基于高频数据的积分扩散过程预测推断

Emil S. Jørgensen 和 Michael Sørensen*数学科学系，
哥本哈根大学，Universitetsparken 5，DK-2100哥本哈根 Ø，丹麦。
电子邮件：emil.joergensen@gmail.com 和
michael@math.ku.dk

arXiv:2602.06764v1 [math.ST] 6 Feb 2026

摘要

我们研究遍历且平稳的扩散过程的参数推断，其中数据是扩散过程积分的高频观测。此类数据可由某些测量设备获得，也可在记录位置并用扩散过程对速度建模时获得。在金融领域，可以利用已实现波动率或其变体构造潜在积分波动率过程的观测值。具体而言，我们假设在 n 个等距的确定性时间点 $i\Delta_n$ 观测积分过程，其中 $\Delta_n > 0$，并考虑高频／无限时域渐近情形，此时 $n \to \infty$、$\Delta_n \to 0$ 且 $n\Delta_n \to \infty$。在关于 (X_t) 的温和标准正则性条件下，我们证明，对于若干实用且易处理的基于预测的估计函数类别，相合估计量渐近存在且唯一。在附加的速率假设 $n\Delta_n^2 \to 0$ 下，可得该估计量的渐近正态性。证明基于扩散过程及积分扩散过程变换的实用 Euler-Itˆo 展开式，我们对此进行了较为详细的研究。

关键词：Euler-Itô展开式、高频数据、积分扩散、势算子、基于预测的估计函数、 ρ-混合。

1 引言

扩散过程被用于对许多科学领域中的动力系统建模，尤其是在金融领域。尽管这类过程是以连续时间动力学来定义的，但现有时间序列记录的是系统或其组成部分在离散时点的观测值。为弥合模型与数据之间的差距，针对离散观测的连续时间随机过程的统计方法已成为一个非常活跃的研究领域。高频数据的可用性引发了人们对构造和研究估计量与检验统计量的浓厚兴趣；随着相邻观测之间的时间间隔趋于零，这些估计量与检验统计量具有良好的渐近性质。

*ORCID：0000-0001-7233-5377

本文讨论一般形式的积分扩散模型 $(I_t)_{t\geq 0}$ 的参数推断

$$\begin{aligned} dI_t &= X_t dt, \quad I_0 = 0 \qquad (1.1)\\ dX_t &= a(X_t;\theta)dt + b(X_t;\theta)dB_t, \qquad (1.2)\end{aligned}$$

其中，扩散过程 (X_t) 的取值位于开区间 $(l,\ r) \subseteq \mathbb{R}$，且为遍历的，其不变分布为 μ_θ。我们假设 (X_t) 在概率测度 $\mathbb{P}_\theta$ 下严格平稳，即 $X_0 \sim \mu_\theta$。参数 θ 的取值属于 $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$，其中 $d \geq 1$。

设数据为单条时间序列 $\{I_{t_i^n}\}_{i=0}^n$，由积分过程在确定性等距时点上的观测值构成，即 $t_i^n = i\Delta_n$，其中 $\Delta_n > 0$。过程 (X_t) 是潜在的。为实现对漂移和扩散参数的相合估计，我们考虑高频／无限时域抽样情形

$$n \to \infty, \quad \Delta_n \to 0, \quad n \cdot \Delta_n \to \infty, \qquad (1.3)$$

其中，随着观测值数量增加，时间跨度趋于无穷。等价的观测方案可由变换后的变量给出

$$Y_i = \Delta_n^{-1}\left(I_{t_i^n} - I_{t_{i-1}^n}\right) = \Delta_n^{-1}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} X_s\,\mathrm{d}s, \quad i = 1,\ldots,n. \qquad (1.4)$$

注意，对于固定的 Δ_n，序列 $\{Y_i\}_{i=1}^\infty$ 从 (X_t) 继承了在 $\mathbb{P}_\theta$ 下的平稳性。

我们利用基于预测的估计函数构造并研究估计量。Sørensen（2000，2011）提出了这类估计函数，将其作为一种灵活的框架，用于非马尔可夫型扩散模型的参数推断。Ditlevsen 和 Sørensen（2004）将这一方法应用于积分扩散过程。他们的主要贡献是为一类易于处理的模型所包含的扩散过程推导出显式的 Godambe-Heyde 最优基于预测的估计函数，这类模型包括奥恩斯坦–乌伦贝克过程和平方根（CIR）过程，并证明了低频渐近结果。本文的主要贡献是在渐近情形（1.3）下，为一类基于预测的估计量建立高频渐近理论，具体包括存在性、唯一性、相合性和渐近正态性。我们的证明基于 Jørgensen 和 Sørensen（2021）关于扩散模型的类似结果。

离散观测扩散模型（X_t）的参数估计，针对形式为（1.2）的模型，是众多论文的研究主题，我们仅列举其中几篇：Dacunha-Castelle 和 Florens-Zmirou（1986）、Yoshida（1992）、Hansen 和 Scheinkman（1995）、Bibby 和 Sørensen（1995）、Kessler（1997）、Shoji 和 Ozaki（1998）、Roberts 和 Stramer（2001）、A¨ıt-Sahalia（2002）、Beskos 等人（2006）、Bladt 和 Sørensen（2014）、van der Meulen 和 Schauer（2017）、Sørensen（2024）、Pilipovic 等人（2024）以及 Garc´ıa-Portugu´es 和 Sørensen（2025）；另请参阅 Sørensen（2012）的综述论文。

尽管程度较轻，积分扩散过程的参数推断也一直是计量经济学和统计学领域多篇论文的主题。在计量经济学文献中，这一问题以连续时间随机波动率模型的形式出现。为说明这一点，考虑资产价格的简单随机波动率模型，$dS_t = \sqrt{v_t}dW_t$，其中（W_t）表示标准布朗运动。高频观测（S_t）使我们能够滤除潜在积分波动率的离散时间观测值，$\int_0^t v_s\mathrm{d}s$，并将其视为我们的数据。从高频时间序列中对积分波动率进行非参数滤波，是金融计量经济学中的一个典型问题。A¨ıt-Sahalia and Jacod（2014）给出了大量参考文献。这一过程促成了积分过程估计量的构造，其中波动率

动力学由类似于（1.2）的时间齐次平稳扩散过程建模，例如 Nelson（1990）中的 GARCH(1,1)扩散模型、Heston（1993）中的平方根（CIR）过程以及 Drimus（2012）中的 $3/2$ 扩散过程。基于逼近积分波动率的已实现幂变差进行估计，已有 Bollerslev and Zhou（2002）、Barndorff-Nielsen and Shephard（2002）以及 Todorov（2009）等人的研究。Li and Xiu（2016）通过预先滤除瞬时波动率，发展了波动率过程扩散系数中参数的 GMM估计量的高频（填充）渐近理论。除上文概述的 Ditlevsen and Sørensen（2004）的研究外，统计学文献还包括 Baltazar-Larios and Sørensen（2010），他们提出了模拟EM算法，以获得受噪声（例如微观结构噪声）污染的积分扩散过程的最大似然估计量；以及 Gloter（2000，2006），他提出了一种对本文影响深远的方法。在这种方法中，该方法基于 Δ_n 取小值时的展开式，构造对比估计量时利用了：当 $\Delta_n \to 0$， $Y_i \approx X_{t_{i-1}^n}$，从而可以建立积分扩散过程的高频极限结果。最后，Comte $et\ al.$（2009）研究了根据（I_t）的高频观测值，对潜在扩散过程的漂移和扩散系数进行非参数估计。

本文结构安排如下。第 2 节介绍预备知识：本文使用的记号与概念、关于 (X_t) 的一般假设，以及本文所考虑的基于预测的估计函数。第 3 节给出扩散过程的一个变换的展开式，其形式为 $f(X_{t_i^n}) = f(X_{t_{i-1}^n}) + \Delta_n^{1/2}\partial_x f(X_{t_{i-1}^n}) b(X_{t_{i-1}^n};\theta)\varepsilon_{1,\,i} + \varepsilon_{2,\,i}$并给出关于 $f(Y_i)$ 的类似结果。积分过程 Y_i 的展开式实质上已由 Gloter (2000) 指出。这些展开式是本文渐近理论的重要基石；由于它们与经典的欧拉近似有关，我们称之为***Euler-Itˆo*** 展开式。第 4 节专门讨论积分扩散过程的极限定理，第 5 节则推导关于估计量的存在性、唯一性、相合性和渐近正态性的渐近结果。证明及一些辅助结果放在第 6 节，第 7 节作总结。

2 预备知识

本节介绍全文通用的记号和一些核心概念，阐述关于底层扩散模型（X_t）的主要假设，并定义一类易于处理的基于预测的估计函数。

2.1 记号与概念

通用记号如下：

1. 真实参数值记为 θ_0。2. 我们将 (X_t) 的状态空间记为 $(S,\ \mathscr{B}(S))$，其中 $S = (l,\ r)$ 对于 $-\infty \le l < r \le \infty$ 是一个赋予其 Borel σ-代数 $\mathscr{B}(S)$ 的开区间。3. 对于函数 $f: S \to \mathbb{R}$，我们将 $\mu_\theta(f) = \int_S f(x)\mu_\theta(dx)$ 写作，并将 $\mathscr{L}^p(\mu_\theta)$ 记为满足 $\mu_\theta(|f|^p) < \infty$ 的函数 f 所构成的函数空间。此外，$\mathscr{L}_0^p(\mu_\theta)$ 表示 $\mathscr{L}^p(\mu_\theta)$ 中满足 $\mu_\theta(f) = 0$ 的子集。4. 在 $\mathbb{P}_\theta$ 下，我们用 $\xrightarrow{\mathbb{P}_\theta}$ 和 $\xrightarrow{\mathscr{D}_\theta}$ 分别表示依概率收敛和依分布收敛。

5. 若函数 f：$S \times \Theta \to \mathbb{R}$ 满足：存在一个 $C_\theta > 0$，使得对于所有 $x \in S$，$|f(x;\theta)| \le C_\theta (1+|x|^{C_\theta})$，则称其在 x 中具有多项式增长。

6. 本文中，$R(\Delta, x;\theta)$ 表示满足以下条件的一个通用实值函数

$$|R(\Delta, x;\theta)| \le F(x;\theta), \tag{2.1}$$

其中，F 关于 x呈多项式增长。

7. 对于定义在测度空间 $(A, \mathscr{A}, \nu)$ 上的实值函数 f和 g，若存在常数 $C > 0$ 使得对 ν-几乎所有 $a \in A$，都有 $f(a) \le Cg(a)$，则记作 $f \le_C g$。特别地，f 和 g 可以是随机变量。

8. 我们用 $\mathcal{C}^{j,k}_p(S \times \Theta)$，$j,k \ge 0$ 表示满足以下条件的实值函数 $f(x;\theta)$ 类

- f 关于 x 连续可微 j 次；
- f 关于 $\theta_1, \dots, \theta_d$ 连续可微 k 次；
- f且所有偏导数 $\partial_x^{j_1}\partial_{\theta_1}^{k_1}\cdots\partial_{\theta_d}^{k_d} f$、$j_1 \le j$、$k_1 + \cdots + k_d \le k$ 关于 x 均具有多项式增长。

我们类似地将 $\mathcal{C}^j_p(S)$ 定义为函数类 $f : S \to \mathbb{R}$。

9. 扩散过程 (X_t) 的无穷小生成元 记为 $\mathcal{A}_\theta$，相应的定义域记为 $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_\theta}$。若 (X_t) 满足下述条件 2.1，则 $\mathcal{C}^2_p(S) \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{A}_\theta}$，且对所有 $f \in \mathcal{C}^2_p(S)$，$\mathcal{A}_\theta f = \mathcal{L}_\theta f$，其中

$$\mathcal{L}_\theta f(x) = a(x;\theta)\partial_x f(x) + \frac{1}{2} b^2(x;\theta)\partial_x^2 f(x); \tag{2.2}$$

例如参见 Kessler（2000）。

10. 对任意扩散过程 (X_t)，势函数 算子由下式给出

$$U_\theta(f)(x) = \int_0^\infty P_t^\theta f(x)\,\mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

它定义于函数 f：$S \to \mathbb{R}$，这些函数属于集合 $\mathcal{D}_{U_\theta} = \{f : \int_0^\infty |P_t^\theta f(x)|\,\mathrm{d}t < \infty\}$，其中 P_t^θ表示转移算子 $P_t^\theta f(x) = \mathbb{E}_\theta(f(X_t) \mid X_0 = x)$。

11. 我们定义

$$\mathscr{H}_\theta = \{f \in \mathcal{C}^4_p(S) \cap \mathcal{D}_{U_\theta} : \mu_\theta(f) = 0, U_\theta(f) \in \mathcal{C}^2_p(S)\}. \tag{2.4}$$

势算子在我们的渐近理论中起着重要作用。保证 $f \in \mathcal{D}_{U_\theta}$ 以及 $U_\theta(f)$正则性的一般结果可见于Pardoux和Veretennikov（2001）。对于具有不变测度 μ_θ的遍历扩散，$f \in \mathcal{D}_{U_\theta}$ 必须满足$\mu_\theta(f) = 0$。势算子在我们的理论中之所以重要，是因为在正则性条件下它满足泊松方程 $\mathcal{L}_\theta(U_\theta(f)) = -f$。若$(X_t)$满足下文的条件2.1，则对 $f \in \mathscr{H}_\theta$亦是如此，参见例如Jørgensen和Sørensen（2021）中的命题3.3。

2.2 模型假设

为了建立一般形式(1.1)-(1.2)的积分扩散过程的渐近结果，我们对(X_t)施加如下正则性条件。

条件 2.1。 对于任意 $\theta \in \Theta$，随机微分方程

$$dX_t = a(X_t;\theta)dt + b(X_t;\theta)dB_t,\ \ X_0 \sim \mu_\theta$$

存在一个弱解 $(\Omega,(\mathcal{F}_t)\ \mathbb{P}_\theta,(B_t),(X_t))$，使得 $\mathcal{F}_t = \sigma\left(X_0,(B_s)^{s\le t}\right)$， X_0 与 (B_t) 相互独立，且

· (X_t) 平稳且在 $\mathbb{P}_\theta$ 下是 ρ-混合的。

此外，三元组 (a,b,μ_θ) 满足正则性条件

· $a,b \in \mathcal{C}_p^{2,0}(S\times\Theta)$,

· $|a(x;\theta)| + |b(x;\theta)| \le_C 1+|x|$,

· $b(x;\theta) > 0\ for\ x \in S$,

· $\int_S |x|^k \mu_\theta(dx) < \infty\ for\ all\ k \ge 1$.

