arXiv:2602.06770v1 [math.GR] 6 Feb 2026

有限群中的因子与良覆盖图

Mikhail Kabenyuk

摘要

我们研究有限群中子集的一种组合性质，该性质类似于图中的独立性概念。给定一个群 G 和一个非空子集 $A \subset G$，我们将满足以下条件的子集 $B \subset G$ 定义为一个（右） s-因子：

（i） AB 中的每个元素都可以唯一地写成 ab，其中 $a \in A$ 和 $b \in B$。（ii） B 关于包含关系是极大的，并具有这一性质。

对于有限群 G， A 的上指标和下指标分别是与 A 相关联的最大和最小 s-因子的大小。若一个子集的上指标和下指标相等，则称其为稳定的。若一个群的所有子集都是稳定的，则称该群为稳定群。

我们接着探讨群中的 s-因子与图中的极大独立集之间的联系。具体而言，我们证明， G中与 A 相关联的 s-因子对应于凯莱图Cay(G, S)中的极大独立集，其中 $S = A^{-1}A \setminus \{e\}$。因此， A 的上指标和下指标等于相应凯莱图的独立数与独立支配数。

s-因子、群中的子集指标、稳定子集以及稳定群（曾以不同名称出现）这些概念由Hooshmand于2020年提出。后来，Hooshmand与Yousefian-Arani借助计算机计算对稳定群进行了分类。

利用与图的这一联系，我们计算了各种群及其子集的上指标和下指标。此外，我们证明了一个分类定理，它刻画了所有稳定群，且不依赖计算机计算。

1 引言

设 G 为一个群，并设 A 为 G的一个固定非空子集。非空子集$B \subset G$ 称为**右 s-因子**，**属于 G 并与 A** 相关联，如果每个元素 $x \in AB$ 都能唯一地写成 $x = ab$，其中 $a \in A$ 且 $b \in B$，并且 B 关于此性质（就包含关系而言）是极大的。对G的每一个非空子集，右 s-因子都存在（由佐恩引理）。

若 G 是有限群，则与 A 相关联的 G 中最大右 s 因子的大小记为 $|G : A|^{+}$，最小右因子的大小记为 $|G : A|^{-}$（分别称为 A 的上指标和下指标）。若子集 $A \subset G$ 在 G 中的右上指标与右下指标相等，则称其为**右稳定**。若一个群的所有子集都是右稳定集，则称该群为**右稳定群**。

左 s 因子、左指标和左稳定性以相同方式定义。本文通篇聚焦于右 s 因子，并且通常省略限定词“右”。

这一概念（当时称为“子因子”）最早由 [1] 和 [2]提出。“子因子”一词在算子代数理论中广为人知，尤其与冯·诺伊曼因子相关；例如参见 [3]。因此，我们使用“s因子”这一术语。尽管它未必理想，但更为简短，也避免了这一冲突。我们还将 [1]中的“子指数”“指标稳定集”和“指标稳定群”分别改为“指数”“稳定集”和“稳定群”。

注意，对任意 $x \in G$，集合 A 和 xA 具有相同的右s因子集，因此 $|G : A|^{\pm} = |G : xA|^{\pm}$。因此，在许多论证中，我们可以假设

$e \in A$。此外，如果 B 是 G 中与 A相关联的右 s因子，那么对任意$y \in G$， By 也是 G 中与 A相关联的右 s因子。

设 Γ 为一个有限简单图。我们分别用V(Γ)和 E(Γ)表示 Γ 的顶点集和边集。若 V(Γ)的任意两个顶点都不相邻，则称其为独立的。若一个独立集不严格包含于任何更大的独立集中，则称其为极大独立集。 Γ 中最大独立集的大小称为 Γ的独立数，记为 α(Γ)（尽管文献中也使用 β(Γ)或 β_0(Γ)）。类似地， Γ中最小极大独立集的大小定义为下独立数 i(Γ)。

另一种等价的观点使用支配集。若 S 是 Γ 的顶点的子集，并且不属于 S 的每个顶点都与 S中的某个顶点相邻，则称 S 为支配集。最小支配集的大小称为支配数 γ(Γ)。 Γ 的最小独立支配集的大小称为 Γ的独立支配数。

由于每个极大独立集都是支配集，下独立数与独立支配数相等，并且如前所述，记为 i(Γ)。作为说明，请考虑以下陈述。

引理1. C_n 是一个具有 n 个顶点的圈图。那么 $i(C_n) = \lceil n/3 \rceil$ 且 $\alpha(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$ 对所有 $n \geq 3$均成立。

证明. 这些事实众所周知。关于 $i(C_n)$，参见 [4, 命题1。1], 关于 $\alpha(C_n$，参见 [5]。 □

图 Γ 是良覆盖的 当且仅当 Γ 中的每个极大独立集都是最大独立集，或者等价地 α(Γ) = i(Γ)。这一概念由 Plummer 于 1970 [6]提出。良覆盖图的简单例子包括圈 C_3、C_4、 C_5和 C_7，除此之外没有其他圈 C_n 是良覆盖的。这可由引理 1立即推出。

我们回顾凯莱图的定义。我们采用如下定义的左Cayley图。设 G 是一个群，且 S 是 G 的一个子集，使得 $e \notin S$ 和 $S = S^{-1}$。左凯莱图 Cay(G, S) 是顶点集为 G 、边集为

$$\{\{g, sg\} \mid g \in G, s \in S\}.$$

顶点 $u, v \in G$ 相邻（有时记作 $u \sim v$）当且仅当 $vu^{-1} \in S$。

右Cayley图的定义类似。顶点集为 G，边是形如 $\{g, gs\}$ 的顶点对，其中 $g \in G$ 和 $s \in S$。除非另有说明，本文中的 Cay(G, S) 均指左Cayley图。

注意，Cay(G, S) 连通当且仅当 S 生成 G。若 $H = \langle S \rangle$是由 S生成的子群，则 Cay(G, S) 有 $|G : H|$ 个连通分支，每个都与 Cay(H, S) 同构，并对应于满足 $g \in G$ 的右陪集 Hg 。此外，Cay(G, S) 是 $|S|$-正则图。

现在我们可以描述 s-因子与图中独立集之间的关系。首先，我们引入以下记号:

$$\partial A = A^{-1}A \setminus \{e\}. \tag{1}$$

引理 2。 设 G 为一个群，且设 A 为 G的一个固定非空子集。

(i) 子集 $B \subset G$ 是 G 的右 s-因子，且与 A 相关，当且仅当 B 是凯莱图 $\mathrm{Cay}(G, \partial A)$ 中的极大独立集。

(ii)此外，我们有

$$|G : A|^+ = \alpha\big(\mathrm{Cay}(G, \partial A)\big), \quad |G : A|^- = i\big(\mathrm{Cay}(G, \partial A)\big).$$

证明。 若 $x \neq y$，则

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; yx^{-1} \in A^{-1}A \;\Leftrightarrow\; Ax \cap Ay \neq \varnothing,$$

从而该断言成立。 □

引理 3（见 [7], 定理 4.1）。 设 $A = \{0, 1\} \subset \mathbb{Z}_n$。则对每个 $n \geq 3$

$$|\mathbb{Z}_n : A|^- = \lceil n/3 \rceil \text{ and } |\mathbb{Z}_n : A|^+ = \lfloor n/2 \rfloor.$$

证明。 显然， $\partial A = \{1, -1\}$，且凯莱图 Cay($\mathbb{Z}_n, \partial A$) 是圈C_n。因此引理由引理1和2得证。 □

本文其余部分的组织如下。在第2节中，我们证明关于具有循环商群的群的不稳定性的一般性结论。在第3节中，我们针对特定生成集，计算二面体群 D_n 阶 $2n$的凯莱图的独立数和独立支配数。在第4 – 7节中，我们证明以下群不是稳定群：一个21阶的非阿贝尔群和 $UT(3, 3)$；群 $\mathbb{Z}_2^5$和 $\mathbb{Z}_3^3$；群 A_4和（$C_3 \times C_3$） $\rtimes C_2$；以及某些16阶群。在第8 节中，我们证明有限稳定群的分类定理。在第9 节中，我们提供 GAP 代码，将第4–7 节中某些群的独立数和独立支配数的计算任务转交给GAP。对于任何由表示给出的有限群，都可以使用此代码。

我们采用群论和图论中的以下记号。符号e 表示群的单位元。若 A 和 B 是群的子集，则

$$A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\} \quad \text{and} \quad AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

若 v 是图的一个顶点，则 $N(v)$表示 v的所有邻点组成的集合，而$N[v] = N(v) \cup \{v\}$。若 v_1、.....、 v_k（其中 $k \geq 1$）是图的顶点，则

$$N[v_1, \ldots, v_k] = \bigcup_{i=1}^{k} N[v_i].$$

若 u 和 v 是图的顶点，则当且仅当 u 和 v 相邻时，我们记作 $u \sim v$ 。

2 稳定性的一些一般性质

引理 4. 设 H 是有限群 G的一个子群，且 $S \subset H$ 是一个不包含单位元的对称子集（即 $S = S^{-1}$ 和 $e \notin S$）。那么

$$i\big(\mathrm{Cay}(G, S)\big) = |G : H| \cdot i\big(\mathrm{Cay}(H, S)\big), \tag{2}$$

$$\alpha\big(\mathrm{Cay}(G, S)\big) = |G : H| \cdot \alpha\big(\mathrm{Cay}(H, S)\big). \tag{3}$$

证明. 设 T 是 H 在 G中的一个右陪集代表系。对每个 $t \in T$，定义图 Cay(Ht, S)如下：其顶点为陪集 Ht的元素，且两个顶点v、 $w \in Ht$ 相邻，当且仅当存在 $s \in S$ 使得 $w = sv$ （即$wv^{-1} \in S$）。注意，Cay(Ht, S) ≅Cay(H, S)。图 Cay(G, S) 是图 Cay(Ht, S) 的不交并，其中 $t \in T$。因此，(2)和(3)均成立。 □

