arXiv:2602.06758v1 [math.PR] 6 Feb 2026

拉普拉斯分布和学生 t 分布的三个概率函数的下确界值

Rong-Sheng Hu、Ze-Chun Hu*、Zhen Huang、Mu-Xuan Li

四川大学数学学院，中国成都 610065

摘要

设 $\{X_\alpha\}$ 是一族服从某种带参数 α 的分布的随机变量，$E(X_\alpha)$ 表示期望，$Var(X_\alpha)$ 表示方差。本文研究拉普拉斯分布和学生 t 分布中，关于参数 α 的三个概率函数的下确界值：$P(X_\alpha \le yE(X_\alpha))$、$P\left(|X_\alpha - E(X_\alpha)| \le y\sqrt{Var(X_\alpha)}\right)$ 和 $P\left(|X_\alpha - E(X_\alpha)| \ge y\sqrt{Var(X_\alpha)}\right)$，$\forall y > 0$。本文的研究动机源于三个已有猜想：Chv´atal 猜想、Tomaszewski 猜想和 Hitczenko-Kwapie´n 猜想。

关键词：拉普拉斯分布、学生 t 分布、测度集中、测度反集中、超几何函数

数学主题分类（*2020*）：
60E15

1 引言与主要结果

本文研究拉普拉斯分布和学生 t 分布的三个概率函数的下确界值。为说明研究动机，我们首先回顾三个已有猜想。

令 $B(n,p)$ 表示参数为 n 和 p的二项随机变量。令 $\mathcal{R}$ 为由以下形式的随机变量组成的族：$X = \sum_{k=1}^{n} a_k\varepsilon_k$，其中 $n \ge 1$, $a_k, k = 1, \dots, n,$ 均为满足 $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$的实数，且 ε_k, $k = 1, 2, \dots$ 均为相互独立的 Rademacher随机变量（即，$P(\varepsilon_k = 1) = P(\varepsilon_k = -1) = 1/2$）。

*通讯作者：zchu@scu.edu.cn

现在，我们陈述以下三个先前的猜想：

Chv´atal 猜想： 对于任意固定的 $n \geq 2$，当 m 遍历 $\{0, \ldots, n\}$ 时，概率 $P(B(n, m/n) \leq m)$ 在 m 最接近 $\frac{2n}{3}$ 时最小。

Tomaszewski 猜想： $\inf_{X \in \mathcal{R}} P(|X| \leq 1) = \frac{1}{2}$。

Hitczenko-Kwapie´n 猜想： $\inf_{X \in \mathcal{R}} P(|X| \geq 1) = \frac{7}{32}$。

Chv´atal 猜想在机器学习中有应用。Janson [7] 证明了对于较大的 n，Chv´atal 猜想成立。Barabesi 等人 [1]和 Sun [12] 证明了对于一般的 $n \geq 2$，Chv´atal 猜想成立。

Tomaszewski 猜想在概率论、几何分析和计算机科学中有许多应用。Keller 和 Klein [8] 彻底解决了 Tomaszewski 猜想。

Hitczenko-Kwapie´n 的猜想最近由 Hollom 和 Portier [4]证明。事实上，Hollom 和 Portier [4]找到了反集中函数 $y \mapsto \inf_{X \in \mathcal{R}} P(|X| \geq y) \quad \forall y > 0$.的显式表达式。

设 $\{X_\alpha\}$ 是一族满足某种分布且具有参数 α的随机变量，$E(X_\alpha)$ 表示期望，$Var(X_\alpha)$ 表示方差。对于 $y > 0$，定义如下三个函数：

$$
\begin{aligned}
C(y) &:= \inf_{\alpha} P(X_\alpha \leq yE(X_\alpha)), \\
T(y) &:= \inf_{\alpha} P\left(|X_\alpha - E(X_\alpha)| \leq y\sqrt{Var(X_\alpha)}\right), \\
H(y) &:= \inf_{\alpha} P\left(|X_\alpha - E(X_\alpha)| \geq y\sqrt{Var(X_\alpha)}\right).
\end{aligned}
$$

受上述三个早期猜想的启发，近来已有一系列论文研究了三个函数 $C(y)$ $T(y)$ 和 $H(y)$。下面我们回顾已有的结果。

- Li 等人 [10] 研究了 泊松分布、几何分布和 帕斯卡分布的 $C(1)$（对于帕斯卡分布，仅得到了部分结果）。
- Guo 等人 [3] 研究了 $C(1)$，针对负二项分布，并对 [10] 中关于帕斯卡分布的猜想给出了肯定答案。
- Li 等人 [9] 研究了 $C(y)$ $\forall y > 0$，针对威布尔分布和帕累托分布。
- Hu 等人 [5] 研究了 $C(y)$ $\forall y > 0$，针对一些无限可分分布，包括逆高斯分布、对数正态分布、冈贝尔分布和逻辑斯蒂分布。
- Zhou等人 [19] 研究了 $C(y)$ $\forall y \in (0, 1]$, 针对 F分布。
- Sun 等人 [13] 研究了 $C(y)$ $\forall y > 0$，并研究了 $T(1)$，针对伽马分布。
- Sun 等人 [14] 研究了 T（1）在一些无限可分连续分布中的情况，包括拉普拉斯分布、冈贝尔分布、逻辑斯蒂分布、帕累托分布、无限可分的威布尔分布、对数正态分布、学生 t 分布 t和逆高斯分布。

• Sun 等人 [15] 研究了 T（1）关于 F 分布。

• Zhang 等人 [17] 研究了 T（1），涉及几何分布、对称几何分布、泊松和对称泊松分布等。

• Hu 等人 [6] 研究了 H（y） $\forall y > 0$，针对一些常见的分布族，结果表明，对于某些常见的分布族，包括均匀分布、指数分布、非退化高斯分布和学生 t t 分布， H（y）不恒等于零；而对于另一些常见的分布族，包括二项分布、泊松分布、负二项分布、超几何分布、伽马分布、帕累托分布、威布尔分布、对数正态分布和贝塔分布， H（y）恒等于零。

• Xie [16] 给出了 C（y） T（y）和 H（y） $\forall y > 0$，针对瑞利分布和对称瑞利分布。

• Zhao [18] 给出了 H（y） $\forall y > 0$，针对均匀分布、指数分布、非退化高斯分布和对数正态分布等。

基于现有结果，截至目前，我们已知这三个函数 $C(y)$ $T(y)$ 和$H(y)$仅在所有 $y > 0$ 下，对于均匀分布、指数分布、非退化高斯（正态）分布、对数正态分布、瑞利分布以及对称瑞利分布，其形式是完整的。

本文旨在研究拉普拉斯分布和学生 t 分布在所有 $y > 0$ 下的这三个函数 $C(y)$ $T(y)$ 和 $H(y)$。

设 $X_{\mu,b}$ 为拉普拉斯随机变量，其位置参数为 μ，尺度参数为b，其中 $\mu \in \mathbb{R}$ 且 $b > 0$。那么我们知道，其密度函数

$$f_{\mu,b}(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}},$$

以及 $E(X_{\mu,b}) = \mu, Var(X_{\mu,b}) = 2b^2$。现在，对于任意 $y > 0$，我们有

$$\begin{aligned} C(y) &= \inf_{\mu,b} P(X_{\mu,b} \leq y\mu), \\ T(y) &= \inf_{\mu,b} P\left(|X_{\mu,b} - \mu| \leq \sqrt{2}by\right), \\ H(y) &= \inf_{\mu,b} P\left(|X_{\mu,b} - \mu| \geq \sqrt{2}by\right). \end{aligned}$$

定理 1.1 设 $X_{\mu,b}$ 为拉普拉斯随机变量，其位置参数为 μ，尺度参数为 b。那么

(i) $C(y) = 0$ 若 $y > 0$ 且 $y \neq 1$，以及 $C(1) = \frac{1}{2}$；***(ii)*** $T(y) = 1 - e^{-\sqrt{2}y}$， $\forall y > 0$；***(iii)*** $H(y) = e^{-\sqrt{2}y}$， $\forall y > 0$。

注 1.2 定理 *1.1(ii)* 和 *(iii)* 表明，拉普拉斯分布同时具有集中性和反集中性。

设 X_v 是一个自由度为 v 的 t 随机变量，其中 $3 \le v \in \mathbb{N}$。那么我们知道，其密度函数

$$f_v(x) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi}\Gamma(\frac{v}{2})}(1+\frac{x^2}{v})^{-\frac{v+1}{2}},$$

且 $E(X_v) = 0, Var(X_v) = \sqrt{\frac{v}{v-2}}$。现在，对任意 $y > 0$，我们有

$$\begin{aligned}
C(y) &= \inf_{v\ge 3} P(X_v \le 0),\\
T(y) &= \inf_{v\ge 3} P\left(|X_v| \le y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right),\\
H(y) &= \inf_{v\ge 3} P\left(|X_v| \ge y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right).
\end{aligned}$$

对于给定的 $y \in (1,\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},\infty)$，定义

$$\begin{cases}
C_1 := 2y^6 + \frac{3}{4}y^4,\\
C_2 := \frac{9}{4}C_1 + \frac{25}{32}y^8 + \frac{3}{2}\left(C_1^{\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{8}{3}} + C_1^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{16}{3}}\right),\\
C_3 := \frac{13}{3}y^4 + 18y^2 + 2C_2 + 11,\\
V_1 := \max\{100, 8y^2\},\\
V_2 := \max\left\{V_1, \frac{3y^4}{2}, \sqrt{2C_1}\right\},\\
V_3 := \max\left\{V_2, 2+\frac{2y^2}{1+2y}, 2+\frac{2y^4}{1+2y^2}\right\},\\
v_0(y) := \max\left\{V_3,\ \frac{2C_3}{|y^2-3|}+1\right\}.
\end{cases} \tag{1.1}$$

定义 $\bar{v}_0(\sqrt{3}) := 1318.4$. 用 $\Phi(x)$ 表示标准正态分布的分布函数（即 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du$），并用 $F_v(x)$ 表示 X_v 的分布函数。

定理 1.3 设 X_v 是自由度为 v 的 t 随机变量。则 *(i)* $C(y) = \frac{1}{2}$，$\forall y > 0$;

(ii)
$$T(y) = \begin{cases}
2\Phi(y) - 1, & 0 < y \le 1,\\
\min\left\{\min_{3\le v\le [v_0(y)]+3}\left\{2F_v\left(y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)-1\right\}, 2\Phi(y)-1\right\}, & 1 < y < \sqrt{3},\\
\min\left\{\min_{3\le v\le [\bar{v}_0(\sqrt{3})]+3}\left\{2F_v\left(\sqrt{\frac{3v}{v-2}}\right)-1\right\}, 2\Phi\left(\sqrt{3}\right)-1\right\}, & y = \sqrt{3},\\
\min_{3\le v\le [v_0(y)]+3}\left\{2F_v\left(y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)-1\right\}, & y > \sqrt{3};
\end{cases}$$

(iii)
$$H(y) = \begin{cases}
\min_{v=3,4}\left\{2-2F_v\left(y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)\right\}, & 0 < y \le 1,\\
\min_{3\le v\le [v_0(y)]+3}\left\{2-2F_v\left(y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)\right\}, & 1 < y < \sqrt{3},\\
\min_{3\le v\le [\bar{v}_0(\sqrt{3})]+3}\left\{2-2F_v\left(\sqrt{\frac{3v}{v-2}}\right)\right\}, & y = \sqrt{3},\\
\min\left\{\min_{3\le v\le [v_0(y)]+3}\left\{2-2F_v\left(y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)\right\}, 2-2\Phi(y)\right\}, & y > \sqrt{3}.
\end{cases}$$