我们定义离散化滤过为 $\mathcal{F}_i^n := \mathcal{F}_{t_i^n}$。

Genon-Catalot等人（2000）给出了一维扩散过程满足 ρ-混合的易于检验的条件。特别地，对于遍历且时间可逆的扩散过程， ρ-混合性质等价于谱隙的存在。后者意味着扩散过程的生成元 $\mathcal{A}_\theta$ 的最大非零特征值严格小于零。根据谱理论可知，所有特征值均为非正数。谱隙的大小记为 λ_θ，等于最大非零特征值的相反数。

在条件 2.1 下，众所周知，对于 $f \in \mathscr{L}_0^2(\mu_\theta)$，有 $\|P_t^\theta f\|_2 \le e^{-\lambda t}\|f\|_2$ 对所有 $t \ge 0$ 均成立，其中 $\|f\|_2 = \mu_\theta(f^2)^{\frac{1}{2}}$,，参见 Jørgensen 和 Sørensen（2021）中的引理 3.2。利用这一点，我们可以将 $\int_0^\infty P_t^\theta f(x)dt$ 定义为 $\int_0^N P_t^\theta f(x)dt$ 在 $N\to\infty$ 时的 $\|\cdot\|_2$-极限。该极限存在且属于 $\mathscr{L}_0^2(\mu_\theta)$，因为 $\int_0^N P_t^\theta f dt$ 是 $\mathscr{L}_0^2(\mu_\theta)$ 中的柯西序列。因此，在条件 2.1 下， U_θ 是一个定义良好的映射 $\mathscr{L}_0^2(\mu_\theta) \mapsto \mathscr{L}_0^2(\mu_\theta)$，并且由于 $\mathcal{C}_p^4(S) \subseteq \mathscr{L}^2(\mu_\theta)$，我们有 $\mathscr{H}_\theta \subseteq \mathscr{L}_0^2(\mu_\theta) \subseteq D_{U_\theta}$。特别地，空间 $\mathscr{H}_\theta$ 可写为

$$\mathscr{H}_\theta = \{f \in \mathcal{C}_p^4(S) : \mu_\theta(f) = 0, U_\theta(f) \in \mathcal{C}_p^2(S)\}. \tag{2.5}$$

以下关于真实参数值 θ_0 的条件对于第 5 节中估计量的渐近理论至关重要。这里，int(Θ) 表示 Θ的内部。

条件 2.2。 参数空间为 $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$，且 $\theta_0 \in \mathrm{int}(\Theta)$。

全文中均使用符号 $\mu_0 = \mu_{\theta_0}$、 $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}_{\theta_0}$ 等。

2.3 基于预测的估计函数

Sørensen（2000，2011）提出了基于预测的估计函数，为非马尔可夫型扩散模型的统计推断提供了一个灵活的框架。本文考虑的估计函数类别

$$G_n(\theta) = \sum_{i=q+1}^{n} \sum_{j=1}^{N} \pi_{i-1,j} \left[f_j(Y_i) - \breve{\pi}_{i-1,j}(\theta) \right] \tag{2.6}$$

其中，$\{f_j\}_{j=1}^N$是 $\mathscr{L}^2(\mu_\theta)$中的一个有限实值函数集。对于每个 $j \in \{1, \ldots, N\}$，$\breve{\pi}_{i-1\ j}\ \theta$ $\mathscr{L}^2\ \mu_\theta$ $f_j\ Y_i$ ，( )表示将( )正交投影到一个有限维子空间上的( )投影

$$\mathcal{P}_{i-1,j} = \operatorname{span}\left\{1, f_j\left(Y_{i-1}\right), \ldots, f_j\left(Y_{i-q_j}\right)\right\} \subseteq \mathscr{L}^2(\mu_\theta), \tag{2.7}$$

其中 $q_j \geq 0$。式（2.6）中的系数$\pi_{i-1,\ j}$ 是 d维列向量，其分量属于$\mathcal{P}_{i-1,\ j}$，且 q :=max $_{1\leq j\leq N}\ q_j$。

子空间 $\{\mathcal{P}_{i-1,j}\}_{ij}$ 称为预测空间。我们预测的是 $i \geq q+1$时 $f_j(Y_i)$的取值。由于每个预测空间 $\mathcal{P}_{i-1,\ j}$ 都是闭的，因此将 $f_j(Y_i)$正交投影到$\mathcal{P}_{i-1,\ j}$上的 $\mathscr{L}^2(\mu_\theta)$投影是良好定义且唯一确定的，其中 $\breve{\pi}_{i-1,\ j}(\theta)$满足正规方程

$$\mathbb{E}_\theta\left(\pi\left[f_j(Y_i) - \breve{\pi}_{i-1,j}(\theta)\right]\right) = 0 \tag{2.8}$$

对所有 $\pi \in \mathcal{P}_{i-1,\ j}$。此外，若我们仅考虑平稳过程 (X_t) 以及形式为 (2.7) 的预测空间，则 (2.8) 的解为 $\breve{\pi}_{i-1,\ j}(\theta) = \breve{a}_n(\theta)_j^T Z_{i-1,\ j}$，其中

$$Z_{i-1,j} = \left(1, f_j\left(Y_{i-1}\right), \ldots, f_j\left(Y_{i-q_j}\right)\right)^T$$

而 $\breve{a}_n(\theta)_j^T$表示一个 (q_j+1) 维的系数向量

$$\breve{a}_n(\theta)_j^T = \left(\breve{a}_n(\theta)_{j0}, \breve{a}_n(\theta)_{j1} \ldots, \breve{a}_n(\theta)_{jq_j}\right)$$

由矩条件确定

$$\mathbb{E}_\theta\left[Z_{q_j,j} f_j(Y_{q_j+1})\right] = \mathbb{E}_\theta\left[Z_{q_j,j} Z_{q_j,j}^T\right] \breve{a}_n(\theta)_j. \tag{2.9}$$

I在最简单的情形下 $q_j = 0$, $\mathcal{P}_{i-1,\ j}$ =张成$\{1\}$ ，并且根据 (2.9)，$\breve{\pi}_{i-1,\ j}(\theta) = \mathbb{E}_\theta f_j(Y_1)$.

ˆ我们通过求解估计方程 $G_n(\theta) = 0$ 得到估计量 θ_n ，并且当 $\mathbb{P}_{\theta_0}(G_n(\theta_n) = 0) \to 1$ 随 $n \to \infty$ 趋于.....时，我们称估计量 θ_n 为 G_n-估计量 。

实际应用的大多数基于预测的估计函数都属于此处考虑的形式。一般来说，(2.9) 中的混合矩没有显式表达式。不过，正如 Ditlevsen 和 Sørensen (2004) 所指出的，多项式函数 $f_j(y) = y^{\beta_j}$, $\beta_j \in \mathbb{N}$ 往往能够通过对 (X_t) 的混合矩积分来计算所需的矩。这为 Forman 和 Sørensen (2008) 研究的皮尔逊扩散提供了显式的基于预测的估计函数。

3 Euler-伊藤展开式

本节专门讨论在长度为 Δ_n 的小时间区间上观测到的扩散过程与积分扩散过程之变换的展开式。我们将这些展开式称为 Euler-Itô 展开式。本质上，以下结果在 Jørgensen 和 Sørensen（2021）中的渐近理论与本文的渐近理论之间架起了一座桥梁。这些结果是相对于任意概率测度 $\mathbb{P}_\theta$ 表述的。

3.1 扩散过程

下列展开式以各种形式出现在关于随机微分方程统计推断的文献中；参见例如 Kessler (1997)。

命题 3.1. 设 $f \in \mathcal{C}_p^4(S)$。则存在 $\mathcal{F}_i^n$-可测随机变量 $\varepsilon_{1,i}$和$\varepsilon_{2,i}$ ，使得

$$f(X_{t_i^n}) = f(X_{t_{i-1}^n}) + \Delta_n^{1/2}\partial_x f(X_{t_{i-1}^n})b(X_{t_{i-1}^n};\theta)\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i}, \tag{3.1}$$

其中 $\varepsilon_{1,i} \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$ 且与 $\mathcal{F}_{i-1}^n$ 独立，并且 $\varepsilon_{2,i}$ 满足矩展开

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta\left(\varepsilon_{2,i} \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) &= \Delta_n \mathcal{L}_\theta f(X_{t_{i-1}^n}) + \Delta_n^2 R(\Delta_n, X_{t_{i-1}^n};\theta), &(3.2)\\ \mathbb{E}_\theta\left(|\varepsilon_{2,i}|^k \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) &= \Delta_n^k R(\Delta_n, X_{t_{i-1}^n};\theta), \quad k \geq 2. &(3.3)\end{aligned}$$

3.2 积分扩散过程

为了对积分过程的函数建立类似结果，我们依赖 Gloter (2000) 的早期工作，以及函数 $f \in \mathcal{C}^k(S)$ 的 k 阶泰勒展开式，其形式为

$$f(Y_i) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!}\partial_x^j f(X_{t_{i-1}^n})(Y_i - X_{t_{i-1}^n})^j + \frac{1}{k!}\partial_x^k f(Z_i^n)(Y_i - X_{t_{i-1}^n})^k, \tag{3.4}$$

其中 Z_i^n 是介于 $X_{t_{i-1}^n}$ 和 Y_i 之间的随机变量，即对于某个 $s \in (0,1)$，有 $Z_i^n = X_{t_{i-1}^n} + s(Y_i - X_{t_{i-1}^n})$。以下引理给出了给定 $k \geq 1$ 时 (3.4) 中余项的上界。

引理 3.2。 设 $h\colon S \to \mathbb{R}$ 具有多项式增长。那么，对于任意 $k \geq 1$,

$$\mathbb{E}_\theta\left(|h(Z_i^n)||(Y_i - X_{t_{i-1}^n})|^k \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) \leq_{C_k} \Delta_n^{k/2}(1 + |X_{t_{i-1}^n}|)^{C_k}. \tag{3.5}$$

特别地，如果 $f \in \mathcal{C}_p^1(S)$， $f(Y_i) = f(X_{t_{i-1}^n}) + \partial_x f(Z_i^n)(Y_i - X_{t_{i-1}^n})$， 那么引理 3.2 意味着

$$\mathbb{E}_\theta\left(|f(Y_i) - f(X_{t_{i-1}^n})|^k \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) \leq_{C_k} \Delta_n^{k/2}(1 + |X_{t_{i-1}^n}|)^{C_k}. \tag{3.6}$$

本节的主要结果本身也具有独立的研究价值。它是 Gloter (2000) 中命题 2.2 的推广。请注意它与命题 3.1 的相似之处。

命题 3.3。 设 $f \in \mathcal{C}_p^4(S)$。那么存在 $\mathcal{F}_i^n$-可测随机变量 $\xi_{1,i}$和$\xi_{2,i}$ ，使得

$$f(Y_i) = f(X_{t_{i-1}^n}) + \Delta_n^{1/2}\partial_x f(X_{t_{i-1}^n})b(X_{t_{i-1}^n};\theta)\xi_{1,i} + \xi_{2,i}, \tag{3.7}$$

其中 $\xi_{1,i} \sim \mathcal{N}(0, 1/3)$ 且与 $\mathcal{F}_{i-1}^n$ 独立，并且 $\xi_{2,i}$ 满足矩展开式

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{2,i} \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) &= \Delta_n \mathcal{H}_\theta f(X_{t_{i-1}^n}) + \Delta_n^{3/2} R(\Delta_n, X_{t_{i-1}^n};\theta), &(3.8)\\ \mathbb{E}_\theta\left(\xi_{2,i}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) &= \Delta_n^2 R(\Delta_n, X_{t_{i-1}^n};\theta), &(3.9)\end{aligned}$$

with

$$\mathcal{H}_\theta f(x) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_\theta f(x) - \frac{1}{12}b^2(x;\theta)\partial_x^2 f(x). \tag{3.10}$$

此外，

$$\mathbb{E}_\theta\left(\varepsilon_{1,i} \cdot \xi_{1,i}\right) = \frac{1}{2}, \tag{3.11}$$

其中 $\varepsilon_{1,\ i}$ 是欧拉-伊藤展开式(3.1中出现的随机变量).

4 积分扩散过程的极限定理

作为欧拉-伊藤展开式（3.7）及相应界（3.6）的一项应用，本节将为一类积分扩散过程的泛函推导大数定律和中心极限定理

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(Y_i), \tag{4.1}$$

其中 $f : S \to \mathbb{R}$ 满足适当的正则性条件。本文其余部分的所有渐近结果均在真实概率测度 $\mathbb{P}_0$ 下，并在渐近情形 (1.3) 下得到。

引理 4.1. 假设 $f \in \mathcal{C}_p^1(S)$，且 (X_t) 满足条件 *2.1*。那么，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(Y_i) \xrightarrow{\mathbb{P}_0} \mu_0(f).$$

引理 4.1 的结果以略强的形式出现在 Gloter（2006）的命题 2 中。

下一个引理表明，对于积分扩散过程的泛函 (4.1)，在对 Δ_n 的收敛速率作出相同假设的条件下，可以得到中心极限定理，且其高斯极限分布与离散观测扩散过程的类似泛函相同；参见 Jørgensen 和 Sørensen（2021）的命题 3.4。

引理 4.2. 假设 $f \in \mathscr{H}_0$，且 (X_t) 满足条件 *2.1*。若 $n\Delta_n^3 \to 0$，则

$$\sqrt{n\Delta_n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(Y_i)\right) \xrightarrow{\mathscr{D}_0} \mathcal{N}\left(0, \mathcal{V}_0(f)\right),$$

其中

$$\mathcal{V}_0(f) = \mu_0\left(\left[\partial_x U_0(f) b(\,\cdot\,;\theta_0)\right]^2\right) = 2\mu_0\left(f U_0(f)\right). \tag{4.2}$$

渐近方差（4.2）中出现的算子 $U_0(f)$ 是势函数，该势函数已在第 2.1 和 2.2 小节中定义并讨论。

5 渐近理论

本节给出我们关于 G_n-估计量的主要渐近结果，这些估计量基于第 2.3 小节所述类型的预测型估计函数。证明基于 Jacod 和 Sørensen（2018）关于估计函数的一般渐近理论；另见 Sørensen (2012)。我们将讨论限定于形式为（2.6）的估计函数，其中$N = 1$，并通过记作以下形式来简化记号

$$G_n(\theta) = \sum_{i=q+1}^{n} \pi_{i-1}\left[f(Y_i) - \breve{\pi}_{i-1}(\theta)\right], \tag{5.1}$$

$\mathcal{P}_{i-1}$ 对于相应的预测空间，以及第 2.3 小节中依赖于 j的对象，情况也类似。关于推广到包含多个预测函数 $\{f_j\}_{j=1}^{N}$的估计函数，详见 Jørgensen 和 Sørensen（2021）第 4.3 节。

5.1 简单预测空间

形式为 (5.1) 的估计函数中最简单的一类出现在 $q = 0$ 时。在此情形下，正交投影为 $\breve{\pi}_{i-1}(\theta) = \mathbb{E}_\theta f(Y_1)$，而一维预测空间$\mathcal{P}_{i-1}$ 使我们能够估计一个实参数 $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$。因此，我们考虑一维估计函数

$$G_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \left[f(Y_i) - \mathbb{E}_\theta f(Y_1) \right]. \tag{5.2}$$

