arXiv:2602.06728v1 [math.LO] 6 Feb 2026

关于可数性与表示

SAM SANDERS

Abstract. 本文探讨可数性与表示之间微妙的相互作用。具体而言，我们证明，某个集合 X 的可数性定义，关键取决于与之关联的等价关系$=_X$。基于这一认识，我们在 Kohlenbach 的高阶逆向数学框架下，研究一些著名的基本原理；这些原理可追溯至康托尔、Sierpi´nski 和 K¨onig。尽管这些原理在二阶逆向数学中相对较弱，我们仍得到了涉及可数选择和 Feferman 投影原理的等价关系。后两者实质上是高阶逆向数学中研究过的最强公理，通常只有在处理不可数对象时才会出现。

1. Introduction

1.1. 目的与动机。 简言之，我们研究“可数集X”的定义，以凸显相关等价关系“$=_X$”所起的关键作用。在引入后者后，我们将证明，关于可数集的基本原理会蕴含强公理；即便与有关不可数对象的已知结果相比也是如此。

更具体地说，本文研究的核心问题既简单得出奇，又微妙得令人棘手。

什么是可数集？

最一般的答案当然是：若一个集合存在到自然数集的单射，它就是可数的。根据定义，这样的映射只会将相等的对象映射到相等的自然数。自然数之间相等的含义应该很清楚，但其他对象之间的相等关系则要微妙得多，尤其是当这些对象涉及表示时。

例如，实数可以用柯西序列表示。因此，若两个实数 x，y 所对应的柯西序列具有相同的极限，就称它们相等，记作 $x =_{\mathbb{R}} y$。然而，有不可数多个不同的柯西序列都收敛于 0。因此，单元素集 $\{x\}$ 只包含一个实数，即 x，但这个实数却有不可数多个不同的表示 x。

更一般地，在度量空间 (M, d) 中，若两个对象 x，$y \in M$ 满足度量空间的定义 $d(x, y) =_{\mathbb{R}} 0$，则称它们相等，记作$x =_M y$。因此，上一段中的观察同样适用。此外，在勒贝格空间 L^p 中，如果只在一个零测集上改变函数，那么这些函数在诱导度量下仍然相等。关键仍在于，度量空间 (M, d) 中的单个元素可以有许多不同的表示，而它们在 $=_M$ 下都相等。

现在，前面的段落引出了下面关于可数性的定义。

Department of Philosophy II, RUB Bochum, Germany*E-mail address*: sasander@me.com。
2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要：03B30, 03F35。*Key words and phrases.* 可数集合，表示，逆向数学。

定义 1.1. 具有等价关系 $=_X$ 的集合 X 称为可数，如果存在一个映射 $Y\colon X\to$自然数集 使得

$$(\forall x, y \in X)(Y(x) =_{\mathbb{N}} Y(x) \to x =_X y). \tag{1.1}$$

我们之所以如此吹毛求疵，原因如下：我们将在第 2 节证明，在 Kohlenbach 的高阶逆向数学（通常简称为“RM”）框架下，使用定义 1.1 表述的关于可数实数集的基本且广为人知的原理，会蕴含或等价于相当强的公理。我们将证明，康托尔、Sierpi´nski 和 K¨ong 的著名定理蕴含 Feferman 投影原理和／或可数选择。

我们将在第 1.2 节介绍有关 Kohlenbach 的高阶反向数学方法的定义和预备知识。我们强调，前述公理——可数选择和 Feferman 投影原理——是高阶反向数学中通常会遇到的最强公理，尤其是在处理可数集的定理中。

就二阶推论而言，例如，我们可以用定义 1.1 来表述 R 的康托尔可数线性序刻画定理（X，$\preceq_X$），也可以表述为“X 是 R 的可数子集”。正如我们将看到的，后一种表述蕴含 Π^1_1-CA$_0$，而前一种表述仍处于 ATR$_0$ 的层次。

我们将在第 2.2 节中更详细地讨论并阐释定义 1.1。我们研究 y 第 2.3 至 2.6 节中的以下主题。

- 康托尔对可数线性序的刻画以及与序相关的陈述（第 2.3 节）。
- Sierpi´nski 对没有孤立点的可数度量空间的刻画（第 2.4 节）。
- 可数第二可数空间上连续函数的上确界原理以及 Ginsburg-Sands 定理（第 2.5 节）。
- K¨onig 的无穷引理及类似原理（第 2.6 节）。

在每种情况下，我们都得到了涉及 Feferman 投影原理和/或可数选择的等价关系。Ginsburg-Sands 定理近期已在二阶反向数学中得到研究（[5]）。

总之，定义 1.1 构成了最一般的可数性概念，而基本原理在用前者表述时会产生强公理。

1.2. **预备知识**。

1.2.1. 引言。 下面介绍一些必要的定义。我们假定读者熟悉 Kohlenbach 高阶反向数学，尤其是其基理论 RCA$^\omega_0$。原始参考文献为 [29]，而 [45] 则提供了更为“基础”的扩展引言。一部关于高阶反向数学的专著目前正在审稿中（[48]）。本节余下部分将介绍在高阶反向数学中发展实分析所需的基本内容。

首先，RCA$^\omega_0$ 中实数的定义与二阶反向数学中的定义相同，即定义为快速收敛的柯西序列（[50, II.5.3]）。因此，“$x =_{\mathbb{R}} y$”和“$x \in$ R”的含义很明确，而从实数到实数的函数只是一个映射$\Phi : \mathbf{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{N}^{\mathbb{N}}$，它将相等的实数映射为相等的实数。

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(x =_{\mathbb{R}} y \to \Phi(x) = \Phi(y)). \tag{1.2}$$

[1]作者所知的唯一例外，是一种类似于 QF-AC^{0,1} 的选择公理版本，该版本在 [39] 中进行了研究。

公式（1.2）通常被描述为“Φ 满足实外延性公理”等说法。我们用 $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ 来表示 f 是一个从 R 到 R 的函数。

其次，在定义了实数上的函数之后，我们便可以定义实数集。

定义 1.2. [集合]

- 子集 $X \subset$ 实数集通过 F_X 定义：实数集 $\to \{0,1\}$ 其中 $x \in X \leftrightarrow F_X(x) = 1$对所有 $x \in$ 实数集。
- 若有 $(\forall x \in$ 实数集$)(x \in A \to x \in B)$，我们便记作‘$A \subseteq B$’。
- 集合 $O \subseteq$ 实数集是开集，当 $x \in O$ 蕴涵存在 $k \in$自然数集使得$B(x, \frac{1}{2^k}) \subseteq O$。
- 补集 O^c （开集 $O \subset$实数集的）称为闭。
- 集合 $X \subset \mathsf{R}$ 若存在一个实数序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中包含 X 的所有元素，则称其为可枚举的 。

根据前文，集合由特征函数给出；我们始终在足够强的逻辑系统中工作（见第 1.2.2 节），以确保例如单位区间是定义 1.2 中所述的集合。“ 可数实数集 ” 的定义将在第 2.2 节中详细讨论。

最后，我们有时使用类型论记号，即 n^0 表示 $n \in \mathsf{N}$，f^1 表示$f \in \mathsf{N}^{\mathbb{N}}$，或 Y^2 表示 $Y : \mathsf{N}^{\mathbb{N}} \to \mathsf{N}$。通过这种方式，自然数的有限序列和贝尔空间的元素分别记作 v^{0^*} 和 w^{1^*}；数 $|u|$是有限序列 u 的长度，而 $u(i)$ 是 u 中从 $i < |u|$开始计数的第 i 个元素。

1.2.2. 高阶算术的公理。 我们介绍一些作为高阶反向数学公理的泛函。我们强调，下文中的一些泛函早在 Hilbert 和 Bernays 的$Grundlagen$ 中就已得到研究（[24]）。

首先，我们考虑以下公理，其中泛函 E 也称为克莱尼量词 $\exists^2$，并且在 Cantor 空间上不连续。

$$(\exists E : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\})(\forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})(E(f) = 0 \leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(f(n) = 0)). \qquad (\exists^2)$$

我们记作 $\mathsf{ACA}_0^\omega \equiv \mathsf{RCA}_0^\omega + (\exists^2)$，并注意到后者证明了与 ACA_0 相同的二阶语句（见 [26]）。我们主要将在 ACA_0^ω 中工作，因为根据定义 1.2，这保证单位区间是一个集合。在 RCA_0^ω 上，$(\exists^2)$ 等价于 (μ^2) ([29])，后者表达的是存在 μ：自然数集$^{\mathbb{N}} \to$ 自然数集，使得对于$f \in$自然数集$^{\mathbb{N}}$，我们有

$$(\exists n \in \mathbb{N})(f(n) = 0) \to f(\mu(f)) = 0. \qquad (1.3)$$

其次，考虑以下公理，其中泛函 S^2 通常称为苏斯林泛函 ([2, 29, 41]):

$$(\exists \mathsf{S} : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\})(\forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})\big[(\exists g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})(\forall n \in \mathbb{N})(f(\overline{g}n) = 0) \leftrightarrow \mathsf{S}(f) = 0\big]. \quad (\mathsf{S}^2)$$

根据定义，苏斯林泛函 S^2 可以判定范式中的 Σ^1_1公式（即如 (S^2) 左边所示）为真还是为假。系统 Π^1_1-$\mathsf{CA}_0^\omega \equiv \mathsf{RCA}_0^\omega + (\mathsf{S}^2)$ 与 Π^1_1-CA_0 证明相同的 Π^1_3句子（见 [41]）。