注 1.4 鉴于标准正态分布的三倍标准差法则，本注中我们考虑定理 *1.3(ii)(iii)* 中关于 $y = 1,2,3$ 的内容。

(i) 对于 $y=1$，我们有

$$T(1)=2\Phi(1)-1\approx 0.6826,$$
$$H(1)=\min_{v=3,4}\left\{2-2F_v\left(\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)\right\}=2-2F_3\left(\sqrt{3}\right)\approx 0.1817.$$

它们与 *[6]* 和 *[14]*中的相同。

(ii) 对于 $y=2$，我们有

$$C_0=3, C_1=140, C_2\approx 1085.82, C_3\approx 2323.97,$$
$$V_1=V_2=V_3=100,\quad v_0(2)\approx 4648.94,$$

因此

$$T(2)=\min_{3\le v\le 4651}\left\{2F_v\left(2\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)-1\right\},$$
$$H(2)=\min\left\{\min_{3\le v\le 4651}\left\{2-2F_v\left(2\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)\right\},2-2\Phi(2)\right\}.$$

通过 *Python* 程序，我们得到

$$T(2)=\min_{3\le v\le 4651}\left\{2F_v\left(2\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)-1\right\}=2F_7\left(2\sqrt{\frac{7}{5}}\right)-1\approx 0.9501,$$

此外，通过 *Python* 程序，我们得到

$$\min_{3\le v\le 4651}\left\{2-2F_v\left(2\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)\right\}=2-2F_3\left(2\sqrt{3}\right)\approx 0.0405,$$

结合 $2-2\Phi(2)\approx 0.0455$，可推出

$$H(2)=2-2F_3\left(2\sqrt{3}\right)\approx 0.0405.$$

（*iii*）对于 $y=3$，我们有

$$C_0=3, C_1=1518.75, C_2\approx 18295.97, C_3\approx 37115.94,$$
$$V_1=100, V_2=V_3=121.5,\quad v_0(3)\approx 12372.98,$$

因此

$$T(3)=\min_{3\le v\le 12375}\left\{2F_v\left(3\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)-1\right\},$$
$$H(3)=\min\left\{\min_{3\le v\le 12375}\left\{2-2F_v\left(3\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)\right\},2-2\Phi(3)\right\}.$$

通过 *Python* 程序，我们得到

$$T(3)=\min_{3\le v\le 12375}\left\{2F_v\left(3\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)-1\right\}=2F_3\left(3\sqrt{3}\right)-1\approx 0.986153,$$

此外，通过 *Python* 程序，我们得到

$$\min_{3\le v\le 12375}\left\{2-2F_v\left(3\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)\right\}=2-2F_{12375}\left(3\sqrt{\frac{12375}{12375-2}}\right)\approx 0.002703,$$

这与 $2-2\Phi(3)\approx 0.002700$ 结合可推出

$$H(3)=2-2\Phi(3)\approx 0.002700.$$

备注 1.5 定理 *1.3(ii)* 和 *(iii)* 表明，学生 *t* 分布同时具有集中性和反集中性。

本文其余部分安排如下。定理 1.1 和定理 1.3 的证明将分别在第 2 节和第 3 节给出。

2 定理 1.1 的证明

$X_{\mu,b}$ 的分布函数为（例如，参见 [14] 的附录 (i)）

$$F_{X_{\mu,b}}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\frac{x-\mu}{b}}, & \text{if } x<\mu,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x-\mu}{b}}, & \text{if } x\ge\mu.\end{cases}$$

(i) 我们有以下五种情形:

(i.1) $\mu>0, y\ge 1$。现在 $y\mu\ge\mu$，从而

$$C(y)=\inf_{\mu,b}P(X_{\mu,b}\le y\mu)=\inf_{\mu,b}\left(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{(y-1)\mu}{b}}\right)=\lim_{\frac{\mu}{b}\to 0+}\left(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{(y-1)\mu}{b}}\right)=\frac{1}{2}.$$

(i.2) $\mu>0, 0<y<1$。现在 $y\mu<\mu$，从而

$$C(y)=\inf_{\mu,b}P(X_{\mu,b}\le y\mu)=\inf_{\mu,b}\frac{1}{2}e^{-\frac{(1-y)\mu}{b}}=\lim_{\frac{\mu}{b}\to+\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{(1-y)\mu}{b}}=0.$$

(i.3) $\mu=0$。现在 $y\mu=0=\mu$，因此

$$P(X_{\mu,b}\le y\mu)=\frac{1}{2}e^{-\frac{(1-y)\mu}{b}}\equiv\frac{1}{2}.$$

因此在这种情况下， $C(y) = \frac{1}{2}$。

(i.4) $\mu < 0$， $y > 1$。现在 $y\mu < \mu$，因此

$$C(y) = \inf_{\mu,b} P(X_{\mu,b} \le y\mu) = \inf_{\mu,b} \frac{1}{2} e^{\frac{(y-1)\mu}{b}} = \lim_{\frac{\mu}{b} \to -\infty} \frac{1}{2} e^{\frac{(y-1)\mu}{b}} = 0.$$

(i.5) $\mu < 0$， $0 < y \le 1$。现在 $y\mu \ge \mu$，因此

$$C(y) = \inf_{\mu,b} P(X_{\mu,b} \le y\mu) = \inf_{\mu,b} \left(1 - \frac{1}{2} e^{\frac{(1-y)\mu}{b}}\right) = \lim_{\frac{\mu}{b} \to 0-} \left(1 - \frac{1}{2} e^{\frac{(1-y)\mu}{b}}\right) = \frac{1}{2}.$$

由 (i.1)-(i.5)，可得 (i) 成立。

(ii) 由于 $b > 0$ 且 $y > 0$，我们有

$$\begin{aligned} T(y) &= \inf_{\mu,b} P\left(|X_{\mu,b} - \mu| \le \sqrt{2}by\right) \\ &= \inf_{\mu,b} \left[F_{X_{\mu,b}}(\mu + \sqrt{2}by) - F_{X_{\mu,b}}(\mu - \sqrt{2}by)\right] \\ &= \inf_{\mu,b} \left[1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{(\mu+\sqrt{2}by)-\mu}{b}} - \frac{1}{2} e^{\frac{(\mu-\sqrt{2}by)-\mu}{b}}\right] \\ &= 1 - e^{-\sqrt{2}y}. \end{aligned}$$

(iii) 由于 $b > 0$ 且 $y > 0$，我们有

$$\begin{aligned} T(y) &= \inf_{\mu,b} P\left(|X_{\mu,b} - \mu| \ge \sqrt{2}by\right) \\ &= \inf_{\mu,b} \left[1 - F_{X_{\mu,b}}(\mu + \sqrt{2}by) + F_{X_{\mu,b}}(\mu - \sqrt{2}by)\right] \\ &= \inf_{\mu,b} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{(\mu+\sqrt{2}by)-\mu}{b}}\right) + \frac{1}{2} e^{\frac{(\mu-\sqrt{2}by)-\mu}{b}}\right] \\ &= e^{-\sqrt{2}y}. \end{aligned}$$

证明完毕。 □

3 定理1.3的证明

定义超几何函数 $F(a, b; c; z)$为（参见 [11, 第 45]页）

$$F(a, b; c; z) := \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j} \cdot \frac{z^j}{j!}, |z| < 1,$$

其中，对于 $j \ge 1$，$(\alpha)_j := \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + j - 1)$；对于 $\alpha \ne 0$，$(\alpha)_0 := 1$。那么， X_v 的分布函数 F_v 可表示为

$$F_v(x) = \frac{1}{2} + x\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right) \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{v+1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{v}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma(\frac{v}{2})}, \ x \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

根据 $E(X_v) = 0$ 这一事实以及式（3.1），我们有

$$P(X_v \le yE(X_v)) = P(X_v \le 0) = F_v(0) = \frac{1}{2}, \forall y > 0.$$

由此可知，对任意 $y > 0, C(y) = \frac{1}{2}$，从而 (i) 成立。下面我们着重证明 (ii) 和 (iii)。

由密度函数的对称性及 (3.1)，我们有

$$\begin{aligned} T(y) &= P\left(|X_v| \le y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right) \\ &= 2F_v\left(y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right) - 1 \\ &= 2y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi}\Gamma(\frac{v}{2})}F\left(\frac{1}{2}, \frac{v+1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{v-2}\right) \\ &=: J_v, \\ H(y) &= 1 - P\left(|X_v| \le y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right) = 1 - J_v. \end{aligned}$$

考虑 J_v的弱单调性：

$$\begin{aligned} \frac{J_{v+2}}{J_v} < 1 &\Leftrightarrow \frac{2y\sqrt{\frac{v+2}{v}}\frac{\Gamma(\frac{v+3}{2})}{\sqrt{(v+2)\pi}\Gamma(\frac{v+2}{2})}F\left(\frac{1}{2}, \frac{v+3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{v}\right)}{2y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi}\Gamma(\frac{v}{2})}F\left(\frac{1}{2}, \frac{v+1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{v-2}\right)} < 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(v+1)(v-2)^{\frac{1}{2}}}{v^{\frac{3}{2}}}\frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{v+3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{v}\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{v+1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{v-2}\right)} < 1 \\ &\Leftrightarrow F\left(\frac{1}{2}, \frac{v+3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{v}\right) < \frac{v^{\frac{3}{2}}}{(v+1)(v-2)^{\frac{1}{2}}}F\left(\frac{1}{2}, \frac{v+1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{v-2}\right). \end{aligned}$$

由超几何函数的邻接函数关系（参见 [11, 第71页，21(13)]）以及 $F(a, b; a; z) = (1-z)^{-b}$（参见 [11, 第47页，倒数第4行]）这一事实，我们有

$$\begin{aligned} \frac{v+1}{2}F\left(\frac{1}{2}, \frac{v+3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{v}\right) &= \frac{v}{2}F\left(\frac{1}{2}, \frac{v+1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{v}\right) + \frac{1}{2}F\left(\frac{1}{2}, \frac{v+1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{y^2}{v}\right) \\ &= \frac{v}{2}F\left(\frac{1}{2}, \frac{v+1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{v}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{v+y^2}\right)^{\frac{v+1}{2}}, \end{aligned}$$

这意味着

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{v+3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{v}\right) = \frac{v}{v+1}F\left(\frac{1}{2}, \frac{v+1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{v}\right) + \frac{1}{v+1}\left(\frac{v}{v+y^2}\right)^{\frac{v+1}{2}}.$$