Kessler（2000）针对离散观测扩散过程研究了类似的估计函数。

我们对 G_n-估计量渐近性质的研究基于 G_n关于 Δ_n的幂次展开式。在此处所考虑的简单情形中，这样的展开式可直接由命题 3.3 中的 (3.7) 得到，这意味着对任意 $f \in \mathcal{C}_p^4(S)$

$$\mathbb{E}_\theta f(Y_1) = \mu_\theta(f) + \mathbb{E}_\theta(\xi_{2,1}) = \mu_\theta(f) + \Delta_n R(\Delta_n; \theta), \tag{5.3}$$

其中 $|R(\Delta_n; \theta)| \leq C(\theta) < \infty$。

以下关于 G_n 的正则性条件，加上标准的可辨识性与速率条件，保证了 G_n-估计量的存在性、相合性与渐近正态性。

条件 5.1。假设

- $f^*(x) := f(x) - \mu_0(f) \in \mathscr{H}_0$,
- $\theta \mapsto \mu_\theta(f) \in \mathcal{C}^1$,
- 对于任意紧子集 $\mathcal{M} \subseteq \Theta$，当 Δ_n 充分小时，

$$\sup_{\theta \in \mathcal{M}} |\partial_\theta R(\Delta_n; \theta)| \leq C(\mathcal{M}). \tag{5.4}$$

定理 5.2。 假设满足条件 *2.1*、*2.2* 和 *5.1*以及可识别性条件 $\partial_\theta \mu_\theta(f) \neq 0$ 对所有 $\theta \in \Theta$成立。则以下断言成立。

- 存在一个 G_n-估计量的相合序列 (θ_n)，当 $n \to \infty$时，在任何包含 θ_0 的紧子集 $\mathcal{K} \subseteq \Theta$ 中都是唯一的，且其 $\mathbb{P}_0$-概率趋近于一。
- 此外，如果 $n\Delta_n^3 \to 0$，则

$$\sqrt{n\Delta_n} \left(\hat{\theta}_n - \theta_0 \right) \xrightarrow{\mathscr{D}_0} \mathcal{N}\left(0, \left[\partial_\theta \mu_0(f)\right]^{-2} V_0(f)\right), \tag{5.5}$$

其中 $V_0(f) = 2\mu_0(f^* U_0(f^*))$。

具体而言，关于唯一性的陈述意味着，对于任意 G_n-估计量 θ_n for $\hat{\theta}_n$，若 $\mathbb{P}_0(\theta_n \in \mathcal{K}) \to 1$，则有 $\mathbb{P}_0(\theta_n \neq \theta_n) \to 0$。

可识别性条件以及关于 Δ_n 收敛速率的假设，与 Jørgensen 和 Sørensen（2021）中针对扩散过程离散时间观测的基于预测的估计函数所得类似结果完全相同。高斯极限分布也相同，这使我们能够使用蒙特卡罗方法计算 Jørgensen 和 Sørensen（2021）第 5.1 节提出的渐近方差。重要的是，该方法不需要势函数的表达式。

5.2 1 阶滞后预测空间

在预测空间 $\mathcal{P}_{i-1}$ 中引入观测值的过去函数，大大增加了数学复杂性。我们的主要结果表明，在适当的正则性条件下，基于预测的 G_n 估计量（其中 $q = 1$）具有存在性、唯一性、相合性和渐近正态性。在这种情况下，预测空间 $\mathcal{P}_{i-1}$ 由 1 和 $f(Y_{i-1})$ 张成；由正规方程 (2.9) 可知，最优预测量为

$$\breve{\pi}_{i-1}(\theta) = \breve{a}_n(\theta)_0 + \breve{a}_n(\theta)_1 f(Y_{i-1}),$$

其中，$\breve{a}_n(\theta)_0$ 和 $\breve{a}_n(\theta)_1$ 由下式唯一确定：

$$\breve{a}_n(\theta)_0 = \mathbb{E}_\theta f(Y_1)\,(1 - \breve{a}_n(\theta)_1)\,, \tag{5.6}$$

$$\breve{a}_n(\theta)_1 = \frac{\mathbb{E}_\theta\left[f(Y_1)f(Y_2)\right] - \left[\mathbb{E}_\theta f(Y_1)\right]^2}{\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta f(Y_1)}. \tag{5.7}$$

与二维预测空间一致，我们考虑 $d = 2$ 并研究估计函数

$$G_n(\theta) = \sum_{i=2}^{n} \begin{pmatrix} 1 \\ f(Y_{i-1}) \end{pmatrix} \left[f(Y_i) - \breve{a}_n(\theta)_0 - \breve{a}_n(\theta)_1 f(Y_{i-1})\right] \tag{5.8}$$

对于该函数，按 Δ_n 的幂次展开比式（5.2）更为困难。

利用第 3 节中的 Euler-Itˆo 展开式，我们首先展开投影系数 $\breve{a}_n(\theta)_0$ 和 $\breve{a}_n(\theta)_1$。由于证明略长，我们将结果表述为一个单独的引理。

引理 5.3。对于 $f \in \mathcal{C}_p^4(S)$，投影系数向量 $\breve{a}_n(\theta) = (\breve{a}_n(\theta)_0,\ \breve{a}_n(\theta)_1)^T$ 具有如下展开式：

$$\breve{a}_n(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \Delta_n \begin{pmatrix} -K_f(\theta)\mu_\theta(f) \\ K_f(\theta) \end{pmatrix} + \Delta_n^{3/2} R(\Delta_n;\theta) \tag{5.9}$$

其中 $|R(\Delta_n;\theta)| \le C(\theta)$ 以及

$$K_f(\theta) = \mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta f(X_0)^{-1}\left[\mu_\theta(f\mathcal{L}_\theta f) + \frac{1}{6}\mu_\theta\left([b(\,\cdot\,;\theta)\partial_x f]^2\right)\right]. \tag{5.10}$$

在渐近理论中，我们对 G_n 施加以下正则性条件。

条件 5.4。假设

- $f_1^*(x) = K_f(\theta_0)\left[\mu_0(f) - f(x)\right] \in \mathscr{H}_0$,
- $f_2^*(x) = f(x)\mathcal{L}_0 f(x) + \frac{1}{6}[b(x;\theta_0)\partial_x f(x)]^2 - K_f(\theta_0)f(x)\left[f(x) - \mu_0(f)\right] \in \mathscr{H}_0$,
- $(\theta \mapsto \mu_\theta(f)) \in \mathcal{C}^1$, $(\theta \mapsto K_f(\theta)) \in \mathcal{C}^1$ *and the remainder term in (5.9) satisfies that*

$$\sup_{\theta\in\mathcal{M}} \|\partial_{\theta^T} R(\Delta_n;\theta)\| \le C(\mathcal{M}), \tag{5.11}$$

对于任意紧子集 $\mathcal{M} \subseteq \Theta$，以及对于充分小的 Δ_n。

式 (5.11) 和 (5.13) 中的矩阵范数 $\|\cdot\|$ 可以任意选取。为方便起见，我们假设 $\|\cdot\|$ 是次乘性的。下面的引理给出了证明主要结果定理 5.6 所需的关键技术步骤。

引理 5.5. 假设条件*2.1*和 *5.4* 成立。那么，对于任意 $\theta \in \Theta$,

$$(n\Delta_n)^{-1} G_n(\theta) \xrightarrow{\mathbb{P}_0} \gamma(\theta_0; \theta)$$

其中

$$\gamma(\theta_0;\theta) = \begin{pmatrix} K_f(\theta)(\mu_\theta - \mu_0)(f) \\ \mu_0(f\mathcal{L}_0 f) + \frac{1}{6}\mu_0\left([b(\,\cdot\,;\theta_0)\partial_x f]^2\right) - K_f(\theta)\left[\mu_0(f^2) - \mu_0(f)\mu_\theta(f)\right] \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

此外，对于任意紧子集 $\mathcal{M} \subseteq \Theta$

$$\sup_{\theta\in\mathcal{M}} \left\| (n\Delta_n)^{-1}\partial_{\theta^T} G_n(\theta) - W(\theta) \right\| \xrightarrow{\mathbb{P}_0} 0, \tag{5.13}$$

其中

$$W(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \mu_0(f) \\ \mu_0(f) & \mu_0(f^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\theta_1}\left[K_f(\theta)\mu_\theta(f)\right] & \partial_{\theta_2}\left[K_f(\theta)\mu_\theta(f)\right] \\ -\partial_{\theta_1} K_f(\theta) & -\partial_{\theta_2} K_f(\theta) \end{pmatrix}.$$

定理 5.6。 假设条件*2.1*、*2.2*和*5.4*成立， $W(\theta)$ 是非奇异的，并且对于所有 $\theta \neq \theta_0$ ，可识别性条件 $\gamma(\theta_0;\theta) \neq 0$ 均满足。
那么以下断言成立：

· 存在一个相合序列的 G_n-估计量 (θ_n) ，当 $n \to \infty$ 时，在任何包含 θ_0 的紧子集 $\mathcal{K} \subseteq \Theta$ 中，它以 $\mathbb{P}_0$- 概率趋近于一而唯一。

· 此外，若 $n\Delta_n^2 \to 0$，则

$$\sqrt{n\Delta_n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) \xrightarrow{\mathscr{D}_0} \mathcal{N}_2\left(0, \left[W(\theta_0)^{-1} V_0(f) (W(\theta_0)^{-1})^T\right]\right), \tag{5.14}$$

其中

$$V_0(f) = \begin{pmatrix} \mu_0\left([\partial_x U_0(f_1^*) b(\,\cdot\,;\theta_0)]^2\right) & \mathbb{C}\mathrm{ov}(f) \\ \mathbb{C}\mathrm{ov}(f) & \mu_0\left([\partial_x U_0(f_2^*) + f\partial_x f]^2 b^2(\,\cdot\,;\theta_0)\right) \end{pmatrix},$$

with

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(f) = \mu_0\left(\partial_x U_0(f_1^*)\left[\partial_x U_0(f_2^*) + f\partial_x f\right] b^2(\,\cdot\,;\theta_0)\right).$$

与 Jørgensen 和 Sørensen（2021）的结果相比，展开式 (5.9) 中余项的阶数较低 $\Delta_n^{3/2}$，因此需要满足速率假设 $n\Delta_n^2 \to 0$；该假设比离散观测扩散过程所需的条件更强。Gloter（2006）也采用了相同的强速率假设，以确保一类基于积分扩散观测值的最小对比估计量具有渐近正态性。

6 证明与辅助结果

本节给出本文结果的证明，以及证明中所需的一些辅助结果。

6.1 辅助结果

我们将多次用到以下事实：对于满足条件 2.1 的扩散过程 X 和函数$f \in \mathcal{C}_p^1(S)$，对每个 $k \geq 1$，存在一个常数 $C_{k,\theta} > 0$，使得

$$\mathbb{E}_\theta \left(\sup_{s \in [0,\Delta]} |f(X_{t+s}) - f(X_t)|^k \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right) \leq C_{k,\theta} \Delta^{k/2} \left(1 + |X_t|\right)^{C_{k,\theta}}. \tag{6.1}$$

这个经典结果可以参照 Kessler (1997) 和 Gloter (2000) 中类似结果的证明来证明。

我们还会用到一个众所周知的结果：如果 $a(\cdot;\theta) \in \mathcal{C}^{2k,0}_p(S \times \Theta)$，$b(\cdot;\theta) \in \mathcal{C}^{2k,0}_p(S \times \Theta)$ 且$f \in \mathcal{C}_p^{2(k+1)}(S)$，对于某个 $k \geq 0$，则

$$\mathbb{E}_\theta \left(f(X_{t+\Delta}) \mid \mathcal{F}_t \right) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\Delta^i}{i!} \mathcal{L}_\theta^i f(X_t) + \Delta^{k+1} R(\Delta, X_t; \theta), \tag{6.2}$$

例如参见 Sørensen (2012) 中的引理 1.10。

引理 6.1。 设$(X_t)_{t \geq 0}$是$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$上的连续半鞅，并假设$(H_t)_{t \geq 0}$ 是$(\mathcal{F}_t)$-适应且连续的。对于任意 $t \geq t^* \geq 0$,

$$\int_{t^*}^{t} \left(\int_{t^*}^{s} H_u dX_u \right) \mathrm{d}s = \int_{t^*}^{t} (t-s) H_s dX_s.$$

证明。 不失一般性，设 $t^* = 0$。定义 $Z_t = \int_0^t H_s dX_s$。根据随机分部积分（Itô 公式），$d(tZ_t) = tdZ_t + Z_t \mathrm{d}t$。因此

$$\int_0^t t dZ_s = tZ_t = \int_0^t Z_s \,\mathrm{d}s + \int_0^t s dZ_s,$$

这就验证了该结果。 □

6.2 证明

由于我们研究 $\Delta_n \to 0$ 时的极限，因此在所有证明中都可以假设 Δ_n 有上界，例如 $\Delta_n \leq 1$。

命题 *3.1* 的证明。由伊藤公式,

$$f(X_{t_i^n}) = f(X_{t_{i-1}^n}) + \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \mathcal{L}_\theta f(X_s) \,\mathrm{d}s + \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \partial_x f(X_s) b(X_s;\theta) dB_s.$$

根据定义

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{1,i} &= \Delta_n^{-1/2} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} dB_s, && (6.3)\\
A_i &= \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \mathcal{L}_\theta f(X_s) \,\mathrm{d}s, \\
D_i &= \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \left[\partial_x f(X_s) b(X_s;\theta) - \partial_x f(X_{t_{i-1}^n}) b(X_{t_{i-1}^n};\theta) \right] dB_s, \\
\varepsilon_{2,i} &= A_i + D_i, && (6.4)
\end{aligned}$$

我们得到如下形式的展开式

$$f(X_{t_i^n}) = f(X_{t_{i-1}^n}) + \Delta_n^{1/2}\partial_x f(X_{t_{i-1}^n})b(X_{t_{i-1}^n};\theta)\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i},$$

whe关于 $\varepsilon_{1,i}$和 $\varepsilon_{2,i}$是 $\mathcal{F}_i^n$-可测的，且 $\varepsilon_{1,i} \sim \mathcal{N}(0,1)$ 并且独立于 $\mathcal{F}_{i-1}^n$.