第三，我们定义函数 S^2_k，它用于判定范式中的 Σ^1_k-公式的真伪；我们还将系统 Π^1_k-CA_0^ω 定义为 $\mathsf{RCA}_0^\omega + (\mathsf{S}^2_k)$，其中 (S^2_k) 表示 S^2_k 存在。我们将 Z_2^ω 定义为 $\cup_k \Pi^1_k$-CA_0^ω，作为 Z_2的一种可能的高阶版本。第 [9, 页上的函数 ν_n 本质上是增强版的 S^2_n，能够返回所讨论的 Σ^1_n-公式的一个见证（如果存在）。算子 ν_n 本质上是第 [24, 页上的希尔伯特-伯奈斯算子 ν 在 Σ^1_n-公式上的限制。

第四，我们如下引入克莱尼量词 $\exists^3$：

$$(\exists E:(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{N})\to\mathbb{N})(\forall Y:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{N})\big[(\exists f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}})(Y(f)=0)\leftrightarrow E(Y)=0\big].\quad(\exists^3)$$

$\mathsf{Z}_2^{\Omega}\equiv\mathsf{RCA}_0^{\omega}+(\exists^3)$ 和 $\mathsf{Z}_2^{\omega}\equiv\cup_k\Pi^1_k\text{-}\mathsf{CA}_0^{\omega}$ 都是 Z_2 的保守扩张（见 [26]）。$(\exists^3)$ 中的函数也称为“$\exists^3$”，其他函数也采用相同的约定。希尔伯特-伯奈斯算子 ν（见 [24, 第 479] 页）实质上就是克莱尼的 $\exists^3$，但需加入一段非平凡的（无量词）选择公理。

第五，已故的索尔·费弗曼是斯坦福大学一位杰出的逻辑学家，毕生致力于基础问题（[16,17]），尤其关注沿袭罗素和外尔思想的所谓谓词主义数学（[53]）。作为这项基础研究的一部分，费弗曼提出了“投影原理”Proj_1，它是（$\exists^3$）的一个三阶版本。我们研究高阶反向数学语言中的原理 BOOT，它是 Proj_1。

原理 1.3 (BOOT)**.** 对于 Y^2，存在 $X\subset$ 自然数集 使得

$$(\forall n\in\mathbb{N})\big[n\in X\leftrightarrow(\exists f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}})(Y(f,n)=0)\big].\tag{1.4}$$

该原理的名称源自动词“to bootstrap”。事实上，BOOT 是三阶的，且弱于 $(\exists^3)$，但我们仍然有 $\Pi^1_k\text{-}\mathsf{CA}_0^{\omega}+\mathsf{BOOT}$ 可证得 $\Pi^1_{k+1}\text{-}\mathsf{CA}_0$。换言之，BOOT 沿着对数理逻辑至关重要的二阶概括层级实现自我提升（见 [51]）。我们此前已得到关于 BOOT 的等价关系（[46,47]），但第 2 节中的结果是一项巨大改进，因为它们涉及关于可数 对象的基本陈述。

接下来，可数选择的如下片段在 ZF 中不可证明，却在高阶反向数学中起着重要作用。

原理 1.4 ($\mathsf{QF\text{-}AC}^{0,1}$)**.** 设 φ 为无量词的，且有$(\forall n\in$ 自然数集$)(\exists f\in$ 自然数集$^{\mathbb{N}})\varphi(f,n)$，则存在一个序列$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 位于自然数集$^{\mathbb{N}}$ 中，使得$(\forall n\in$ 自然数集$)\varphi(f_n,n)$。

在 ZF ([23]) 中无法证明序列连续性与“ε-δ”连续性之间的局部等价关系，但可以在 $\mathsf{RCA}_0^{\omega}+\mathsf{QF\text{-}AC}^{0,1}$ ([29]) 中确立这一关系。

我们回顾一下，二阶反向数学中的某些等价关系需要超出 RCA_0 所能提供的归纳（见 [33]）。以下归纳公理片段是高阶反向数学中所用的最强片段之一；编号取自 [48]。

原理 1.5 (IND_3)。 对形如$(\exists f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}})(\forall g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}})(Y(f,g,n)=0)$ 的公式 $\varphi(n)$，其归纳公理对任意 Y^2 均成立。

我们将 Σ-IND 定义为省略全称量词“$(\forall g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$”后的前述模式。与二阶反向数学中的情形类似（见 [50, X4.4]），归纳可以导出有界概括，因为 IND_3 显然[2] 蕴含以下原理。

原理 1.6 (有界概括)。 对于 Y^2 和 $k\in$ 自然数集，存在 $X\subset$ 自然数集 使得$(\forall n\le k)(n\in X\leftrightarrow(\exists f\in$ 自然数集$^{\mathbb{N}})(Y(f,\ n)=0))$。

最后，我们以一条关于上述保守性结果的评论结束本节。

注 1.7 （Hunter 的保守性结果）。 Hunter 在 [26] 中证明了若干有趣且有用的保守性结果。我们关注的是以下证明：$\mathsf{ACA}_0^{\omega}+\mathsf{QF\text{-}AC}^{0,1}$ 是 $\Sigma^1_1\text{-}\mathsf{AC}_0$，的保守扩张。在 Hunter 的证明中，任意一个 $\Sigma^1_1\text{-}\mathsf{AC}_0$ 的模型 $\mathcal{M}$ 都可以扩展为 $\mathsf{ACA}_0^{\omega}+\mathsf{QF\text{-}AC}^{0,1}$，的一个（项）模型 $\mathcal{N}$，且 $\mathcal{N}$ 的二阶部分与 $\mathcal{M}$ 同构。随后，完备性定理给出了所需的保守性结果。$\mathcal{N}$ 满足 $\mathsf{QF\text{-}AC}^{0,1}$ 是由以下事实推出的：

[2]将 Σ-归纳应用于定义为 $(\exists X\subset$ 自然数集$)(\forall n\le k)(n\in X\leftrightarrow(\exists f\in$ 自然数集$^{\mathbb{N}})(Y(f,\ n)=0))$ 的 $\varphi(k)$

（A）原模型 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 的二阶部分满足 Σ^1_1-AC$_0$,；（B）含有高阶参数的算术公式，在 $\mathcal{N}$ 中等价于只涉及二阶参数（来自 $\mathcal{M}$）的算术公式。

条目 (A) 和 (B) 为其他保守性结果提供了某种模板。事实上，考虑下面的原理 1.8；当限制在二阶参数上时，它等价于 ATR$_0$ （见 [50, V.5.2]）。

原理 1.8。对于满足 （$\forall n \in$ 自然数集）（$\exists$ 至多一个 $X \subset$ 自然数集）φ（X、n） 的算术 φ，存在 $Z \subset$ 自然数集，使得对于所有 $n \in$ 自然数集，都有 $n \in Z \leftrightarrow$ （$\exists X \subset$ 自然数集） φ （X、 n）。

要证明 ACA$_0^\omega$ 加上原理 1.8（涉及高阶参数）对 ATR$_0$, 是保守的，只需从后者的一个模型 $\mathcal{M}$出发，并考虑 Hunter 的项模型 $\mathcal{N}$。后者按构造是 ACA$_0^\omega$ 的模型，并且根据假设也是 ATR$_0$ 的模型。由于 ATR$_0$ 等价于原理 1.8 的二阶版本，我们可以使用上面的条目 (B) 来保证 $\mathcal{N}$ 满足涉及高阶参数的原理 1.8，正如所要求的那样。

Hunter 的保守性结果及其变体将在原作者许可下收录于 [48, 附录],。

1.2.3. 空间：度量空间及其他。为完整起见，我们介绍高阶反向数学中所使用的度量空间与第二可数空间的定义。

首先，我们介绍本专著将使用的度量空间的著名定义（M, d），即定义 1.9。后者实质上是教科书中的定义，只是将函数外延性等若干细节明确写出。一般而言，我们只研究 M 在编码意义下为实数集的子集的情形。

现在，在我们对度量空间（M, d）的研究中，我们假定集合 M 带有其自身的等价关系‘$=_M$’，并且度量 d：$M^2 \to$实数集相对于该关系满足外延性公理，如下所示：

$$(\forall x, y, v, w \in M)\big([x =_M y \wedge v =_M w] \to d(x, v) =_{\mathbb{R}} d(y, w)\big).$$

与实数上的函数类似，‘$F : M \to$ 实数集’表示满足函数外延性公理如下实例的一个函数：

$$(\forall x, y \in M)(x =_M y \to F(x) =_{\mathbb{R}} F(y)). \tag{E_M}$$

我们回顾一下，二阶反向数学中对度量空间的研究，其核心是基于等价关系，正如 [50, I.4.3] 或 [15, §10.1]等处明确讨论的那样。

其次，我们现在给出度量空间的如下定义。

定义 1.9。 [RCA$_0^\omega$] 函数 d：$M^2 \to$ R 是定义在 M 上的度量，若它对 $x, y, z \in M$ 满足以下性质：

(a) $d(x, y) =_{\mathbb{R}} 0 \leftrightarrow x =_M y$, (b) $0 \leq_{\mathbb{R}} d(x, y) =_{\mathbb{R}} d(y, x)$, (c) $d(x, y) \leq_{\mathbb{R}} d(x, z) + d(z, y)$。

