数 $\varphi(x,y)$，可以证明

$$\varphi(x,y) \leq \frac{4}{9}.$$

因此，

$$
\begin{aligned}
&2\langle x-y, b(x,\mu)-b(y,\nu)\rangle + |\sigma(x,\mu)-\sigma(y,\nu)|^2 \\
\leq&\big(2 + |y|^{\frac{2}{3}} + 2\|\mu\|_6^6 + 2\|\nu\|_6^6\big)\big(|x-y|^2 + \mathbb{W}_2^2(\mu,\nu)\big),
\end{aligned}
$$

这意味着漂移项和扩散项满足假设 2.1，其中 $L(R) = R^{\frac{2}{3}} + 2$。

7.2.2. 假设 *2.3* 的验证

不难验证

$$
\begin{aligned}
&2\langle x, b(x,\mu)\rangle + |\sigma(x,\mu)|^2 \\
\leq& -36|x|^6 - 2x^{\frac{4}{3}}\big(\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx)\big)^4 + 4x + 2|x|^4 + 2\big(\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx)\big)^2 \\
\leq& 6 + 2\|\mu\|_2^2,
\end{aligned}
$$

这意味着假设 2.3 成立。

7.2.3. 假设 *2.5* 的验证

令 $f(|x|) = \frac{1}{4}|x|^2 + 1$。显然，对于 $R > 0$,

$$\lim_{R\to\infty} \big(f(R) - L(R)\big) = \infty,$$

因此，(2.1) 对 $\kappa = 1$ 成立。此外，我们有

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla f(|x|), b(x,\mu)\rangle + \frac{1}{2}|\sigma(x,\mu)\nabla f(|x|)|^2 + \frac{1}{2}\mathrm{trace}\left(\sigma^T(x,\mu)\nabla^2 f(|x|)\sigma(x,\mu)\right)\\
\leq& -9|x|^6 - \frac{1}{2}|x|^{\frac{4}{3}}\Big(\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx)\Big)^4\\
&+ x + \frac{1}{4}|x|^6 + \frac{1}{4}|x|^2\Big(\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx)\Big)^2 + \frac{1}{2}|x|^4 + \frac{1}{2}\Big(\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx)\Big)^2\\
\leq& \frac{1}{2}|x|^2 + \frac{3}{2} + \|\mu\|_2^3 + \|\mu\|_2^2\\
=& 2f(|x|) + \bar{f}(\|\mu\|_2^2),
\end{aligned}$$

其中 $\alpha = 2$、$\beta = 1$ 和 $\bar{f}(x) = (x)^{\frac{3}{2}} + x^2$。

经费资助

本研究得到国家自然科学基金（12271368、12501579 和 62373383）、中南民族大学中央高校基本科研业务费（CZQ25020、YZY24010、CZZ25007）以及中南民族大学学术创新团队基金（XTZ24004）的资助。

利益冲突声明

作者声明，他们不存在任何已知的经济利益冲突或可能影响本文所报告研究的个人关系。

数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。

参考文献

[1] J. Baladron、D. Fasoli、O. Faugeras、J. Touboul，《Hodgkin-Huxley 和 FitzHugh-Nagumo 神经元网络中的平均场描述与混沌传播》，数学神经科学杂志 2 (2012) 1-50。