推论 5. 如果一个有限群是稳定的，那么它的所有子群都是稳定的。

引理 6. 设 H 是有限群 G 的正规子群。如果商群G/H 是阶为 $n \geq 4$ 的循环群，且 $|H| \geq 3$，那么 G 不是稳定的。

证明。 取一个元素 $g \in G$ 使得 $\langle Hg \rangle = G/H$。我们可以假设 $g^n = e$；否则， g 的阶是 n的倍数且严格大于 n，因此至少为$2n \geq 8$，由引理 3 和推论 5 可知，群 G不稳定。此外，若 ord(g) $= n$且 $n \notin \{4, 5, 7\}$，则由引理 3 可知， $\langle g \rangle$ 不稳定，因此 G 由推论 5 可知也不稳定。尽管我们可以将注意范围限制在 $n \in \{4, 5, 7\}$，但我们仍对一般的 $n \geq 4$进行证明，因为这样并不会实质性地简化论证。

令 $h \in H$ 为一个非单位元，并定义

$$A = \big(H \setminus \{h\}\big) \cup \{g\}.$$

Then

$$A^{-1}A = H \ \cup \ \big(Hg \setminus \{h^{-1}g\}\big) \ \cup \ \big(g^{-1}H \setminus \{g^{-1}h\}\big), \tag{4}$$

以及 $\partial A = A^{-1}A \setminus \{e\}$。这里需要注意， $h \in A^{-1}A$，这很容易验证。令 $k = \lceil n/2 \rceil - 1$，并令 $x_1, \ldots, x_k$ 为H 中的一些元素（具体选择将在后面说明）。为方便起见，设 $x_0 = e$ 并定义

$$v_i = g^{2i}x_i, \ i = 0, 1, \ldots, k.$$

如果 $2k = n - 1$（即，如果 n 是奇数），则选择 $x_k = h$。此时 $v_k = g^{-1}h$。现在我们证明集合

$$I = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$$

对于$1 \le i \le k$ 的任意 $x_i \in H$ 选择（当 n 为奇数时， $x_k = h$），它是凯莱图 $\mathsf{Cay}(G, \partial A)$ 中的一个独立集。反设两个顶点v_i 和 v_j （其中 $0 \le 2i < 2j < n$）在 $\mathsf{Cay}(G, \partial A)$ 中相邻；也就是说，

$$v_j v_i^{-1} \in \partial A.$$

需要考虑三种情况：

$$\text{(i) } v_j v_i^{-1} \in H, \quad \text{(ii) } v_j v_i^{-1} \in Hg, \quad \text{(iii) } v_j v_i^{-1} \in g^{-1}H.$$

情况 (i)。若 $v_j v_i^{-1} \in H$，则

$$v_j v_i^{-1} = g^{2(j-i)}(g^{2i}x_j x_i^{-1} g^{-2i}) \in H,$$

因此特别有 $g^{2(j-i)} \in H$。由于 $0 < 2(j - i) < n$，这与假设 g 模 H 的阶为 n 矛盾。

情况 (ii)。若 $v_j v_i^{-1} \in Hg$，则类似的计算表明 $g^{2(j-i)-1} \in H$。由于 $1 \le 2j - 2i - 1 < n$，这种情况也不可能。

情况 (iii)。若 $v_j v_i^{-1} \in g^{-1}H$，则 $g^{2(j-i)+1} \in H$。这意味着 $2(j - i) + 1 = n$。特别地，我们必有 $j = k$ 和 $i = 0$。但根据我们的选择（当 $2k = n - 1$ 时），我们令 $x_k = h$，因此

$$v_j v_i^{-1} = v_k = g^{2k}x_k = g^{n-1}h = g^{-1}h.$$

由于我们假设 $v_j v_i^{-1} \in \partial A$ 且 $v_j v_i^{-1} = g^{-1}h$，由此可得 $g^{-1}h \in \partial A$。然而，由（4）可知 $g^{-1}h \notin \partial A$。这一矛盾表明该情形同样不可能。

因此， I 中任意两个不同顶点之间都不存在边，这意味着 I确实是 $\mathsf{Cay}(G, \partial A)$ 中的一个独立集。

接下来，我们证明：若适当选取 x_i，则集合 I 是 $\mathsf{Cay}(G, \partial A)$ 中的一个支配集。借助图 1 来理解随后的论证会更为方便。由凯莱图 $\mathsf{Cay}(G, \partial A)$ 的定义，我们有 $N[v_i] = (A^{-1}A)v_i$，对每个 $i = 0$，1，……，k。由（4）可知，对每个 $i = 0$，1，……，k，下列包含关系成立：

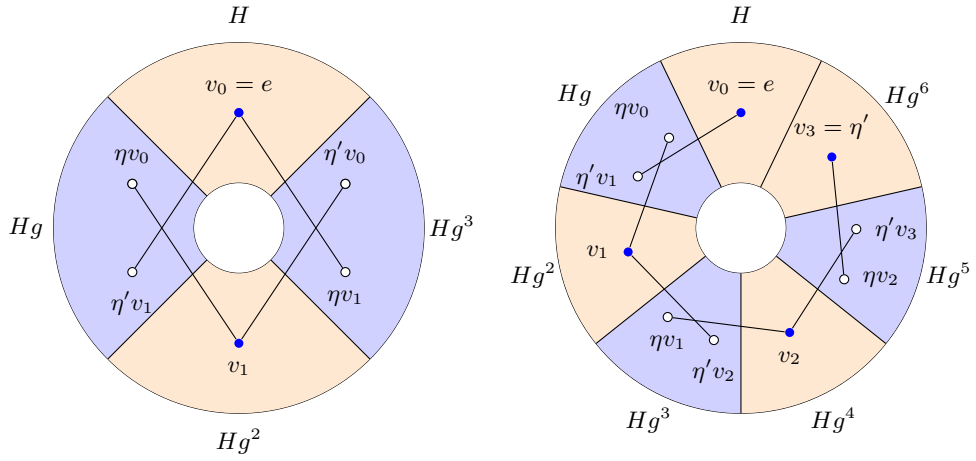
$$Hg^{2i} \subset N[v_i], \tag{5}$$

$$Hg^{2i+1} \setminus \{h^{-1}gv_i\} = Hg^{2i+1} - \eta v_i \subset N[v_i], \tag{6}$$

$$Hg^{2i-1} \setminus \{g^{-1}hv_i\} = Hg^{2i-1} - \eta' v_i \subset N[v_i], \tag{7}$$

为简洁起见，我们记 $X - x$ 而不记 $X \setminus \{x\}$，并定义$\eta = h^{-1}g$ 和 $\eta' = \eta^{-1}$。下表列出了公式（6）和（7）中出现的陪集：

$$\begin{array}{c} Hg - \eta v_0, \ \ldots, \ Hg^{2k-1} - \eta v_{k-1}, \ Hg^{2k+1} - \eta v_k, \\ Hg^{n-1} - \eta' v_0, \ Hg - \eta' v_1, \ \ldots, \ \ Hg^{2k-1} - \eta' v_k, \end{array} \tag{8}$$



(i) $n = 4$ (偶数)　　(ii) $n = 7$ (奇数)

图 1：对于引理 6。集合 $I = \{v_0, \ldots, v_k\}$ 位于偶陪集中。对于每个 i, $N[v_i] = A^{-1}A\ v_i$ Hg^{2i} $Hg^{2i\pm1}$ ( ) 覆盖，并覆盖每个相邻奇陪集，但有两个“空缺点”：ηv_i 以及 $\eta' v_i$。条件 $\eta v_i \neq \eta' v_{i+1}$ 保证 $Hg^{2i+1} \subset N[v_i] \cup N[v_{i+1}]$。在奇数情形下，$v_k = g^{-1}h \in Hg^{n-1}$ 而 v_k 在 Hg^{2k-1} 中的唯一非邻点是 $(g^{-1}h)^2$。

由（8）可知，若 $\eta v_i \neq \eta' v_{i+1}$，则

$$Hg^{2i+1} \subset N[v_i] \cup N[v_{i+1}] \tag{9}$$

对于每个 $i = 0$，……，$k-1$。为确保条件 $\eta v_i \neq \eta' v_{i+1}$ 对于 $i = 0$，……，$k-2$ 成立，显然应如何选取 x_1，……，x_{k-1}。如果已经选定了 x_1，……，x_i，我们选取 x_{i+1} 使得 $\eta v_i \neq \eta' v_{i+1}$，这等价于条件

$$x_{i+1} \neq g^{-2i-2}(h^{-1}g)^2 g^{2i} x_i,\ i = 0, \ldots, k-2.$$

回想一下，根据约定，$x_0 = e$。最后，考虑 $i = k-1$ 的情形，也就是说，已选定 x_k 时。我们区分两种情况：n 为偶数，或 n 为奇数。

如果 n 为偶数，我们必须选择 x_k，使得 $\eta v_{k-1} \neq \eta' v_k$；而由于此时 $2k+1 = n-1$，$\eta v_k \neq \eta' v_0$。因此，我们选择 x_k，使得

$$x_k \neq g^{-2k}(h^{-1}g)^2 g^{2k-2} x_{k-1} \text{ and } x_k \neq g^{-2k}(g^{-1}h)^2.$$

由于 $|H| \geq 3$，这两个条件都可以满足。

现在，设 n 为奇数。我们知道，此时 $n = 2k+1$，$v_k = g^{-1}h$，并且 $\left(g^{-1}h\right)^2$ 是陪集 Hg^{2k-1} 中唯一一个不与 v_k 相邻的顶点。由于 $x_k = h$ 已固定，我们调整已选定的 x_{k-1}，以确保 $\eta' v_{k-1} \neq \eta v_{k-2}$ 和 $\eta v_{k-1} \neq \eta' v_k$ 成立。我们必须满足条件

$$x_{k-1} \neq g^{-2k+2}(h^{-1}g)^2 g^{2k-4} x_{k-2} \text{ and } x_{k-1} \neq g^{-2k+2}(g^{-1}h)^3.$$