为绝对明确起见，除非另有明确说明，我们将研究以 $M \subset$ 自然数集$^{\mathbb{N}}$ 或$M \subset$ 实数集为底集的度量空间 (M, d)。因此，对 M 进行量化相当于对自然数集 $^{\mathbb{N}}$ 或实数集进行量化，或许还要考虑有限序列的编码；也就是说，前述定义可以在三阶算术中给出。

第三，我们引入下文将使用的著名定义——第二可数空间，具体如下。

定义1.10。 [第二可数空间]

- 拓扑 X 的基是一个集合族 $(U_i)_{i\in I}$ 以及一个映射$k : (X \times I^2) \to I$，满足以下条件。– 对每个 $x \in X$，存在 $i \in I$ 使得 $x \in U_i$。 – 对 $x \in X$和 $i, j \in I$，有 $x \in U_i \cap U_j \to x \in U_{k(x,\ i,\ j)} \subseteq U_i \cap U_j$。

- 一个可数第二可数空间由集合 $X \subset$ N 和一个以 $I =$N 为指标集的基组成。我们将其简称为“CSC 空间 X”。
- 一个实第二可数空间由集合 $X \subset$ R 和一个以 $I =$N 为指标集的基组成。我们将其简称为“RSC 空间 X”。

下文中，我们只研究基数至多为连续统的第二可数空间，即 RSC 空间。我们指出，CSC 空间是二阶对象，且已在二阶反向数学中得到研究（[5, 14, 15]）。从技术角度而言，定义中包含映射 k，因为后者通常用于二阶反向数学。

2. Countability and representations

2.1. 引言。 我们阐明可数性与表示之间微妙的相互作用。特别地，我们在第 2.2 节观察到，某个集合 X 的可数性定义关键取决于相关的等价关系 $=_X$。有了这一认识，我们为 BOOT 和 QF-AC^{0,1} 关于可数对象的基本原理获得了新的等价关系（第 2.3–2.6 节）。

我们强调，BOOT+QF-AC^{0,1} 的组合即使与高阶 RM 中通常遇到的“通常”公理相比也很强。在 [34–38、42–44] 中研究的原理要弱得多。此外，正如第 2.3 节所讨论的，实数的可数 集合的性质通常可由比 BOOT 弱得多的原理推出。

下文研究的原理仅仅构成一些例子：我们本可以得到更多等价关系，但我们选择研究那些已经在二阶 RM 中（以某种版本）研究过的定理的三阶版本。

最后，我们指出，在比肖普的构造性分析中，集合带有一个相等概念，这一点从 [7, 8] 中的这段引文可以清楚看出。

> 集合并非一种具有理想存在性的实体。集合只有在被定义之后才存在。要定义一个集合，我们至少须隐含地规定：作为构造者的我们必须如何构造该集合的一个元素，以及必须如何证明该集合的两个元素相等。

反向数学与构造数学之间的联系（例如，见 [29]）早已广为人知，本文的结果可以被解读为提供了另一条联系。

2.2. 无论换什么名称，可数性依旧。我们回顾贝尔空间及相关空间中集合可数性的定义，并考察相关等价关系的本质。

首先，我们回顾自然数集 N$^{\mathbb{N}}$ 的子集可数性的定义，并注意到其中的元素不涉及表示。特别地， $A \subset$ N$^{\mathbb{N}}$ 称为可数，如果存在 Y: N$^{\mathbb{N}} \to$ N 在 A 上是单射，即有

$$(\forall f, g \in A)(Y(f) =_{\mathbb{N}} Y(g) \to f =_1 g). \tag{2.1}$$

因此，如果 Y将 $f, g \in A$ 映射到同一个自然数，那么 f和 g必定是贝尔空间中的同一个对象，即 $f =_1 g$，这意味着 $(\forall n \in$ N$))(f(n) =_{\mathbb{N}} g(n))$.

其次，我们类似地考虑实数集的子集的可数性定义，并回顾一下，后者的元素确实涉及表示，也就是说，它们是快速收敛的柯西序列。现在，集合 $A \subset \mathbb{R}$ 称为可数，如果存在$Y : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$，在 A上是单射，即我们有

$$(\forall x, y \in A)(Y(x) =_{\mathbb{N}} Y(y) \to x =_{\mathbb{R}} y). \tag{2.2}$$

我们强调 (2.2) 中蕴含关系的作用：若 Y将 $x, y \in A$ 映射到同一个自然数，那么 x 和 y 必定（只能）是同一个实数。特别地，x 和 y 可以是同一个实数的不同表示；也就是说，我们必须有$x =_{\mathbb{R}} y$，但 $x \neq_1 y$ 也是可能的。

第三，每个实数都有不可数多个不同的表示，因此，满足 (2.2) 的集合 $A \subset \mathbb{R}$ 从 $\mathbb{R}$ 的角度来看是可数的，，但其中确实包含贝尔空间中不可数多个不同元素，这些元素被分在 Y 按 (2.2) 给出的可数多个等价类中。我们强调‘$=_{\mathbb{R}}$’在 (2.2) 所定义的可数性概念中的关键作用：等式‘$=_{\mathbb{R}}$’对于定义有意义的可数性概念至关重要。

第四，我们考虑度量空间 (M, d)，并回顾根据度量的定义，$x =_M y$ 等价于 $d(x, y) =_{\mathbb{R}} 0$。上一段的观察自然启发了我们对可数性的定义。确实，在度量空间 (M, d) 中，若存在 $Y : M \to \mathbb{N}$，使得集合 $A \subset M$满足

$$(\forall x, y \in A)(Y(x) =_{\mathbb{N}} Y(y) \to x =_M y), \tag{2.3}$$

这里我们强调后件中“$=_M$”的关键作用。与实数的情形类似，可数性的定义涉及可数多个等价类，而每个等价类都（可能）包含不可数多个在 $=_M$ 下相等的元素。为明确起见，我们采用 (2.3)，因为它与 (2.2) 相对应，尤其是使用了等价关系 $=_M$。

第五，我们指出实数集子集的可数性与度量空间子集的可数性之间一个关键的区别：给定 ACA_0^ω，实数集 $\mathbb{R}$ 自带一个可数稠密子序列，即有理数集 $\mathbb{Q}$，它提供了一种将实数转换为二进制表示的方法，也就是说，每个等价类都有一个规范表示。相比之下，根据 [46]中的结果，在 ACA_0^ω（以及强得多的系统）中，紧致度量空间并不自带这类逼近工具。

总之，如 (2.2) 或 (2.3) 中所述，实数集子集或度量空间子集的可数性定义，关键取决于相应的等价关系，即 $=_{\mathbb{R}}$ 和 $=_M$。这正是我们采用定义 1.1 的原因。

2.3. **可数线性序**。我们研究按照定义 1.1 意义下可数的线性序的反向数学性质；这类研究往往可追溯至康托尔。尤其是，我们将得到涉及 BOOT +QF-$\mathsf{AC}^{0,1}$ 的等价关系。

首先，我们先前将线性序 $(X, \preceq_X)$ 定义为：若集合 $X \subset \mathbb{R}$（作为实数的子集）具有这一性质，则称其为可数；按照这个自然定义，康托尔对可数线性序的刻画等价于 cocode_0 ([36])。

原理 2.1 (cocode_0)。对于任意可数的 $A \subset$ 实数集，都存在一个序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中包含 A 的所有元素。

现在，cocode_0 boastsmany 拥有许多等价关系，包括原理 1.8（涉及高阶参数）和若尔当分解定理（见 [36, 42]）。因此，

根据注 1.7，$\mathrm{ACA}_0^\omega + \mathrm{cocode}_0$ 是 ATR_0 的保守扩展。相比之下，ACA_0^ω +BOOT 可以轻易证明 Π^1_1-CA_0。

其次，下面给出的可数线性序定义，最终将比仅考虑可数实数集更为一般。我们采用线性序的通常[3]定义，其中“$\preceq_X$”由特征函数 $F_X : \mathrm{R}^2 \to \{0,1\}$给出，即“$x \preceq_X y$”是 $F_X(x,y) =_{\mathbb{N}} 1$的简写。

定义 2.2。 [CLO] 对于 $X \subset \mathrm{R}$，若 $(X, \preceq_X)$ 是一个 *CLO*，则意味着 $(X, \preceq_X)$ 是一个线性序，并且存在 $Y : \mathrm{R} \to \mathrm{N}$，使得

$$(\forall x, y \in X)(Y(x) =_{\mathbb{N}} Y(x) \to x =_X y). \tag{2.4}$$

我们指出，对线性序使用等价类是二阶反向数学不可或缺的一部分。

第三，从 $(X, \preceq_X)$ 到 $(Y, \preceq_Y)$ 的序同构是一个满射[5] $Z : X \to Y$，它保持序关系（见 [50, 定义 V.2.7]），即

$$(\forall x, x' \in X)(x \preceq_X x' \leftrightarrow Z(x) \preceq_Y Z(x')). \tag{2.5}$$

在此背景下，康托尔为任意可数集给出了定理 2.3 的 (b) 项，相关讨论见 [40, 第 122 页-123]。此外，康托尔在 [10] 中引入了序型这一概念，并根据 (c) 项在 [11] 中刻画了有理数集 Q 的序型 η。

定理 2.3 ($\mathrm{ACA}_0^\omega + \mathrm{QF\text{-}AC}^{0,1}$)。 以下命题等价。

(a) BOOT。(b) 具有 $X \subset$ 实数集 R 的一个 *CLO* $(X, \preceq_X)$ 序同构于有理数集 Q的一个子集。(c) 没有端点且具有 $X \subset$ 实数集 R 的一个 *CLO* $(X, \preceq_X)$ 序同构于有理数集 Q。