[2] E.F. Keller，L.A. Segel，作为不稳定性研究的黏菌聚集起始过程，《理论生物学杂志》26（1970）399-415。

[3] M. Bossy，O. Faugeras，D. Talay，关于《Hodgkin-Huxley 和 FitzHugh-Nagumo 神经元网络中的平均场描述与混沌传播》的澄清与补充，数学神经科学杂志 5（2015年）1-23。[4]H.P. McKean，与非线性抛物方程相关的一类马尔可夫过程，美国国家科学院院刊 56（1966）1907-1911。[5] M. Kac，动力学理论基础，《伯克利数学统计与概率第三届研讨会论文集》3（1956）171-197。[6] A.S. Sznitman，混沌传播专题，柏林：Springer（1991）。[7]F.Y. Wang，Landau 型方程的分布依赖随机微分方程，《随机过程与应用》128（2）（2018年）595-621。[8]C. Kumar，Neelima，C. Reisinger，W. Stockinger，带共同噪声的 McKean-Vlasov 方程的适定性与驯化格式，《应用概率年刊》32（5）（2022）3283-3330。[9] J. Bao，X. Huang，不规则系数 McKean-Vlasov随机微分方程的近似，《理论概率论杂志》35（2022）1187-1215。[10] P.E. Chaudru de Raynal，带 Hölder 漂移的 McKean-Vlasov随机微分方程的强适定性，《随机过程与应用》130（2020）79-107。[11] H. Liu，B. Shi，F. Wu，具有超线性漂移和 Hölder 扩散系数的 McKean-Vlasov随机微分方程的驯化 Euler-Maruyama 近似，《应用数值数学》183（2023）56-85。[12] Y. Li，X. Mao，Q. Song，F. Wu，G. Yin，在状态变量满足局部 Lipschitz 条件下 McKean-Vlasov随机微分方程 Euler-Maruyama 格式的强收敛，《IMA 数值分析杂志》43（2023）1001-1035。[13] P.E. Chaudru de Raynal，N. Frikha，某些非线性随机微分方程及 Wasserstein 空间上相关偏微分方程的适定性，《纯粹与应用数学杂志》159（2022）1-167。[14] R. Carmona，F. Delarue，平均场博弈的概率理论及其应用 I-II，柏林：Springer（2018年）。[15] P.E. Kloeden，T. Lorenz，具有非局部样本依赖性的随机微分方程，《随机分析与应用》28（6）（2010）937-945。[16] X. Erny，具有跳跃和局部 Lipschitz 系数的 McKean-Vlasov 方程的适定性与混沌传播，《随机过程与应用》150（2022）192-214。

[17] W. Hammersley, D. Šiška, L. Szpruch，满足测度依赖李雅普诺夫条件的 McKean-Vlasov 随机微分方程，arXiv:2101.02744 （ 2021 年）。[18] W. Hong, S. Hu, W. Liu，具有局部单调系数的 McKean-Vlasov 随机微分方程与随机偏微分方程，《应用概率年刊》34（2）（2024年）2136-2189。[19] X. Chen, G.D. Reis, W. Stockinger，完全超线性 McKean-Vlasov 随机微分方程及其相关粒子系统的适定性、指数遍历性与数值近似，《电子概率期刊》30（2025年）1-50。[20] X. Chen, G.D. Reis，在空间和相互作用方面具有完全超线性增长漂移项的相互作用粒子系统与 McKean-Vlasov 随机微分方程的欧拉模拟，《IMA 数值分析杂志》44（2）（2024年）751-796。[21] D. Crisan, E. McMurray，McKean-Vlasov 随机微分方程的平滑性质，《概率论及相关领域》171（2018年）97-148。[22] Z. Hao, M. Röckner, X. Zhang，具有奇异相互作用的 McKean-Vlasov 随机微分方程的混沌传播强收敛，《工业与应用数学学会数学分析杂志》56（2）（2024年）2661-2713。[23] J. Bao, J. Hao, 平均场型随机微分方程的时间一致估计及其应用，《微分方程杂志》440（2025年）113445。[24] J. Bao, J. Wang，具有共同噪声的一维 McKean-Vlasov 随机微分方程的长时间行为，arXiv:2401.07665（2024年）。[25] W. Hong, S. Li, W. Liu，McKean-Vlasov 随机偏微分方程：存在性、唯一性与混沌传播，arXiv:2306.15508（2023年）。[26] M. Hutzenthaler, A. Jentzen, X. Wang，非线性随机微分方程数值近似过程的指数可积性，《数学计算》87（311）（2018年）1353-1413。[27] W. Liu, M. Röckner，随机偏微分方程：导论，Cham：Springer（2015年）。[28] Z. Liu, S. Gao, C. Yuan, Q. Guo，随机 McKean-Vlasov 方程数值格式的稳定性，arXiv:2312.12699v2（2025年）。[29] N. Fournier, A. Guillin，经验测度在瓦瑟斯坦距离下的收敛速率，《概率论及相关领域》162（3）（2015年）707-738。