arXiv:2602.06779v1 [math.AP] 6 Feb 2026

具有双稳态非线性的质量守恒反应扩散系统中的径向对称过渡层解

Xiaoqing He

数学科学学院，教育部*MEA*重点实验室与上海市精密医学与病理学重点实验室，华东师范大学，上海，中国

Quan-Xing Liu

Sc数学科学学院，上海交通大学，上海，中国 a

Dong Ye

华东师范大学数学科学学院，*MEA*（教育部）重点实验室与上海市精密医学与病理学重点实验室，中国上海

摘要。质量守恒反应扩散（MCRD）系统广泛用于模拟细胞极性、生物分子凝聚体及生态系统中的相分离和图案形成。数值模拟与形式渐近分析表明，此类模型能够支持具有锐利内部界面的稳态图案。本文针对一大类双稳态MCRD系统，证明了在一般空间维数 N 下， N 维球上存在具有单个内部过渡层的非恒定径向对称稳态解。我们的方法将全局质量约束直接纳入精细的匹配渐近框架，并辅以一致的谱分析与线性分析。除证明解的存在性外，该框架还可为所构造的解提供任意高阶的渐近近似及定量一致误差估计，从而为MCRD系统中的过渡层图案建立定量的高维理论，并严格论证其在模拟生物和生态环境中的相分离与图案形成时的适用性。

1. 引言与结果陈述

1.1. 质量守恒反应-扩散系统。 图案形成是生物发育和生态系统中诸多过程所共有的基本现象。过去几十年来，人们提出了各种理论框架，以阐明驱动这类自组织动态的机制。其中，质量守恒反应-扩散（MCRD）系统已成为一种强有力的范式，可用于

电子邮箱：xqhe@cpde.ecnu.edu.cn, qx.liu@sjtu.edu.cn, dye@math.ecnu.edu.cn。2010 数学主题分类。35J57, 35B36, 35B30, 92C15。关键词与短语。质量守恒反应扩散系统、相分离、图案形成、奇异摄动、匹配渐近展开、谱分析。通讯作者：Xiaoqing He，电子邮箱：xqhe@cpde.ecnu.edu.cn。

研究某些化学物种总量守恒的系统中的图案形成。Otsuji等人 [33]和 Ishihara 等人 [18]于2007年在这一领域做出了开创性贡献，他们证明 MCRD系统能够成功刻画细胞极性的时空动态。随后，Mori 等人[27] 于2008年提出了一种相关的双组分质量守恒反应-扩散模型，其反应项形式有所不同，以进一步研究细胞极化。用无量纲形式表示，他们的一维系统如下:

$$
\begin{cases} \varepsilon u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + f(u,v) & \text{in } (0,1)\times(0,\infty), \\ \varepsilon v_t = d v_{xx} - f(u,v) & \text{in } (0,1)\times(0,\infty), \\ u_x(0) = 0 = u_x(1),\ v_x(0) = 0 = v_x(1), & \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x) & \text{in } (0,1), \end{cases} \tag{1.1}
$$

其中， $u(x,\ t)$ 和 $v(x,\ t)$ 表示两种可相互转化的化学物种的浓度。扩散系数 ε^2 （对应 u）和 d （对应 v）满足 $0 < \varepsilon^2 \ll d$; 例如，Mori等人 [28] 研究了 $\varepsilon \approx 0.03$ 和 $d \approx 0.1$。非线性函数 $f(u,\ v)$ 描述了从 v 到 u 的相互转化，并假设对于固定的 v, 其关于 u 具有双稳态 。一个典型的例子 [27, 28] 是

$$
f(u,v) = -u + \left(\delta + \frac{\gamma u^2}{1+u^2}\right) v, \tag{1.2}
$$

其中 $\gamma,\ \delta > 0$ 满足 $\gamma > 8\delta$ ，以确保双稳态。结合波钉扎论证和数值计算进行形式渐近分析后， [28]的作者表明，MCRD 系统（1.1）支持传播的行波前沿，这些前沿最终停止并形成静止内部界面。Gomez等人 [13]进一步通过分析相关的（1.1）影子系统，探讨了波钉扎行为。