证明。 给定一个具有 $X \subset$ 实数集 R 的 CLO $(X, \preceq_X)$，BOOT 使我们能够定义与之关联的 $Y : X \to$ 自然数集 N 上满足 (2.4) 的 X 的值域。然后使用 $\mathrm{QF\text{-}AC}^{0,1}$，从 X 上 Y 的值域的每个等价类中选取一个元素。对所得序列，应用 [40, 第 123] 页中的常见“来回”论证。

另一方面，BOOT 与 RANGE 等价，证明如下：

$$(\forall G : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N})(\exists X \subset \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\big[n \in X \leftrightarrow (\exists f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})(G(f) = n)\big]. \quad \text{(RANGE)}$$

事实上，正向显然成立；反向则如下定义G^2，其中 n^0 和 g^1：若 $Y(g,n) = 0$，则令 $G(\langle n \rangle * g) = n+1$，否则令其为 0。设 $X \subseteq$N 如 RANGE 中所述，并注意到

$$(\forall m \geq 1)(m \in X \leftrightarrow (\exists f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})(G(f) = m) \leftrightarrow (\exists g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})(Y(g, m-1) = 0)),$$

稍作平凡修改后，这正是 BOOT 所要求的。

鉴于它与 RANGE 等价，固定 $G : [0,1] \to$ 自然数集，并注意到 Fefer-man 的 μ 足以列出所有满足 $(\exists q \in$ 有理数集 $\cap [0,1])(G(q) = n)$ 的自然数 $n \in$ 自然数集。现在定义集合 $X \subset$ 实数集如下：当且仅当 $y \in X$

$$(\exists n \in \mathbb{N})(y =_{\mathbb{R}} n) \vee (\exists m \in \mathbb{N})[m+1 < y < m+2 \wedge G(y - (m+1)) = m].$$

---

[3]即，关系 $\preceq_X$ 是传递的、反对称的且完全的，如同 [50,V.1.1].[4]尤其要考虑 [50, V.2.10]中“可数序数”的定义；在后者中，若两个可数序数同构，则定义它们为 *equal*。根据此定义，ATR_0 等价于 *the countable linear orders form a linear order* 这一陈述，见 [50, V.6].[5]注意，(2.5) 蕴含 $(\forall x, x' \in X)(Z(x) =_Y Z(x') \to x =_X x')$，即 Z 相对于等式“$=_X$”和“$=_Y$”是单射；换言之，“满射”可以替换为“双射”。

对于 x，$y \in X$，若 $x =_{\mathbb{N}} y$，或者存在 $m \in$ 自然数集使得.....，则记作“$x =_X y$”

$$m+1 < x, y < m+2 \wedge G(x-(m+1)) = G(y-(m+1)) = m.$$

如果 $x <_{\mathbb{R}} y \wedge x \neq_X y$，我们也记作“$x \prec_X y$”。显然， G 可直接推出 Y：满足 (2.4) 的 R $\to$ N，即 $(X, \preceq_X)$ 是一个可数线性序。应用第二项可得 $Q \subset$ Q 和Z：R $\to$Q，使得 Z 是从 $(X, \leq_X)$ 到 $(Q, \leq_{\mathbb{Q}})$ 的序同构。现在考虑以下公式，其中 $n \in$N:

$$\begin{aligned}(\exists x \in [0,1])(G(x) = n) &\leftrightarrow (\exists y \in (n, n+1))(y \in X) \\ &\leftrightarrow (\exists q \in Q)(Z(n) <_{\mathbb{Q}} q <_{\mathbb{Q}} Z(n+1)). \qquad (2.6)\end{aligned}$$

第一个等价关系由 X 的定义得出，而第二个等价关系则由 Z 是序同构这一事实得出。由于给定 ($\exists^2$) 时 (2.6) 是可判定的，我们可以定义 G的值域，从而满足（实数值变体的）RANGE 的要求。经过编码，这就得到了所需的 RANGE。□

从概念上说，Q 的序型 η 贯穿于二阶反向数学之中。然而，康托尔对 η 的刻画如下:

- 利用可数线性序的概念，康托尔刻画 η 等价于 BOOT + QF-AC^{0,1} （定理 2.3），
- 利用 (2.2) 中的“可数实数集”，康托尔刻画 η 等价于 cocode$_0$ ([36])。

现在，ACA$_0^\omega$+BOOT 证明 Π^1_1-CA$_0$，而 ACA$_0^\omega$+cocode$_0$ 根据注 1.7 在 ATR$_0$上是保守的，即可数线性序的概念导出的原理远强于“可数实数集上的线性序”。

接下来，我们证明定理 2.3 中逆映射的存在性导出可数选择（推论 2.4）。对于可数实数集，根据定理 2.5，逆映射并不导出可数选择。

推论 2.4 (ACA$_0^\omega$)。 以下各项等价。

(a) BOOT + QF-AC^{0,1}。(b) 一个具有 $X \subset \mathbb{R}$ 的可数线性序 $(X, \preceq_X)$ 与某个 $\mathbb{Q}$ 的子集序同构，且存在逆映射。(c) 一个无端点且具有 $X \subset \mathbb{R}$ 的可数线性序 $(X, \preceq_X)$ 与 $\mathbb{Q}$ 序同构，且存在逆映射。

证明。 由定理和定理 2.5 可知，条目 (a) 能推出其他条目；定理 2.5 的证明并未引用此推论。实际上，无需像定理 2.5 的证明那样使用 X 的枚举，只需将 QF-AC^{0,1} 应用于“序同构是满射”这一陈述即可。反过来，考虑 (2.6)，并注意到 $(\forall n \in$N$)(\exists x \in [0,1])(G(f) = n)$ 蕴含 $(\forall n \in$ N$)(\exists q \in Q)(G(Z^{-1}(q)) = n)$，其中 Z^{-1} 是 Z 的逆映射。由于 $Q \subset$Q，Feferman 的 μ 给出 $(\forall n \in$N$)(\exists x \in [0,1])(G(f) = n)$ 的一个选择函数。由此即可（通过对实数进行编码）得到所需的 QF-AC^{0,1} 。□

我们回顾一下，cocode$_0$ 可在 Z$_2^\Omega$ 中证明，因此也可在 ZF 中证明，这与 QF-AC^{0,1} 形成对比。

定理 2.5 (ACA$_0^\omega$)。 以下命题等价。

(a) 余码$_0$。(b) 线性序 $(X, \preceq_X)$ 若 $X \subset$实数集 可数，则与 有理数集 的一个子集序同构。

(c) 线性序 $(X, \preceq_X)$ 若 $X \subset$ 实数集 可数，则序同构并带有逆映射 于有理数集的一个子集。

证明。 前两项等价性的证明见 [36]。为了证明最后一项，注意到 cocode$_0$ 给出了任意可数集$X \subset$ R 的一个枚举 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 。对于 $Q \subset$Q，序同构 $Z: X \to Q$ 按定义是满射，即 $(\forall q \in Q)(\exists x \in X)(Z(x) = q)$。然而，利用 X的枚举，后者变为 $(\forall q \in Q)(\exists n \in$ N$)(Z(x_n) = q)$，于是可以利用 Feferman 的 μ如下定义逆映射 $Z^{-1}: Q \to X$： $Z^{-1}(q)$ 是某个 x_n，满足 $Z(x_n) = q$。□

接下来，我们也简要研究良序，如以下（通常的）定义所示。

定义 2.6. [良序]

- 良序（X， $\prec_X$）是良基线性序，即它没有严格下降序列。
- 若良序（X， $\preceq_X$）满足 $X \subset$ N$^{\mathbb{N}}$，则称其为 ***CWO***，当且仅当存在 $Y:$ N$^{\mathbb{N}} \to$ N 满足（2.4）。

关于良序可比性，我们有如下结果；这是二阶反向数学中的一个重要主题。中心命题的二阶版本称为 CWO，它等价于 ATR$_0$，依据是 [50, V.6.8]。

定理 2.7 (ACA$_0^\omega$ + QF-AC^{0,1} + Σ-IND)。 原则 BOOT 等价于：对于 ***cwos*** $(X, \preceq_X)$ 和$(Y, \preceq_Y)$，其中 $X, Y \subset \mathbb{R}$，前一个序与后一个序序同构，或与后一个序的某个初始段序同构，反之亦然。

证明。 要从 BOOT 推出中心命题，可用后者加上 QF-AC^{0,1}，得到相关 cwos 的枚举。显然，ACA$_0^\omega$ +BOOT 证明了 Π^1_1-CA$_0$，而后者根据 [50, V.6.8]蕴含 CWO。因此，我们可以对上述枚举应用 CWO，从而得到中心命题。

对于另一个方向，我们将从定理 2.3 的证明中证明 RANGE，即固定某个 $G:$自然数集$^{\mathbb{N}} \to$ 自然数集。若 $(\exists m \in$ 自然数集$)(\forall f \in$ 自然数集$^{\mathbb{N}})(G(f) \leq m)$，则 Σ-IND 可直接得出 G 的值域。因此，我们可以假设 $(\forall m \in$ 自然数集$)(\exists f \in$ 自然数集$^{\mathbb{N}})(G(f) > m)$。现在定义线性序 $(X, \preceq_X)$，其中 $X =$自然数集$^{\mathbb{N}}$ 且

$$x \preceq_X y \equiv \big[G(y) = n_0 \vee [G(x) \neq n_0 \wedge G(x) \leq_{\mathbb{N}} G(y)]\big],$$