为证明条件矩展开式 (3.2)-(3.3)，应用富比尼定理，然后利用 (6.2)，得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta\left(A_i \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) &= \int_0^{\Delta_n} \mathbb{E}_\theta\left(\mathcal{L}_\theta f(X_{t_{i-1}^n+u}) \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\Delta_n} \left[\mathcal{L}_\theta f(X_{t_{i-1}^n}) + u \cdot R(u, X_{t_{i-1}^n};\theta)\right] \mathrm{d}u \\
&= \Delta_n \mathcal{L}_\theta f(X_{t_{i-1}^n}) + \Delta_n^2 R(\Delta_n, X_{t_{i-1}^n};\theta).
\end{aligned}$$

此外，由于 $\mathbb{E}_\theta\left(\int_0^t [\partial_x f(X_s)b(X_s;\theta)]^2 \mathrm{d}s\right) = t\mu_\theta([f'b(\cdot;\theta)]^2) < \infty$，随机积分 $\int_0^t \partial_x f(X_s)b(X_s;\theta)dB_s$是一个 $\mathbb{P}_\theta$-鞅，因此 $\mathbb{E}_\theta\left(D_i \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) = 0$，这验证了 (3.2)。

对于 $k \geq 2$ 阶条件矩，我们写作

$$A_i = \Delta_n \mathcal{L}_\theta f(X_{t_{i-1}^n}) + \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \left[\mathcal{L}_\theta f(X_s) - \mathcal{L}_\theta f(X_{t_{i-1}^n})\right] \mathrm{d}s$$

并注意到，根据詹森不等式，

$$\begin{aligned}
\left|\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \left[\mathcal{L}_\theta f(X_s) - \mathcal{L}_\theta f(X_{t_{i-1}^n})\right] \mathrm{d}s\right|^k &\leq \Delta_n^k \cdot \Delta_n^{-1} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} |\mathcal{L}_\theta f(X_s) - \mathcal{L}_\theta f(X_{t_{i-1}^n})|^k \mathrm{d}s \\
&\leq \Delta_n^k \sup_{u\in[0,\Delta_n]} |\mathcal{L}_\theta f(X_{t_{i-1}^n+u}) - \mathcal{L}_\theta f(X_{t_{i-1}^n})|^k.
\end{aligned}$$

因此，由 (6.1) 可得，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta\left(|A_i|^k \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) \\
\leq_{C_k}\ & \Delta_n^k(1 + |X_{t_{i-1}^n}|)^{C_k} + \Delta_n^k \cdot \mathbb{E}_\theta\left(\sup_{u\in[0,\Delta_n]} |\mathcal{L}_\theta f(X_{t_{i-1}^n+u}) - \mathcal{L}_\theta f(X_{t_{i-1}^n})|^k \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) \\
\leq_{C_k}\ & \Delta_n^k(1 + |X_{t_{i-1}^n}|)^{C_k}.
\end{aligned}$$

类似地，利用 $h(x;\theta) = \partial_x f(x)b(x;\theta)$，Burkholder-Davis-Gundy 不等式（例如参见 Jacod与Protter (2012)）、詹森不等式以及 (6.1) 可推出，对所有 $k \geq 2$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta\left(|D_i|^k \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) \\
=\ & \mathbb{E}_\theta\left(\left|\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \left[h(X_s;\theta) - h(X_{t_{i-1}^n};\theta)\right] dB_s\right|^k \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) \\
\leq_{C_k}\ & \mathbb{E}_\theta\left(\left[\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \left[h(X_s;\theta) - h(X_{t_{i-1}^n};\theta)\right]^2 \mathrm{d}s\right]^{k/2} \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) \\
\leq\ & \Delta_n^{k/2} \cdot \mathbb{E}_\theta\left(\Delta_n^{-1} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} |h(X_s;\theta) - h(X_{t_{i-1}^n};\theta)|^k \mathrm{d}s \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) \\
\leq\ & \Delta_n^{k/2} \cdot \mathbb{E}_\theta\left(\sup_{u\in[0,\Delta_n]} |h(X_{t_{i-1}^n+u};\theta) - h(X_{t_{i-1}^n};\theta)|^k \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) \\
\leq_{C_k}\ & \Delta_n^k(1 + |X_{t_{i-1}^n}|)^{C_k}
\end{aligned}$$

并且由于$|\varepsilon_{2,\ i}|^k \leq_{C_k} |A_i|^k + |D_i|^k$，我们得出$\mathbb{E}_\theta\left(|\varepsilon_{2,\ i}|^k \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) = \Delta_n^k R(\Delta_n,\ X_{t_{i-1}^n};\ \theta)$。

□

引理 *3.2* 的证明。由于 h具有多项式增长，

$$|h(Z_i^n)| \leq_{C_k} 1 + |X_{t_{i-1}^n}|^{C_k} + |Y_i - X_{t_{i-1}^n}|^{C_k},$$

并且根据詹森不等式，

$$|Y_i - X_{t_{i-1}^n}|^k \leq \Delta_n^{-1} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} |X_s - X_{t_{i-1}^n}|^k \,\mathrm{d}s \leq \sup_{u\in[0,\Delta_n]} |X_{t_{i-1}^n+u} - X_{t_{i-1}^n}|^k.$$

因此引理成立，因为 (6.1) 意味着对于任意 $k \geq 1$

$$\mathbb{E}_\theta\left(|Y_i - X_{t_{i-1}^n}|^k \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) \leq_{C_k} \Delta_n^{k/2}(1 + |X_{t_{i-1}^n}|)^{C_k}.$$

□

命题 *3.3* 的证明。我们首先证明恒等映射 $f(x) = x$ 情形下的结果。在这种情况下，$f' \equiv 1$和 $f'' \equiv 0$，因此欧拉-伊藤展开式 (3.7) 的形式为

$$Y_i = X_{t_{i-1}^n} + \Delta_n^{1/2} b(X_{t_{i-1}^n};\theta)\xi_{1,i}^* + \xi_{2,i}^*, \tag{6.5}$$

其中用星号 $(*)$ 将此处的余项与一般情形下的余项区分开来。此处，方程 (3.8) 的形式为

$$\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{2,i}^* \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) = \Delta_n \frac{1}{2} a(X_{t_{i-1}^n};\theta) + \Delta_n^{3/2} R(\Delta_n, X_{t_{i-1}^n};\theta). \tag{6.6}$$

将引理 6.1 应用于随机积分后，我们得到

$$\begin{aligned} Y_i - X_{t_{i-1}^n} &= \Delta_n^{-1} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \left(\int_{(i-1)\Delta_n}^{s} a(X_u;\theta)\,\mathrm{d}u + \int_{(i-1)\Delta_n}^{s} b(X_u;\theta) dB_u \right) \mathrm{d}s \\ &= \Delta_n^{-1} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \int_{(i-1)\Delta_n}^{s} a(X_u;\theta)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s + \Delta_n^{-1} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} (i\Delta_n - s) b(X_s;\theta) dB_s, \end{aligned}$$

进而，通过定义可得到形式如 (6.5) 的展开式

$$\begin{aligned} \xi_{1,i}^* &= \Delta_n^{-3/2} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} (i\Delta_n - s) dB_s, \\ A_i &= \Delta_n^{-1} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \int_{(i-1)\Delta_n}^{s} a(X_u;\theta)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s, \\ D_i &= \Delta_n^{-1} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \left[b(X_s;\theta) - b(X_{t_{i-1}^n};\theta) \right] (i\Delta_n - s) dB_s, \\ \xi_{2,i}^* &= A_i + D_i. \end{aligned}$$

为验证$\xi_{1,\ i}^*$和$\xi_{2,\ i}^*$的性质，我们注意到二者均关于 $\mathcal{F}_i^n$可测，$\xi_{1,\ i}^*$服从高斯分布，且与 $\mathcal{F}_{i-1}^n$ 和 $\mathbb{E}_\theta(\xi_{1,\ i}^*) = 0$独立。此外，根据 Itô 等距公式

$$\mathbb{E}_\theta((\xi_{1,i}^*)^2) = \Delta_n^{-3} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} (i\Delta_n - s)^2 \,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}.$$

为证明$\xi^*_{2,\,i}$的条件矩展开式，我们首先利用$\int_0^t b(X_s;\theta)(i\Delta_n - s)dB_s$的鞅性质，得出

$$\mathbb{E}_\theta\left(D_i \,\middle|\, \mathcal{F}^n_{i-1}\right) = \Delta_n^{-1}\cdot\mathbb{E}_\theta\left(\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\left[b(X_s;\theta) - b(X_{t^n_{i-1}};\theta)\right](i\Delta_n - s)dB_s \,\middle|\, \mathcal{F}^n_{i-1}\right) = 0.$$

因此，$\mathbb{E}_\theta(\xi^*_{2,\,i}\,|\,\mathcal{F}^n_{i-1}) = \mathbb{E}_\theta(A_i\,|\,\mathcal{F}^n_{i-1})$。应用富比尼定理和 (6.2) 可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta\left(A_i \,\middle|\, \mathcal{F}^n_{i-1}\right) &= \Delta_n^{-1}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\int_0^{s-t^n_{i-1}}\mathbb{E}_\theta\left(a(X_{t^n_{i-1}+v};\theta)\,\middle|\,\mathcal{F}^n_{i-1}\right)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}s\\
&= \Delta_n^{-1}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\int_0^{s-t^n_{i-1}}\left[a(X_{t^n_{i-1}};\theta) + vR(v,X_{t^n_{i-1}};\theta)\right]\mathrm{d}v\,\mathrm{d}s\\
&= \Delta_n\frac{1}{2}a(X_{t^n_{i-1}};\theta) + \Delta_n^{-1}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\int_0^{s-t^n_{i-1}} vR(v,X_{t^n_{i-1}};\theta)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

而 (6.6) 成立，是因为最后一项等于 $\Delta_n^2 R(\Delta_n,\ x;\theta)$。事实上，我们看到，对于这一特定的 f，稍强的结果 $\mathbb{E}_\theta(\xi^*_{2,\,i}\,|\,\mathcal{F}^n_{i-1}) = \Delta_n\frac{1}{2}a(X_{t^n_{i-1}};\,\theta) + \Delta_n^2 R(\Delta_n,\ X_{t^n_{i-1}};\,\theta)$ 成立。

为了证明 $\mathbb{E}_\theta((\xi^*_{2,\,i})^2\,|\,\mathcal{F}^n_{i-1}) = \Delta_n^2 R(\Delta_n,\ X_{t^n_{i-1}};\,\theta)$，我们利用詹森不等式可得

$$|A_i|^2 \le \Delta_n^{-1}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\left|\int_{(i-1)\Delta_n}^{s} a(X_u;\theta)\,\mathrm{d}u\right|^2\mathrm{d}s \le \sup_{s\in[0,\Delta_n]}\left|\int_{t^n_{i-1}}^{t^n_{i-1}+s} a(X_u;\theta)\,\mathrm{d}u\right|^2.$$

此外，对于任意 $t\ge 0$ （同样由詹森不等式可得），

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta\left(\sup_{s\in[0,\Delta_n]}\left|\int_t^{t+s} a(X_u;\theta)\,\mathrm{d}u\right|^2\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right) &\le \mathbb{E}_\theta\left(\sup_{s\in[0,\Delta_n]} s\int_t^{t+s}|a(X_u;\theta)|^2\,\mathrm{d}u\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right)\\
&= \Delta_n\mathbb{E}_\theta\left(\int_t^{t+\Delta_n}|a(X_u;\theta)|^2\,\mathrm{d}u\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right).
\end{aligned}$$

现在，由于 $a(\,\cdot\,;\theta)$（条件 2.1）具有线性增长，$|a(X_u;\,\theta)|^2 \le_C 1 + |X_t|^2 + |X_u - X_t|^2$，因此

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta\left(\sup_{s\in[0,\Delta_n]}\left|\int_t^{t+s} a(X_u;\theta)\,\mathrm{d}u\right|^2\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right)\\
&\le_C\ \Delta_n^2(1+|X_t|^2) + \Delta_n\int_t^{t+\Delta_n}\mathbb{E}_\theta\left(|X_u - X_t|^2\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right)\mathrm{d}u\\
&\le_C\ \Delta_n^2(1+|X_t|)^C + \Delta_n^2\cdot\mathbb{E}_\theta\left(\sup_{v\in[0,\Delta_n]}|X_{t+v} - X_t|^2\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right) \le_C \Delta_n^2(1+|X_t|)^C,
\end{aligned}$$

其中，(6.1) 推出最后一个不等式。综上，$\mathbb{E}_\theta\left(|A_i|^2\,\middle|\,\mathcal{F}^n_{i-1}\right) \le_C \Delta_n^2(1+|X_{t^n_{i-1}}|)^C$。为了得到 $|D_i|^2$ 的类似界，我们应用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式,

利用詹森不等式和 (6.1)，得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta\left(|D_i|^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}^n\right) &= \mathbb{E}_\theta\left(\Delta_n^{-2}\left|\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\left[b(X_s;\theta)-b(X_{t_{i-1}^n};\theta)\right](i\Delta_n-s)dB_s\right|^2 \middle| \mathcal{F}_{i-1}^n\right)\\ &\le_C \mathbb{E}_\theta\left(\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\left[b(X_s;\theta)-b(X_{t_{i-1}^n};\theta)\right]^2 \mathrm{d}s \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right)\\ &\le \Delta_n\mathbb{E}_\theta\left(\sup_{s\in[0,\Delta_n]}\left|b(X_{t_{i-1}^n+s};\theta)-b(X_{t_{i-1}^n};\theta)\right|^2 \middle| \mathcal{F}_{i-1}^n\right)\\ &\le_C \Delta_n^2(1+|X_{t_{i-1}^n}|)^C.\end{aligned}$$

因此，

$$\mathbb{E}_\theta\left((\xi_{2,i}^*)^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}^n\right) = \Delta_n^2 R(\Delta_n, X_{t_{i-1}^n};\theta), \tag{6.7}$$

向任意 $f \in \mathcal{C}_p^4(S)$ 的扩展基于一般形式（3.4）的泰勒展开。首先，泰勒展开结合欧拉–伊藤展开（6.5）可推出

$$\begin{aligned}f(Y_i) &= \sum_{j=0}^{2}\frac{1}{j!}\partial_x^j f(X_{t_{i-1}^n})(Y_i-X_{t_{i-1}^n})^j + \frac{1}{6}\partial_x^3 f(Z_i^n)(Y_i-X_{t_{i-1}^n})^3\\ &= f(X_{t_{i-1}^n}) + \Delta_n^{1/2}\partial_x f(X_{t_{i-1}^n})b(X_{t_{i-1}^n};\theta)\xi_{1,i} + \xi_{2,i}\end{aligned}$$

其中

$$\xi_{1,i} = \xi_{1,i}^* = \Delta_n^{-3/2}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}(i\Delta_n - s)dB_s, \tag{6.8}$$