如上所述，这样的选择是可行的，因为 $|H| \geq 3$。

因此，由（5），形如 Hg^{2i} 的每个陪集都包含在 $N[v_i]$ 中，其中 $i = 0$，1，……，k。此外，适当选择 x_i 后，由（9）可知，形如Hg^{2i+1} 的每个陪集都包含在 $N[v_i] \cup N[v_{i+1}]$ 中，其中 $i = 0$，1，……，$k-1$。因此

$$G = \bigcup_{i=0}^{k} N[v_i].$$

因此，I 是 $\mathsf{Cay}(G, \partial A)$ 中的支配集。由此，我们证明了 I 是一个独立支配集。因此，$i\big(\mathsf{Cay}(G, \partial A)\big) \leq \lceil n/2 \rceil$。

另一方面，集合

$$\{e, h^{-1}g, (h^{-1}g)^2, \ldots, (h^{-1}g)^{n-2}\}$$

是独立的，因为对任意 $0 \le i < j \le n-2$，我们有 $(h^{-1}g)^{j-i} \notin \partial A$，从而 $(h^{-1}g)^j$ 在 $\mathrm{Cay}(G, \partial A)$ 中不与 $(h^{-1}g)^i$ 相邻。因此，$\mathrm{Cay}(G, \partial A)$ 中最大独立集的大小至少为 $n-1$，即 $\alpha\big(\mathrm{Cay}(G, \partial A)\big) \ge n-1$。由于对所有 $n > 3$ 均有 $n-1 > \lceil n/2 \rceil$，我们得出

$$\alpha\big(\mathrm{Cay}(G, \partial A)\big) > i\big(\mathrm{Cay}(G, \partial A)\big). \qquad \square$$

本节最后，我们给出一个一般性陈述，它将独立支配数与独立数的计算归结为阶更小的图。

引理 7. 设 Γ 是一个点传递图，设 v 是任意一个顶点，并设 X是 $V(\Gamma) \setminus N[v]$上的诱导子图。则

$$i(\Gamma) = i(X) + 1 \quad and \quad \alpha(\Gamma) = \alpha(X) + 1.$$

特别地，这些公式对任意凯莱图都成立。

证明。如果对于任意两个顶点 x 和 y，都存在一个将 x 映射到 y的自同构，那么该图就是顶点传递的。设 I 是一个极大独立集，并设 $x \in I$。那么存在一个 Γ的自同构 f，使得 $f(x) = v$。因此， $f(I)$也是一个极大独立集，且 $|f(I)| = |I|$。于是，不失一般性，我们可以假设 $v \in I$。此外，若 $I' = I \setminus \{v\}$，则 $I' \cap N[v] = \varnothing$，因此 $I' \subset V(X)$。而且， I' 是 X中的一个极大独立集。这就证明了所声称的等式。事实上，若 I 是一个最小的极大独立集，那么

$$i(\Gamma) = |I| = |I'| + 1 = i(X) + 1.$$

同理，我们得到等式 $\alpha(\Gamma) = \alpha(X) + 1$。“特别地”的结论成立，是因为每个凯莱图都是顶点传递的：对于左Cayley图，群元素的右乘是一个自同构。

$\square$

3 二面体群

这里，我们计算某些二面体群 D_n 的凯莱图的独立数和独立支配数，其中 $n \ge 3$。回顾一下， D_n 的阶为$2n$ ，其表示为

$$D_n = \langle a, b \mid a^2 = e, b^2 = e, (ab)^n = e \rangle .$$

关于记号的几点说明。由于我们将在第 7 节和第 9 节中提到计算机代数系统 GAP [8], ，因此简要说明本文使用的 GAP 记号。在 GAP 中，阶为 m （其中 m 为偶数）的二面体群构造为 DihedralGroup(m)，其结构通常报告为字符串 Dm（例如 D8 或 D16）。然而，在本文中， D_n 表示阶为 $2n$ 的二面体群。因此，GAP 中的 DihedralGroup(2n) 对应于我们的 D_n （例如，D8 对应于 D_4，D16 对应于D_8）。

引理 8. 设 $D_n = \langle a, b \rangle$ 为一个二面体群，其中 $a^2 = b^2 = (ab)^n = e$ 和$n \ge 3$。若 $S = \partial\{e, a, b\}$，则

$$i\big(\mathrm{Cay}(D_n, S)\big) = \lceil 2n/5 \rceil, \tag{10}$$
$$\alpha\big(\mathrm{Cay}(D_n, S)\big) = \lfloor 2n/3 \rfloor. \tag{11}$$

证明. 不难验证 $S = \{a, b, ab, ba\}$。我们还要用到以下已知不等式（例如参见 [9, 第 278]页），该不等式对任意最大度为 Γ 的简单图 Δ均成立：

$$i(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{|\Gamma|}{\Delta + 1} \right\rceil. \tag{12}$$

在我们的情形中，$|\Gamma| = 2n$ 和 $\Delta = 4$。因此，要证明（10），只需构造一个大小为 $\lceil 2n/5 \rceil$ 的极大独立集。

注意，凯莱图 Cay(D_n, S) 含有一个哈密顿圈

$$P = (e,\ b,\ ab,\ bab,\ \ldots,\ (ab)^{n-1},\ b(ab)^{n-1},\ e).$$

按顶点沿此圈出现的顺序，用整数 0、1、.....、$2n-1$ 标记这些顶点。我们将每个顶点与其标号对应起来。该图还有两个长度为 n 的圈，即

$$e,\ ab,\ (ab)^2,\ \ldots,\ (ab)^{n-1},\ e \quad \text{and} \quad b,\ (ba)b,\ (ba)^2b,\ \ldots,\ (ba)^{n-1}b\ b.$$

第一个圈上的顶点沿 P 的标号为偶数，第二个圈上的顶点标号为奇数。此外，第一个圈上的连续顶点由左乘 $ab \in S$ 得到，第二个圈上的连续顶点则由左乘 $ba \in S$ 得到。由于 Cay(D_n, S) 是 4-正则的（因为 $|S| = 4$），并结合沿 P 的上述标记，可知两个不同的顶点 i 和 j 相邻，当且仅当它们沿圈 P 的距离至多为 2，等价地，

$$i - j \equiv \pm 1 \pmod{2n} \quad \text{or} \quad i - j \equiv \pm 2 \pmod{2n}.$$

图 2 展示了图 Cay(D_4, S)、Cay(D_5, S) 和 Cay(D_6, S)。

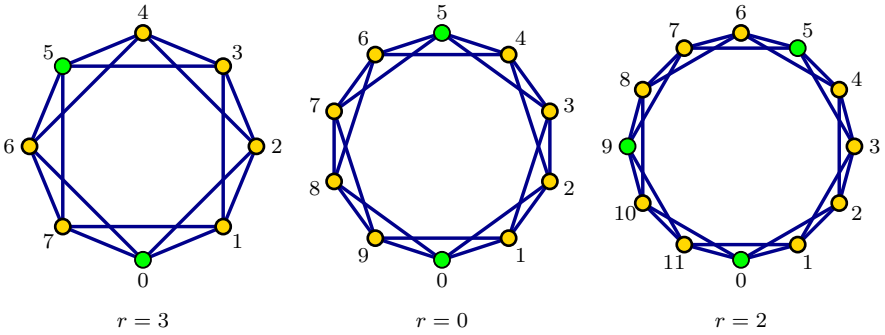


图 2：图 Cay(D_4, S)、Cay(D_5, S)、Cay(D_6, S)

令 $2n = 5q + r$，其中 q 和 r 是满足 $0 \leq r \leq 4$的整数。根据 r的取值，定义集合 I 如下：

$$I = \begin{cases} \{5k \mid k = 0, 1, \ldots, q-1\}, & \text{if } r = 0; \\ \{5k \mid k = 0, 1, \ldots, q-1\} \cup \{2n-3\}, & \text{if } r = 1, 2; \\ \{5k \mid k = 0, 1, \ldots, q\}, & \text{if } r = 3, 4. \end{cases}$$

断言 1： I 是一个独立集。事实上，假设 $5i \sim 5j$。那么

$$5j - 5i \equiv \pm 1, \pm 2 \pmod{2n}. \tag{13}$$

不失一般性，假设 $q \geq j > i \geq 0$。于是 $0 < 5(j-i) \leq 2n$。根据 I 的定义，我们有 $j - i \leq q$ (事实上，除非 $r \geq 3$，否则 $j - i \leq q - 1$)，因此 $5(j-i) \neq 2n$；并且若 $5(j-i) < 2n$，则 $5(j-i)$ 不可能是 ± 1 或 ± 2。

还需验证，对于 $r \in \{1,2\}$，顶点 $2n-3$ 不与任何满足 $0 \le i < q$ 的 $5i$ 相邻。反设 $2n-3 \sim 5i$。那么

$$(2n-3) - 5i = \pm 1, \pm 2 \pmod{2n}.$$

由于 $0 < (2n-3) - 5i < 2n$，我们得到

$$2n - 3 - 5i = 5(q-i) + r - 3 = 1 \text{ or } 2.$$

这意味着 $r \equiv 4$ (模 5) 或 $r \equiv 0$ (模 5)，这与 $r \in \{1,2\}$ 矛盾。因此，在所有情况下，I 都是独立的。

断言 2： I 是一个极大独立集。设 m 是满足 $0 \le m < 2n$ 的任意整数。如果存在 i（其中 $0 \le i < q$），使得 $5i < m < 5(i+1)$，那么 $0 < 5(i+1) - m \le 2$ 或 $0 < m - 5i \le 2$，这意味着 $m \sim 5(i+1)$ 或 $m \sim 5i$。如果不存在这样的 i，那么 $m > 5(q-1)$。现在我们考虑以下三种情况：

- 如果 $r = 0$，那么 $m \sim 5(q-1)$ 或 $m \sim 0$;
- 若 $r = 3, 4$，则 $m \sim 5(q-1)$，或 $m \sim 5q$，或 $m \sim 0$;
- 若 $r = 1, 2$，则 $m \sim 5(q-1)$，或 $m \sim 2n-3$，或 $m \sim 0$。

(图 2中，I 中的顶点以绿色显示。）因此，在所有情况下，I 都是一个极大独立集，并且 $|I| = \lceil 2n/5 \rceil$。这就证明了（10）。