其中， $n_0 \in$ 自然数集是满足 $(\exists f \in$ 自然数集$^{\mathbb{N}})(G(f) = n)$ 的最小 $n \in$ 自然数集；利用 Σ-IND 可以轻易定义这个数。令 $y_0 \in X$ 满足 $G(y_0) = n_0$。函数式G 满足：对于任意 x、$y \in X$，若 $G(x) = G(y)$，则 $x =_X y$，也就是说，$(X, \preceq_X)$ 是一个 cwo。直观而言，$(X, \preceq_X)$ 的序型为 $\omega + 1$，即先是自然数集的序型，后接一个元素。因此，由居中陈述所给出的各种可能性中，除一种之外，其余均可导出矛盾。事实上，(自然数集 $\leq_{\mathbb{N}}$) 或 $(X, \preceq_X)$ 的任一有限初始段都只有有限多个元素，而自然数集是无限的，且 X 满足 $(\forall m \in$ 自然数集$)(\exists x \in X)(G(x) \geq m)$。类似地，序同构 $W: X \to$ 自然数集 会导致矛盾，理由如下：由于存在 $y_0 \in X$ 使得 $W(y_0) = n_0$，因此不可能存在从 $X \setminus \{y_0\}$ 到 $\{0, 1, \ldots, W(y_0)\}$ 的单射，因为后者是有限集，而前者不是。类似地，序同构 $Z:$自然数集 $\to W$ 会导致矛盾，因为任意 $n \geq n_0$ 都映射到 $Z(n_0) \in X$ 以下（相对于$\preceq_X$），这是不可能的。唯一剩下的可能性是序同构$Z:$自然数集 $\to X \setminus \{y_0\}$，其中后者是初始段 $\{y \in X: y \prec_X y_0\}$。映射 Z 使我们能够按要求定义 G 的值域，至此便完成了。□

鉴于上述结果，基于 (2.4) 的可数性概念似乎比“可数实数集”一般得多（许多）：后者会产生涉及 cocode$_0$，的等价关系，这一思路由 [36]，开创；而前者则可直接推出 BOOT 和可数选择 QF-AC^{0,1} （定理 2.3）。

2.4. **可数度量空间**。 我们研究按照定义 1.1 的意义下可数的度量空间的反向数学性质。特别地，我们研究 Sierpi´nski 的以下定理（见 [13] 和 [30,第 287]页）。

没有孤立点的可数度量空间与有理数集同胚。我们在定理 2.9 中得到 BOOT + QF-AC^{0,1} 的一个等价命题。需要强调的是，弗里德曼通过[19, §2] 中的编码，研究了可数度量空间的类似可比较性定理，其中大多数结果可在 ACA$_0$ 或 ATR$_0$中证明。

首先，下面的定义是标准的。

定义 2.8。 如果存在 $F\colon\ X_0 \to X_1$ 和 $F^{-1}\colon\ X_1 \to X_0$，它们是单射、满射、连续的，并且对 $x_0 \in X$满足 $F^{-1}(F(x_0)) =_{X_0} x_0$，对 $x_1 \in X_1$满足 $F(F^{-1}(x_1)) =_{X_1} x_1$，则两个度量空间 $(X_0,\ d_0)$ 和 $(X_1,\ d_1)$ 同胚 。我们将 F^{-1}称为“ F的逆映射”。

现在，我们得到了西尔宾斯基分类定理的如下等价表述。

定理 2.9 (ACA$_0^\omega$)。 以下命题等价。

- *BOOT* 与 Q +QF-AC^{0,1}的组合。
- 任何可数度量空间(M, d) 若满足 $M \subset$ 自然数集自然数集 且没有孤立点，则与有理数同胚。

证明。 对于向下蕴含，考虑一个度量空间 (M, d)，满足 $M \subset \mathsf{N}^{\mathbb{N}}$，且有 $Y\colon\ M \to \mathsf{N}$ 单射。利用 BOOT 定义 Y 的值域，即 $X = \{n \in \mathsf{N} : (\exists x \in M)(Y(x) = n)\}$。应用 QF-AC^{0,1}于 $(\forall n \in \mathsf{N})(\exists x \in M)(n \in X \to Y(x) = n)$，从而得到 M 的一个枚举。给定这个枚举后， [13] 第二项的初等证明在 ACA$_0^\omega$中逐字适用。

对于向上的蕴含，我们首先得到 RANGE，也就是说，令 G^2 固定。设 $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是有理数集 Q 的一个枚举，令 $M =\mathsf{N}^{\mathbb{N}}$，并定义 $Z\colon\ M \to \mathsf{R}$ 如下:

$$Z(f) := \begin{cases} q_n & f(0) = n \text{ is odd} \\ \pi \cdot q_{G(f(1)*f(2)*\dots)} & f(0) = n \text{ is even} \end{cases}.$$

我们还规定 $f =_M g$ 当且仅当 $Z(f) = Z(g)$，并定义 $d(f,\ g) := |Z(f) - Z(g)|$。于是 $(M,\ d)$ 是一个度量空间；此外，由于 Z 显然给出了一个到自然数集 N 的单射（相对于 $=_M$），它还是可数的。从度量的定义（以及有理数集 Q 在实数集 R 中的稠密性）可知，$(\mathsf{N}^{\mathbb{N}},\ d)$ 中没有孤立点。于是 $(\mathsf{N}^{\mathbb{N}},\ d)$ 与 $(\mathsf{Q}\ |\cdot|_{\mathsf{Q}})$ 同胚，并设 $F,\ F^{-1}$ 分别是相应的同胚和其逆映射。根据定义，我们有

$$(\exists f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})(G(f) = n) \leftrightarrow (\exists q \in \mathbb{Q})(G(F^{-1}(q)(1) * F^{-1}(q)(2) * \dots) = n), \quad (2.7)$$

这便得到 BOOT，因为给定 $(\exists^2)$ 后，(2.7) 右端是可判定的。关于 QF-AC^{0,1}, ，注意，若 $(\forall n \in \mathsf{N})(\exists f \in \mathsf{N}^{\mathbb{N}})(G(f) = n)$，则可由序列 $(F^{-1}(q_n)(1) * F^{-1}(q_n)(2) * \dots)_{n\in\mathbb{N}}$ 得到一个选择函数。这显然推出 QF-AC^{0,1}„ 证毕。□

根据定义 1.1，我们有以下更强的概念。

定义2.10。 带有等价关系 $=_X$ 的集合 X 如果存在 Y： $X \to$ 自然数集 N 满足 (1.1) 和 ($\forall n \in$ 自然数集 N)($\exists x \in X$)($Y(x) = n$)，则称其为强可数 。

推论2.11 (ACA_0^ω)。 以下命题等价。

- 公理QF-$\mathsf{AC}^{0,1}$。
- 任何具有 $M \subset$ 自然数集自然数集 且没有孤立点的强可数度量空间 (M, d) 都与有理数同胚。

证明。 考虑该定理的证明。对于向下蕴含，请注意不再需要 BOOT。向上蕴含如推论 2.4 的证明一样，基于 (2.7) 得出。□

接下来，我们考虑以下相关命题，该命题在 [25] 中进行了研究。

设 X、Y 是完备度量空间 (M, d) 的可数、闭且全有界子集。那么 X 同胚于 Y 的某个子集，或者反之。

读者不妨证明，这一陈述等价于 BOOT+QF-$\mathsf{AC}^{0,1}$。用编码来表述时，根据 [25, 定理 4.1]，这一陈述等价于 ATR_0 。

总之，我们从关于可数度量空间的基本陈述中得到了 BOOT 和 QF-$\mathsf{AC}^{0,1}$ 。关于强可数集的较弱陈述，结果证明等价于 QF-$\mathsf{AC}^{0,1}$。

2.5. **可数的第二可数空间**。

2.5.1. **导言**。 我们研究按定义 1.1 的意义可数的第二可数空间的反向数学性质。特别地，我们证明 BOOT 等价于相应的连续函数上确界原理（第 2.5.2 节）。我们还简要讨论散射空间和可度量化性。此外，我们证明，定义 1.1 所述可数空间上的 Ginsburg-Sands 定理等价于 QF-$\mathsf{AC}^{0,1}$ 中的可数选择（第 2.5.3 节）。最近，二阶反向数学中对前一个定理进行了研究（[5]）。

首先，在本节余下部分中，我们默认假设 X 是一个带有 $X \subset$R、基 $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 以及定义 1.10 中映射 k 的 RSC 空间。相关的拓扑（不可）区分概念定义如下。

定义2.12。 对于 $x,\ y,\ \in X$，若 ($\forall i \in$ N)($x \in U_i \leftrightarrow y \in U_i$)，则记作‘$x \equiv_X y$’。我们称‘$x$ 和 y 在拓扑上不可区分’。

其次，我们先前将 RSC 空间 X 定义为可数，是指集合X 具有这一性质，即在 [47]中如此。尽管这一选择看起来很自然，也能得到涉及余码$_0$, 的优美等价关系，但下面的定义事实证明更为一般。除了注意到‘$\equiv_X$’这一概念自然地适用于实数和度量空间之外，我们还将在注记 2.14 中说明采用它的理由。