且 $\xi_{2,i} = \sum_{k=1}^5 \xi_{2,i}^{(k)}$，其中 $\xi_{2,i}^{(1)} = \partial_x f(X_{t_{i-1}^n})\xi_{2,i}^*$、$\xi_{2,i}^{(2)} = \frac{1}{2}\Delta_n\partial_x^2 f(X_{t_{i-1}^n})b^2(X_{t_{i-1}^n};\theta)(\xi_{1,i}^*)^2$、$\xi_{2,i}^{(3)} = \frac{1}{2}\partial_x^2 f(X_{t_{i-1}^n})(\xi_{2,i}^*)^2$、$\xi_{2,i}^{(4)} = \Delta_n^{1/2}\partial_x^2 f(X_{t_{i-1}^n})b(X_{t_{i-1}^n};\theta)\xi_{1,i}^*\xi_{2,i}^*$ 以及 $\xi_{2,i}^{(5)} = \frac{1}{6}\partial_x^3 f(Z_i^n)(Y_i - X_{t_{i-1}^n})^3$。

每个 $\xi_{2,i}^{(k)}, k = 1,\ldots,5$ 都关于 $\mathcal{F}_i^n$ 可测，因此只需证明 $\xi_{2,i}$ 满足矩展开式 (3.8) 和 (3.9)。应用先前推导出的条件矩展开 $\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{1,i}^* \mid \mathcal{F}_{i-1}^n\right) = 0$，$\mathbb{E}_\theta\left((\xi_{1,i}^*)^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}^n\right) = \frac{1}{3}$、(6.5) 和 (6.7)，即可立即得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{2,i}^{(1)} \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) &= \Delta_n\frac{1}{2}a(X_{t_{i-1}^n};\theta)\partial_x f(X_{t_{i-1}^n}) + \Delta_n^{3/2}R(\Delta_n, X_{t_{i-1}^n};\theta),\\ \mathbb{E}_\theta\left(\xi_{2,i}^{(2)} \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) &= \Delta_n\frac{1}{6}\partial_x^2 f(X_{t_{i-1}^n})b^2(X_{t_{i-1}^n};\theta),\\ \mathbb{E}_\theta\left(\xi_{2,i}^{(3)} \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) &= \Delta_n^2 R(\Delta_n, X_{t_{i-1}^n};\theta).\end{aligned}$$

此外，根据 Hölder 不等式，$|\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{1,i}^*\xi_{2,i}^* \mid \mathcal{F}_{i-1}^n\right)| \le \mathbb{E}_\theta\left((\xi_{1,i}^*)^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}^n\right)^{1/2}\mathbb{E}_\theta\left((\xi_{2,i}^*)^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}^n\right)^{1/2} = \Delta_n R(\Delta_n, X_{t_{i-1}^n};\theta)$，这意味着 $\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{2,i}^{(4)} \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) = \Delta_n^{3/2}R(\Delta_n, X_{t_{i-1}^n};\theta)$，最后，根据引理 3.2，$\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{2,i}^{(5)} \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) = \Delta_n^{3/2}R(\Delta_n, X_{t_{i-1}^n};\theta)$。综合我们的观测值，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{2,i} \mid \mathcal{F}_{i-1}^n\right) = \sum_{k=1}^5 \mathbb{E}_\theta\left(\xi_{2,i}^{(k)} \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right)\\ &= \Delta_n\left(\frac{1}{2}a(X_{t_{i-1}^n};\theta)\partial_x f(X_{t_{i-1}^n}) + \frac{1}{6}b^2(X_{t_{i-1}^n};\theta)\partial_x^2 f(X_{t_{i-1}^n})\right) + \Delta_n^{3/2}R(\Delta_n, X_{t_{i-1}^n};\theta)\\ &= \Delta_n\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}_\theta f(X_{t_{i-1}^n}) - \frac{1}{12}b^2(X_{t_{i-1}^n};\theta)\partial_x^2 f(X_{t_{i-1}^n})\right) + \Delta_n^{3/2}R(\Delta_n, X_{t_{i-1}^n};\theta).\end{aligned}$$

为论证 $\mathbb{E}_\theta(\xi_{2,i}^2 \,|\, \mathcal{F}_{i-1}^n) = \Delta_n^2 R(\Delta_n, X_{t_{i-1}^n}; \theta)$，我们将低阶泰勒展开与 (6.5) 结合，得到

$$\begin{aligned} f(Y_i) &= f(X_{t_{i-1}^n}) + \partial_x f(X_{t_{i-1}^n})(Y_i - X_{t_{i-1}^n}) + \frac{1}{2}\partial_x^2 f(Z_i^n)(Y_i - X_{t_{i-1}^n})^2 \\ &= f(X_{t_{i-1}^n}) + \Delta_n^{1/2}\partial_x f(X_{t_{i-1}^n}) b(X_{t_{i-1}^n}; \theta)\xi_{1,i} + \xi_{2,i}, \end{aligned}$$

由此得到余项 $\xi_{2,\,i}$ 的另一种表达式:

$$\xi_{2,i} = \partial_x f(X_{t_{i-1}^n})\xi_{2,i}^* + \frac{1}{2}\partial_x^2 f(Z_i^n)(Y_i - X_{t_{i-1}^n})^2.$$

该表达式表明

$$\xi_{2,i}^2 \leq_C [\partial_x f(X_{t_{i-1}^n})]^2 (\xi_{2,i}^*)^2 + [\partial_x^2 f(Z_i^n)]^2 (Y_i - X_{t_{i-1}^n})^4$$

并且，应用 (6.7) 和引理 3.2，可得 $\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{2,\,i}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) = \Delta_n^2 R(\Delta_n, X_{t_{i-1}^n}; \theta)$.

最后，根据定义 (6.3) 和 (6.8) 以及 Itô 等距性,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta(\varepsilon_{1,i}\xi_{1,i}) &= \mathbb{E}_\theta\left(\Delta_n^{-1/2}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} dB_s \cdot \Delta_n^{-3/2}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} (i\Delta_n - s) dB_s\right) \\ &= \Delta_n^{-2}\cdot\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} (i\Delta_n - s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

引理 *4.1* 的证明。若证明以下结论，则该引理可由 Jørgensen 和 Sørensen（2021）的引理 3.1 推出:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left[f(Y_i) - f(X_{t_{i-1}^n})\right] = o_{\mathbb{P}_0}(1). \tag{6.9}$$

应用条件期望的界 (3.6)，得到

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_0\left(|f(Y_i) - f(X_{t_{i-1}^n})| \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) = \Delta_n^{1/2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n R(\Delta_n, X_{t_{i-1}^n}; \theta_0) = o_{\mathbb{P}_0}(1),$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_0\left(|f(Y_i) - f(X_{t_{i-1}^n})|^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) = \Delta_n\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n R(\Delta_n, X_{t_{i-1}^n}; \theta_0) = o_{\mathbb{P}_0}(1),$$

由此，根据 Genon-Catalot 和 Jacod（1993）中的引理 9，可得（6.9）。 □

引理 *4.2* 的证明。若以下对（6.9）的加强成立，则该结果可由 Jørgensen 和 Sørensen（2021）中的命题 3.4 得出

$$\sqrt{n\Delta_n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left[f(Y_i) - f(X_{t_{i-1}^n})\right] = o_{\mathbb{P}_0}(1), \tag{6.10}$$

为证明这一点，注意到根据命题 3.3,

$$\begin{aligned} &\sqrt{n\Delta_n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_0\left(f(Y_i) - f(X_{t_{i-1}^n}) \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) \\ &= \sqrt{n\Delta_n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_0\left(\xi_{2,i} \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}^n\right) = \sqrt{n\Delta_n^3}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n R(\Delta_n, X_{t_{i-1}^n}; \theta_0) = o_{\mathbb{P}_0}(1), \end{aligned}$$

其中我们利用了 $n\Delta_n^3 \to 0$。此外，高阶界 (3.6) 确保

$$\frac{\Delta_n}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_0\left(|f(Y_i)-f(X_{t_{i-1}^n})|^2\,\middle|\,\mathcal{F}_{i-1}^n\right)=\frac{\Delta_n^2}{n}\sum_{i=1}^{n}R(\Delta_n,X_{t_{i-1}^n};\theta_0)=o_{\mathbb{P}_0}(1),$$

并且（6.10）由 Genon-Catalot 和 Jacod（1993）中的引理 9 得出。 □

定理 *5.2* 的证明。 应用 $\mathbb{E}_\theta f(Y_1)$ 的一阶展开（5.3）以及引理 4.1，可得

$$H_n(\theta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[f(Y_i)-\mathbb{E}_\theta f(Y_1)]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[f(Y_i)-\mu_\theta(f)]+\Delta_n R(\Delta_n;\theta)\xrightarrow{\mathbb{P}_0}H(\theta),$$

其中 $H(\theta)=(\mu_0-\mu_\theta)(f)$。在条件 5.1 下，

$$\partial_\theta H_n(\theta)=-\partial_\theta\mathbb{E}_\theta f(Y_1)=-\partial_\theta\mu_\theta(f)+\Delta_n\partial_\theta R(\Delta_n;\theta)\to-\partial_\theta\mu_\theta(f),$$

并且对于 Θ 的任意紧子集 $\mathcal{M}$

$$\sup_{\theta\in\mathcal{M}}|\partial_\theta H_n(\theta)+\partial_\theta\mu_\theta(f)|=\Delta_n\sup_{\theta\in\mathcal{M}}|\partial_\theta R(\Delta_n;\theta)|\le C(\mathcal{M})\Delta_n\to 0.$$

由于 $H(\theta_0)=0$，我们现在已经验证了 Jacod 和ˆ Sørensen（2018）中定理 2.5 的条件，由此可知，相合序列的 G_n-估计量（θ_n）ˆ 存在。根据 Jacod 和 Sørensen（2018）中的定理 2.7，估计量 θ_n 在任意包含 θ_0 且 $\mathbb{P}_0$-概率趋于 1 的紧子集 $\mathcal{K}\subseteq\Theta$ 上是唯一的，其中 $n\to\infty$；这是因为可识别性假设意味着，对于 $\theta\neq\theta_0$，有 $H(\theta)\neq 0$。

为证明渐近正态性，注意到 (5.3)、额外的速率假设 $n\Delta_n^3\to$0 和引理 4.2 可确保

$$\sqrt{n\Delta_n}\cdot H_n(\theta_0)=\sqrt{n\Delta_n}\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f^*(Y_i)\right)+\sqrt{n\Delta_n^3}R(\Delta_n;\theta_0)\xrightarrow{\mathscr{D}_0}\mathcal{N}\left(0,V_0(f)\right).$$

现在，(5.5) 可由标准的泰勒展开论证得到，参见 Jacod 和 Sørensen（2018）中的定理 2.11。 □

引理 *5.3* 的证明。我们将证明分为三个步骤：**步骤 1：** 将 $[\mathbb{E}_\theta f(Y_1)]^2$,$\mathbb{E}_\theta f^2(Y_1)$ 和 $\mathbb{E}_\theta[f(Y_1)f(Y_2)]$ 按 Δ_n 的幂展开，**步骤 2：** 从展开式中消去 $\mathcal{H}_\theta$，**步骤 3：** 计算 $\breve{a}_n(\theta)_0$ 和 $\breve{a}_n(\theta)_1$ 的展开式。

步骤 1 利用命题 3.3，我们得到

$$\begin{aligned}[\mathbb{E}_\theta f(Y_1)]^2 &= \mu_\theta(f)^2+\Delta_n 2\mu_\theta(f)\mu_\theta(\mathcal{H}_\theta f)+\Delta_n^{3/2}R(\Delta_n;\theta),\\ \mathbb{E}_\theta f^2(Y_1) &= \mu_\theta(f^2)+\Delta_n\mu_\theta(\mathcal{H}_\theta f^2)+\Delta_n^{3/2}R(\Delta_n;\theta).\end{aligned}$$

为展开 并 $\mathbb{E}_\theta[f(Y_1)f(Y_2)]$，注意到根据命题 3.3，这个混合矩等于

$$\mathbb{E}_\theta\left[\left(f(X_0)+\Delta_n^{1/2}\partial_x f(X_0)b(X_0;\theta)\xi_{1,1}+\xi_{2,1}\right)\left(f(X_{\Delta_n})+\Delta_n^{1/2}\partial_x f(X_{\Delta_n})b(X_{\Delta_n};\theta)\xi_{1,2}+\xi_{2,2}\right)\right],$$

然后，我们分别展开该期望中的 9 项。

术语 *1*：

$$\mathbb{E}_\theta\left[f(X_0)f(X_{\Delta_n})\right]=\mu_\theta(f^2)+\Delta_n\mu_\theta(f\mathcal{L}_\theta f)+\Delta_n^2R(\Delta_n;\theta)$$

因为根据命题 3.1

$$f(X_0)f(X_{\Delta_n}) = f(X_0)^2 + \Delta_n^{1/2} f(X_0)\partial_x f(X_0) b(X_0;\theta)\varepsilon_{1,1} + f(X_0)\varepsilon_{2,1}.$$

项 *2*:

$$\Delta_n^{1/2}\mathbb{E}_\theta\left[f(X_0)\partial_x f(X_{\Delta_n}) b(X_{\Delta_n};\theta)\xi_{1,2}\right] = 0,$$

因为 $\mathbb{E}_\theta(\xi_{1,2} \mid \mathcal{F}_{\Delta_n}) = 0$。

项 *3*：通过应用矩展开式 (3.8) 和 (6.2)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta\left[f(X_0)\xi_{2,2}\right] &= \mathbb{E}_\theta\left[f(X_0)\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{2,2} \mid \mathcal{F}_{\Delta_n}\right)\right] = \Delta_n\mathbb{E}_\theta\left[f(X_0)\mathcal{H}_\theta f(X_{\Delta_n})\right] + \Delta_n^{3/2}R(\Delta_n;\theta)\\ &= \Delta_n\mathbb{E}_\theta\left[f(X_0)\mathbb{E}_\theta\left(\mathcal{H}_\theta f(X_{\Delta_n}) \mid \mathcal{F}_0\right)\right] + \Delta_n^{3/2}R(\Delta_n;\theta) = \Delta_n\mu_\theta(f\mathcal{H}_\theta f) + \Delta_n^{3/2}R(\Delta_n;\theta).\end{aligned}$$

项 *4*：由 Euler-Itˆo 展开式 (3.1),

$$\begin{aligned}&\Delta_n^{1/2}\mathbb{E}_\theta\left[\partial_x f(X_0) b(X_0;\theta)\xi_{1,1} f(X_{\Delta_n})\right]\\ &= \Delta_n\mathbb{E}_\theta\left[\left[\partial_x f(X_0) b(X_0;\theta)\right]^2\xi_{1,1}\varepsilon_{1,1}\right] + \Delta_n^{1/2}\mathbb{E}_\theta\left[\partial_x f(X_0) b(X_0;\theta)\xi_{1,1}\varepsilon_{2,1}\right]\\ &= \Delta_n\frac{1}{2}\mu_\theta\left(\left[b(\,\cdot\,;\theta)\partial_x f\right]^2\right) + \Delta_n^{3/2}R(\Delta_n;\theta).\end{aligned}$$