现在证明（11）。我们已经看到，如果 Cay(D_n, S) 中两个顶点不相邻，那么它们沿哈密顿圈 P 的距离至少为 3。令$2n = 3q + r$，其中 $0 \le r \le 2$。反设存在一个大小为 $q+1$的独立集。令 $I = \{0, i_1, \ldots, i_q\}$ 为 $\{0, 1, 2, \ldots, 2n-1\}$ 中的一个顶点独立集，且 $0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_q$。由于 0 和 $2n$ 表示同一个顶点，我们得到以下不等式链

$$\begin{aligned} i_1 &\ge 3, \\ i_2 - i_1 &\ge 3, \\ &\ldots, \\ i_{q-1} - i_{q-2} &\ge 3, \\ i_q - i_{q-1} &\ge 3, \\ 2n - i_q &\ge 3. \end{aligned}$$

将这些相加得到 $2n \ge 3q + 3$，从而与 $2n = 3q + r$ 在 $r \le 2$ 下相矛盾。因此每个独立集至多有 $q = \lfloor 2n/3 \rfloor$ 个顶点。另一方面，显然 $\{0, 3, \ldots, 3(q-1)\}$ 是一个大小为 q 的独立集。这就证明了（11）。 □

4 阶为21和27的非阿贝尔群

本节确定非阿贝尔群 $C_7 \rtimes C_3$ 和 $UT(3, \mathbb{F}_3)$ 的若干选定凯莱图的独立数与独立支配数。

引理 9. 设

$$G = \langle a, b \mid a^7 = b^3 = e,\ bab^{-1} = a^2 \rangle \quad and \quad S = \partial\{e, a, b\}.$$

Then

$$i\big(\mathrm{Cay}(G, S)\big) = 3, \tag{14}$$

$$\alpha\big(\mathrm{Cay}(G, S)\big) = 6. \tag{15}$$

证明。注意到 G 是一个由 7 阶循环群被 3 阶循环群作用构成的半直积。由于 $S = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}, a^{-1}b, b^{-1}a\}$ 和 $|S| = 6$，应用（12）可得$i\big(\mathrm{Cay}(G,\ S)\big) \ge 3$。另一方面，考虑集合 $I = \{e, ba^5, b^2a^4\}$. 容易验证，I 是一个大小为三的极大独立集。因此，$i\big(\mathrm{Cay}(G,\ S)\big) = 3$。

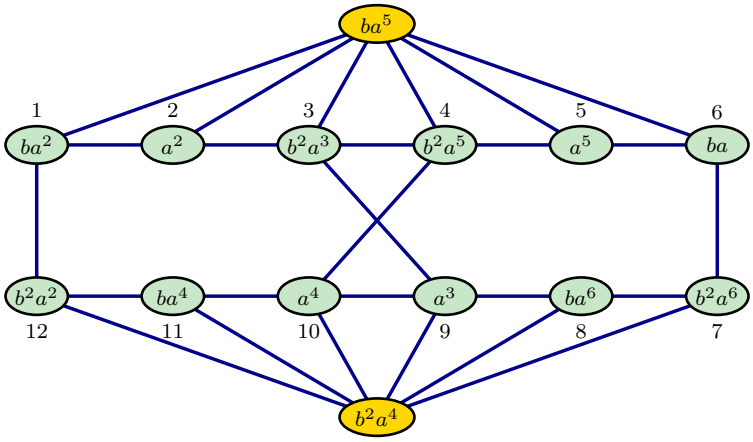


图3：顶点集为 $G \setminus N[e]$, $|G| = 21$ 的 Cay(G, S) 的子图

现在我们证明（15）。由于 $a^{-1} = a^6$， $b^{-1} = b^2$，并且

$$a^{2i}b = ba^i,\ a^{4i}b^2 = b^2a^i,\ i = 1, \ldots, 6,$$

我们有

$$N(e) = \{a,\ a^6,\ b,\ ba^3,\ b^2,\ b^2a\}.$$

我们按这样的顺序列出这些元素：先列出子群 $H = \langle a \rangle$ 中的元素，接着列出 bH 中的元素，然后是 b^2H 中的元素。

令 X 为 Cay(G, S) 的子图，其顶点集为 $G \setminus N[e]$，边集由图3中所示的边构成。它包含一个长度为 12 的圈 P，其中的顶点在图中以绿色标出。如果 X 有一个大小为 6 的独立集 J，那么 $J \subset V(P)$，这意味着 P 上每隔一个顶点都属于 J。考察图3中的两种情形（对 P 的顶点进行标记后， J 中的顶点要么全是偶数编号，要么全是奇数编号），可知这是不可能的。因此，$\alpha(X) \leq 5$。注意，如果 Y 是 $G \setminus N[e]$ 上的诱导子图，那么 X 是 Y 的子图，因此 $\alpha(Y) \leq \alpha(X) \leq 5$。因此，由引理 7 可知， $\alpha\big(\text{Cay}(G, S)\big) \leq 6$。

另一方面， Cay$(G,\ S)$确实有一个包含六个顶点的独立集：

$$\{e,\ a^4,\ ba,\ ba^6,\ b^2a^2,\ b^2a^3\}.$$

由此可得， $\alpha\big(\text{Cay}(G,\ S)\big) = 6$。

□

引理10。设

$$G = \langle a,\ b,\ c \mid a^3 = b^3 = c^3 = e,\ b^{-1}a^{-1}ba = c,\ ac = ca,\ bc = cb \rangle.$$

若 $S = \partial\{e, a, b, c\}$， 则

$$i\big(\text{Cay}(G, S)\big) = 3, \tag{16}$$

$$\alpha\big(\text{Cay}(G, S)\big) = 6. \tag{17}$$

证明。 尽管我们并未用到这一事实，但值得指出的是， G 与域 $\mathbb{F}_3$ 上的三阶单位上三角矩阵群 $UT(3,\ \mathbb{F}_3)$同构。由下式定义的映射

$$a \mapsto t_{1,2}(1),\ b \mapsto t_{2,3}(1),\ \text{and } c \mapsto t_{1,3}(-1)$$

可延拓为一个同构 $G \to UT(3,\ \mathbb{F}_3)$。这里，$t_{i,\ j}(\sigma)$表示一个初等变换，即将单位矩阵的$(i,\ j)$项替换为 σ。

利用 $ba = abc$ 以及 $c \in Z(G)$这一事实，我们得到

$$S = \{a,\ b,\ c,\ a^2,\ b^2,\ c^2,\ a^2b,\ ab^2c^2,\ a^2c,\ ac^2,\ b^2c,\ bc^2\}.$$

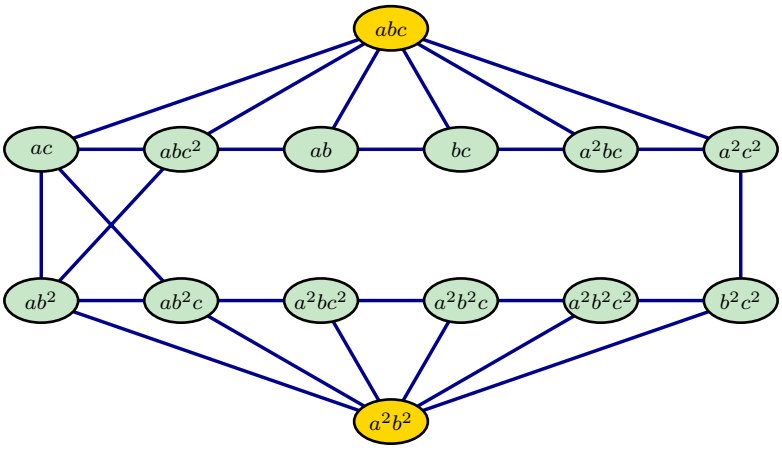


图 4：Cay(G,S) 的子图，顶点集为 $W = G \setminus N[e]$，其中 $|G| = 27$

令 W 为 Cay(G,S) 的子图，其顶点集为 $G \setminus N[e]$，边集由图4中所示的边组成。要验证两个顶点 u、$v \in W$ 相邻，只需检查 $uv^{-1} \in S$。例如，由于

$$(abc)(a^2c^2)^{-1} = (abc)(ca) = abac^2 = a^2bc^3 = a^2b \in S,$$

我们有 $abc \sim a^2c^2$。

应用界（12），结合 $\Delta = |S| = 12$，可得

$$i\big(\mathrm{Cay}(G,S)\big) \geq \left\lceil \frac{27}{12+1} \right\rceil = 3.$$

可以验证，集合 $D = \{e,\, abc,\, a^2b^2\}$ 在 Cay(G,S) 中是独立集。此外，abc 和 a^2b^2 支配 Cay(G,S) 中的每个顶点，而 e 支配 $N[e]$。因此，D 是 Cay(G,S) 中的独立支配集，从而 $i\big(\mathrm{Cay}(G,S)\big) \leq 3$。结合上述下界，可得 $i\big(\mathrm{Cay}(G,S)\big) = 3$。

接下来，也很容易验证由六个顶点组成的集合

$$\{e,\, ac,\, ab,\, a^2bc,\, b^2c^2,\, a^2b^2c\}$$

在 Cay(G,S) 中是独立集。另一方面，子图 W 不包含大小为 6 的独立集。事实上，任何这样的集合都必须完全位于 12-圈上（其顶点在图 4中以绿色标出），但另外两条边$\{ac, ab^2c\}$ 和 $\{ab^2, abc^2\}$ 使得该圈上无法形成大小为 6 的独立集（这样的独立集必须由交替顶点构成）。根据引理 7，因此我们得出 $\alpha\big(\mathrm{Cay}(G,S)\big) = 6$。

□

5 群 $\mathbb{Z}_2^5$ 和 $\mathbb{Z}_3^3$

本节计算初等阿贝尔群 $\mathbb{Z}_2^5$ 和 $\mathbb{Z}_3^3$ 的某些凯莱图的独立数和独立支配数。

引理 11 (见 [7])。 在群 $\mathbb{Z}_2^5$ 中，选取集合

$$A = \{0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\},$$

其中，e_i 是长度为5 的单位向量，在第 i 个位置为1，其余位置均为0。于是

$$S = \{e_i \mid 1 \leq i \leq 5\} \cup \{e_i + e_j \mid 1 \leq i < j \leq 5\},$$

and

$$i\big(\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_2^5, S)\big) = 2, \quad \alpha\big(\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_2^5, S)\big) = 4. \tag{18}$$