于是我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{J_{v+2}}{J_v} < 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{v}{v+1}F\left(\frac{1}{2},\frac{v+1}{2};\frac{3}{2};-\frac{y^2}{v}\right)+\frac{1}{v+1}\left(\frac{v}{v+y^2}\right)^{\frac{v+1}{2}} < \frac{v^{\frac{3}{2}}}{(v+1)(v-2)^{\frac{1}{2}}}F\left(\frac{1}{2},\frac{v+1}{2};\frac{3}{2};-\frac{y^2}{v-2}\right) \\
&\Leftrightarrow F\left(\frac{1}{2},\frac{v+1}{2};\frac{3}{2};-\frac{y^2}{v}\right)+\frac{1}{v}\left(\frac{v}{v+y^2}\right)^{\frac{v+1}{2}} < \left(\frac{v}{v-2}\right)^{\frac{1}{2}}F\left(\frac{1}{2},\frac{v+1}{2};\frac{3}{2};-\frac{y^2}{v-2}\right) \\
&\Leftrightarrow \int_0^y f_v(x)\,dx+\frac{y\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi}\Gamma(\frac{v}{2})}\cdot\frac{1}{v}\cdot\left(\frac{v}{v+y^2}\right)^{\frac{v+1}{2}} < \int_0^{y\sqrt{\frac{v}{v-2}}} f_v(x)\,dx \\
&\Leftrightarrow \frac{y\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi}\Gamma(\frac{v}{2})}\cdot\frac{1}{v}\cdot\left(\frac{v}{v+y^2}\right)^{\frac{v+1}{2}} < \int_y^{y\sqrt{\frac{v}{v-2}}} f_v(x)\,dx \\
&\Leftrightarrow \frac{y}{v}\left(\frac{v}{v+y^2}\right)^{\frac{v+1}{2}} < \int_y^{y\sqrt{\frac{v}{v-2}}}\left(\frac{v}{v+x^2}\right)^{\frac{v+1}{2}}dx \\
&\Leftrightarrow 1 < \frac{v}{y}\int_y^{y\sqrt{\frac{v}{v-2}}}\left(\frac{v+y^2}{v+x^2}\right)^{\frac{v+1}{2}}dx \\
&\quad = v\int_1^{\sqrt{\frac{v}{v-2}}}\left(\frac{v+y^2}{v+y^2x^2}\right)^{\frac{v+1}{2}}dx =: G(v,y). \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

同理，我们有

$$G(v,y) < 1 \Leftrightarrow \frac{J_{v+2}}{J_v} > 1.$$

下面，我们考虑任意实数 $v \geq 3$。为方便起见，对于 $v \geq 3, y > 0$ 和$x \in [1, \sqrt{\frac{v}{v-2}}]$，定义

$$u(v) := \sqrt{\frac{v}{v-2}}, \quad L(v) := u(v) - 1, \quad a := y^2, \qquad (3.3)$$

and

$$f(v,x) := \left(\frac{v+a}{v+ax^2}\right)^{\frac{v+1}{2}}. \qquad (3.4)$$

于是 $u(v) > 1$ 且 $L(v) > 0$。

根据 t 分布的性质，我们有（参见 [14]）

$$\lim_{v\to+\infty} F_v(x) = \Phi(x),$$

其中， $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数。

3.1 情形 $y \in (0,1]$

对于 $y \in (0,1]$ 和 $x \geq 1$，我们有

$$\frac{v+y^2}{v+y^2x^2} = \frac{\frac{v}{y^2}+1}{\frac{v}{y^2}+x^2} = 1 - \frac{x^2-1}{\frac{v}{y^2}+x^2} \geq 1 - \frac{x^2-1}{v+x^2} = \frac{v+1}{v+x^2}.$$

根据 [14, 定理 1.3（vii）], 的证明，我们知道

$$v\int_1^{\sqrt{\frac{v}{v-2}}} \left(\frac{v+1}{v+x^2}\right)^{\frac{v+1}{2}} dx > 1, \ \forall v \geq 3.$$

因此，对于所有 $y \in (0,1]$,

$$G(v,y) > 1, \ \forall v \geq 3,$$

这意味着对于所有 $v \geq 3$, $\frac{J_{v+2}}{J_v} < 1$。由此可得

$$\begin{aligned} T(y) &= \inf_{v\geq 3} P\left(|X-E(X)| \leq y\sqrt{Var(X)}\right) \\ &= \lim_{v\to+\infty}\left(2F_v\left(y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)-1\right) = 2\Phi(y)-1, \\ H(y) &= \inf_{v\geq 3} P\left(|X-E(X)| \geq y\sqrt{Var(X)}\right) \\ &= \min_{v=3,4}\left\{2-2F_v\left(y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)\right\}. \end{aligned}$$

此情形下的证明完成。 □

3.2 情形 $y \in (1, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

首先，我们给出四个引理，其证明将推迟到下一节。回顾一下，$L(v)$ $f(v,x)$ 和 $G(v,y)$ 分别由 (3.3)、(3.4) 和 (3.2) 定义。

引理 3.1 设 $C_0 = 3$, $V_0 = 100$。对于 $v \geq V_0$，有

$$L(v) = \frac{1}{v} + \frac{3}{2v^2} + R_0(v), |R_0(v)| < \frac{C_0}{v^3},$$

其中 $R_0(v) := \frac{\phi_1^{(3)}(\xi_1)}{6v^3}, \phi_1(x) := (1-2x)^{-\frac{1}{2}}, \xi_1 \in (0, \frac{1}{v})$.

回顾一下， C_1, C_2, C_3, V_1, V_2 和 V_3 均由 (1.1) 定义。

引理 3.2 对于 $v \geq V_1$，我们有

$$\ln f(v,x) = E_0(x) + \frac{1}{v}E_1(x) + \frac{1}{v^2}R_1(v,x), \ |R_1(v,x)| < C_1,$$

其中

$$E_0(x) := \frac{a}{2}(1-x^2),\ E_1(x) := \frac{a^2}{4}(x^4-1) - \frac{a}{2}(x^2-1), \tag{3.5}$$

$$R_1(v,x) := \frac{a^2}{4}(x^4-1) + \frac{v+1}{2}\left(\frac{\phi_2^{(3)}(\xi_2)}{6}\cdot\frac{a^3}{v} - \frac{\phi_2^{(3)}(\xi_3)}{6}\cdot\frac{a^3x^6}{v}\right), \tag{3.6}$$

$$\phi_2(x) := \ln(1+x),\ \xi_2 \in (0,\frac{a}{v}),\ \xi_3 \in (0,\frac{ax^2}{v}).$$

引理 3.3 对于 $v \geq V_2$，有

$$f(v,x) = e^{E_0(x)}\left(1 + \frac{E_1(x)}{v} + \frac{R_2(v,x)}{v^2}\right),\ |R_2(v,x)| < C_2,$$

其中

$$R_2(v,x) := \frac{2R_1(v,x) + E_1^2(x)}{2} + \frac{R_1(v,x)\cdot E_1(x)}{v} + \frac{R_1^2(v,x)}{2v^2} + \frac{e^{\xi_4}}{6}v^2z^3, \tag{3.7}$$

且 $E_1(x)$ 由（*3.5*）定义，$R_1(v,x)$ 由（*3.6*）定义，$z := \frac{1}{v}E_1(x) + \frac{1}{v^2}R_1(v,x)$，$\xi_4$ 介于 *0* 和 z 之间。

引理 3.4 对于 $v \geq V_3$，有

$$G(v,y) = 1 + \frac{3-a}{2v} + R_G(v), |R_G(v)| < \frac{C_3}{v^2},$$

其中

$$\begin{aligned}
R_G(v) &:= A_1 + A_2 + R_3(v) + R_4(v),\\
A_1 &:= v\int_0^{L(v)} e^{E_0(1+m)}\frac{E_1(1+m)}{v}\,dm,\\
A_2 &:= v\int_0^{L(v)} e^{E_0(1+m)}\frac{R_2(v,1+m)}{v^2}dm,\\
R_3(v) &:= vR_0(v) - \left(\frac{9a}{8v^3} + \frac{avR_0^2(v)}{2} + \frac{3a}{2v^2} + aR_0(v) + \frac{3aR_0(v)}{2v}\right),\\
R_4(v) &:= \int_0^{L(v)}\left[\frac{e^{\xi_5}}{2}a^2m^2 + m^2\left(1 - am + \frac{e^{\xi_5}}{2}a^2m^2\right)\left(-\frac{a}{2} + \frac{e^{\xi_6}}{8}a^2m^2\right)\right]dm,
\end{aligned}$$

$E_0(\cdot)$ $E_1(\cdot)$ 由（*3.5*）定义，$R_2(\cdot,\cdot)$ 由（*3.7*）定义，$R_0(v)$ 在引理 *3.1* 中定义，

$\xi_5 \in (-am, 0)$，$\xi_6 \in$ [illegible] $(\cdot,\cdot)$ 以及 $(-\frac{am^2}{2},\cdot)$。

定理 1.3 (ii)(iii) 的证明（适用于 $y \in (1, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$。我们将证明分为两种情况：$1 < y < \sqrt{3}$ 和 $y > \sqrt{3}$。由 (1.1)，可得 $v_0(y) = \max\{V_3, \frac{2C_3}{|a-3|} + 1\}$。

(1) 若 $1 < y < \sqrt{3}$，则 $1 < a = y^2 < 3$。由引理 3.4 可得，对所有 $v \geq v_0(y)$，

$$G(v,y) = 1 + \frac{3-a}{2v} + R_G(v)$$

$$> 1 + \frac{3-a}{2v} - \frac{C_3}{v^2} = 1 + \frac{(3-a)v - 2C_3}{2v^2} > 1,$$

这意味着对所有 $v \geq v_0(y)$ $\frac{J_{v+2}}{J_v} < 1$。因此

$$\begin{aligned}
T(y) &= \inf_{v\geq 3} P\left(|X - E(X)| \leq y\sqrt{Var(X)}\right) \\
&= \min\left\{\min_{3\leq v\leq [v_0(y)]+3}\left\{2F_v\left(y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right) - 1\right\}, \lim_{v\to+\infty}\left(2F_v\left(y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right) - 1\right)\right\} \\
&= \min\left\{\min_{3\leq v\leq [v_0(y)]+3}\left\{2F_v\left(y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right) - 1\right\}, 2\Phi(y) - 1\right\}, \\
H(y) &= \inf_{v\geq 3} P\left(|X - E(X)| \geq y\sqrt{Var(X)}\right) \\
&= \min_{3\leq v\leq [v_0(y)]+3}\left\{2 - 2F_v\left(y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

(2) 若 $y > \sqrt{3}$，则 $a = y^2 > 3$。由引理 3.4 可得，对于所有 $v \geq v_0(y)$，

$$\begin{aligned}
G(v, y) &= 1 - \frac{a-3}{2v} + R_G(v) \\
&< 1 - \frac{a-3}{2v} + \frac{C_3}{v^2} = 1 - \frac{(a-3)v - 2C_3}{2v^2} < 1,
\end{aligned}$$

这意味着对于所有 $v \geq v_0(y)$ $\frac{J_{v+2}}{J_v} > 1$ 因此

$$\begin{aligned}
T(y) &= \inf_{v\geq 3} P\left(|X - E(X)| \leq y\sqrt{Var(X)}\right) \\
&= \min_{3\leq v\leq [v_0(y)]+3}\left\{2F_v\left(y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right) - 1\right\}, \\
H(y) &= \inf_{v\geq 3} P\left(|X - E(X)| \geq y\sqrt{Var(X)}\right) \\
&= \min\left\{\min_{3\leq v\leq [v_0(y)]+3}\left\{2 - 2F_v\left(y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)\right\}, \lim_{v\to+\infty}\left(2 - 2F_v\left(y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)\right)\right\} \\
&= \min\left\{\min_{3\leq v\leq [v_0(y)]+3}\left\{2 - 2F_v\left(y\sqrt{\frac{v}{v-2}}\right)\right\}, 2 - 2\Phi(y)\right\}.
\end{aligned}$$

此情形的证明至此完成。 □

3.3 y = $\sqrt{3}$ 的情形

现在 $a = y^2 = 3$。因此

$$G(v, y) = 1 + \frac{3-a}{2v} + R_G(v) = 1 + R_G(v).$$

因此，我们需要保留高阶项，以确定 $G(v, y) > 1$ 还是 $G(v, y) < 1$。回想一下， $\bar{v}_0(\sqrt{3}) = 1318.4$。