最后一个等式成立是因为，根据 (3.11)，$\mathbb{E}_\theta(\xi_{1,1}\varepsilon_{1,1} \mid \mathcal{F}_0) = 1/2$；又因为根据 H¨older 不等式和 (3.3)，并且由于 $\xi_{1,1} \sim \mathcal{N}(0, 1/3)$ 且与 $\mathcal{F}_0^n$ 独立，我们得到

$$\left|\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{1,1}\varepsilon_{2,1} \mid \mathcal{F}_0\right)\right| \le \mathbb{E}_\theta\left(\xi_{1,1}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right)^{1/2}\mathbb{E}_\theta\left(\varepsilon_{2,1}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right)^{1/2} = \Delta_n R(\Delta_n, X_0;\theta).$$

项 *5*：这一项等于

$$\Delta_n^2\mathbb{E}_\theta\left[\partial_x f(X_0) b(X_0;\theta)\xi_{1,1}\partial_x f(X_{\Delta_n}) b(X_{\Delta_n};\theta)\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{1,2} \mid \mathcal{F}_{\Delta_n}\right)\right] = 0,$$

因为 $\mathbb{E}_\theta(\xi_{1,2} \mid \mathcal{F}_{\Delta_n}) = 0$ 根据命题 3.3。

项 *6*：该项等于

$$\Delta_n^{1/2}\mathbb{E}_\theta\left[\partial_x f(X_0) b(X_0;\theta)\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{1,1}\xi_{2,2} \mid \mathcal{F}_0\right)\right] = \Delta_n^{3/2}R(\Delta_n;\theta),$$

因为根据 H¨older 不等式，$\left|\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{1,1}\xi_{2,2} \mid \mathcal{F}_0\right)\right| \le \mathbb{E}_\theta\left(\xi_{1,1}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right)^{1/2}\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{2,2}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right)^{1/2}$，并且根据命题 3.3，$\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{1,1}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right) = 1/3$ 以及

$$\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{2,2}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right) = \mathbb{E}_\theta\left[\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{2,2}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{\Delta_n}\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] = \mathbb{E}_\theta\left[\Delta_n^2 R(\Delta_n, X_{\Delta_n};\theta) \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] = \Delta_n^2 R(\Delta_n, X_0;\theta).$$

项 *7*：根据 Euler-Itˆo 展开式 (3.1),

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\theta\left[f(X_{\Delta_n})\xi_{2,1}\right]\\ &= \mathbb{E}_\theta\left[f(X_0)\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{2,1} \mid \mathcal{F}_0\right)\right] + \Delta_n^{1/2}\mathbb{E}_\theta\left[\partial_x f(X_0) b(X_0;\theta)\mathbb{E}_\theta\left(\varepsilon_{1,1}\xi_{2,1} \mid \mathcal{F}_0\right)\right] + \mathbb{E}_\theta(\varepsilon_{2,1}\xi_{2,1})\\ &= \Delta_n\mu_\theta(f\mathcal{H}_\theta f) + \Delta_n^{3/2}R(\Delta_n;\theta)\end{aligned}$$

其中，最后一个等式成立是因为，根据命题 3.3，$\mathbb{E}_\theta(\xi_{2,1} \mid \mathcal{F}_0) = \Delta_n\mathcal{H}_\theta f(X_0) + \Delta_n^{3/2}R(\Delta_n, X_0;\theta)$，并且根据 H¨older 不等式以及命题 3.1 和命题 3.3，$\mathbb{E}_\theta(\varepsilon_{1,1}\xi_{2,1} \mid \mathcal{F}_0) = \Delta_n R(\Delta_n, X_0;\theta)$ 以及 $\mathbb{E}_\theta(\varepsilon_{2,1}\xi_{2,1}) = \Delta_n^2 R(\Delta_n;\theta)$。

项 *8*：根据命题 3.3，此项等于

$$\mathbb{E}_\theta\left[\xi_{2,1}\partial_x f(X_{\Delta_n}) b(X_{\Delta_n};\theta)\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{1,2} \mid \mathcal{F}_{\Delta_n}\right)\right] = 0.$$

项 *9*：结合 H¨older 不等式和 (3.9)，可得

$$|\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{2,1}\xi_{2,2}\right)| \leq \mathbb{E}_\theta\left[\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{2,1}^2 \mid \mathcal{F}_0\right)\right]^{1/2}\mathbb{E}_\theta\left[\mathbb{E}_\theta\left(\xi_{2,2}^2 \mid \mathcal{F}_{\Delta_n}\right)\right]^{1/2} = \Delta_n^2 R(\Delta_n;\theta).$$

最后，将这九项的展开式相加，得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\theta f(Y_1)f(Y_2) = \\ &\quad \mu_\theta(f^2) + \Delta_n\left(\mu_\theta(f\mathcal{L}_\theta f) + 2\mu_\theta(f\mathcal{H}_\theta f) + \frac{1}{2}\mu_\theta\left([b(\,\cdot\,;\theta)\partial_x f]^2\right)\right) + \Delta_n^{3/2}R(\Delta_n;\theta).\end{aligned}$$

步骤 2 为了从 $[\mathbb{E}_\theta f(Y_1)]^2$、 $\mathbb{E}_\theta f^2(Y_1)$和 $\mathbb{E}_\theta\left[f(Y_1)f(Y_2)\right]$,的展开式中消去 $\mathcal{H}_\theta$，我们利用 $\mathcal{H}_\theta$ 的定义、式（3.10）以及对所有 $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}_\theta}$均成立的$\mu_\theta(\mathcal{L}_\theta f) = 0$，重写 $\mu_\theta(\mathcal{H}_\theta f)$、 $\mu_\theta(f\mathcal{H}_\theta f)$ 和 $\mu_\theta(\mathcal{H}_\theta f^2)$；例如参见 Hansen 和 Scheinkman (1995)。由此立即可得

$$\begin{aligned}\mu_\theta(\mathcal{H}_\theta f) &= -\frac{1}{12}\mu_\theta\left(b^2(\,\cdot\,;\theta)\partial_x^2 f\right)\\ \mu_\theta(f\mathcal{H}_\theta f) &= \frac{1}{2}\mu_\theta(f\mathcal{L}_\theta f) - \frac{1}{12}\mu_\theta\left(fb^2(\,\cdot\,;\theta)\partial_x^2 f\right).\end{aligned}$$

此外，由于 $\partial_x f^2 = 2f\partial_x f$和 $\partial_x^2 f^2 = 2\left[f\partial_x^2 f + (\partial_x f)^2\right]$,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\theta f^2(x) &= \frac{1}{2}a(x;\theta)\partial_x f^2(x) + \frac{1}{6}b^2(x;\theta)\partial_x^2 f^2(x)\\ &= f(x)a(x;\theta)\partial_x f(x) + \frac{1}{3}f(x)b^2(x;\theta)\partial_x^2 f(x) + \frac{1}{3}[b(x;\theta)\partial_x f(x)]^2\\ &= f(x)\mathcal{L}_\theta f(x) - \frac{1}{6}f(x)b^2(x;\theta)\partial_x^2 f(x) + \frac{1}{3}[b(x;\theta)\partial_x f(x)]^2,\end{aligned}$$

这表明

$$\mu_\theta(\mathcal{H}_\theta f^2) = \mu_\theta(f\mathcal{L}_\theta f) - \frac{1}{6}\mu_\theta\left(fb^2(\,\cdot\,;\theta)\partial_x^2 f\right) + \frac{1}{3}\mu_\theta\left([b(\,\cdot\,;\theta)\partial_x f]^2\right).$$

Thus

$$\begin{aligned}[\mathbb{E}_\theta f(Y_1)]^2 &= \mu_\theta(f)^2 + \Delta_n M_0(\theta) + \Delta_n^{3/2}R(\Delta_n;\theta) &(6.11)\\ \mathbb{E}_\theta f^2(Y_1) &= \mu_\theta(f^2) + \Delta_n M_1(\theta) + \Delta_n^{3/2}R(\Delta_n;\theta) &(6.12)\\ \mathbb{E}_\theta f(Y_1)f(Y_2) &= \mu_\theta(f^2) + \Delta_n M_2(\theta) + \Delta_n^{3/2}R(\Delta_n;\theta), &(6.13)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}M_0(\theta) &= -\frac{1}{6}\mu_\theta(f)\mu_\theta\left(b^2(\,\cdot\,;\theta)\partial_x^2 f\right)\\ M_1(\theta) &= \mu_\theta(f\mathcal{L}_\theta f) - \frac{1}{6}\mu_\theta\left(fb^2(\,\cdot\,;\theta)\partial_x^2 f\right) + \frac{1}{3}\mu_\theta\left([b(\,\cdot\,;\theta)\partial_x f]^2\right)\\ M_2(\theta) &= 2\mu_\theta(f\mathcal{L}_\theta f) - \frac{1}{6}\mu_\theta\left(fb^2(\,\cdot\,;\theta)\partial_x^2 f\right) + \frac{1}{2}\mu_\theta\left([b(\,\cdot\,;\theta)\partial_x f]^2\right).\end{aligned}$$

步骤 3 由矩展开式 (6.11)-(6.13) 可知

$$\begin{aligned}\breve{a}_n(\theta)_1 &= \frac{\mathbb{E}_\theta f(Y_1)f(Y_2) - [\mathbb{E}_\theta f(Y_1)]^2}{\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta f(Y_1)}\\ &= \frac{1 + \Delta_n\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta f(X_0)^{-1}(M_2(\theta) - M_0(\theta)) + \Delta_n^{3/2}R(\Delta_n;\theta)}{1 + \Delta_n\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta f(X_0)^{-1}(M_1(\theta) - M_0(\theta)) + \Delta_n^{3/2}R(\Delta_n;\theta)},\end{aligned}$$

并且由于 $1/(1+x) = 1 - x + O(x^2)$，我们得到展开式

$$\begin{aligned} \breve{a}_n(\theta)_1 &= 1 + \Delta_n \mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta f(X_0)^{-1} \left[M_2(\theta) - M_1(\theta)\right] + \Delta_n^{3/2} R(\Delta_n;\theta) \\ &= 1 + \Delta_n K_f(\theta) + \Delta_n^{3/2} R(\Delta_n;\theta), \end{aligned} \tag{6.14}$$

其中 $K_f(\theta)$ 由 (5.10) 给出。

最后，由于根据 (3.7)，$\mathbb{E}_\theta f(Y_1) = \mu_\theta(f) + \Delta_n R(\Delta_n;\theta)$，(6.14) 意味着

$$\breve{a}_n(\theta)_0 = \mathbb{E}_\theta f(Y_1)\left(1 - \breve{a}_n(\theta)_1\right) = -\Delta_n K_f(\theta)\mu_\theta(f) + \Delta_n^{3/2} R(\Delta_n;\theta).$$

□

引理 *5.5* 的证明。定义

$$\begin{aligned} g_1(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1};\theta) &= f(Y_i) - \breve{a}_n(\theta)_0 - \breve{a}_n(\theta)_1 f(Y_{i-1}), \\ g_2(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1};\theta) &= f(Y_{i-1})\left[f(Y_i) - \breve{a}_n(\theta)_0 - \breve{a}_n(\theta)_1 f(Y_{i-1})\right], \end{aligned} \tag{6.15}$$

并且 $H_n(\theta) = (n\Delta_n)^{-1} G_n(\theta) = (n\Delta_n)^{-1} \sum_{i=2}^n g(\Delta_n,\ Y_i,\ Y_{i-1};\ \theta)$，其中 $g = (g_1, g_2)^T$。根据展开式 (5.9)

$$g_1(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1};\theta) = f(Y_i) - f(Y_{i-1}) + \Delta_n K_f(\theta)\left[\mu_\theta(f) - f(Y_{i-1})\right] + \Delta_n^{3/2} R(\Delta_n, Y_{i-1};\theta), \tag{6.16}$$

因此，根据积分扩散过程的大数定律（引理 4.1），

$$\begin{aligned} \frac{1}{n\Delta_n}\sum_{i=2}^n g_1(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1};\theta) &= \frac{1}{n\Delta_n}\left[f(Y_n) - f(Y_1)\right] + \frac{1}{n}\sum_{i=2}^n K_f(\theta)\left[\mu_\theta(f) - f(Y_{i-1})\right] \\ &\quad + \Delta_n^{1/2}\frac{1}{n}\sum_{i=2}^n R(\Delta_n, Y_{i-1};\theta) \xrightarrow{\mathbb{P}_0} K_f(\theta)(\mu_\theta - \mu_0)(f). \end{aligned}$$

$H_n(\theta)$ 的第二个坐标需要长得多的证明，因为第一项的贡献在渐近意义下并非可忽略。为简化记号，我们定义 $\mathcal{E}_i^n = \partial_x f(X_{t_{i-1}^n}) b(X_{t_{i-1}^n};\ \theta_0)\varepsilon_{1,\ i}$ 以及 $\Xi_i^n = \partial_x f(X_{t_{i-1}^n}) b(X_{t_{i-1}^n};\ \theta_0)\xi_{1,\ i}$，并将 (3.1) 和 (3.7) 中的展开式写在真实概率测度 $\mathbb{P}_0$ 下：

$$f(X_{t_i^n}) = f(X_{t_{i-1}^n}) + \Delta_n^{1/2}\mathcal{E}_i^n + \varepsilon_{2,i}, \tag{6.17}$$

$$f(Y_i) = f(X_{t_{i-1}^n}) + \Delta_n^{1/2}\Xi_i^n + \xi_{2,i}. \tag{6.18}$$

首先注意到，由 (6.18)

$$g_2(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1};\theta) = \left(f(X_{t_{i-2}^n}) + \Delta_n^{1/2}\Xi_{i-1}^n + \xi_{2,i-1}\right) g_1(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1};\theta). \tag{6.19}$$

将 (6.18) 代入 (6.15)，并应用 $\breve{a}_n(\theta)$ 的展开式 (5.9)，我们得到

$$\begin{aligned} &g_1(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1};\theta) = f(X_{t_{i-1}^n}) - f(X_{t_{i-2}^n}) \\ &+ \ \Delta_n K_f(\theta)\left[\mu_\theta(f) - f(X_{t_{i-2}^n})\right] + \Delta_n^{1/2}\left(\Xi_i^n - \Xi_{i-1}^n\right) + \mathcal{R}_1(\Delta_n, (X_s)_{s\in[t_{i-2}^n, t_i^n]}, \theta_0;\theta), \end{aligned} \tag{6.20}$$

其中余项 $\mathcal{R}_1$ 的形式为

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_1(\Delta_n, (X_s)_{s\in[t_{i-2}^n, t_i^n]}, \theta_0;\theta) \\ &= \ (\xi_{2,i} - \xi_{2,i-1}) - \Delta_n^{3/2} K_f(\theta)\Xi_{i-1}^n - \Delta_n K_f(\theta)\xi_{2,i-1} + \Delta_n^{3/2} R(\Delta_n, Y_{i-1};\theta). \end{aligned} \tag{6.21}$$