证明。设 $G = \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_2^5, S)$。将每个 $x \in \mathbb{Z}_2^5$ 唯一地写成 $x = \sum_{i=1}^{5} x_i e_i$，其中 $x_i \in \{0,1\}$，并定义汉明重量

$$\mathrm{wt}(x) = |\{i \mid x_i = 1\}|.$$

由于 S 由所有权重为 1 或 2 的向量组成，因此当且仅当 $\mathrm{wt}(x+y) \in \{1,2\}$ 时，x, y 中的两个顶点在 G 中相邻。

独立控制。由于 $|V(G)| = 32$ 且 $\Delta = |S| = 15$，不等式 (12) 给出

$$i(G) \geq \left\lceil \frac{32}{15+1} \right\rceil = 2.$$

令 $u = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$（因此 $\mathrm{wt}(u) = 5$）。对于任意 $v \in \mathbb{Z}_2^5$，要么 $\mathrm{wt}(v) \leq 2$，要么 $\mathrm{wt}(u+v) = 5 - \mathrm{wt}(v) \leq 2$。因此，每个顶点都属于 $N[0] \cup N[u]$，故 $\{0, u\}$ 是一个支配集。因此 $i(G) \leq 2$，从而 $i(G) = 2$。

独立数。考虑集合

$$I = \{0,\ e_1 + e_2 + e_3,\ e_1 + e_4 + e_5,\ e_2 + e_3 + e_4 + e_5\}.$$

对于任意不同的 $x, y \in I$，可以验证 $\mathrm{wt}(x+y) \geq 3$，因此 $x + y \notin S$ 和 I 是独立的。故 $\alpha(G) \geq 4$。

为证明 $\alpha(G) \leq 4$，设 J 是 G中的一个最大独立集。通过平移，我们可以假设 $0 \in J$。于是对所有 $x \in J \setminus \{0\}$，均有$\mathrm{wt}(x) \geq 3$ 。

权为5的唯一向量不能与任何其他非零顶点一起属于 J，因为它与每个权为3或4的向量都相邻。此外，J 至多包含一个权为4的向量，因为任意两个不同的权为4的向量恰好在两个坐标上不同，因而相邻。

最后，J至多包含两个权为3的向量。事实上，若 A，B，$C \subset \{1, \ldots, 5\}$是 J中三个权为3的向量的支集，则独立性蕴含 $|A \cap B| \leq 1$、$|A \cap C| \leq 1$、$|B \cap C| \leq 1$，从而

$$|A \cup B \cup C| = 9 - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \geq 9 - 3 > 5,$$

矛盾。

Thus $|J| \leq 1 + 1 + 2 = 4$, so $\alpha(G) \leq 4$, and therefore $\alpha(G) = 4$. □

引理12. 在群 $\mathbb{Z}_3^3$中，定义 $A = \{0, e_1, e_2, e_3\}$，其中 e_i 表示第 i个标准基向量。于是我们有

$$S = \{\pm e_i,\ \pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i \neq j \leq 3\}$$

and

$$i\big(\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_3^3, S)\big) = 3, \quad \alpha\big(\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_3^3, S)\big) = 4. \tag{19}$$

证明。将群 $G = \mathbb{Z}_3^3$ 中的每个元素表示为一个长度为三的字符串；因此，为简便起见，我们不写 (i, j, k)，而写作 ijk。令 $\Gamma = \mathrm{Cay}(G, S)$。

由于 $|S| = 12$，不等式 (12) 给出

$$i(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{27}{12+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{27}{13} \right\rceil = 3.$$

此外，

$$D = \{000, 111, 222\}$$

是 Γ中的一个独立支配集，这意味着 $i(\Gamma) = 3$。为证明 D是支配集，注意，若 $g \in G$ 有三个互不相同的坐标，则 g 与 000 相邻。另一方面，只要 g 至少有两个坐标等于 k，g 就与 kkk 相邻。

现在我们证明 $\alpha(\Gamma) = 4$。容易找到一个包含四个顶点的独立集，例如 $\{000, 110, 211, 022\}$，因此 $\alpha(\Gamma) \geq 4$。

令 X 为 Γ 在 $V(\Gamma)$ 上的诱导子图 $\setminus N[000]$。由引理 7， $\alpha(\Gamma) = \alpha(X)+1$。因此，只需证明 $\alpha(X) \le 3$。

X 的顶点集恰好由那些与 000 不相邻的顶点组成。特别地，111， $222 \in V(X)$。将 X中其余与 111 和 222 不同的顶点按如下方式排列：

$$A=\{110,101,011\},\ C=\{220,202,022\},$$
$$B=\{112,121,211\},\ D=\{221,212,122\}.$$

设 $Q=\{111,222\}$。集合 A、B、C、D 各自在 X中诱导出一个三角形。此外， $A\cup B$中的每个顶点都与 111 相邻，而 $C\cup D$中的每个顶点都与 222 相邻。

设 J 是 X中的一个独立集。我们声称 $|J|\le 3$。

情形 1： $J\cap Q\neq\varnothing$。由对称性（利用 $x\mapsto -x$），不妨设 $111\in J$。那么 J不包含 $A\cup B$中的顶点，且与 C 和 D 的交集各至多包含一个顶点。因此 $|J|\le 1+1+1=3$。

情形 2： $J\cap Q=\varnothing$。**</style}如果，那么 与、**C、D 中的每一个至多相交于一个顶点，因此 $|J|\le 3$。否则，根据对称性，不妨设 $110\in J$。$B\cup D$ 中与 110 不相邻的顶点只有三个，即

$$E=\{121,211,221\}.$$

集合 E 在 X中构成一个三角形，因此 $|J\cap E|\le 1$。再结合 $|J\cap C|\le 1$，得到 $|J|\le 1+1+1=3$。

因此， $\alpha(X)\le 3$，从而 $\alpha(\Gamma)=\alpha(X)+1\le 4$。 consequently， $\alpha(\Gamma)=4$。 □

6 群 A_4 和 $(C_3\times C_3)\rtimes C_2$

本节计算交错群 A_4 和半直积 $(C_3\times C_3)\rtimes C_2$的某些凯莱图的独立数和独立支配数，其中 C_2 的非平凡元素通过取逆作用于 $C_3\times C_3$。我们从 A_4的一个表示开始。

引理 13. 设

$$G=\langle a,b,t\mid a^2=b^2=t^3=e,\ ab=ba,\ t^{-1}at=b,\ t^{-1}bt=ab\rangle$$

并设 $A=\{e,b,t\}$。则

$$i\big(\mathrm{Cay}(G,\partial A)\big)=2\quad and\quad \alpha\big(\mathrm{Cay}(G,\partial A)\big)=3.$$

证明。容易验证， $G\cong A_4$。G 中的每个元素都有唯一的标准形$t^ia^jb^k$，其中 $i\in\{0,1,2\}$ 且 $j,\ k\in\{0,1\}$。由于 $bt=tab$，我们得到

$$\partial A=(A^{-1}A)\setminus\{e\}=\{b,t,t^2,tab,t^2b\}.$$

简单计算表明，Cay($G,\ \partial A$) 与二十面体图同构，如图 5 所示。注意到 $\{e,a\}$ 是一个独立支配集，因此 $i\big(\mathrm{Cay}(G,\ \partial A)\big)=2$。另一方面，二十面体图的独立数为 3（例如， $\{e,ab,tb\}$ 是一个大小为 3 的独立集）。因此，$\alpha\big(\mathrm{Cay}(G,\ \partial A)\big)=3$。

□

引理 14。设

$$G=\langle a,b,t\mid a^3=b^3=t^2=e,\ ab=ba,\ tat=a^2,\ tbt=b^2\rangle$$

并令 $A=\{e,a,t,bt\}$。那么

$$i\big(\mathrm{Cay}(G,\partial A)\big)=2,\quad and\quad \alpha\big(\mathrm{Cay}(G,\partial A)\big)=4.$$

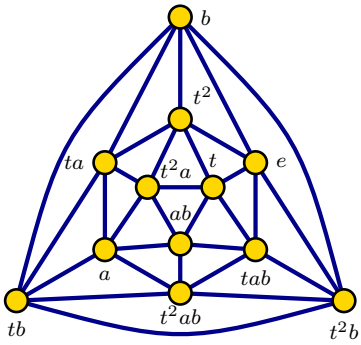


图5：凯莱图 Cay($A_4, \partial A$) 是二十面体图

证明。 群 G 是初等阿贝尔群 $\langle a, b\rangle$与 2 阶循环群 $\langle t\rangle$ 的半直积。 G 中的每个元素都可以唯一地写成 $a^i b^j t^k$ 的形式，其中 $i, j \in \{0, 1, 2\}$ 且 $k \in \{0, 1\}$。我们将在全文中使用这一表示。直接计算可得

$$\partial A = \{a,\ a^2,\ b,\ b^2,\ t,\ bt,\ a^2t,\ a^2bt\}.$$

可以验证，闭邻域 $N[e]$和 $N[ab^2t]$覆盖 G，并且$\{e, ab^2t\}$是 Cay($G, \partial A$) 中的一个独立集，因此 $i\big(\text{Cay}(G, \partial A)\big) \leq 2$；又因为$i\big(\text{Cay}(G, \partial A)\big) \geq 2$，我们得到 $i\big(\text{Cay}(G, \partial A)\big) = 2$。