定义 2.13. CRSC 空间是一个 RSC 空间 X ，对于它存在 Y： 实数集 $\to$自然数集，使得

$$(\forall x, y \in X)(Y(x) =_{\mathbb{N}} Y(y) \to x \equiv_X y). \tag{2.8}$$

最后，我们根据拓扑空间的分离公理的性质，说明在 (2.8) 中使用拓扑不可区分性的理由。

注记 2.14（分离公理）。对于拓扑空间，T_1-公理有若干等价表述。其中之一是根据 [1, p. 28, Prop. 13]or [49, §16.7]，满足有限集是闭集 这一条件。显然，定理 2.18 的证明中的空间满足后一条件。当然，T_1- 空间一般来说是 T_0，即不同点在拓扑上可区分。因此，在 (2.8) 中使用拓扑不可区分性是很自然的。此外，定理 2.17 的证明中的空间甚至是完全正规的。

2.5.2. 上确界原理。本节将证明 BOOT 与紧 CRSC 空间的上确界原理等价，因此需要以下定义。

定义 2.15。若 RSC 空间 X 的任意由 Ψ 生成的覆盖[6]（开覆盖）都存在 $x_0, \dots, x_k \in X$，使得 $\cup_{i\leq k} U_{\Psi(x_i)}$ 覆盖 X，则称其为紧的，

定义 2.16。对于 RSC 空间 X，若函数 $f\colon X \to \mathrm{R}$ 满足：对每个开集 $V \subset \mathrm{R}$，$f^{-1}(V)$ 在 X 中是开集，则称其为连续函数。

原理 2.17 (sup)。设 X 是紧 *RSC* 空间。对于连续函数$f : X \to \mathbb{R}$ 以及一个由闭集构成的递减序列$(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$，存在一个序列$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $x_n = \text{上确界}_{x\in C_n} f(x)$。

限制于可数 $X \subset$ 实数集的 sup 原理可在 ACA_0^ω +cocode$_0$中用显然的证明加以证明。相比之下，我们有如下等价。

定理 2.18 (ACA_0^ω +QF-AC^{0,1})**.** 以下各项等价。

- BOOT
- 关于 *CRSC* 空间的上确界原理sup 。

证明。向下方向如同定理 2.3 的证明那样成立。事实上，BOOT +QF-AC^{0,1} 给出任意 CRSC 空间的一个枚举，此后证明便很直接。

为了由第二项得到 BOOT，固定 $G\colon [0,1] \to$ 自然数集，并注意我们可以假设对 $x \in (0,1]$ 有 $G(x) \neq G(0)$。现将序列 $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 定义如下：

$$U_{2n} = \{x \in (0,1] : G(x) = n\} \text{ and } U_{2n+1} = \{0\} \cup \{x \in (0,1] : G(x) > n\}. \quad (2.9)$$

利用（$\exists^2$）定义 k：对于 $x \in [0,1]$ 和 $i \leq j$ 属于自然数集，定义映射（$[0,1] \times$ 自然数集^2）$\to$自然数集如下

$$k(x,i,j) := \begin{cases} j & \text{if } i \text{ and } j \text{ are odd,} \\ j & \text{if } i \text{ is odd and } j \text{ is even,} \\ i & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2.10)$$

并注意到，这个映射具有构成$X = [0,1]$的基所需的性质。因此，X 是一个 RSC 空间，其紧性可如下证明：设给定 $\Psi\colon X \to \mathrm{N}$，并注意到，根据 (2.9)，为保证 $0 \in U_{n_0}$，$n_0 = \Psi(0)$ 必须是奇数。显然，X 被 $\cup_{i\leq n_0} U_{2i} \cup U_{n_0}$覆盖。此外，$X$ 也是一个 CRSC 空间，因为对于 $x,\ y \in X \setminus \{0\}$，有 $x \equiv_X y \leftrightarrow G(x) = G(y)$。定义 $f\colon X \to \mathrm{R}$，使得$f(x) := \frac{1}{2^{G(x)}}$ 当 $x \neq 0$ 时，且 $f(0) := 0$。容易证明 f 是连续的。现在对序列 $C_n := X \setminus \cup_{i<n} U_{2i}$ 取上确界，并注意到对于 $n \geq 1$，我们有：

$$(\exists x \in [0,1])(G(x) = n) \leftrightarrow [\tfrac{1}{2^n} = \sup_{x\in C_n} f(x)]. \quad (2.11)$$

[6]映射 $\Psi\colon X \to$ 自然数集在 $x \in U_{\Psi(x)}$ 对任意 $x \in X$ 的情况下生成 X 的覆盖。Cousin 和 Lindel¨of 都只在 [12, 32]，中研究这类不可数覆盖，这些论文是 Cousin 和 Lindel¨of 引理最初发表的地方。

由于 (2.11) 的右侧可利用 ($\exists^2$) 判定，我们可以定义 G的值域。经过编码后，这就得到 RANGE，至此证明完成。□

读者可以验证，最大值原理（即 sup 中的上确界能够取到）等价于 BOOT + QF-AC^{0,1}。

接下来，如果一个空间的每个非空子集都有一个孤立点，那么该空间称为散布的 。Hausdorff 在 [22, 第 VIII 章 §3]证明了中心化命题。

推论 2.19 (ACA$_0^\omega$ +QF-AC^{0,1})。 以下命题蕴含BOOT。

一个散布的 RSC 空间 X 可以被枚举。

此外，将定理 *2.17* 中的*"CRSC* 空间*"*替换为*"*散布的 *CRSC* 空间*"*，其等价关系仍然成立。

证明。 由 (2.9) 定义的 RSC 空间 X 显然是散布的，因为其中存在 U_{2^n}。这既确立了等价关系，也说明 BOOT 可由中心化命题推出。□

豪斯多夫关于中心化命题的证明可在 ACA$_0^\omega$ +BOOT +QF-AC^{0,1}, 中成立，这利用了可枚举集的并仍为可枚举集这一事实。

关于进一步的结果，乌雷松度量化定理指出，正则豪斯多夫第二可数空间是可度量化的，也就是说，它同胚于某个度量空间。二阶反向数学（[15, §10.8.3]）研究了该定理在同胚映射到完备可分度量空间时的情形。容易证明，正则豪斯多夫 CRSC 空间同胚于可分度量空间这一命题蕴含 BOOT。

总之，像（2.8）中的可数性会导出可逆推出 BOOT 的定理；与（2.2）中的"实数可数性"相比，它更一般。

2.5.3. *Ginsburg-Sands* 定理。我们证明，像 QF-AC^{0,1} 中那样的可数选择，等价于针对按定义 2.13 的意义为可数的第二可数空间的 Ginsburg-Sands 定理。Ginsburg-Sands 定理的二阶版本均可在 ACA$_0$ ([5]) 中证明，而基于可数实数集的高阶版本则可在 ACA$_0^\omega$ + cocode$_0$ ([47, 48]) 中证明。

首先，Ginsburg-Sands 定理在 [20, p. 574] 中表述如下。

原理 2.20 (GS)。 一个无限拓扑空间有一个子空间，与下列自然数集上的拓扑中恰好一种同胚：

- 离散拓扑：所有集合都是开集。
- 平凡拓扑：只有 $\emptyset$和 自然数集 是开集。
- 余有限拓扑：开集为 $\emptyset$、自然数集，以及自然数集 中补集有限的任意子集。
- 初始段拓扑：开集为 $\emptyset$、自然数集，以及任意形如 $[0,n]=\{k\in$ 自然数集： $k\leq n\}$ 的集合。
- 终段拓扑：开集为 $\emptyset$、自然数集 以及形如$[n,+\infty)$ $=\{k\in$ 自然数集： $n\leq k\}$的集合。

其次，我们得到一个涉及 GS 和可数选择的等价命题。

定理 2.21 (ACA$_0^\omega$ +IND$_3$)**.** 以下各项等价。

- *CRSC* 空间的 *Ginsburg-Sands* 定理[7] GS 。
- 如QF-AC^{0,1}中的可数选择。

证明。 首先，我们证明，针对 CRSC 空间的 GS 蕴含 QF-AC^{0,1}。为此，设 φ 是无量词的，并且满足 (∀n ∈ 自然数集)(∃x ∈ 实数集)$\varphi(n,x)$。我们假定已固定一种将实数有限序列编码为实数的编码；在 ACA$_0^\omega$ 中很容易定义这种编码。现在定义 $w^{1^*} \in X$，当且仅当 (∀$i < |w|$)$\varphi(n, w(i))$ 时成立；也就是说， X 包含我们所需选择函数的初始段。定义 $U_n := \{w \in X : |w| = n\}$，并注意到显然可以得到一个基。此外，我们有

$$|w| = |v| \leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(v \in U_n \leftrightarrow w \in U_n) \leftrightarrow w \equiv_X v,$$

这表明 X 是一个 CRSC 空间。借助 IND$_3$， X 包含任意多个两两拓扑不同的元素。显然， X 中的所有集合都是开集， X 的任何子空间也同样如此。根据第一项中的 GS， X 有一个子空间与 N 上的离散拓扑同胚。设 $f : X \to$ 自然数集， f^{-1} : 自然数集 $\to X$ 分别为相应的连续双射及其逆映射。现在考察 X 中的序列 $(f^{-1}(n))_{n\in\mathbb{N}}$。根据定义， $f^{-1}(n)$ 是一个有限序列；又由于 f: $X \to$自然数集是一个双射，我们有 (∀m ∈自然数集)(∃n ∈自然数集)(∃x ∈ $f^{-1}(n)$)$\varphi(m,x)$。因此，$(f^{-1}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ 可直接给出一个针对 (∀n ∈自然数集)(∃x ∈实数集)$\varphi(n,x)$ 的选择函数。由于 ACA$_0^\omega$ 可用，QF-AC^{0,1} 也随之成立。