引理 3.5 对于 $v \geq \bar{v}_0(\sqrt{3})$，我们有 $G\left(v, \sqrt{3}\right) > 1$。

上述引理的证明将在下一节给出。

定理 1.2(ii)(iii) 的证明 $y = \sqrt{3}$。根据引理 3.5，我们知道，对于所有 $v \geq \bar{v}_0(\sqrt{3})$，$G\left(v, \sqrt{3}\right) > 1$，这意味着对于所有 $v \geq \bar{v}_0(\sqrt{3})$ $\frac{J_{v+2}}{J_v} < 1$。由此可得

$$
\begin{aligned}
T(\sqrt{3}) &= \inf_{v \geq 3} P\left(|X - E(X)| \leq \sqrt{3Var(X)}\right) \\
&= \min\left\{ \min_{3 \leq v \leq [\bar{v}_0(\sqrt{3})]+3} \left\{ 2F_v\left(\sqrt{\frac{3v}{v-2}}\right) - 1 \right\}, \lim_{v \to +\infty} \left(2F_v\left(\sqrt{\frac{3v}{v-2}}\right) - 1 \right) \right\} \\
&= \min\left\{ \min_{3 \leq v \leq [\bar{v}_0(\sqrt{3})]+3} \left\{ 2F_v\left(\sqrt{\frac{3v}{v-2}}\right) - 1 \right\}, 2\Phi(\sqrt{3}) - 1 \right\}, \\
H(\sqrt{3}) &= \inf_{v \geq 3} P\left(|X - E(X)| \geq \sqrt{3Var(X)}\right) \\
&= \min_{3 \leq v \leq [\bar{v}_0(\sqrt{3})]+3} \left\{ 2 - 2F_v\left(\sqrt{\frac{3v}{v-2}}\right) \right\}.
\end{aligned}
$$

这种情况下的证明到此完成。 □

4 引理 3.1-3.5 的证明

注意到 $a = y^2$。 那么，对于引理 3.1-3.4 的证明，我们有 $a \geq 1$ 和 $a \neq 3$。

4.1 引理 3.1 的证明

回忆一下，$\phi_1(t) = (1 - 2t)^{-\frac{1}{2}}$。在 $t = 0$ 处进行泰勒展开，并采用拉格朗日余项，我们得到

$$\phi_1(t) = 1 + t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{\phi_1^{(3)}(\xi_1)}{6}t^3,$$

其中 $\xi_1 \in (0, t)$ $\phi_1^{(3)}(t) = 15(1 - 2t)^{-\frac{7}{2}}$。

当 $0 \leq t \leq \frac{1}{100}$ 时，我们有 $|\phi_1^{(3)}(\xi_1)| \leq 15 \cdot \frac{50}{49}^{\frac{7}{2}}$ 且 $v := \frac{1}{t} \geq 100$。因此，对于 $v \geq 100$，我们有

$$
\begin{aligned}
L(v) &= \phi_1(1/v) - 1 = \frac{1}{v} + \frac{3}{2v^2} + R_0(v), \\
|R_0(v)| &= \frac{|\phi_1^{(3)}(\xi_1)|}{6} \cdot \frac{1}{v^3} \leq \frac{15 \cdot \frac{50}{49}^{\frac{7}{2}}}{6} \cdot \frac{1}{v^3} < \frac{3}{v^2} = \frac{C_0}{v^3}.
\end{aligned}
$$

证明完毕。 □

4.2 引理 3.2 的证明

根据 $f(v,\ x)$ 的定义（参见 (3.4)），我们有

$$\ln f(v,x) = \frac{v+1}{2}\left[\ln\left(1+\frac{a}{v}\right) - \ln\left(1+\frac{ax^2}{v}\right)\right]. \tag{4.8}$$

在 $t=0$ 处对 $\phi_2(t) := \ln(1+t)$ 作泰勒展开，并采用拉格朗日余项，可得对于 $t>0$,

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{\phi_2^{(3)}(\xi)}{6}t^3, \tag{4.9}$$

其中 $\xi \in (0,t)$ $\phi_2^{(3)}(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$。令 $t_1 := \frac{a}{v}, t_2 := \frac{ax^2}{v}$。则 $t_1 > 0, t_2 > 0$。

由 (4.8) 和 (4.9)，可得

$$\begin{aligned}
\ln f(v,x) &= \frac{v+1}{2}\left[\left(\frac{a}{v} - \frac{a^2}{2v^2} + \frac{\phi_2^{(3)}(\xi_2)}{6}\cdot\frac{a^3}{v^3}\right) - \left(\frac{ax^2}{v} - \frac{a^2x^4}{2v^2} + \frac{\phi_2^{(3)}(\xi_3)}{6}\cdot\frac{a^3x^6}{v^3}\right)\right] \\
&= \frac{v+1}{2}\left[\frac{a}{v}(1-x^2) + \frac{a^2}{2v^2}(x^4-1) + \left(\frac{\phi_2^{(3)}(\xi_2)}{6}\cdot\frac{a^3}{v^3} - \frac{\phi_2^{(3)}(\xi_3)}{6}\cdot\frac{a^3x^6}{v^3}\right)\right] \\
&= \frac{a}{2}(1-x^2) + \frac{1}{v}\left[\frac{a^2}{4}(x^4-1) - \frac{a}{2}(x^2-1)\right] \\
&\quad + \frac{1}{v^2}\left[\frac{a^2}{4}(x^4-1) + \frac{v+1}{2}\left(\frac{\phi_2^{(3)}(\xi_2)}{6}\cdot\frac{a^3}{v} - \frac{\phi_2^{(3)}(\xi_3)}{6}\cdot\frac{a^3x^6}{v}\right)\right] \\
&= E_0(x) + \frac{1}{v}E_1(x) + \frac{1}{v^2}R_1(v,x),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

其中 $\xi_2 \in (0,t_1)$ $\xi_3 \in (0,t_2)$。

对于 $v \geq V_1 = \max\{100, 8a\}$，以及 $1 \leq x \leq \sqrt{\frac{v}{v-2}} \leq \sqrt{2}$，有 $0 < t_1, t_2 < 1$，因此 $\frac{1}{4} < \phi_2^{(3)}(\xi_2)$ $\phi_2^{(3)}(\xi_3) < 2$。于是

$$\begin{aligned}
|R_1(v,x)| &\leq \frac{a^2}{4}\left[(\sqrt{2})^4 - 1\right] + \frac{v+1}{2}\left[\frac{2}{6}\cdot\frac{a^3}{v} + \frac{2}{6}\cdot\frac{a^3(\sqrt{2})^6}{v}\right] \\
&= \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{2}a^3\cdot\frac{v+1}{v} \\
&< 2a^3 + \frac{3}{4}a^2 = C_1.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

证明完毕。 □

4.3 引理 3.3 的证明

由引理 3.2 可得

$$f(v,x) = e^{E_0(x)}e^{\frac{1}{v}E_1(x) + \frac{1}{v^2}R_1(v,x)}, \tag{4.12}$$

其中， $E_0(x)$ $E_1(x)$ 和 $R_1(v,x)$ 在引理 3.2 中定义。

回顾一下，

$$z = \frac{1}{v}E_1(x) + \frac{1}{v^2}R_1(v,x). \tag{4.13}$$

由泰勒展开可得

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{e^{\xi_4}}{6}z^3, \tag{4.14}$$

其中 ξ_4 介于 0 和 z之间。由（4.13）和（3.7）可得

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + \left(\frac{1}{v}E_1(x) + \frac{1}{v^2}R_1(v,x)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v}E_1(x) + \frac{1}{v^2}R_1(v,x)\right)^2 + \frac{e^{\xi_4}}{6}z^3 \\ &= 1 + \frac{E_1(x)}{v} + \frac{2R_1(v,x) + E_1^2(x)}{2v^2} + \frac{R_1(v,x)\cdot E_1(x)}{v^3} + \frac{R_1^2(v,x)}{2v^4} + \frac{e^{\xi_4}}{6}z^3 \\ &= 1 + \frac{E_1(x)}{v} + \frac{1}{v^2}\left(\frac{2R_1(v,x) + E_1^2(x)}{2} + \frac{R_1(v,x)\cdot E_1(x)}{v} + \frac{R_1^2(v,x)}{2v^2} + \frac{e^{\xi_4}}{6}v^2z^3\right) \\ &= 1 + \frac{E_1(x)}{v} + \frac{R_2(v,x)}{v^2}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

对于 $v \geq V_1 = \max\{100, 8a\}$，有 $1 \leq x \leq \sqrt{\frac{v}{v-2}} \leq \sqrt{2}$。由于 $E_1(x) = \frac{a^2}{4}(x^4-1) - \frac{a}{2}(x^2-1)$，因此有

$$E_1'(x) = a^2x^3 - ax = a^2x(x^2 - \frac{1}{a}) > 0,$$

这意味着 $E_1(x)$ 在 $[1, \sqrt{2}]$ 上严格递增。因此

$$0 \leq E_1(x) \leq \frac{3}{4}a^2 - \frac{a}{2} < \frac{3}{4}a^2. \tag{4.16}$$

我们有

$$v^2z^3 = v^2\left(\frac{1}{v}E_1(x) + \frac{1}{v^2}R_1(v,x)\right)^3 = \left(\frac{1}{v^{\frac{1}{3}}}E_1(x) + \frac{1}{v^{\frac{4}{3}}}R_1(v,x)\right)^3. \tag{4.17}$$

回顾 $V_2 = \max\left\{V_1, \frac{3}{2}a^2, \sqrt{2C_1}\right\}$。对于 $v \geq V_2$，由 (4.16) 以及 $|R_1(v,x)| \leq C_1$ 这一事实可得

$$\frac{E_1(x)}{v} \leq \frac{1}{2}, \ \frac{|R_1(v,x)|}{v^2} \leq \frac{1}{2},$$

结合 (4.13) 可知，对于 $v \geq V_2$，有 $|z| \leq 1$，因此对于 (4.14) 中的 ξ_4，有

$$|\xi_4| < 1. \tag{4.18}$$

对于 $v \geq V_2$，由 $|R_1(v,\ x)| \leq C_1$、(4.16)、(4.17) 和 (4.18) 可知，我们得到

$$
\begin{aligned}
|R_2(v,x)| &= \left| \frac{2R_1(v,x) + E_1^2(x)}{2} + \frac{R_1(v,x) \cdot E_1(x)}{v} + \frac{R_1^2(v,x)}{2v^2} + \frac{e^{\xi_4}}{6} v^2 z^3 \right| \\
&\leq |R_1(v,x)| + \frac{E_1^2(x)}{2} + \frac{|R_1(v,x)| \cdot E_1(x)}{v} + \frac{R_1^2(v,x)}{2v^2} + \left| \frac{e^{\xi_4}}{6} v^2 z^3 \right| \\
&< C_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} a^2 \right)^2 + \frac{C_1 \cdot \frac{3}{4} a^2}{V_2} + \frac{C_1^2}{2V_2^2} + \frac{e}{6} \left(\frac{\frac{3}{4} a^2}{V_2^{\frac{1}{3}}} + \frac{C_1}{V_2^{\frac{4}{3}}} \right)^3 \\
&\leq C_1 + \frac{9}{32} a^4 + \frac{C_1 \cdot \frac{3}{4} a^2}{\frac{3}{2} a^2} + \frac{C_1^2}{2 \left(\sqrt{2C_1} \right)^2} + \frac{e}{6} \left[\frac{\frac{3}{4} a^2}{\left(\frac{3}{2} a^2 \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{C_1}{\left(\sqrt{2C_1} \right)^{\frac{4}{3}}} \right]^3 \\
&\leq C_1 + \frac{9}{32} a^4 + \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{4} C_1 + \frac{1}{2} \left(a^{\frac{4}{3}} + C_1^{\frac{1}{3}} \right)^3 \\
&= \frac{9}{4} C_1 + \frac{25}{32} a^4 + \frac{3}{2} \left(C_1^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}} + C_1^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{8}{3}} \right) = C_2.
\end{aligned}
$$