接下来注意到， $\{e, ab, abt, b^2t\}$ 是一个大小为四的独立集。我们证明，Cay(G, ∂A) 中的每个独立集 I至多含有四个顶点。由于 Cay($G, \partial A$) 是顶点传递的，我们不妨假设 $e \in I$。Cay($G, \partial A$) 的顶点集分解为以下陪集

$$T(h) = \{h, ah, a^2h\},\ h \in \langle b, t\rangle.$$

每个 $T(h)$ 都在 Cay(G, ∂A) 中构成一个三角形，因为 a, $a^2 \in \partial A$和 $a^3 = e$。在一个独立集中，每个三角形中至多能选取一个顶点。三角形$T(t)$ 和 $T(bt)$ 各自恰好包含一个与 e 不相邻的顶点：分别是 at和 abt。如果 I 不包含来自这两个三角形的顶点，那么 $|I| \leq 4$。由于 at和 abt 相邻，它们中至多有一个属于 I。如果 $at \in I$，那么我们有

$$T(bt) \cup T(b) \subset N(e) \cup N(at);$$

如果 $abt \in I$，那么

$$T(t) \cup T(b^2) \subset N(e) \cup N(abt).$$

在这两种情况下，我们都可以看到，至少有两个三角形不包含 I 中的任何元素。因此， $\alpha\big(\text{Cay}(G,\ \partial A)\big) = 4$。 □

7 阶为 16 的群

本节中，我们计算某些 16 阶群的凯莱图的独立数和独立支配数。众所周知，16 阶群共有 14 个。关于 16 阶群分类的现代简明论述可见 [10]。

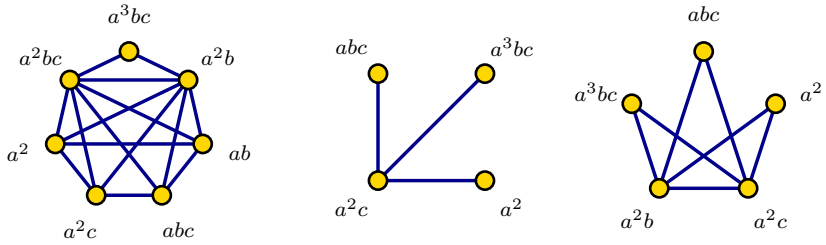
引理 15. 除 $\mathbb{Z}_2^4$ 外，所有阶为16的群都是不稳定的。

证明。 设 G 是一个16阶群。如果 G包含一个8阶元素，则结论由引理 3和推论 5得出。具有此性质的非阿贝尔16阶群有四个： `C8 : C2`、`D16`、`QD16`和 `Q16`。它们在 `GAP` [8]中对应的16阶群编号分别为6、7、8和9。

下文中，群的所有结构描述（例如 C8 : C2 等）及其对应编号均直接取自 GAP计算代数系统。请注意，GAP 的 StructureDescription 在同构意义下并不总是唯一；特别是，(C4 x C2) : C2 在16阶群中对应编号3和13。因此，必要时我们将用 GAP编号来指称这类群。

若 G 有一个阶为4的正规子群 F，且其商群 G/F为循环群，则由引理6可知， G 是不稳定的。这样的非阿贝尔16阶群有三个：`(C4 x C2) : C2`、`C4 : C4`和`C8 : C2`（GAP编号3、4和6）。除 $\mathbb{Z}_2^4$ 之外，每个阿贝尔16阶群也都有一个阶为4的循环商群，因此是不稳定的。

因此，剩下要验证的是其余三个16阶群的这一结论，即GAP编号为11、12和13的群；它们的StructureDescription分别为C2 x D8、C2 x Q8和(C4 x C2) : C2。现在，对于这三个群中的每一个，我们指定一个子集 A，并计算凯莱图Cay(G, ∂A)的独立数和独立支配数。



(i) C2 × D8　　(ii) C2 × Q8　　(iii) (C4 × C2) : C2

图6：三个16阶群的凯莱图在 $G \setminus N[e]$上的诱导子图

情形 C2 × D8。该群可由以下表示定义：

$$G = \langle a, b, c \mid a^4 = b^2 = c^2 = e,\ ac = ca,\ bc = cb,\ (ab)^2 = e \rangle.$$

注意 $D_4 \cong \langle a,\ b \rangle$。如果 $A = \{e, a, b, c\}$，那么

$$\partial A = \{a,\ a^3,\ a^3b,\ b,\ ac,\ a^3c,\ bc,\ c\}.$$

我们用到了 $(ab)^2 = e$，等价地说， $bab = a^3$，以及 $bc = cb$。在 Cay(G, ∂A) 中，考虑由集合诱导的子图 X

$$G \setminus N[e] = \{a^2,\ a^2b,\ ab,\ a^2c,\ abc,\ a^2bc,\ a^3bc\}.$$

图 6(i) 展示了 X。由于 $i(X) = 1$ 且 $\alpha(X) = 3$，由引理 7 可知$i\big(\mathrm{Cay}(G,\ \partial A)\big) = 2$ 以及 $\alpha\big(\mathrm{Cay}(G,\ \partial A)\big) = 4$。

情形C2 x Q8。设

$$G = \langle a, b, c \mid a^4 = b^4 = c^2 = e,\ a^2 = b^2,\ ac = ca,\ bc = cb,\ (ab)^2 = a^2 \rangle.$$

令 $H = \langle a,\ b \rangle$ 和 $A = \{e, a, b, c\}$。我们有 $H \cong Q_8$。由于 $a^2,\ c \in Z(G)$ 且$ab^3 = ba$，因此

$$(A^{-1}A) \cap H = \{e,\ a,\ b,\ a^3,\ b^3,\ a^3b,\ b^3a\} \quad \text{and} \quad H \setminus A^{-1}A = \{a^2\}$$

and

$$(A^{-1}A) \cap Hc = \{c,\ ac,\ bc,\ a^3c,\ b^3c\} \quad \text{and} \quad Hc \setminus A^{-1}A = \{a^2c,\ abc,\ a^3bc\}.$$

因此，

$$\partial A = \{a,\ b,\ a^3,\ b^3,\ a^3b,\ b^3a,\ c,\ ac,\ bc,\ a^3c,\ b^3c\}$$

and

$$G \setminus N[e] = \{a^2,\ a^2c,\ abc,\ a^3bc\}.$$

令 X 为由 $G \setminus N[e]$诱导的子图；见图 6（ii）。显然， $i(X)$ =1，且 $\alpha(X) = 3$。结合引理 7，可得 $i\big(\mathrm{Cay}(G, \partial A)\big) = 2$ 和$\alpha\big(\mathrm{Cay}(G, \partial A)\big) = 4$。

情形 (C4 x C2) : C2。在此情形下，我们考虑一个 GAP ID 13 的16阶群。它具有如下表示:

$$G = \langle a, b, c \mid a^4 = b^2 = c^2 = e,\ ab = ba,\ ca = ac,\ (bc)^2 = a^2 \rangle.$$

注意，尽管不会用到这一点， $\langle b,\ c\rangle \cong D_4$ 以及 $Q_8 \cong \langle ab,\ ac\rangle$；此外，$G$ 有时称为泡利群（在量子物理的语境中）。

令 $A = \{e, a, b, c\}$。如上所述，设 $H = \langle a,\ b\rangle$。我们有 $H \cong C_4 \times C_2$。由于$a \in Z(G)$且 $cbc = a^2b$，因此可得

$$(A^{-1}A) \cap H = \{e,\ a,\ a^3,\ b,\ ab,\ a^3b\} \quad \text{and} \quad H \setminus A^{-1}A = \{a^2,\ a^2b\}$$

and

$$(A^{-1}A) \cap Hc = \{c,\ ac,\ a^3c,\ bc,\ a^2bc\} \quad \text{and} \quad Hc \setminus A^{-1}A = \{a^2c,\ abc,\ a^3bc\}.$$

因此，

$$\partial A = \{a,\ a^3,\ ab,\ a^3b,\ b,\ c,\ ac,\ a^3c,\ bc,\ a^2bc\}$$

and

$$G \setminus N[e] = \{a^2,\ a^2b,\ a^2c,\ abc,\ a^3bc\}.$$

在 $G \setminus N[e]$ 上的诱导子图如图 6（iii）所示。引理 7 现在可得$i\big(\mathrm{Cay}(G, \partial A)\big) = 2$ 和 $\alpha\big(\mathrm{Cay}(G, \partial A)\big) = 4$。 □

8 有限稳定群的刻画

以下定理给出了有限稳定群的完整刻画。 [7, 定理3.1], 中的证明主要依赖计算机计算。在此，我们给出一个不需要任何计算机计算的证明。

定理16。 有限稳定群在同构意义下恰有14 个:

$$\begin{gathered} C_1,\ C_2,\ C_2 \times C_2,\ C_2 \times C_2 \times C_2,\ C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2, \\ C_3,\ C_3 \times C_3,\ C_4,\ C_2 \times C_4, C_5,\ C_7,\ S_3,\ D_4,\ Q_8. \end{gathered} \tag{20}$$

利用良覆盖图和凯莱图的概念，我们可以将该定理改述如下:

定理。 若 G 是一个有限群，且其凯莱图 $\mathrm{Cay}(G, \partial A)$ 对每个子集 $A \subseteq G$都为良覆盖，则 G 是 (20)中列出的群之一。反之，若 G 是这些群之一，则 $\mathrm{Cay}(G, \partial A)$ 对每个 $A \subseteq G$都为良覆盖。

证明。 设 G 是满足定理条件的有限群。由引理 3和推论 5可知， G 的每个非平凡循环子群的阶只能是 2、3、4、5 或 7，不允许有其他阶。因此，若 p 是 $|G|$的一个素因子，则$p \in \{2, 3, 5, 7\}$。此外，由引理 11、12和 6可知， G 的阶不能被 49、25、27 或 32 整除。

此外， G中每个非平凡元素的中心化子都必须是一个 p-子群（对某个 $p \in \{2, 3, 5, 7\}$）；否则， G 将包含一个禁阶循环子群。特别地，如果 G 的中心非平凡，那么 G是一个 p-群。

情形 1： G 是一个 p-群。若 $p \in \{5,7\}$，则 $|G| = p$，因此 G 是循环群。若 $p = 3$，则 $G \cong C_3$ 或 $G \cong C_3 \times C_3$。若 $p = 2$，则根据引理 15， $|G| \leq 8$ 或 $G \cong C_2^4$。情形 2： $|G|$ 可被 $p \in \{5,7\}$ 整除，但严格大于 p。先假设 $p = 7$。令 P 为 G 的一个 Sylow p-子群，并令 $H = N_G(P)$。