其次，要证明 CRSC 空间 X 满足 GS，对“ X 是无限的”这一陈述应用 QF-AC^{0,1} ，即可轻易得到 X 中元素构成的序列。将元素与其指标对应起来，再应用二阶 GS（可由 ACA$_0$ 根据 [5,定理 4.6], 证明），即可得到所需结果。□

总之，(2.8) 中的可数性导出了 GS 的一些版本，而这些版本反过来蕴含 QF-AC^{0,1},; 它比 (2.2) 中的“实数可数性”更一般。

2.6. **有限集与 K¨onig 引理**。 我们根据上述关于可数性和等价关系的观察，讨论有限集这一概念（第 2.6.1 节）。在此基础上，我们证明 K¨onig 无穷引理等价于 QF-AC^{0,1} 及其他原理（第 2.6.2 节）。

2.6.1. 无论叫什么，有限性依旧。 我们回顾“有限实数集”的定义，并指出与之相关的等价关系具有本质意义。

首先，以下关于有限实数集的定义最适合用于发展高阶反向数学。 [36, 42–44] 中的许多等价关系都以此定义为基础，例如傅里叶分析中的等价关系，这也印证了这一观点。

定义 2.22。 若存在 $N \in$自然数集 $A \subset$ R，使得只要 x_0、.....、 $x_N \in A$两两不同，就存在 $j \leq N$ 满足 $x_j \notin A$，则称集合为有限集。

我们将定义 2.22 中的数 $N \in$ 自然数集称为 A的“大小上界”，并记作 $|A| \leq N$。请注意，“两两不同”是指 $x_i =_{\mathbb{R}} x_j \to i =_{\mathbb{N}} j$对于 $i, j \leq N$，也就是说，等价关系 $=_{\mathbb{R}}$仍然至关重要。事实上，每个实数都有不可数多个不同的表示，它们在 $=_{\mathbb{R}}$下相等。因此，满足定义 2.22 的集合 $A \subset$实数集从

[7]如果一个集合 X 含有任意多个两两不同的元素，就称它为“无限集”。关于有限性的更详细讨论见第2.6节。我们也可以不要求无限性，而改为要求存在任意多个两两拓扑可区分的元素；定理 2.21 中的等价关系仍然成立。

实数集来看，但确实包含贝尔空间中不可数多个不同的元素，这些元素分属有限个（至多 N 个）等价类。

其次，令 $(X, =_X)$ 为一对由集合 $X \subset \mathbf{N}^{\mathbb{N}}$ 和等价关系'$=_X$'组成的对象。于是，相关的一般性'有限性'概念当然是相对于 $=_X$ 来定义的，就像定义 2.22 中那样。

定义 2.23。 [有限集] 集合 A 在 $(X, =_X)$ 中称为有限 的，如果存在 $N \in \mathbf{N}$，使得若 $x_0, \ldots, x_N \in A$ 两两不同，即 $x_i =_X x_j \to i =_{\mathbb{N}} j$ 对于 $i, j \leq N$，则存在 $j \leq N$ 满足 $x_j \notin A$。

总之，' X 的有限子集'这一概念的定义，关键取决于相关的等价关系，即 $=_X$。

2.6.2. 关于 *K¨onig* 的引理。 受第 2.6.1 节中观察的启发，我们研究以 K¨onig 命名的引理的反向数学性质。具体而言，我们证明，*K¨onig 无穷引理* 等价于 QF-AC^{0,1} 中的可数选择。相比之下，该引理的二阶版本可在 ACA$_0$ 中证明，而将该引理限制在贝尔空间中的可数集上，则可在 ACA$_0^\omega$ +cocode$_0$ 加上归纳公理的一个片段 ([48]) 中证明。

首先，由于文献中存在一些错误，我们来讨论 K¨onig 引理的历史。我们将 *K¨onig 树引理* 表述为每个无限有限分支树都有一条路径。用二阶算术语言表述时，树引理等价于 ACA$_0$ ，见 [50, III.7.2]。论文 [28] 被 [50, 第 125], 页引用为 K¨onig 树引理的原始出处，但 [28] 并未提及"树"这个词（即德语中的"Baum"一词）。事实上，K¨onig 在 [28] 提出的原始（图论）引理如下，译自德文。

原理 2.24 (K¨onig 图的无穷引理)。 如果一个可数无限图G 可以写成可数多个非空有限集 $E_1, E_2, \ldots$，使得 E_{n+1} 中的每个点都通过一条边与 E_n 中的某个点相连，那么 G 就有一条无限路径 $a_1 a_2 \ldots$，满足 $a_n \in E_n$ 对所有 $n \in$ 自然数集。

原始版本早一年在 [27], 中提出，在 [27, 28]中均以集合论的语言表述如下。

原理 2.25 (K¨onig 关于集合的无穷引理)。 给定有限非空集的序列 E_0、E_1、..... 以及二元关系 R ，使得对任意 $x \in E_{n+1}$，至少存在一个 $y \in E_n$ 满足 yRx。则存在无穷序列$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $n \in$自然数集， $x_n \in E_n$ 且 $x_n R x_{n+1}$。

名称*K¨onig 无穷引理* 与*K¨onig 树引理* 用于 [52]，其中包含这些引理的历史记述，并指出它们彼此等价；涉及树的表述显然可追溯至 Beth 约1955年在 [6], 中的工作， [52]中亦有详细讨论。当以集合论表述时，K¨onig 无穷引理在 ZF 上等价于选择公理的一个片段（[31, 第 298]页），这与定理 2.28 相呼应。

其次，我们研究柯尼希无穷引理的以下版本。与原理2.25相比，唯一的修改是将范围限制为 $(X, =_X)$，其中 $X \subset$ 自然数集$^{\mathbb{N}}$。

原理2.26 (KINL)。 设 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是$(X, =_X)$ 中的一个集合序列，并设 R是一个二元关系，使得对所有 $n \in$ 自然数集 都有：

- 集合 E_n 是有限且非空的，

• 对于任意 $x \in E_{n+1}$，至少存在一个 $y \in E_n$ 使得 yRx。

那么存在一个序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $n \in$ 自然数集，$x_n \in E_n$ 且 $x_n R x_{n+1}$。

第三，反向数学（RM）中也研究有限集选择公理（[3, 21]）。我们研究以下涉及（X，$=_X$）的实例，其中 $X \subset$ 自然数集$^{\mathbb{N}}$。

原理 2.27 (有限选择公理)。设 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $(X, =_X)$中的有限非空集序列。那么存在 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $n \in$ 自然数集，$x_n \in X_n$。

第四，我们有定理 2.28，其中 IND_3 是在第 1.2 节中引入的。

定理 2.28 ($\mathsf{ACA}_0^\omega + \mathsf{IND}_3$)。以下各项等价。

(a) 如 QF-AC^{0,1}所述的可数选择公理。(b) *König* 的无穷引理，如 KINL所述。(c) 如原理 *2.27* 所述的有限选择公理。

证明。假设 KINL，且令 φ为无量词公式，并满足 $(\forall n \in$ 自然数集$)(\exists f \in$自然数集$^{\mathbb{N}})\,\varphi(n, f)$。定义 X为由满足 $\varphi(f(0)\ f(1) * f(2) * \ldots)$ 的 $f \in$自然数集$^{\mathbb{N}}$所组成的集合，并令$f =_X g$当且仅当 $f(0) = g(0)$。集合 $E_n = \{f \in X\colon f(0) = n\}$非空且有限，如定义 2.23 所示。定义二元关系 R，令 fRg当且仅当 $f(0) + 1 = g(0)$。由 KINL，存在一个序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$，满足 $f_n R f_{n+1}$。根据定义，该序列给出了所需的 QF-AC^{0,1}选择函数。这也推出 (c) → (a)，其中逆转是显然的。

为了证明 KINL，我们将对所有 $n \in$自然数集使用归纳法证明以下命题：

$$(\exists w^{1^*})\big[|w| = n \wedge (\forall i < |w|)(w(i) \in E_i) \wedge (\forall j < |w| - 1)(w(j) R w(j+1))\big]. \quad (2.12)$$

接着应用 QF-AC^{0,1} 得到 $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$。利用后一个序列，很容易[8]构造出一棵有限分支树（按二阶反向数学的意义）。现在应用 König 树引理（由 ACA_0提供；见 [50, III.7.2]），从而得到 KINL 所要求的路径。要证明 (2.12) 对所有 $n \in$自然数集成立，考虑如下定义的公式 $\varphi(n)$：

$$(\forall x \in E_n)(\exists w^{1^*})\left[\begin{array}{c} |w| = n+1 \wedge (\forall i < |w|)(w(i) \in E_i) \wedge x = w(n) \\ \wedge (\forall j < |w| - 1)(w(j) R w(j+1)) \end{array}\right].$$

现在应用 IND_3 证明 $(\forall n \in$ 自然数集$)\varphi(n)$，这意味着 (2.12) 对所有 $n \in$ 自然数集成立。 □