因此，对所有 $v \geq V_2$ ，

$$
f(v,x) = e^{E_0(x)} \left(1 + \frac{E_1(x)}{v} + \frac{R_2(v,x)}{v^2} \right),\ |R_2(v,x)| < C_2.
$$

证明完毕。 □

4.4 引理 3.4 的证明

我们将证明分为四个步骤。回顾一下，$1 \leq x \leq \sqrt{\frac{v}{v-2}} = u(v)$ 且 $L(v) = u(v) - 1$。

步骤 1. 令 $m := x - 1$。则 $0 \leq m \leq L(v)$。根据引理 3.3 以及引理 3.4 中 A_1，A_2 的定义，我们得到对所有 $v \geq V_2$,

$$
\begin{aligned}
G(v,y) &= v \int_1^{u(v)} f(v,x)\, dx = v \int_0^{L(v)} f(v, 1+m) dm \\
&= v \int_0^{L(v)} e^{E_0(1+m)} \left(1 + \frac{E_1(1+m)}{v} + \frac{R_2(v,1+m)}{v^2} \right) dm \\
&= v \int_0^{L(v)} e^{E_0(1+m)} dm + A_1 + A_2. \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

下面我们考虑第一项 $v \int_0^{L(v)} e^{E_0(1+m)} dm$。

由式 (3.5)，可得

$$
\begin{aligned}
E_0(1+m) &= \frac{a}{2}[1 - (1+m)^2] = -am - \frac{am^2}{2}, \qquad (4.20) \\
E_1(1+m) &= \frac{a^2}{4} \left[(1+m)^4 - 1 \right] - \frac{a}{2} \left[(1+m)^2 - 1 \right)]
\end{aligned}
$$

$$= (a^2 - a)m + \left(\frac{3}{2}a^2 - \frac{a}{2}\right)m^2 + a^2m^3 + \frac{a^2m^4}{4}, \tag{4.21}$$

因此

$$v\int_0^{L(v)} e^{E_0(1+m)}\,dm = v\int_0^{L(v)} e^{-am}\cdot e^{-\frac{am^2}{2}}\,dm.$$

由 (1.1) 和 $a = y^2$，我们知道 $V_3 = \max\left\{V_2,\ 2+\frac{2a}{1+2\sqrt{a}},\ 2+\frac{2a^2}{1+2a}\right\}$。对于 $v \geq V_3$，可以验证 $0 \leq L(v) < 1$ 以及 $0 \leq aL(v)\ aL^2(v) \leq 1$。对于 $\overline{v \geq V_3}$ 和 $\overline{0 \leq} m \leq L(v)$，我们有

$$\begin{aligned}
e^{-am} &= 1 - am + \frac{e^{\xi_5}}{2}(-am)^2 = 1 - am + \frac{e^{\xi_5}}{2}a^2m^2, \quad \xi_5 \in (-am, 0) \subset (-1, 0)\\
e^{-\frac{am^2}{2}} &= 1 - \frac{am^2}{2} + \frac{e^{\xi_6}}{2}\left(-\frac{am^2}{2}\right)^2 = 1 - \frac{am^2}{2} + \frac{e^{\xi_6}}{8}a^2m^4, \quad \xi_6 \in (-\frac{am^2}{2}, 0) \subset (-1, 0),\\
v\int_0^{L(v)} e^{E_0(1+m)}\,dm &= v\int_0^{L(v)} \left(1 - am + \frac{e^{\xi_5}}{2}a^2m^2\right)\cdot\left(1 - \frac{am^2}{2} + \frac{e^{\xi_6}}{8}a^2m^4\right)dm\\
&= v\int_0^{L(v)} \left[1 - am + \frac{e^{\xi_5}}{2}a^2m^2 + \left(1 - am + \frac{e^{\xi_5}}{2}a^2m^2\right)\left(-\frac{am^2}{2} + \frac{e^{\xi_6}}{8}a^2m^4\right)\right]dm\\
&= v\int_0^{L(v)} (1 - am)dm\\
&\quad + v\int_0^{L(v)} \left[\frac{e^{\xi_5}}{2}a^2m^2 + m^2\left(1 - am + \frac{e^{\xi_5}}{2}a^2m^2\right)\left(-\frac{a}{2} + \frac{e^{\xi_6}}{8}a^2m^2\right)\right]dm\\
&= v\left(L(v) - \frac{a}{2}L^2(v)\right)\\
&\quad + v\int_0^{L(v)} \left[\frac{e^{\xi_5}}{2}a^2m^2 + m^2\left(1 - am + \frac{e^{\xi_5}}{2}a^2m^2\right)\left(-\frac{a}{2} + \frac{e^{\xi_6}}{8}a^2m^2\right)\right]dm.
\end{aligned}$$

由引理 3.1 以及引理 3.4 中 $R_3(v)$ 的定义，可得

$$\begin{aligned}
v\left(L(v) - \frac{a}{2}L^2(v)\right) &= v\left[\left(\frac{1}{v} + \frac{3}{2v^2} + R_0(v)\right) - \frac{a}{2}\left(\frac{1}{v} + \frac{3}{2v^2} + R_0(v)\right)^2\right]\\
&= 1 + \frac{3-a}{2v} + vR_0(v)\\
&\quad - \left(\frac{9a}{8v^3} + \frac{avR_0^2(v)}{2} + \frac{3a}{2v^2} + aR_0(v) + \frac{3aR_0(v)}{2v}\right)\\
&= 1 + \frac{3-a}{2v} + R_3(v).
\end{aligned}$$

对于 $v \geq V_3 (\geq V_2 \geq V_1 \geq 100)$，根据 $|R_0(v)| \leq \frac{C_0}{v^3}$，我们有

$$|R_3(v)| = \left|vR_0(v) - \left(\frac{9a}{8v^3} + \frac{avR_0^2(v)}{2} + \frac{3a}{2v^2} + aR_0(v) + \frac{3aR_0(v)}{2v}\right)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&< v\frac{C_0}{v^3} + \frac{9a}{8v^3} + \frac{av}{2}\cdot\frac{C_0^2}{v^3} + \frac{3a}{2v^2} + a\frac{C_0}{v^3} + \frac{3a}{2v}\cdot\frac{C_0}{v^3}\\
&= \frac{2C_0 + aC_0^2 + 3a}{2v^2} + \frac{9a + 8aC_0}{8v^3} + \frac{3aC_0}{2v^4}\\
&< \frac{2C_0 + aC_0^2 + 3a}{2v^2} + \frac{9a + 8aC_0}{8V_3}\cdot\frac{1}{v^2} + \frac{3aC_0}{2V_3^2}\cdot\frac{1}{v^2}\\
&\le \left[\left(C_0 + \frac{C_0^2}{2}a + \frac{3}{2}a\right) + \left(\frac{9 + 8C_0}{8V_0} + \frac{3C_0}{2V_0^2}\right)a\right]\cdot\frac{1}{v^2}\\
&< \left(C_0 + \frac{C_0^2 + 5}{2}a\right)\cdot\frac{1}{v^2},
\end{aligned}
$$

其中我们使用了不等式 $\frac{9+8C_0}{8V_0} + \frac{3C_0}{2V_0^2} < 1$，因为 $C_0 = 3$ 且 $V_0 = 100$。

根据引理 3.4 中 $R_4(v)$ 的定义，我们知道

$$
R_4(v) = \int_0^{L(v)} \left[\frac{e^{\xi_5}}{2}a^2m^2 + m^2\left(1 - am + \frac{e^{\xi_5}}{2}a^2m^2\right)\left(-\frac{a}{2} + \frac{e^{\xi_6}}{8}a^2m^2\right)\right] dm.
$$

注意，$\xi_5,\ \xi_6 \in (-1,\ 0)$、$0 \le L(v) < 1$ 和 $0 \le aL(v)\ aL^2(v) \le 1$。因此，对于 $v \ge V_3$，我们得到

$$
\begin{aligned}
|R_4(v)| &\le \int_0^{L(v)} \left[a^2m^2 + m^2(1+1+1)(a+1)\right] dm\\
&= \int_0^{L(v)} (a^2 + 3a + 3)m^2\, dm = \frac{a^2 + 3a + 3}{3}L^3(v)\\
&= \frac{a^2 + 3a + 3}{3}\left(\frac{1}{v} + \frac{3}{2v^2} + R_0(v)\right)^3\\
&= \frac{a^2 + 3a + 3}{3}\cdot\frac{1}{v^2}\cdot\left(\frac{1}{v^{\frac{1}{3}}} + \frac{3}{2v^{\frac{4}{3}}} + v^{\frac{2}{3}}\frac{C_0}{v^3}\right)^3\\
&< \frac{a^2 + 3a + 3}{3}\cdot\left(\frac{1}{V_0^{\frac{1}{3}}} + \frac{3}{2V_0^{\frac{4}{3}}} + \frac{C_0}{V_0^{\frac{7}{3}}}\right)^3\cdot\frac{1}{v^2} < \left(\frac{a^2}{3} + a + 1\right)\cdot\frac{1}{v^2}.
\end{aligned}
$$

因此，我们有

$$
v\int_0^{L(v)} e^{E_0(1+m)}\, dm = 1 + \frac{3-a}{2v} + R_3(v) + R_4(v). \tag{4.22}
$$

步骤 2。在这一步中，我们考虑 A_1。根据引理 3.4 中 A_1 的定义，我们知道

$$
A_1 = v\int_0^{L(v)} e^{E_0(1+m)}\frac{E_1(1+m)}{v}dm.
$$

根据 (4.20)，我们知道 $E_0(1+m) < 0$。注意，对于所有 $v \ge V_3$，$0 \le L(v)\ aL(v)\ aL^2(v) \le 1$。然后，对于 $v \ge V_3$，由 (4.21)，我们有

$$
|A_1| = \left|v\int_0^{L(v)} e^{E_0(1+m)}\frac{E_1(1+m)}{v}dm\right| \le \int_0^{L(v)} |E_1(1+m)|dm
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{L(v)} \left| (a^2-a)m + \left(\frac{3}{2}a^2 - \frac{a}{2}\right) m^2 + a^2 m^3 + \frac{a^2 m^4}{4} \right| dm \\
&\le \int_0^{L(v)} \left[(a^2+a)m + \left(\frac{3a}{2} + \frac{1}{2}\right) m + m + \frac{m}{4} \right] dm \\
&= \left(\frac{a^2}{2} + \frac{5a}{4} + \frac{7}{8}\right) \cdot L^2(v) = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{5a}{4} + \frac{7}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{v} + \frac{3}{2v^2} + R_0(v)\right)^2 \\
&= \left(\frac{a^2}{2} + \frac{5a}{4} + \frac{7}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{2v} + vR_0(v)\right)^2 \cdot \frac{1}{v^2} < \left(\frac{a^2}{2} + \frac{5a}{4} + \frac{7}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{2V_3} + \frac{C_0}{V_3^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{v^2} \\
&\le \left(\frac{a^2}{2} + \frac{5a}{4} + \frac{7}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{2V_0} + \frac{C_0}{V_0^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{v^2} = \left(4a^2 + 10a + 7\right) \cdot \frac{1}{v^2}.
\end{aligned}
$$