假设 $H \neq P$。定义 φ： $H \to$Aut $P$by $\varphi(h)(x) = h^{-1}xh$for $x \in P$。那么 Ker $\varphi = C_H(P)$。由于 $P \leq C_H(P)$ 且 $C_H(P)$ 是一个 p-子群，又因为 P是 H的一个 Sylow p-子群，所以我们有 $C_H(P) = P$。因此， H/P嵌入 Aut(P)。由此可得 $|H/P| \in \{2,3,6\}$，故无论如何， H在 P上方都有一个指数为 2 或 3 的子群，因此（由于 $C_H(P) = P$）包含一个与 D_7同构的子群，或一个阶为 21 的非阿贝尔群。这些群都不稳定（见引理 8、9），矛盾。

现在假设 $H = P$。伯恩赛德正规 p补定理 [11, 定理 10.1。8] 保证存在一个正规子群 $F \lhd G$ 满足 $|G : F| = p$。根据引理 6，这样的循环商群会导致 G 不稳定，再次产生矛盾。因此，若 $7 \mid |G|$，则 $|G| = 7$。

当 $p = 5$ 时，类似的论证同样适用：将 D_7 替换为 D_5，并注意到任何非平凡的 4 阶因子也会导出一个不稳定群（由引理 8 和 6可知）。

情形 3： $|G|$ 既不能被 7 整除，也不能被 5 整除，但能被 3 整除。我们证明$G \cong S_3$ 或 $G \cong C_3$。令 P 为一个 Sylow 3-子群，并假设 $G \neq P$。那么 P 是一个阶为 3 或 9 的初等阿贝尔群（因为没有元素的阶为 9）。

情形 3a： $|P| = 3$。令 Q 为 G的一个 Sylow 2-子群。那么 $|G : Q| = 3$，因此 G 在 Q 的左陪集上的作用给出一个同态 φ： $G \to S_3$，其核满足 Ker(φ) $\leq Q$。

若 Ker(φ) $= \{e\}$，则 $G \cong \varphi(G) \leq S_3$，因此 $G \cong S_3$ 或 C_3。若 Ker(φ) 非平凡，令 $A \lhd G$ 为一个极小正规子群。于是 A 是一个初等阿贝尔 2- 群，而 P 的一个非单位元通过共轭作用在 A上诱导出一个 3 阶无不动点自同构。由此可得 $|A| = 4$，这通过引理 13导出矛盾。

情形 3b： $|P| = 9$。若 $N_G(P) \neq P$，则 $N_G(P)/P$具有偶数阶；特别地，存在 2 阶的 $a \in N_G($ $P)$。令 $H = P\langle a\rangle$。则 $C_H(a) = \langle a\rangle$（因为 $C_G(a)$ 是一个 2-群，故 $C_P(a) = \{e\}$），且 H 是引理 14 中的群，因此它是不稳定的。

若 $N_G(P) = P$，设 Q为一个 Sylow 2-子群，使得 $G = QP$。由于 $|P| = 9$与 P 是初等阿贝尔的， P的每个非单位元都具有 3 阶。对任意 3 阶元素$t \in G$，中心化子 $C_G(t)$ 是一个 3-子群。特别地，不同的 Sylow 3-子群平凡相交，因为若 $t \neq e$ 位于该交集中，则这两个 Sylow 3-子群都包含于 $C_G(t)$（因为它们是阿贝尔的），从而它们重合。由于 $N_G(P) = P$，Sylow 3-子群的个数等于 $[G : N_G(P)] = [G : P] = |Q|$。因此 G 恰有 $8|Q|$ 个 3 阶元素，从而恰有$|G| - 8|Q| = |Q|$ 个 2-幂阶元素。由此可知 Sylow 2-子群是唯一的，从而 $Q \lhd G$。（或者， $Q \lhd G$ 可由 Burnside 正规 3-补定理直接得出，因为此处 $N_G(P) = C_G(P) = P$。）

现在固定任意一个非单位元 $t \in P$。由于 Q 是 2-群，$Q\langle t\rangle$ 的 Sylow 3-子群为 $\langle t\rangle$，且阶为 3。因此，根据情形 3a， $Q\langle t\rangle$ 不稳定。

为了完成定理的证明，还需验证列表（20）中的每个群都是稳定的。我们先介绍若干预备事实，然后将其应用于所讨论的群。设 $A \subseteq G$ 非空。

步骤 1。 基本观察。若 $A = \{e\}$，则 $\partial A = \varnothing$，且 Cay($G, \partial A$) 没有边，因此是良覆盖的。设 $H = \langle A\rangle$。若 Cay($H, \partial A$) 是良覆盖的，则 Cay($G, \partial A$) 也是良覆盖的（见引理 4）。因此，只需考虑 G 的生成子集 A，满足 $e \in A$。

步骤 2. 完全诱导子图。如果 $G = A^{-1}A$，则 Cay($G, \partial A$) 是完全图，因此显然是良覆盖的。假设 $G \neq A^{-1}A$，并令 X 为 Cay($G, \partial A$) 在 $G \setminus A^{-1}A$上诱导的子图。回顾一下， $A^{-1}A = N[e]$ 和 $\partial A = N(e)$。如果X 是良覆盖的，那么根据引理 7， Cay($G, \partial A$) 也是良覆盖的。特别地，如果 $|X| \leq 2$，图 X 显然是良覆盖的，因此 Cay($G, \partial A$) 是良覆盖的。此外，如果

X 是完全图，那么对于任意 $B \supseteq A$，由 $G \setminus B^{-1}B$ 诱导的子图也必为完全图（或空图），因此 Cay($G, \partial B$) 是良覆盖的。

步骤3。 阶很小的群。若 $|G| \leq 5$ 和 A 是 G的生成子集，则不难验证 $|G \setminus A^{-1}A| \leq 2$。因此，Cay($G$, ∂A) 是良覆盖的。这表明，所有循环群 C_i （其中 $i \leq 5$）以及群 $C_2 \times C_2$ 都是稳定的。

步骤4。 群 S_3、 $C_3 \times C_3$、 $C_2 \times C_4$、 C_2^3、 D_4 和 Q_8。设 $A \subseteq G$是一个生成子集，且 $e \in A$，并假设 A 在满足此性质的情况下是极小的。由于 G 不是循环群，因此有 $|A| \geq 3$。

步骤4a。 $G = Q_8$。群 Q_8 的任一极小生成集都由两个阶为 > 2的元素组成。若 $A = \{e, x, y\}$ 且 $|x|$, $|y| > 2$，则

$$A^{-1}A = \{e, x, y, x^{-1}, y^{-1}, x^{-1}y, y^{-1}x\}. \tag{21}$$

特别地， $|A^{-1}A| \geq 6$，从而 $|G \setminus A^{-1}A| \leq 2$。由步骤 2，Cay($G, \partial A$)是良覆盖的。因此 G是稳定的。

步骤4b. $G = C_3 \times C_3$。由（21）在此情形下可得 $|A^{-1}A| = 7$；因此Cay($G, \partial A$)是良覆盖的，且 G 是稳定的。

步骤4c. $G = C_2 \times C_4$。若 $A = \{e, x, y\}$ 且 $|x| = 2$ 以及 $|y| > 2$，则

$$A^{-1}A = \{e, x, y, y^{-1}, xy, y^{-1}x\}. \tag{22}$$

由于 G 是阿贝尔的，且 $|y| = 4$，列表（22）中的元素互不相同，且我们有 $|A^{-1}A| = 6$。因此，无论极小生成集仅由4 阶元素组成（见（21）），还是包含一个 2 阶生成元（如（22）），Cay($G, \partial A$)是良覆盖的。因此 G 是稳定的。

步骤4d. $G = S_3$。在这种情况下，极小生成集包含一个 2 阶元素和一个 3 阶元素，或者两个生成元的阶都是 2。若 $A = \{e, x, y\}$ with$|x| = |y| = 2$，则

$$A^{-1}A = \{e, x, y, xy, yx\}. \tag{23}$$

直接检验可知，对于每个满足 $e \in A$ 的生成子集 A，都有 $|S_3 \setminus A^{-1}A| \leq 2$。因此，根据步骤 2， S_3 是稳定的。

步骤4e. $G = C_2^3$。设 $A \subseteq G$ 是满足 $e \in A$ 的极小生成子集。则 $A = \{e, x, y, z\}$，其中 x， y， z 相互独立。由于 $G \cong C_2^3$ 是初等阿贝尔的，我们有 $A^{-1}A = AA = \{e, x, y, z, xy, xz, yz\}$，因此，对于每个这样的 A，都有 $|A^{-1}A| = 7$ 和 $|G \setminus A^{-1}A| = 1$。于是，根据步骤 2， G 是稳定的。

步骤 4f. $G = D_4$。设 $A = \{e, x, y\}$ 是一个极小生成子集，且 $e \in A$。那么，要么 $|x| = |y| = 2$，要么交换 x 和 y后，有 $|x| = 2$ 且 $|y| = 4$。我们讨论 $|x| = |y| = 2$ 这一情形；第二种情形在重新标记生成元后得到相同的凯莱图。由（23），可得

$$X = G \setminus A^{-1}A = \{xyx,\ yxy,\ (xy)^2\}.$$

此外， X 中任意两个不同顶点的乘积都属于 ∂A:

$$xyx\,(yxy)^{-1} = yx \in \partial A, \qquad xyx\,(xy)^{-2} = y \in \partial A, \qquad yxy\,(xy)^{-2} = x \in \partial A.$$

因此， X 上的诱导子图是 K_3，故由步骤 2 可知，Cay(G, ∂A) 是良覆盖的。因此， D_4 是稳定的。

步骤 5. 7 阶循环群。设 $G = \langle a \rangle$ 是 7 阶循环群。若 $A = \{e, a\}$，则由引理 3可知，Cay(G, ∂A) 是良覆盖的。若 $|A| \geq 3$，则 $|G \setminus A^{-1}A| \leq 2$，因此由步骤 2 可知，Cay($G$, ∂A) 是良覆盖的。因此 C_7 是稳定的。