利用 (6.17)，并代入 $\varepsilon_{2,\ i}$ 和 $\xi_{2,\ i}$、(6.3) 和 (6.4) 的定义，我们得到

$$f(X_{t_{i-1}^n}) - f(X_{t_{i-2}^n}) = \Delta_n^{1/2}\mathcal{E}_{i-1}^n + \varepsilon_{2,i-1} = \Delta_n \mathcal{L}_0 f(X_{t_{i-2}^n}) + A_{i-1}(\theta_0) + M_{i-1}(\theta_0), \quad (6.22)$$

其中

$$\begin{aligned} A_i(\theta) &= \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \left[\mathcal{L}_\theta f(X_s) - \mathcal{L}_\theta f(X_{t_{i-1}^n})\right] \mathrm{d}s, \\ M_i(\theta) &= \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \partial_x f(X_s) b(X_s;\theta) dB_s. \end{aligned}$$

现在，利用 (6.19)、(6.20) 和 ((6.22))，我们得到 Δ-展开式

$$g_2(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1};\theta) = \sum_{k=1}^{3} g_2^{(k)}(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1};\theta),$$

其中

$$\begin{aligned} &g_2^{(1)}(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1};\theta) = f(X_{t_{i-2}^n}) \cdot g_1(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1};\theta) \\ &= \Delta_n f(X_{t_{i-2}^n})\mathcal{L}_0 f(X_{t_{i-2}^n}) + f(X_{t_{i-2}^n}) M_{i-1}(\theta_0) \\ &\quad + \Delta_n K_f(\theta) f(X_{t_{i-2}^n}) \left[\mu_\theta(f) - f(X_{t_{i-2}^n})\right] + \mathcal{R}_2^{(1)}(\Delta_n, (X_s)_{s\in[t_{i-2}^n, t_i^n]}, \theta_0;\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2^{(2)}(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1};\theta) &= \Delta_n^{1/2} \cdot \Xi_{i-1}^n \cdot g_1(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1};\theta) \\ &= \Delta_n \left(\mathcal{E}_{i-1}^n - \Xi_{i-1}^n\right)\Xi_{i-1}^n + \mathcal{R}_2^{(2)}(\Delta_n, (X_s)_{s\in[t_{i-2}^n, t_i^n]}, \theta_0;\theta) \end{aligned}$$

and

$$g_2^{(3)}(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1};\theta) = \xi_{2,i-1} \cdot g_1(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1};\theta) = \mathcal{R}_2^{(3)}(\Delta_n, (X_s)_{s\in[t_{i-2}^n, t_i^n]}, \theta_0;\theta)$$

with

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_2^{(1)}(\Delta_n, (X_s)_{s\in[t_{i-2}^n, t_i^n]}, \theta_0;\theta) = \\ &\quad f(X_{t_{i-2}^n}) A_{i-1}(\theta_0) + \Delta_n^{1/2} f(X_{t_{i-2}^n}) \left(\Xi_i^n - \Xi_{i-1}^n\right) + f(X_{t_{i-2}^n}) \cdot \mathcal{R}_1(\Delta_n, (X_s)_{s\in[t_{i-2}^n, t_i^n]}, \theta_0;\theta) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_2^{(2)}(\Delta_n, (X_s)_{s\in[t_{i-2}^n, t_i^n]}, \theta_0;\theta) = \Delta_n^{1/2}\Xi_{i-1}^n \varepsilon_{2,i-1} \\ &+ \Delta_n^{3/2}\Xi_{i-1}^n K_f(\theta)\left[\mu_\theta(f) - f(X_{t_{i-2}^n})\right] + \Delta_n \Xi_i^n \Xi_{i-1}^n + \Delta_n^{1/2}\Xi_{i-1}^n \mathcal{R}_1(\Delta_n, (X_s)_{s\in[t_{i-2}^n, t_i^n]}, \theta_0;\theta). \end{aligned}$$

合并各项后，

$$\begin{aligned} &g_2(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1};\theta) = \sum_{k=1}^{3} g_2^{(k)}(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1};\theta) \quad (6.23) \\ &= \Delta_n f(X_{t_{i-2}^n})\mathcal{L}_0 f(X_{t_{i-2}^n}) + f(X_{t_{i-2}^n}) M_{i-1}(\theta_0) + \Delta_n K_f(\theta) f(X_{t_{i-2}^n}) \left[\mu_\theta(f) - f(X_{t_{i-2}^n})\right] \\ &\quad + \Delta_n \left(\mathcal{E}_{i-1}^n - \Xi_{i-1}^n\right)\Xi_{i-1}^n + \mathcal{R}_2(\Delta_n, (X_s)_{s\in[t_{i-2}^n, t_i^n]}, \theta_0;\theta), \end{aligned}$$

其中余项为

$$\mathcal{R}_2(\Delta_n, (X_s)_{s\in[t_{i-2}^n, t_i^n]}, \theta_0;\theta) = \sum_{k=1}^{3} \mathcal{R}_2^{(k)}(\Delta_n, (X_s)_{s\in[t_{i-2}^n, t_i^n]}, \theta_0;\theta).$$

现在，基于 Genon-Catalot 和 Jacod（1993）中的引理 9 进行繁琐的推导可得

$$\frac{1}{n\Delta_n}\sum_{i=2}^{n}\mathcal{R}_2(\Delta_n,(X_s)_{s\in[t_{i-2}^n,t_i^n]},\theta_0;\theta)=o_{\mathbb{P}_0}(1). \tag{6.24}$$

在 附加的速率假设 $n\Delta_n^2\to 0$下，可以类似地证明

$$\frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}}\sum_{i=2}^{n}\mathcal{R}_2(\Delta_n,(X_s)_{s\in[t_{i-2}^n,t_i^n]},\theta_0;\theta)=o_{\mathbb{P}_0}(1). \tag{6.25}$$

后一个结果在本证明中并非必需，但要在定理 5.6 的证明中证明渐近正态性，则有必要用到它，因此我们在此列出以便参考。为说明获得 (6.25) 必须满足强速率假设 $n\Delta_n^2\to 0$ ，例如可以考察 (6.21) 中的最后一项:

$$\frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}}\sum_{i=2}^{n}\Delta_n^{3/2}R(\Delta_n,Y_{i-1};\theta)=\sqrt{n\Delta_n^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}R(\Delta_n,Y_{i-1};\theta).$$

由于 (6.24) 和 (6.25) 的证明都很长，而且没有特别的启发意义，因此略去。

为了确定 $H_n(\theta)$ 的第二个坐标的依概率极限，我们分别考察 (6.23) 中的各项。根据遍历定理，参见 Jørgensen 和 Sørensen（2021）中的引理 3.1,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}f(X_{t_{i-2}^n})\mathcal{L}_0f(X_{t_{i-2}^n})\xrightarrow{\mathbb{P}_0}\mu_0(f\mathcal{L}_0f)$$

and

$$\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}K_f(\theta)f(X_{t_{i-2}^n})\left[\mu_\theta(f)-f(X_{t_{i-2}^n})\right]\xrightarrow{\mathbb{P}_0}K_f(\theta)\left[\mu_0(f)\mu_\theta(f)-\mu_0(f^2)\right].$$

此外，根据 $\mathcal{E}_i^n$和 Ξ_i^n的定义,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_0\left((\mathcal{E}_i^n-\Xi_i^n)\,\Xi_i^n\,\middle|\,\mathcal{F}_{i-1}^n\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\partial_xf(X_{t_{i-1}^n})b(X_{t_{i-1}^n};\theta_0)]^2\mathbb{E}_0\left((\varepsilon_{1,i}-\xi_{1,i})\xi_{1,i}\,\middle|\,\mathcal{F}_{i-1}^n\right),$$

并且由于 $\xi_{1,i}\sim\mathcal{N}(0,1/3)$，由 (3.11) 可知

$$\mathbb{E}_0\left((\varepsilon_{1,i}-\xi_{1,i})\xi_{1,i}\,\middle|\,\mathcal{F}_{i-1}^n\right)=\mathbb{E}_0\left((\varepsilon_{1,i}-\xi_{1,i})\xi_{1,i}\right)=\frac{1}{6}, \tag{6.26}$$

so

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_0\left((\mathcal{E}_i^n-\Xi_i^n)\,\Xi_i^n\,\middle|\,\mathcal{F}_{i-1}^n\right)\xrightarrow{\mathbb{P}_0}\frac{1}{6}\mu_0\left([b(\,\cdot\,;\theta_0)\partial_xf]^2\right).$$

最后，根据 (6.3) 中 $\varepsilon_{1,i}$ 的定义以及 (6.8) 中 $\xi_{1,i}$ 的定义，差值 $\varepsilon_{1,i}-\xi_{1,i}$ 服从高斯分布，结合 Hölder 不等式和遍历定理可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_0\left((\mathcal{E}_i^n-\Xi_i^n)^2(\Xi_i^n)^2\,\middle|\,\mathcal{F}_{i-1}^n\right)\\&\quad=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}[\partial_xf(X_{t_{i-1}^n})b(X_{t_{i-1}^n};\theta_0)]^4\cdot\mathbb{E}_0\left((\varepsilon_{1,i}-\xi_{1,i})^2\,\xi_{1,i}^2\,\middle|\,\mathcal{F}_{i-1}^n\right)=o_{\mathbb{P}_0}(1).\end{aligned}$$

因此，根据 Genon-Catalot 和 Jacod（1993）的引理 9

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathcal{E}_i^n-\Xi_i^n\right)\Xi_i^n \xrightarrow{\mathbb{P}_0} \frac{1}{6}\mu_0\left([b(\,\cdot\,;\theta_0)\partial_x f]^2\right).$$

按照类似的论证,

$$\frac{1}{n\Delta_n}\sum_{i=1}^{n} f(X_{t_{i-1}^n})M_i(\theta_0)=o_{\mathbb{P}_0}(1),$$

其中我们利用了 $\mathbb{E}_0\left(M_i(\theta_0)\,\middle|\,\mathcal{F}_{i-1}^n\right)=0$。此外，我们利用了：对于 $h(x)=\partial_x f(x)b(x;\theta_0)$, 并应用条件 Itô 等距、Tonelli 定理和 (6.2),

$$\mathbb{E}_0\left(M_i^2(\theta_0)\,\middle|\,\mathcal{F}_{i-1}^n\right)=\mathbb{E}_0\left(\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} h^2(X_s)\,\mathrm{d}s\,\middle|\,\mathcal{F}_{i-1}^n\right)=\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\mathbb{E}_0\left(h^2(X_s)\,\middle|\,\mathcal{F}_{i-1}^n\right)\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^{\Delta_n}\left[h^2(X_{t_{i-1}^n})+u\cdot R(u,X_{t_{i-1}^n};\theta_0)\right]\mathrm{d}u=\Delta_n h^2(X_{t_{i-1}^n})+\Delta_n^2 R(\Delta_n,X_{t_{i-1}^n};\theta_0)$$

因此,

$$\frac{1}{n^2\Delta_n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_0\left(f^2(X_{t_{i-1}^n})M_i^2(\theta_0)\,\middle|\,\mathcal{F}_{i-1}^n\right)$$

$$=\frac{1}{n\Delta_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^2(X_{t_{i-1}^n})h^2(X_{t_{i-1}^n})+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}R(\Delta_n,X_{t_{i-1}^n};\theta_0)=o_{\mathbb{P}_0}(1).$$

综合上述观测值，我们验证了 (5.12)。

为了确定 $\partial_{\theta^T}H_n(\theta)$ 的极限，我们写出

$$H_n(\theta)=\frac{1}{n\Delta_n}\sum_{i=2}^{n}Z_{i-1}\left[f(Y_i)-Z_{i-1}^T\breve{a}_n(\theta)\right],$$

其中 $Z_{i-1}=(1,\ f(Y_{i-1}))^T$，这意味着

$$\partial_{\theta^T}H_n(\theta)=-\frac{1}{n\Delta_n}\sum_{i=2}^{n}Z_{i-1}Z_{i-1}^T\partial_{\theta^T}\breve{a}_n(\theta)=Z_n(f)A_n(\theta),$$

其中 $Z_n(f):=\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}Z_{i-1}Z_{i-1}^T$ 以及 $A_n(\theta):=-\Delta_n^{-1}\partial_{\theta^T}\breve{a}_n(\theta)$。由引理 4.1,

$$Z_n(f)\xrightarrow{\mathbb{P}_0}Z(f)=:\begin{pmatrix}1 & \mu_0(f)\\ \mu_0(f) & \mu_0(f^2)\end{pmatrix},$$

并应用 $\breve{a}_n(\theta)$ 的展开式 (5.9)，可得

$$A_n(\theta)=\partial_{\theta^T}\begin{pmatrix}K_f(\theta)\mu_\theta(f)\\ -K_f(\theta)\end{pmatrix}+\Delta_n^{1/2}\partial_{\theta^T}R(\Delta_n;\theta)\to\begin{pmatrix}\partial_{\theta^T}[K_f(\theta)\mu_\theta(f)]\\ -\partial_{\theta^T}K_f(\theta)\end{pmatrix}=:A(\theta).$$

因此可得 $\partial_{\theta^T}H_n(\theta)\xrightarrow{\mathbb{P}_0}Z(f)A(\theta)$。为了说明在条件 5.4 下，该收敛在 Θ 的任意紧子集 $\mathcal{M}$ 上是一致的，注意到

$$\begin{aligned}\sup_{\theta\in\mathcal{M}}\|\partial_{\theta^T}H_n(\theta)-Z(f)A(\theta)\| &\le \sup_{\theta\in\mathcal{M}}\|Z_n(f)[A_n(\theta)-A(\theta)]\|+\sup_{\theta\in\mathcal{M}}\|[Z_n(f)-Z(f)]A(\theta)\|\\ &\le \|Z_n(f)\|\sup_{\theta\in\mathcal{M}}\|A_n(\theta)-A(\theta)\|+\|Z_n(f)-Z(f)\|\sup_{\theta\in\mathcal{M}}\|A(\theta)\|.\end{aligned}$$

因此，(5.13) 成立，这是因为 $\theta \mapsto A(\theta)$ 和 $\|\cdot\|$ 都是连续的，并且

$$\sup_{\theta\in\mathcal{M}} \|A_n(\theta) - A(\theta)\| = \Delta_n^{1/2} \sup_{\theta\in\mathcal{M}} \|\partial_{\theta^T} R(\Delta_n;\theta)\| \leq_{C(\mathcal{M})} \Delta_n^{1/2} \to 0.$$

□

定理 *5.6* 的证明。我们使用引理 5.5 证明中引入的记号。由于 $\hat{\gamma}(\theta_0,\ \theta_0) = 0$，由引理 5.5 和 Jacod 和 Sørensen（2018）中的定理 2.5 可知，存在一个由 G_n-估计量 (θ_n) 构成的相合序列。 $\mathcal{K}$中的最终唯一性则由引理 5.5 和同一篇论文中的定理 2.7 得出。