步骤3. 在这一步中，我们考虑 A_2。根据引理 3.4 中 A_2 的定义，我们知道

$$
A_2 = v \int_0^{L(v)} e^{E_0(1+m)} \cdot \frac{R_2(v, 1+m)}{v^2} dm.
$$

由 $E_0(1+m) < 0$，$|R_2(v,1+m)| \le C_2$ 对所有 $v \ge V_2$ 成立，我们得到对所有 $v \ge V_3$,

$$
\begin{aligned}
|A_2| &= \left| v \int_0^{L(v)} e^{E_0(1+m)} \cdot \frac{R_2(v,1+m)}{v^2}\, dm \right| \\
&\le \int_0^{L(v)} \left| \frac{R_2(v,1+m)}{v} \right| dm \\
&< \left| \frac{C_2}{v} \cdot L(v) \right| = \left| \frac{C_2}{v} \cdot \left(\frac{1}{v} + \frac{3}{2v^2} + R_0(v)\right) \right| \\
&< \frac{C_2}{v^2} \cdot \left(1 + \frac{3}{2V_3} + \frac{C_0}{V_3^2}\right) \\
&< \frac{C_2}{v^2} \cdot \left(1 + \frac{3}{2V_0} + \frac{C_0}{V_0^2}\right) < \frac{2C_2}{v^2}.
\end{aligned}
$$

步骤4. 由 $C_0 = 3$ 以及引理 3.4 中 C_3 的定义，我们得到

$$
\left(C_0 + \frac{C_0^2+5}{2}a\right) + \left(\frac{a^2}{3} + a + 1\right) + \left(4a^2 + 10a + 7\right) + 2C_2 = \frac{13}{3}y^4 + 18y^2 + 2C_2 + 11 = C_3. \tag{4.23}
$$

由 (4.19)、(4.22)、**步骤 2**、**步骤3**、(4.23) 以及引理 3.4 中 $R_G(v)$ 的定义，我们得到对所有 $v \ge V_3$,

$$
G(v,y) = 1 + \frac{3-a}{2v} + R_G(v),\ |R_G(v)| < \frac{C_3}{v^2}.
$$

证明完毕。 □

4.5 引理 3.5 的证明

我们将证明分为七个步骤。回顾一下，$a = y^2 = 3$, $\phi_1(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}, V_0 = 100$, $1 \le x \le \sqrt{\frac{v}{v-2}} = u(v)$ $m = x - 1$ 以及 $L(v) = u(v) - 1$。

步骤 1. 我们考虑 $L(v)$ 的展开。在 $t = 0$ 处进行泰勒展开，得到

$$\phi_1(t) = 1 + t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}t^3 + \frac{\phi_1^{(4)}(\xi_1')}{24}t^4,$$

其中，$\xi_1' \in (0, t)$ $\phi_1^{(4)}(t) = 105(1-2t)^{-\frac{9}{2}}$.

对于 $0 \le t \le \frac{1}{100}$，有 $|\phi_1^{(4)}(\xi_1')| \le 105 \cdot \frac{50}{49}^{\frac{9}{2}}$ 和 $v := \frac{1}{t} \ge 100$。令 $d_0 = 5$。那么对于 $v \ge 100$，有

$$L(v) = \phi_1(\frac{1}{v}) - 1 = \frac{1}{v} + \frac{3}{2v^2} + \frac{5}{2v^3} + \bar{R}_0(v), \tag{4.24}$$
$$|\bar{R}_0(v)| = \frac{|\phi_1^{(4)}(\xi_1')|}{24} \cdot \frac{1}{v^4} \le \frac{105 \cdot \frac{50}{49}^{\frac{9}{2}}}{24} \cdot \frac{1}{v^4} < \frac{d_0}{v^4}.$$

步骤 2. 我们考虑 $\ln f(v, x)$ 的展开。根据 (4.8)-(4.10)，并令 $a = 3$，得到

$$\begin{aligned}\ln f(v,x) &= \frac{3}{2}(1-x^2) + \frac{1}{v}\left[\frac{9}{4}(x^4-1) - \frac{3}{2}(x^2-1)\right] \\ &\quad + \frac{1}{v^2}\left[\frac{9}{4}(x^4-1) + \frac{v+1}{2}\left(\frac{\phi_2^{(3)}(\xi_2')}{6} \cdot \frac{27}{v} - \frac{\phi_2^{(3)}(\xi_3')}{6} \cdot \frac{27x^6}{v}\right)\right] \\ &:= \bar{E}_0(x) + \frac{1}{v}\bar{E}_1(x) + \frac{1}{v^2}\bar{R}_1(v,x),\end{aligned} \tag{4.25}$$

其中

$$\bar{E}_0(x) := \frac{3}{2}(1-x^2), \quad \bar{E}_1(x) := \frac{9}{4}(x^4-1) - \frac{3}{2}(x^2-1), \tag{4.26}$$
$$\bar{R}_1(v,x) := \frac{9}{4}(x^4-1) + \frac{v+1}{2}\left(\frac{\phi_2^{(3)}(\xi_2')}{6} \cdot \frac{27}{v} - \frac{\phi_2^{(3)}(\xi_3')}{6} \cdot \frac{27x^6}{v}\right), \tag{4.27}$$

以及 $\xi_2' \in (0, t_1')$ $\xi_3' \in (0, t_2')$、$t_1' = \frac{3}{v}, t_2' = \frac{3x^2}{v}$。

对于 $v \ge V_1' := \max\{100, 8a\} = \max\{100, 24\} = 100$，以及 $1 \le x \le \sqrt{\frac{v}{v-2}} \le \sqrt{2}$，我们有$0 < t_1', t_2' < 1$，因此 $\frac{1}{4} < \phi_2^{(3)}(\xi_2')$ $\phi_2^{(3)}(\xi_3') < 2$。设 $d_1 = \frac{243}{4}$。然后根据（4.11），我们有

$$|\bar{R}_1(v,x)| < 2 \cdot 3^3 + \frac{3}{4} \cdot 3^2 = d_1.$$

步骤3. 我们考察 $f(v, x)$ 的展开。由 (4.25) 可得

$$f(v,x) = e^{\bar{E}_0(x)} e^{\frac{1}{v}\bar{E}_1(x) + \frac{1}{v^2}\bar{R}_1(v,x)}.$$

定义

$$\bar{z} := \frac{1}{v}\bar{E}_1(x) + \frac{1}{v^2}\bar{R}_1(v,x). \tag{4.28}$$

由 (4.14) 和 (4.15)，可得对所有 $v \geq V_1'$，

$$\begin{aligned} e^{\bar{z}} &= 1 + \frac{\bar{E}_1(x)}{v} + \frac{1}{v^2}\left(\frac{2\bar{R}_1(v,x) + \bar{E}_1^2(x)}{2} + \frac{\bar{R}_1(v,x)\cdot\bar{E}_1(x)}{v} + \frac{\bar{R}_1^2(v,x)}{2v^2} + \frac{e^{\xi_4'}}{6}v^2\bar{z}^3\right) \\ &:= 1 + \frac{\bar{E}_1(x)}{v} + \frac{\bar{R}_2(v,x)}{v^2}, \end{aligned} \tag{4.29}$$

其中 ξ_4' 介于 0 和 $\bar{z}$ 之间，并且

$$\bar{R}_2(v,x) := \frac{2\bar{R}_1(v,x) + \bar{E}_1^2(x)}{2} + \frac{\bar{R}_1(v,x)\cdot\bar{E}_1(x)}{v} + \frac{\bar{R}_1^2(v,x)}{2v^2} + \frac{e^{\xi_4'}}{6}v^2\bar{z}^3. \tag{4.30}$$

对于 $v \geq V_1'$，我们有 $1 \leq x \leq \sqrt{\frac{v}{v-2}} \leq \sqrt{2}$。由 $\bar{E}_1(x) = \frac{9}{4}(x^4-1) - \frac{3}{2}(x^2-1)$，我们有

$$0 \leq \bar{E}_1(x) < \frac{27}{4}. \tag{4.31}$$

注意到 $\max\left\{V_1', \frac{27}{2}, \sqrt{2}d_1\right\} = \left\{100, \frac{27}{2}, \sqrt{\frac{171}{4}}\right\} = 100 = V_1'$。对于 $v \geq V_1'$，由 (4.31) 以及 $|R_1(v,x)| < d_1$ 这一事实可得

$$0 \leq \frac{\bar{E}_1(x)}{v} \leq \frac{1}{2},\ \frac{|\bar{R}_1(v,x)|}{v^2} \leq \frac{1}{2},$$

结合 (4.28)，这意味着对于 $v \geq V_1'$，我们有 $|\bar{z}| \leq 1$，因此对于 (4.29) 中的 ξ_4'，有

$$|\xi_4'| < 1. \tag{4.32}$$

令 $d_2 := \frac{9}{4}d_1 + \frac{25}{32}\cdot 3^4 + \frac{3}{2}\left(d_1^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{4}{3}} + d_1^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{8}{3}}\right)$。对于 $v \geq V_1'$，由 $|\bar{R}_1(v,\ x)| \leq d_1$ 这一事实以及 (4.31) 和 (4.32)，可得

$$|\bar{R}_2(v,x)| < \frac{9}{4}d_1 + \frac{25}{32}\cdot 3^4 + \frac{3}{2}\left(d_1^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{4}{3}} + d_1^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{8}{3}}\right) = d_2.$$

因此，对所有 $v \geq V_1'$，

$$f(v,x) = e^{\bar{E}_0(x)}\left(1 + \frac{\bar{E}_1(x)}{v} + \frac{\bar{R}_2(v,x)}{v^2}\right),\ |R_2'(v,x)| < d_2.$$

步骤4。我们考虑 $G(v,\ y)$的展开。根据**步骤3**，我们得到对于所有 $v \geq V_1'$，

$$G(v,y) = v\int_1^{u(v)} f(v,x)dx = v\int_0^{L(v)} f(v,1+m)dm$$

$$= v\int_0^{L(v)} e^{\bar{E}_0(1+m)}\left(1+\frac{\bar{E}_1(1+m)}{v}+\frac{\bar{R}_2(v,1+m)}{v^2}\right)dm$$
$$:= \bar{A}_1+\bar{A}_2+\bar{A}_3, \tag{4.33}$$

其中

$$\bar{A}_1 := v\int_0^{L(v)} e^{\bar{E}_0(1+m)}dm, \qquad \bar{A}_2 := v\int_0^{L(v)} e^{\bar{E}_0(1+m)}\cdot\frac{\bar{E}_1(1+m)}{v}dm, \tag{4.34}$$
$$\bar{A}_3 := v\int_0^{L(v)} e^{\bar{E}_0(1+m)}\cdot\frac{\bar{R}_2(v,1+m)}{v^2}dm. \tag{4.35}$$

¯在这一步的其余部分，我们考虑第一项 A_1。

由 (4.26)，可得

$$\bar{E}_0(1+m) = -3m-\frac{3m^2}{2}, \quad \bar{E}_1(1+m) = 6m+12m^2+9m^3+\frac{9m^4}{4}, \tag{4.36}$$