步骤 6. 群 $G = C_2^4 \cong \mathbb{F}_2^4$。令 $ijkl$ 表示 (i, j, k, l) $\in \mathbb{F}_2^4$。考虑

$$A = \{0000,\ 1000,\ 0100,\ 0010,\ 0001\}.$$

那么 ∂A 由这五个元素以及所有恰有两个 1 的元素组成。因此， $X = G \setminus (A + A)$ 是恰有三个 1 的向量集合，并包含 1111；于是 $|X| = 5$。由 X 诱导的子图是完全图，因而是良覆盖的，所以 Cay(G, ∂A) 是良覆盖的。

现在令 $B \subseteq G$为任意生成子集。由于 $\mathbb{F}_2^4$ 是 $\mathbb{F}_2$上的四维向量空间， B 必定至少包含四个构成一组基的元素。不失一般性，假设 B 包含 0000、1000、0100、0010 和 0001。我们已经看到，由 $G \setminus (A + A)$诱导的子图是完全的；因此， $G \setminus (B + B)$也诱导出一个（可能为空的）完全子图。由此可得，Cay(G, ∂B)是良覆盖的，因此 G是稳定的。这就完成了证明。 □

9 GAP 对凯莱图 $\mathrm{Cay}(G, S)$ 的验证

本节提供一段简短的 GAP 脚本，用于计算本文所考察凯莱图的独立支配数 $i(\Gamma)$ 和独立数 $\alpha(\Gamma)$。对于不希望跟随正文论证的读者，这段脚本可用于计算验证。

对于每个群 G，我们固定一个子集 $A \subseteq G$ （在代码中按具体情形分别指定），并定义

$$S = \{x^{-1}y : x, y \in A, x \neq y\}.$$

接下来，我们使用 $\Gamma = \mathrm{Cay}(G, S)$ 构造凯莱有向图，使用GAP 软件包digraphs 中的[12]。在我们的示例中 S 是关于取逆封闭的，因此 Γ 可以视为无向凯莱图。

该脚本枚举 Γ 的所有极大独立集，并记录其大小的最小值和最大值。由于 Γ 是无向的，极大独立集与独立支配集相同；因此，极大独立集中大小的最小值（分别为最大值）等于 i（Γ）（分别为 α（Γ））。下面将逐步介绍如何使用此处提供的 GAP 代码计算 i（Γ）和 α（Γ）；假设你的电脑上已安装并运行 GAP。

步骤 1。 输入以下命令加载有向图软件包

```
LoadPackage("digraphs");;
```

步骤 2。 输入唯一一个用户定义的函数。对于给定的群 G 和给定的子集$A \subseteq G$，该函数构造凯莱图 Γ = Cay(G, ∂A)，并计算 i（Γ）和 α（Γ）。该函数计算集合 ∂A 和集合 $D = G \setminus A^{-1}A$。集合D 不用于计算，但只需输入 GAP 命令 r.S; 和 r.D;，即可查看 ∂A 和 D 。此处 $S = \partial A$ 在代码中。

```
PrintIndepInvariants := function(G, A) local S, D, Cay, sizes; S :=
Set(List(Cartesian(A, A), x -> x[1]^-1 * x[2])); D := Difference(Elements(G), S); S :=
Difference(S, [One(G)]); Cay :=CayleyDigraph(G, S); sizes :=
List(DigraphMaximalIndependentSets(Cay), Size); Print("StructureDescription(G)
 = \"", StructureDescription(G), "\"; ", "i  =", Minimum(sizes), ", alpha  =",
Maximum(sizes), ".", "\n\n"); return rec(S :=  S, D :=  D); end;
```

步骤3。 对于下面列出的八个群，输入相应的 GAP 命令。

1. 阶为 21 的非阿贝尔群 $C_7 \rtimes C_3$ 。

   ```
   F :=  自由群("a", "b");; a :=  F.1;; b :=  F.2;; G :=F /  [  b^3, a^7,
   b*a*b^-1*a^-2 ];;
   ```

```
a :=G.1;; b :=G.2;; A := [
One(G), a, b];;
r := PrintIndepInvariants(G, A);;
```

输出：StructureDescription(G) = "C7 : C3"; i = 3, alpha = 6。

2. 含3个元素的域上三阶的单位三角矩阵群 $UT(3, 3)$。

```
F :=自由群("a", "b", "c");; a :=F.1;; b :=F.2;; c :=F.3;; G :=F / [ a^3, b^3, c^3,
b^-1*a^-1*b*a*c^-1, a^-1*c^-1*a*c, b^-1*c^-1*b*c];; a :=G.1;; b :=G.2;; c :=
G.3;; A := [One(G), a, b, c];; r := PrintIndepInvariants(G, A);;
```

输出：StructureDescription(G) = "(C3 × C3) : C3"; i = 3, alpha = 6。

3. 阶为 27 的初等阿贝尔群。

```
F := 自由群("e1", "e2", "e3");; e1 := F.1;; e2 := F.2;; e3 := F.3;; G :=F / [ e1^3,
e2^3, e3^3, e1^-1*e2^-1*e1*e2, e1^-1*e3^-1*e1*e3, e2^-1*e3^-1*e2*e3 ];; e1 :=
G.1;; e2 :=G.2;; e3 :=G.3;; A := [One(G), e1, e2, e3];; r :=
PrintIndepInvariants(G, A);;
```

输出：StructureDescription(G) = "C3 × C3 × C3"; i = 3, alpha = 4。

4. 交错群 A_4。

```
F := 自由群("a", "b", "t");; a := F.1;; b := F.2;; t := F.3;; G :=F / [ a^2, b^2,
t^3, a^-1*b^-1*a*b, t^-1*a*t*b^-1, t^-1*b*t*b^-1*a^-1 ];; a :=G.1;; b :=
G.2;; t :=G.3;; A := [One(G), b, t];; r := PrintIndepInvariants(G, A);;
```

输出：StructureDescription(G) = "交错群 A4"; i = 2, alpha = 3。

5. 半直积 $(C_3 \times C_3) \rtimes C_2$。这里， C_2中的非单位元通过对元素取逆的方式作用于 $C_3 \times C_3$ 。

```
F := 自由群("a", "b", "t");; a := F.1;; b := F.2;; t := F.3;; G :=F / [ a^3, b^3,
t^2, a^-1*b^-1*a*b, t*a*t*a, t*b*t*b];; a :=G.1;; b :=G.2;; t :=G.3;; A := [
One(G), a, t, b*t];; r := PrintIndepInvariants(G, A);;
```

输出：StructureDescription(G) = "C3 × C3 : C2"; i = 2, alpha = 4。

6. 直积 $C_2 \times D_4$, GAP ID 为 11 的 16阶群。

```
F :=自由群("a", "b", "c");; a :=F.1;; b :=F.2;; c :=F.3;; G := F / [ a^4, b^2, c^2,
a^-1*c^-1*a*c, b^-1*c^-1*b*c, (a*b)^2];; a := G.1;; b := G.2;; c :=G.3;; A := [
One(G), a, b, c];; r := PrintIndepInvariants(G, A);;
```

输出：StructureDescription(G) = "C2 × D8"; i = 2, alpha = 4。

7. 直积 $C_2 \times Q_8$, GAP ID 为 12 的16阶群。

```
F :=自由群("a", "b", "c");; a :=F.1;; b :=F.2;; c :=F.3;; G :=F / [ a^4, b^4, c^2, a^2
*b^2, a^-1*c^-1*a*c, b^-1*c^-1*b*c, (a*b)^2*a^2];; a :=G.1;; b :=G.2;; c :=G.3;; A :
= [One(G), a, b, c];; r := PrintIndepInvariants(G, A);;
```

输出：StructureDescription(G) = "C2 x Q8"；i = 2，alpha = 4。

8. 16阶群：GAP ID 13。

```
F := FreeGroup("a", "b", "c");; a := F.1;; b := F.2;; c := F.3;; G :=F / [a^4, b^2, c
^2, a^-1*b^-1*a*b, a^-1*c^-1*a*c, (b*c)^2*a^2];; a :=G.1;; b :=G.2;; c :=G.3;; A := [
One(G), a, b, c];; r := PrintIndepInvariants(G, A);;
```

输出：StructureDescription(G) = "(C4 x C2) : C2"；i = 2，alpha = 4。

参考文献

[1] M. H. Hooshmand，《与数论相关的群的指数、子指数和子因子》，J. Algebra Appl. 19 (2020), no. 6, 1–23.[2] M. H. Hooshmand，《有限群的子指数与子因子》，Commun. Algebra 51 (2023), no. 6, 2644–2657.[3] V. F. R. Jones，《子因子与纽结》，CBMS 区域会议专题讲座，会议于美国海军学院（美国安纳波利斯）举行，1988年6月5日至11日，美国数学会，普罗维登斯，RI，1991年。[4] W. Goddard 和 M. A. Henning，《图中的独立控制：综述与近期成果》，Discrete Math. 313 (2013), 839–854.[5]E. W. Weisstein，《独立数》，摘自 MathWorld–Wolfram 网络资源。https://mathworld.wolfram.com/IndependenceNumber.html（访问日期：2026-02-05）。[6] M. D. Plummer，《图中的一些覆盖概念》，J. Combin. Theory 8 (1970), 91–98.[7]M. H. Hooshmand 和 M. M. Yousefian Arani，《有限指数稳定群的子指数和子因子的计算方面及其刻画》，Int. J. Group Theory 15 (2026), 145–160.[8] *GAP* –《群、算法与编程》，GAP小组，版本 4.15.1（2025），https://www.gap-system.org。[9] C. Berge，《图与超图》，North-Holland，阿姆斯特丹，1973年。[10] M. Wild，《轻松理解十六阶群》，Amer. Math. Monthly 112 (2005), 20–31.[11] D. J. S. Robinson，《群论教程》，Graduate Texts in Mathematics，第80卷，Springer-Verlag，纽约，第2版，1996年。[12] J. De Beule、J. Jonusas、J. Mitchell、M. Torpey、M. Tsalakou 和 W. A. Wilson，《有向图：GAP中的图、有向图和多重有向图》，版本1.3.1（2020）（GAP软件包），https://digraphs.github.io/Digraphs。