前一定理对超算术分析有重要意义（例如参见 [3,4]）：有限选择原理 finite-Σ^1_1-AC$_0$，从 [21] 的角度看，本质上是原理 2.27 的二阶版本。然而，finite-Σ^1_1-AC$_0$ 严格弱于 Σ^1_1-AC$_0$,，而原理 2.27 等价于 QF-AC^{0,1}，且 ACA_0^ω +QF-AC^{0,1} 在 Σ^1_1-AC$_0$ 上是保守的（[26, §2]）。因此，finite-Σ^1_1-AC$_0$ 的逻辑强度取决于其二阶表述：定义 2.23 给出了一个更一般的原理。这种现象应该还有更多例子。

总之，定义 2.23 中的有限性导出了König 无穷引理与 QF-AC^{0,1}, 之间的等价关系；对于超算术分析中的其他命题，情况大概也相同。

[8]令 $\sigma \in T$ 在以下情况下成立：若对于某个 $n \in$ 自然数集，σ 是 w_n 的初始段。

References

[1] A. V. Arkhangel′skiui 和 L. S. Pontryagin（编）, *General topology. I*, 《数学科学百科全书》, 第 17 卷, Springer, 1990 年。[2] Jeremy Avigad 和 Solomon Feferman, *Gödel's functional ("Dialectica") interpretation*, 《证明论手册》, Stud. Logic Found. Math., 第 137 卷, 1998 年, 第 337–405 页。[3] James S. Barnes、Jun Le Goh 和 Richard A. Shore, *Theorems of hyperarithmetic analysis and almost theorems of hyperarithmetic analysis* **28** 2022 1, 133 149 , Bull. Symb. Log. （） , 第 – 期。[4] , *Halin's Infinite Ray Theorems: Complexity and Reverse Mathematics*, 即将在《数学逻辑杂志》发表, arxiv: https://arxiv.org/abs/2308.14287 （2023 年）。[5] Heidi Benham、Andrew DeLapo、Damir D. Dzhafarov、Reed Solomon 和 Java Darleen Villano, *The Ginsburg-Sands theorem and computability theory*, Adv. Math. 444（2024 年）。[6] E. W. Beth, *Semantic entailment and formal derivability*, Mededelingen der koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, afd. Letterkunde. Nieuwe Reeks, Deel 18, No. 13, N. V. Noord-Hollandsche Uitgevers Maatschappij, 阿姆斯特丹, 1955年。[7] Errett Bishop, *Foundations of constructive analysis*, McGraw-Hill, 1967 年。[8] Errett Bishop 和 Douglas S. Bridges, *Constructive analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 第 279 卷, Springer-Verlag, 柏林, 1985 年。[9] Wilfried Buchholz、Solomon Feferman、Wolfram Pohlers 和 Wilfried Sieg, *Iterated inductive definitions and subsystems of analysis* 897, 1981 , LNM Springer, 。[10] Georg Cantor, *Zur Lehre vom Transfiniten: gesammelte Abhandlungen aus der Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik vom Jahre 1887* 1890 , , Pfeffer, Halle, 。[11] *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematische Annalen 46（1895 年）, 481-512。[12] Pierre Cousin, *Sur les fonctions de n variables complexes*, Acta Math. 19（1895 年）, 1–61。[13] Frederick K. Dashiell Jr., *Countable metric spaces without isolated points*, Amer. Math. Monthly 128（2021 年）, 第 3 期, 265–267。[14] Fran.cois G. Dorais, *Reverse mathematics of compact countable second-countable spaces*, Arxiv, https://arxiv.org/abs/1110.6555 （2011 年）。[15] Damir D. Dzhafarov 和 Carl Mummert, *Reverse Mathematics: Problems Reductions and Proofs* 2022 , , , Springer Cham, 。[16] Solomon Feferman, *In the light of logic*, Logic and Computation in Philosophy, Oxford University Press, 1998 年。[17] *Predicativity*, 《牛津数学与逻辑哲学手册》, Oxford University Press, 2005 年, 第 590-624 页。[18] *How a Little Bit goes a Long Way: Predicative Foundations of Analysis*, 2013 年。未发表的笔记, 取自 1977 1981 https://math.stanford.edu/~feferman/papers/pfa(1).pdf, 附有更新后的引言, 。[19] Harvey Friedman, *Metamathematics of comparability*, 《逆向数学 2001》, Lect. Notes Log., 第 21 卷, ASL, 2005 年, 第 201–218 页。[20] John Ginsburg 和 Bill Sands, *Minimal infinite topological spaces*, Amer. Math. Monthly 86（1979 年）, 第 7 期, 574–576。[21] Jun Le Goh, *The strength of an axiom of finite choice for branches in trees*, J. Symb. Log. 88（2023 年）, 第 4 期, 1367–1386。[22] Felix Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit and Company, 莱比锡, 1914 年。[23] Horst Herrlich, *Axiom of choice*, Lecture Notes in Mathematics, 第 1876 卷, Springer, 2006 年。[24] David Hilbert 和 Paul Bernays, *Grundlagen der Mathematik. II*, 第二版。《数学科学基础丛书》, 第 50 卷, Springer, 1970 年。[25] Jeffry L. Hirst, *Embeddings of countable closed sets and reverse mathematics*, Arch. Math. Logic 32（1993 年）, 第 6 期, 443–449。[26] James Hunter, *Higher-order reverse topology*, ProQuest LLC, 美国密歇根州安娜堡, 2008 年。博士论文——威斯康星大学麦迪逊分校。[27] D´enes K¨onig, *Sur les correspondances multivoques des ensembles*, Fundamenta Mathematicae 8（1926 年）, 114–133。[28] *Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche.*, Acta Litterarum ac Scientarum Ser. Sci. Math. Szeged 3（1927 年）, 121–130。[29] Ulrich Kohlenbach, *Higher order reverse mathematics*, 《逆向数学 2001》, Lect. Notes Log., 第 21 卷, ASL, 2005 年, 第 281–295 页。

[30] K. Kuratowski, *Topology. Vol. I*, Academic Press, 1966年。[31] Azriel Levy, *Basic set theory*, Dover Publications, Inc., 纽约州米尼奥拉, 2002年。1979年原版的重印本。[32] Ernst Lindel¨of, *Sur Quelques Points De La Théorie Des Ensembles*, Comptes Rendus（1903）, 697–700页。[33] Itay Neeman, *Necessary use of Σ^1_1 induction in a reversal* **76** 2011 2, , 符号逻辑杂志（）, 第–号。[34] Dag Normann和Sam Sanders, *Open sets in Reverse Mathematics and Computability Theory* **30** 2020 8, 40 , Journal of Logic and Computation（）, 第号, 页。[35] *Pincherle's theorem in reverse mathematics and computability theory*, 纯粹与应用逻辑年刊171（2020）, 第5期, 102788, 41页。[36] *On robust theorems due to Bolzano Jordan Weierstrass and Cantor in Reverse* , , , , *Mathematics* 2022 51 Journal of Symbolic Logic, DOI: doi.org/10.1017/jsl.2022.71 （）, 页。[37] *On the uncountability of* doi.org/10.1017/jsl. R, Journal of 2022.27 2022 43 Symbolic Logic, DOI: （）, 页。[38] *The Vitali covering theorem in Reverse Mathematics and computability theory*, 纯粹与应用逻辑年刊, doi: 10.1016/j.apal.2024.103505 （2024）。[39] *The uncountability of the reals and the Axiom of Choice*, 已提交（2025）, 14页。[40] Judith Roitman, *Introduction to modern set theory*, 纯粹与应用数学（纽约）, John Wiley, 1990年。[41] Nobuyuki Sakamoto和Takeshi Yamazaki, *Uniform versions of some axioms of second order arithmetic* **50** 2004 6, 587 593 , 数学逻辑季刊（）, 第–号。[42] Sam Sanders, *Big in Reverse Mathematics: the uncountability of the real numbers*, Journal of Symbolic Logic, doi: https://doi.org/10.1017/jsl.2023.42（2023）, 26页。[43] *Big in Reverse Mathematics: measure and category*, Journal of Symbolic Logic, doi: https://doi.org/10.1017/jsl.2023.65 （2023）, 44页。[44] *Approximation theorems throughout Reverse Mathematics*, Journal of Symbolic Logic, doi: https://doi.org/10.1017/jsl.2024.51 （2023）, 28页。[45] *A note on continuous functions on metric spaces*, Bulletin of Symbolic Logic 30（2024）, 第3期, 398–420页。[46] *Coding is hard* https://doi.org/10.1017/jsl.2025., 10 2025 25 Journal of Symbolic Logic, doi: （）, 页。[47] *Second-countable spaces and Reverse Mathematics*, Documenta Mathematica, doi: https://doi.org/10.4171/dm/1037 （2025）, 22页。[48] *Reverse Mathematics: there and back again*, 评审中的专著, 422页, 2025年。[49] Eric Schechter, *Handbook of analysis and its foundations*, Academic Press, Inc., 加利福尼亚州圣迭戈, 1997年。[50] Stephen G. Simpson, *Subsystems of second order arithmetic*, 第2版, 逻辑视角, CUP, 2009年。[51] *The Gödel hierarchy and reverse mathematics.*, 库尔特·哥德尔。纪念其百年诞辰文集, 2010年, 109–127页。[52] George Weaver, *König's Infinity Lemma and Beth's tree theorem*, 逻辑史与逻辑哲学38（2017）, 第1期, 48–56页。[53] H. Weyl, *Das Kontinuum*, von Veit & Comp., 莱比锡, 1918年。