因此

$$\bar{A}_1 = v\int_0^{L(v)} e^{-3m}\cdot e^{-\frac{3m^2}{2}}dm.$$

注意到 $\max\left\{V_1', 2+\frac{2y^2}{1+2y}, 2+\frac{2y^4}{1+2y^2}\right\} = \max\left\{100, 2+\frac{6}{1+2\sqrt{3}}, 2+\frac{18}{1+6}\right\} = 100 = V_1'$。对于$v \geq V_1'$，可以验证 $0 \leq \overline{L(v)} < 1$且 $0 \leq 3L(v)\ 3L^2(v) \overline{\leq 1}$。对于 $\overline{v \geq V_1'}$和 $0 \leq m \leq L(v)$，与引理 3.4 证明的步骤 1 类似，我们有

$$e^{-3m} = 1-3m+\frac{9}{2}m^2+\frac{e^{\xi_5'}}{6}\cdot(-3m)^3 = 1-3m+\frac{9}{2}m^2-\frac{9e^{\xi_5'}}{2}m^3, \quad \xi_5' \in (-3m,0)\subset(-1,0),$$
$$e^{-\frac{3m^2}{2}} = 1-\frac{3m^2}{2}+\frac{e^{\xi_6'}}{2}\left(-\frac{3m^2}{2}\right)^2 = 1-\frac{3m^2}{2}+\frac{9e^{\xi_6'}}{8}m^4, \quad \xi_6' \in (-\frac{3m^2}{2},0)\subset(-1,0),$$
$$\begin{aligned}\bar{A}_1 &= v\int_0^{L(v)}\left(1-3m+\frac{9}{2}m^2-\frac{9e^{\xi_5'}}{2}m^3\right)\cdot\left(1-\frac{3m^2}{2}+\frac{9e^{\xi_6'}}{8}m^4\right)dm\\ &= v\int_0^{L(v)}\Bigg[1-3m+3m^2+\frac{9}{2}m^3+(1-3m)\cdot\frac{9e^{\xi_6'}}{8}m^4\\ &\qquad +\frac{9}{2}m^2\left(-\frac{3m^2}{2}+\frac{9e^{\xi_6'}}{8}m^4\right)-\frac{9e^{\xi_5'}}{2}m^3\left(1-\frac{3m^2}{2}+\frac{9e^{\xi_6'}}{8}m^4\right)dm\Bigg]\\ &= v\cdot\left(L(v)-\frac{3}{2}L^2(v)+L^3(v)\right)+\Bigg\{v\int_0^{L(v)}\Bigg[\frac{9}{2}m^3+(1-3m)\cdot\frac{9e^{\xi_6'}}{8}m^4\\ &\qquad +\frac{9}{2}m^2\left(-\frac{3m^2}{2}+\frac{9e^{\xi_6'}}{8}m^4\right)-\frac{9e^{\xi_5'}}{2}m^3\left(1-\frac{3m^2}{2}+\frac{9e^{\xi_6'}}{8}m^4\right)\Bigg]dm\Bigg\}\\ &:= v\left(L(v)-\frac{3}{2}L^2(v)+L^3(v)\right)+\bar{R}_3(v).\end{aligned}$$

注意到 $\xi_5', \xi_6' \in (-1, 0)$ 且 $0 \le 3m, 3m^2 \le 1$ 对于 $0 \le m \le L(v)$。于是我们得到，对于所有$v \ge V_1'$，

$$\begin{aligned}
|\bar{R}_3(v)| &\le v \int_0^{L(v)} \left[\frac{9}{2}m^3 + (1+1)\cdot\frac{3}{8}m^3 + \frac{9}{2}m^2\left(\frac{m}{2}+\frac{m}{8}\right) + \frac{9}{2}m^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)\right] dm \\
&< v\int_0^{L(v)} \left[(5+3+3+9)\cdot m^3\right] dm \\
&= 5v\cdot L^4(v) = 5v\left(\frac{1}{v}+\frac{3}{2v^2}+\frac{5}{2v^3}+\bar{R}_0(v)\right)^4 \\
&= \frac{5}{v^3}\left(1+\frac{3}{2v}+\frac{5}{2v^2}+v\cdot\bar{R}_0(v)\right)^4 < \frac{5}{v^3}\cdot(1+1)^4 = \frac{80}{v^3}.
\end{aligned}$$

由**步骤 1**，我们得到

$$\begin{aligned}
&v\left(L(v)-\frac{3}{2}L^2(v)+L^3(v)\right) \\
&= v\left[\left(\frac{1}{v}+\frac{3}{2v^2}+\frac{5}{2v^3}+\bar{R}_0(v)\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{v}+\frac{3}{2v^2}+\frac{5}{2v^3}+\bar{R}_0(v)\right)^2 + \left(\frac{1}{v}+\frac{3}{2v^2}+\frac{5}{2v^3}+\bar{R}_0(v)\right)^3\right] \\
&= 1-\frac{1}{v^2}+v\cdot\bar{R}_0(v) - \frac{3v}{2}\left[\frac{5}{v^4}+\frac{2\bar{R}_0(v)}{v}+\left(\frac{3}{2v^2}+\frac{5}{2v^3}+\bar{R}_0(v)\right)^2\right] \\
&\quad + v\left(\frac{3}{2v^2}+\frac{5}{2v^3}+\bar{R}_0(v)\right)\left[\left(\frac{1}{v}+\frac{3}{2v^2}+\frac{5}{2v^3}+\bar{R}_0(v)\right)^2 + \left(\frac{2}{v^2}+\frac{3}{2v^3}+\frac{5}{2v^4}+\frac{\bar{R}_0(v)}{v}\right)\right] \\
&= 1-\frac{1}{v^2}+\left\{\frac{v^4\cdot\bar{R}_0(v)}{v^3} - \frac{3}{2v^3}\left[5+2v^3\cdot\bar{R}_0(v)+\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2v}+v^2\cdot\bar{R}_0(v)\right)^2\right]\right. \\
&\quad \left. +\frac{1}{v^3}\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2v}+v^2\cdot\bar{R}_0(v)\right)\left[\left(1+\frac{3}{2v}+\frac{5}{2v^2}+v\cdot\bar{R}_0(v)\right)^2+\left(2+\frac{3}{2v}+\frac{5}{2v^2}+v\cdot\bar{R}_0(v)\right)\right]\right\} \\
&:= 1-\frac{1}{v^2}+\bar{R}_4(v).
\end{aligned}$$

对于所有 $v \ge V_1'$，根据 $|\bar{R}_0(v)| \le \frac{d_0}{v^4}$，我们有

$$\begin{aligned}
|\bar{R}_4(v)| &< \frac{1}{v^3}\cdot\left\{d_0+\frac{3}{2}\cdot\left[5+\frac{2d_0}{v}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{d_0}{v^2}\right)^2\right]\right. \\
&\qquad \left. +\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{d_0}{v^2}\right)\cdot\left[\left(1+\frac{3}{2v}+\frac{5}{2v^2}+\frac{d_0}{v^3}\right)^2+\left(2+\frac{3}{2v}+\frac{5}{2v^2}+\frac{d_0}{v^3}\right)\right]\right\} \\
&< \frac{1}{v^3}\cdot\left\{d_0+\frac{3}{2}\cdot\left[5+1+(2+1)^2\right]+(2+1)\cdot\left[(1+1)^2+(2+1)\right]\right\} \\
&= \left(d_0+\frac{87}{2}\right)\cdot\frac{1}{v^3}.
\end{aligned}$$

因此，对于所有 $v \geq V_1'$，我们有

$$\bar{A}_1 = 1 - \frac{1}{v^2} + \bar{R}_3(v) + \bar{R}_4(v),\ |\bar{R}_3(v,x)| < \frac{80}{v^3},\ |\bar{R}_4(v,x)| < \frac{d_0 + \frac{87}{2}}{v^3}. \tag{4.37}$$

步骤 5。 在此步骤中，我们考察 (4.33) 中的 A_2。由 (4.34)、(4.36) 以及函数 e^x 的泰勒展开可得

$$\begin{aligned}
\bar{A}_2 &= v\int_0^{L(v)} e^{\bar{E}_0(1+m)}\frac{\bar{E}_1(1+m)}{v}dm \\
&= \int_0^{L(v)} e^{-3m}\cdot e^{-\frac{3m^2}{2}}\left(6m + 12m^2 + 9m^3 + \frac{9m^4}{4}\right)dm \\
&= \int_0^{L(v)} \left(1 - e^{\xi_7'}\cdot 3m\right)\cdot\left(1 - e^{\xi_8'}\cdot\frac{3m^2}{2}\right)\cdot\left(6m + 12m^2 + 9m^3 + \frac{9m^4}{4}\right)dm \\
&= \int_0^{L(v)} 6m dm + \int_0^{L(v)}\left[6m\left(-e^{\xi_7'}\cdot 3m - e^{\xi_8'}\cdot\frac{3m^2}{2} + e^{\xi_7'+\xi_8'}\cdot\frac{9}{2}m^3\right)\right. \\
&\qquad \left. + \left(1 - e^{\xi_7'}\cdot 3m\right)\cdot\left(1 - e^{\xi_8'}\cdot\frac{3m^2}{2}\right)\cdot\left(12m^2 + 9m^3 + \frac{9m^4}{4}\right)\right]dm \\
&:= \int_0^{L(v)} 6m dm + \bar{R}_5(v),
\end{aligned}$$

其中 $\xi_7' \in (-3m,\ 0)$ $\xi_8' \in (-\frac{3m^2}{2},\ 0)$。

由 (4.24) 可得

$$\begin{aligned}
\int_0^{L(v)} 6m dm = 3L^2(v) &= 3\cdot\left(\frac{1}{v} + \frac{3}{2v^2} + \frac{5}{2v^3} + \bar{R}_0(v)\right)^2 \\
&= \frac{3}{v^2} + \frac{3}{v^3}\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2v} + v^2\cdot\bar{R}_0(v)\right)\cdot\left(2 + \frac{3}{2v} + \frac{5}{2v^2} + v\cdot\bar{R}_0(v)\right) \\
&:= \frac{3}{v^2} + \bar{R}_6(v).
\end{aligned}$$

对于 $v \geq V_1'$，我们有

$$\begin{aligned}
|\bar{R}_5(v)| &< \int_0^{L(v)} 6m\left(3m + \frac{m}{2} + \frac{3m}{2}\right) + \left(12m^2 + 3m^2 + \frac{3m^2}{4}\right)dm \\
&< \int_0^{L(v)} 48m^2 dm = 16L^3(v) = 16\cdot\left(\frac{1}{v} + \frac{3}{2v^2} + \frac{5}{2v^3} + \bar{R}_0(v)\right)^3 \\
&< \frac{16}{v^3}\cdot(1+1)^3 < \frac{128}{v^3}, \\
|\bar{R}_6(v)| &< \frac{3}{v^3}\cdot\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\cdot(2+1) = \frac{18}{v^3}.
\end{aligned}$$

因此，对于所有 $v \geq V_1'$，我们有

$$\bar{A}_2 = \frac{3}{v^2} + \bar{R}_5(v) + \bar{R}_6(v),\ |\bar{R}_5(v,x)| < \frac{128}{v^3},\ |\bar{R}_6(v,x)| < \frac{18}{v^3}. \tag{4.38}$$