渐近正态性 通过标准的泰勒展开论证得出（例如，参见 Jacod 和 Sørensen（2018）中的定理 2.11），前提是我们已证明

$$\sqrt{n\Delta_n} \cdot H_n(\theta_0) \xrightarrow{\mathscr{D}_0} \mathcal{N}_2(0, V_0(f)). \tag{6.27}$$

由 (6.16) 中 $g_1(\Delta_n,\ Y_i,\ Y_{i-1};\ \theta)$ 的展开式可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}} \sum_{i=2}^{n} g_1(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1}; \theta_0) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}} [f(Y_n) - f(Y_1)] + \sqrt{n\Delta_n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} f_1^*(Y_{i-1}) \right) + \sqrt{n\Delta_n^2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} R(\Delta_n, Y_{i-1}; \theta_0) \\
&= \sqrt{n\Delta_n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} f_1^*(Y_{i-1}) \right) + o_{\mathbb{P}_0}(1) \xrightarrow{\mathscr{D}_0} \mathcal{N}\left(0, \mu_0\left([\partial_x U_0(f_1^*) b(\,\cdot\,;\theta_0)]^2\right)\right),
\end{aligned}$$

依分布收敛由引理 4.2 得出，因为 $f_1^* \in \mathscr{H}_0$。

我们的证明如下:

$$\frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}} \sum_{i=2}^{n} g_2(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1}; \theta_0) \xrightarrow{\mathscr{D}_0} \mathcal{N}\left(0, \mu_0\left(\left[\partial_x U_0(f_2^*) + f\partial_x f\right]^2 b^2(\,\cdot\,;\theta_0)\right)\right) \tag{6.28}$$

基于由 (6.23) 给出的 g_2 的展开式，以及以下观察:

$$\frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}} \sum_{i=2}^{n} \Delta_n \left(\mathcal{E}_{i-1}^n - \Xi_{i-1}^n\right) \Xi_{i-1}^n = \frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}} \sum_{i=2}^{n} \Delta_n [\partial_x f(X_{t_{i-2}^n}) b(X_{t_{i-2}^n}; \theta_0)]^2 + o_{\mathbb{P}_0}(1), \tag{6.29}$$

根据 Genon-Catalot 和 Jacod ( ) 中的引理

9 1993 $\left(\mathcal{E}_{i-1}^n - \Xi_{i-1}^n\right) \Xi_{i-1}^n$，利用 ( )

$= [\partial_x f\ X_{t_{i-2}^n}\ b\ X_{t_{i-2}^n}\ \theta_0\ ]^2\ \varepsilon_{1\,i-1} - \xi_{1\,i-1}\ \ \xi_{1\,i-1}$ $\mathbb{E}_0\left(\left(\mathcal{E}_{i-1}^n - \Xi_{i-1}^n\right) \Xi_{i-1}^n \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-2}^n\right) =$

(·;) (,,) ., 以及 $\frac{1}{6}[\partial_x f(X_{t_{i-2}^n}) b(X_{t_{i-2}^n};\ \theta_0)]^2$,, 即可得出该结论，见 (6.26)。

结合 (6.29)、(6.23) 以及 (6.25) 中涉及余项的项消失这一结果，我们看到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}} \sum_{i=2}^{n} g_2(\Delta_n, Y_i, Y_{i-1}; \theta_0) \qquad (6.30) \\
&= \sqrt{n\Delta_n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_2^*(X_{t_{i-1}^n}) \right) + \frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}} \sum_{i=1}^{n} f(X_{t_{i-1}^n}) M_i(\theta_0) + o_{\mathbb{P}_0}(1).
\end{aligned}$$

为了汇集 (6.30) 中不可忽略的项，我们首先观察到

$$\frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}}\int_0^{n\Delta_n} f_2^*(X_s)\,\mathrm{d}s = \sqrt{n\Delta_n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_2^*(X_{t_{i-1}^n})\right) \tag{6.31}$$
$$+\ \frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\left[f_2^*(X_s)-f_2^*(X_{t_{i-1}^n})\right]\mathrm{d}s = \sqrt{n\Delta_n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_2^*(X_{t_{i-1}^n})\right)+o_{\mathbb{P}_0}(1),$$

其中我们只用到 $f_2^*\in\mathcal{C}_p^2(S)$。关于在 $\mathbb{P}_0$ 下，式 (6.31) 中的第二项渐近可忽略的证明，见 Jørgensen 和 Sørensen （ 2021 ）中命题 3.4 的证明。此外，根据同一篇论文中的命题 3.3，在条件 5.4 下，$\mathcal{L}_0(U_0(f_2^*)) = -f_2^*$，因此由 Itˆo 公式可得，

$$\begin{aligned} U_0(f_2^*)(X_t) &= U_0(f_2^*)(X_0)+\int_0^t \mathcal{L}_0(U_0(f_2^*))(X_s)\,\mathrm{d}s+\int_0^t \partial_x U_0(f_2^*)(X_s)b(X_s;\theta_0)dB_s \\ &= U_0(f_2^*)(X_0)-\int_0^t f_2^*(X_s)\,\mathrm{d}s+\int_0^t \partial_x U_0(f_2^*)(X_s)b(X_s;\theta_0)dB_s. \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} \sqrt{n\Delta_n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_2^*(X_{t_{i-1}^n})\right) &= \frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}}\int_0^{n\Delta_n} f_2^*(X_s)\,\mathrm{d}s+o_{\mathbb{P}_0}(1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\partial_x U_0(f_2^*)(X_s)b(X_s;\theta_0)dB_s+o_{\mathbb{P}_0}(1), \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}}\sum_{i=2}^{n} g_2(\Delta_n,Y_i,Y_{i-1};\theta_0) \\ &= \sqrt{n\Delta_n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_2^*(X_{t_{i-1}^n})\right)+\frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}}\sum_{i=1}^{n} f(X_{t_{i-1}^n})M_i(\theta_0)+o_{\mathbb{P}_0}(1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\left[\partial_x U_0(f_2^*)(X_s)+f(X_{t_{i-1}^n})\partial_x f(X_s)\right]b(X_s;\theta_0)dB_s+o_{\mathbb{P}_0}(1). \end{aligned}$$

此时，只需应用鞅差数组中心极限定理，即可证明式 (6.28) 中的渐近正态性；参见 Hall 和 Heyde（1980）或 H¨ausler 和 Luschgy（2015）；详情见 Jørgensen 和 Sørensen（2021）第 507–508 页。式 (6.27）中的联合正态性由 Cram´er–Wold 方法得出。

□

7 总结与扩展

对于在 $[0,1]$, 上观测的积分扩散过程，Gloter 和 Gobet（2008）证明，统计模型满足局部渐近混合正态性质，且扩散系数中参数估计量的最优收敛速率为 $1/\sqrt{n}$。本文所考虑的高频／无限时域情形下，积分扩散模型的最优速率尚不清楚；但在该情形下，Gloter（ 2006）的最小对比估计量对漂移参数达到 $1/\sqrt{n\Delta_n}$ 的速率，对扩散参数达到 $1/\sqrt{n}$ 的速率（类似于 Sørensen（2024）中离散观测扩散过程的速率最优估计量），因此推测

这些速率是最优的。然而，由于本文不区分漂移参数和扩散参数，我们的参数的 $1/\sqrt{n\Delta_n}$ 速率已是所能期望的最佳结果。

一个有趣的扩展是在（X_t）的动力学中引入跳跃分量。这种扩展有一个特殊之处：(X_t)中的跳跃会导致（I_t）趋势发生变化，而非导致路径不连续。因此，针对高频观测到的含跳跃过程所开发的阈值估计量（例如，参见 Mancini (2009)）无法直接应用于此。Bibinger等人（2017）利用变点理论提出了一种检验波动率跳跃是否存在的一般方法。同一原理能否以及如何应用于参数推断，是未来研究中一个有趣的课题。

致谢

Emil S. Jørgensen 衷心感谢在芝加哥大学 Stevanovich 金融数学中心访学期间获得的资助。

参考文献

Aït-Sahalia，Y.（2002）。离散采样扩散过程的最大似然估计：一种闭式近似方法。《计量经济学》，**70**(1)，223–262。

Aït-Sahalia, Y. 和 Jacod, J.（2014）。《高频金融计量经济学》。普林斯顿大学出版社。

Baltazar-Larios, F. 和 Sørensen, M.（2010）。积分扩散过程的最大似然估计。载于 C. Chiarella 和 A. Novikov 编，《当代定量金融学：纪念 Eckhard Platen 文集》，第 407–423 页。施普林格。

Barndorff-Nielsen, O. 和 Shephard, N.（2002）。已实现波动率的计量经济学分析及其在随机波动率模型估计中的应用。《皇家统计学会杂志》，**64**（2），253–280。

Beskos, A.、Papaspiliopoulos, O.、Roberts, G. 和 Fearnhead, P.（2006）。离散观测扩散过程的精确且计算高效的基于似然的估计（附讨论）。《皇家统计学会杂志》，**68**（3），333–382。

Bibby, B. 和 Sørensen, M.（1995）。离散观测扩散过程的鞅估计函数。《伯努利》，1(1/2)，17–39。Bibinger, M.、Jirak, M. 和 Vetter, M.（2017）。波动率的非参数变点分析。《统计年刊》，**45**(4)，1542–1578。

Bladt, M. 和 Sørensen, M.（2014）。扩散桥的简单模拟及其在扩散过程似然推断中的应用。《伯努利》，**20**，645–675。另请参阅以下勘误。

Bollerslev, T. 和 Zhou, H.（2002）。利用积分波动率的条件矩估计随机波动率扩散过程。《计量经济学杂志》，**109**，33–65。

Comte, F., Genon-Catalot, V., 和 Rozenholc, Y.（2009）。积分扩散过程的非参数自适应估计。《随机过程及其应用》，**119**（3），811–834。

Dacunha-Castelle, D. 和 Florens-Zmirou, D.（1986）。根据离散观测估计扩散过程的系数。《随机过程》，19，263–284。Ditlevsen, S. 和 Sørensen, M.（2004）。积分扩散过程观测值的推断。《斯堪的纳维亚统计学杂志》，31，417–429。Drimus, G.（2012）。通过变换方法对已实现方差进行期权定价：一种非仿射随机波动率模型。《定量金融》，12（11），1679–1694。Forman, J. 和 Sørensen, M.（2008）。皮尔逊扩散：一类统计上易于处理的扩散过程。《斯堪的纳维亚统计学杂志》，35，438–465。Garc´ıa-Portugu´es, E. 和 Sørensen, M.（2025）。一族具有精确似然推断的环面扩散过程。《生物计量学》。即将发表，arXiv:2401.04689。Genon-Catalot, V. 和 Jacod, J.（1993）。多维扩散过程扩散系数的估计。《亨利·庞加莱研究所年刊》，29（1），119–151。Genon-Catalot, V., Jeantheau, T., 和 Lar´edo, C.（2000）。作为隐马尔可夫模型的随机波动率模型及其统计应用。《伯努利》，6（6），1051–1079。Gloter, A.（2000）。积分扩散过程的离散抽样及扩散系数的参数估计。《ESAIM：概率与统计》，4，205–227。Gloter, A.（2006）。离散观测积分扩散过程的参数估计。《斯堪的纳维亚统计学杂志》，33，83–104。Gloter, A. 和 Gobet, E.（2008）。隐过程的局部渐近混合正态性质：积分扩散过程的情形。《亨利·庞加莱研究所年刊》，44（1），104–128。Hall, P. 和 Heyde, C. C.（1980）。《鞅极限定理及其应用》。纽约：学术出版社。Hansen, L. 和 Scheinkman, J.（1995）。回归未来：为连续时间马尔可夫过程生成矩含义。《计量经济学》，63（4），767–804。Heston, S.（1993）。随机波动率期权的封闭式解及其在债券和货币期权中的应用。《金融研究评论》，6（2），327–343。H¨ausler, E. 和 Luschgy, H.（2015）。《稳定收敛与稳定极限定理》。施普林格。Jacod, J. 和 Protter, P.（2012）。《过程的离散化》。施普林格出版社。Jacod, J. 和 Sørensen, M.（2018）。估计函数渐近理论综述。《随机过程统计推断》，21，415–434。Jørgensen, E. 和 Sørensen, M.（2021）。高频数据下扩散模型的基于预测的估计。《日本统计与数据科学杂志》，4（1），483–511。Kessler, M.（1997）。根据离散观测估计遍历扩散。《斯堪的纳维亚统计学杂志》，24，211–229。Kessler, M.（2000）。离散观测扩散过程的简洁显式估计函数。《斯堪的纳维亚统计学杂志》，27，65–82。

Li, J. 和 Xiu, D.（2016）。高频数据的广义积分矩方法。《计量经济学》，84(4)，1613–1633。Mancini, C.（2009）。含随机扩散系数和跳跃模型的非参数阈值估计。《斯堪的纳维亚统计学杂志》，36，270–296。Nelson, D.（1990）。作为扩散近似的ARCH模型。《计量经济学杂志》，45，7–38。Pardoux, E. 和 Veretennikov, A. Y.（2001）。关于泊松方程与扩散近似。I。《概率年刊》，29(3)，1061–1085。Pilipovic, P.、Samson, A. 和 Ditlevsen, S.（2024）。基于分裂格式的非线性多元随机微分方程参数估计。《统计年刊》，52，848–8867。Roberts, G. 和 Stramer, O.（2001）。使用Metropolis–Hastings算法对部分观测非线性扩散模型进行推断。《生物统计学》，88(3)，603–621。Shoji, I. 和 Ozaki, T.（1998）。随机微分方程组的估计与模拟统计方法。《生物统计学》，85(1)，240–243。Sørensen, M.（2000）。基于预测的估计函数。《计量经济学期刊》，3，123–147。Sørensen, M.（2011）。基于预测的估计函数：综述与新进展。《巴西概率与统计杂志》，25(3)，362–391。Sørensen, M.（2012）。扩散型过程的估计函数。载于 M. Kessler、A. Lindner 和 M. Sørensen 编，《随机微分方程统计方法》，第 1–107 页。CRC出版社。Sørensen, M.（2024）。对高频采样的遍历扩散过程进行有效估计。预印本，arXiv:2401.04689。Todorov, V.（2009）。利用高频数据估计含跳跃的连续时间随机波动率模型。《计量经济学杂志》，148(2)，131–148。van der Meulen, F. 和 Schauer, M.（2017）。使用引导提议对离散观测的多维扩散过程进行贝叶斯估计。《电子统计学杂志》，11，2358–2396。Yoshida, N.（1992）。基于离散观测的扩散过程估计。《多元分析杂志》，41(2)，220–242。