Step 6. 在这一步中，我们考虑 (4.33) 中的 A_3'。由 (4.35) 和 (4.30)，可得

$$\begin{aligned}
\bar{A}_3 &= v\int_0^{L(v)} e^{\bar{E}_0(1+m)} \cdot \frac{\bar{R}_2(v,1+m)}{v^2} dm \\
&= \int_0^{L(v)} e^{\bar{E}_0(1+m)} \left[\frac{\bar{R}_1(v,1+m)}{v} + \frac{\bar{E}_1(1+m)^2}{2v} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\bar{R}_1(v,1+m)\cdot \bar{E}_1(1+m)}{v^2} + \frac{\bar{R}_1(v,1+m)^2}{2v^3} + \frac{e^{\xi_4'}}{6} v\bar{z}^3 \right] dm.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

令 $V_2' := \max\left\{ V_1', \left[\begin{smallmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{smallmatrix} \right]^{-1} + 1 \right\} = 198$。对于 $v \geq V_2'$ 和 $1 \leq x \leq \sqrt{v}_{v-2} \leq \sqrt{2}$，有 $0 < t_1' = \frac{3}{v}, t_2' = \frac{3x^2}{v} < \frac{2}{7}^{-1} - 1$，因此对于 $\xi_2' \in (0, t_1')$ $\xi_3' \in (0, t_2')$，有 $\frac{7}{4} < \phi_2^{(3)}(\xi_2')\ \phi_2^{(3)}(\xi_3') < 2$。此外，可以验证，对于 $v \geq V_2'$，有 $0 \leq L(v)\ 3L(v)\ 3L^2(v) \leq 1$。

那么，对于 $v \geq V_2'$，根据 $\bar{E}_0(1+m) \leq 0$、(4.27)、(4.24) 和 $|\bar{R}_0| < \frac{5}{v^4}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^{L(v)} e^{\bar{E}_0(1+m)} \cdot \frac{\bar{R}_1(v,1+m)}{v} dm \right| \leq \int_0^{L(v)} \left| \frac{\bar{R}_1(v,1+m)}{v} \right| dm \\
&= \frac{1}{v}\int_0^{L(v)} \left| \frac{9}{4}\left[(1+m)^4 - 1\right] + \frac{v+1}{2}\left[\frac{\phi_2^{(3)}(\xi_2')}{6}\cdot\frac{27}{v} - \frac{\phi_2^{(3)}(\xi_3')}{6}\cdot\frac{27\cdot(1+m)^6}{v} \right] \right| dm \\
&\leq \frac{9}{4v}\int_0^{L(v)} \left[(4m + 6m^2 + 4m^3 + m^4) + \left| \frac{v+1}{v}\left[\phi_2^{(3)}(\xi_2') - \phi_2^{(3)}(\xi_3')(1+m)^6 \right] \right| \right] dm \\
&\leq \frac{9}{4v}\int_0^{L(v)} \left[(4m + 2m + \frac{4}{9}m + \frac{1}{27}m) + \frac{4}{3}\left| \left[\phi_2^{(3)}(\xi_2') - \phi_2^{(3)}(\xi_3') \right] - \phi_2^{(3)}(\xi_3')\left[(1+m)^6 - 1\right] \right| \right] dm \\
&\leq \frac{9}{4v}\int_0^{L(v)} \left[\frac{175}{27}m + \frac{4}{3}\left| \phi_2^{(3)}(\xi_2') - \phi_2^{(3)}(\xi_3') \right| + \frac{4}{3}\cdot\left| \phi_2^{(3)}(\xi_3')\left[(1+m)^6 - 1\right] \right| \right] dm \\
&< \frac{9}{4v}\int_0^{L(v)} \left[\frac{175}{27}m + \frac{1}{3} + \frac{8}{3}\left(m^6 + 6m^5 + 15m^4 + 20m^3 + 15m^2 + 6m \right) \right] dm \\
&\leq \frac{9}{4v}\int_0^{L(v)} \left[\frac{175}{27}m + \frac{1}{3} + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{243}m + \frac{2}{27}m + \frac{5}{9}m + \frac{20}{9}m + 5m + 6m \right) \right] dm \\
&< \frac{1}{v}\int_0^{L(v)} \left(\frac{3}{4} + 100m \right) dm \\
&= \frac{1}{v}\left(\frac{3}{4}L(v) + 50L^2(v) \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{v}\left[\frac{3}{4}\left(\frac{1}{v}+\frac{3}{2v^2}+\frac{5}{2v^3}+\bar{R}_0(v)\right)+50\cdot\left(\frac{1}{v}+\frac{3}{2v^2}+\frac{5}{2v^3}+\bar{R}_0(v)\right)^2\right]\\
&= \frac{3}{4v^2}+\frac{1}{v^3}\left[\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2v}+v^2\cdot\bar{R}_0(v)\right)+50\cdot\left(1+\frac{3}{2v}+\frac{5}{2v^2}+v\cdot\bar{R}_0(v)\right)^2\right]\\
&< \frac{3}{4v^2}+\frac{1}{v^3}\left[\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)+50\cdot(1+1)^2\right]=\frac{3}{4v^2}+\frac{403}{2v^3}.
\end{aligned}
$$

对于 $v\geq V_2'$，根据 $E_0(1+m)\leq 0$ 这一事实，我们有

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^{L(v)} e^{\bar{E}_0(1+m)}\cdot\left[\frac{\bar{R}_1(v,1+m)\cdot\bar{E}_1(1+m)}{v^2}+\frac{e^{\xi_4'}}{6}v\bar{z}^3\right]dm\right|\\
&\leq \int_0^{L(v)}\left[\left|\frac{\bar{R}_1(v,1+m)\cdot\bar{E}_1(1+m)}{v^2}\right|+\left|\frac{e^{\xi_4'}}{6}v\bar{z}^3\right|\right]dm\\
&< \int_0^{L(v)}\left[\frac{d_1\cdot\frac{27}{4}}{2v^2}+v\left(\left|\frac{1}{v}\bar{E}_1(1+m)+\frac{1}{v^2}\bar{R}_1(v,1+m)\right|\right)^3\right]dm\\
&< \int_0^{L(v)}\left[\frac{27d_1}{8v^2}+\frac{1}{v^2}\left(\frac{27}{4}+\frac{1}{4}\right)^3\right]dm<\int_0^{L(v)}\frac{4d_1+343}{v^2}dm\\
&= \frac{4d_1+343}{v^2}\cdot L(v)=\frac{4d_1+343}{v^2}\left(\frac{1}{v}+\frac{3}{2v^2}+\frac{5}{2v^3}+\bar{R}_0(v)\right)\\
&< \frac{4d_1+343}{v^3}\cdot(1+1)=\frac{8d_1+686}{v^3},
\end{aligned}
$$

其中我们使用了不等式 $\frac{3}{2v}+\frac{5}{2v^2}+v\cdot\bar{R}_0(v)\leq 1$ 和 $\bar{R}_1(v,1+m)<\frac{1}{4}$，因为 $|\bar{R}_0(v)|\leq\frac{d_0}{v^4}$，$\left|\bar{R}_1\ v\ 1+m\ \right|\leq d_1=\frac{171}{4}$ $v\geq V_2'=198$ $d_0=5$ (,)，以及。

注意到

$$
\int_0^{L(v)} e^{\bar{E}_0(1+m)}\cdot\left[\frac{\bar{E}_1(1+m)^2}{2v}+\frac{\bar{R}_1(v,1+m)^2}{2v^3}\right]dm\geq 0.
$$

那么对于所有 $v\geq V_2'$，由 (4.39) 及上述讨论可得

$$
\bar{A}_3>-\frac{3}{4v^2}-\frac{403}{2v^3}-\frac{8d_1+686}{v^3}=-\frac{3}{4v^2}-\frac{16d_1+1775}{2v^3}. \tag{4.40}
$$

步骤 7. 定义

$$
d_3:=80+\left(d_0+\frac{87}{2}\right)+128+18+\frac{16d_1+1775}{2}=1648.
$$

由 (4.33)、(4.37)、(4.38) 和 (4.40)，可得

$$
G\left(v,\sqrt{3}\right)=1-\frac{1}{v^2}+\bar{R}_3(v)+\bar{R}_4(v)+\frac{3}{v^2}+\bar{R}_5(v)+\bar{R}_6(v)+\bar{A}_3
$$

$$> 1+\frac{2}{v^2}-\frac{3}{4v^2}-\frac{d_3}{v^3}=1+\frac{5}{4v^2}-\frac{d_3}{v^3}.$$

由 (1.1)，我们知道 $\max\left\{V_2', \underline{\underline{4}}_5 d_3\right\}=\underline{\underline{4}}_5 d_3=1318.4=\bar{v}_0\left(\sqrt{3}\right)$。于是对所有 $v\geq\bar{v}_0\left(\sqrt{3}\right)$，

$$G\left(v,\sqrt{3}\right)>1+\frac{5v-4d_3}{4v^3}\geq 1.$$

证明完毕。 □

致谢

本研究得到国家自然科学基金（项目编号：12171335）的资助。

参考文献

[1] Bababesi, L., Pratelli, L., Rigo, P. 关于 Chv´atal-Janson 猜想，统计与概率通讯，194（2023）109744。[2] Dvorak, V., Klein, O. Rademacher 和在超过一个标准差时的概率质量，SIAM离散数学杂志，36（2022）2393-2410。[3] Guo, Z.-Y., Tao, Z.-Y., Hu, Z.-C. 受 Chv´atal 定理启发的负二项分布研究，统计与概率通讯，207（2024）110037。[4] Hollom, L., Portier. Rademacher 和反集中性的紧下界及 Tomaszewski 对应问题。arXiv:2306.07811v1（2023）。[5] Hu, Z.-C., Lu, P., Zhou, Q.-Q., Zhou, X.-W. 受 Chv´atal 定理启发的若干无限可分分布概率函数下确界值，武汉数学杂志，44（2024）309-316。[6] Hu, Z.-C., Song, R., Tan, Y. 关于若干常见分布族的反集中函数，数学理论与应用，44（2024）1-15。[7] Janson, S. 关于二项随机变量不超过其期望的概率，统计与概率通讯，171（2021）109020。[8] Keller, N., Klein, O. 随机符号和的 Tomaszewski 猜想证明，数学进展，407（2022）108558。[9] Li, C., Hu, Z.-C., Zhou., Q.-Q. 受 Chv´atal 定理启发的 Weibull 分布和帕累托分布研究，武汉数学杂志，44（2024）195-202。[10] Li, F.-B., Xu, K., Hu, Z.-C. 受 Chv´atal 猜想启发的泊松分布、几何分布和帕斯卡分布研究，统计与概率通讯，200（2023）109871。[11] Rainville, E., D. 特殊函数[M]。纽约：麦克米伦公司，1960年。

[12] Sun, P. 二项分布大于其期望的概率的严格单峰性，离散应用数学，301（2021）1-5。[13] Sun, P., Hu, Z.-C., Sun, W. 伽马分布的两个概率函数下确界值，不等式与应用杂志，2024（2024）5。[14] Sun, P., Hu, Z.-C., Sun, W. 无限可分分布与正态分布之间的变差比较，统计论文，65（2024）4405-4429。[15] Sun, P., Hu, Z.-C., Sun, W. F-分布与正态分布之间的变差比较，arXiv: 2305.13615（2023）。[16] Xie, Z.-Y. 由三个猜想驱动的瑞利分布探索，本科毕业论文，四川大学（2025）。[17] Zhang, J., Hu, Z.-C., Sun, W. 关于无限可分分布的测度集中，数学学报，45B（2025）473-492。[18] Zhao, Y.-A. 关于若干常见分布族的集中函数，本科毕业论文，四川大学（2025）。[19] Zhou, Q.-Q., Lu, P., Hu, Z.-C. 受 Chv´atal 定理启发的 F-分布研究，arXiv: 2409.09420v1（2024）。