在这些基础上，Frey 团队 [4, 5, 14, 15] 将双组分 MCRD 框架应用于研究细胞内图案形成的机制，包括细胞极化。Siteur 等人 [39] 应用 MCRD 模型描述生态系统中的植被图案。这些研究虽然主要侧重于建模和应用，而非严格的数学分析，但凸显了 MCRD系统在从细胞动力学到生态图案形成等不同领域中的广泛适用性。与此同时，质量守恒结构也出现在流行病反应-扩散模型中 [2, 7, 8,34, 35], ，其中作者主要关注阈值（例如基本再生数）和平衡稳定性，而非空间图案形成。

近年来，对生物分子凝聚体——一类介观液-液相分离结构——的实验研究为 MCRD 建模提供了新的生物学动机。具体而言， [24]的作者提出了一种数据驱动的质量守恒反应-扩散模型，用于描述双链 DNA-蛋白质相互作用共凝聚体中出现的相分离现象。在此情形下， $u(x,\ t)$和 $v(x,\ t)$分别表示双链 DNA 结合蛋白和游离蛋白的浓度。实验测量 [23, 24] 表明，游离蛋白的扩散系数 v约为 $18.0 \pm 1.1\,\mu\text{m}^2/\text{s}$，而双链 DNA 结合蛋白的扩散系数 u 仅约为前者的 5.1×10^{-5} 倍，由此揭示出显著的多尺度扩散层级。此外，生化相互作用所驱动的快速反应动力学可将 v 转化为u，使该系统呈现出强烈的反应主导特征。

受这些实验依据和观察结果的启发，我们提出如下广义MCRD系统：

$$
\begin{cases}
\varepsilon u_t = \varepsilon^2 \Delta u + f(u,v) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\
\varepsilon v_t = \varepsilon D \Delta v - f(u,v) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\
\partial_\nu u = 0 = \partial_\nu v & \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty), \\
u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x) & \text{in } \Omega,
\end{cases} \tag{1.3}
$$

其中，$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ 是一个有界光滑区域，Δ 是拉普拉斯算子，且$\partial_\nu := \nu \cdot \nabla$ 表示定义域 Ω 上的外法向导数。此处，$0 < \varepsilon \ll 1$ 和 $D > 0$ 是无量纲参数，用于刻画扩散与反应的相对时间尺度。令 $D = d/\varepsilon$ ，即可恢复式 (1.1) 中的经典标度。因此，可以将 (1.3) 视为一个广义 MCRD 系统，在该标度下它可化为 (1.1)。此外，允许 D在 $O(1)$ 到 $O(1/\varepsilon)$ 之间变化，便提供了一个数学上统一的框架，将具有生物学动机的多尺度模型 (1.3) 与典范质量守恒反应扩散模型 (1.1) 联系起来；参见本节末尾的注记 (d)。

关键的是，对于任意经典解 $(u(x,t)\ v(x,t))$ 满足式（1.3）的，其总质量守恒：

$$
\int_\Omega [u(x,t) + v(x,t)]\,dx \equiv \int_\Omega [u_0(x) + v_0(x)]\,dx, \quad \forall t > 0,
$$

这是 MCRD系统区别于经典非质量守恒反应-扩散（非 MCRD）系统的一个标志性特征。这种非局部质量约束带来了重大分析难题：它将局部动力学与全局积分条件耦合起来，妨碍直接使用匹配渐近方法、谱方法以及为经典（非 *MCRD*）奇异摄动问题发展出的许多其他方法。因此，尽管在生物和生态领域的图案形成建模方面，MCRD系统已取得了长足进展，但要为 MCRD系统中的模式化稳态解建立严格而一般的存在性与稳定性理论，仍是一项具有挑战性的问题。

本文旨在构造系统 (1.3) 的模式化稳态解，该解具有内部过渡层，其中 $0 < \varepsilon \ll 1$ 且 $D > 0$，并满足给定的质量约束。具体而言，我们考虑以下稳态问题：

$$
\begin{cases}
0 = \varepsilon^2 \Delta u + f(u,v) & \text{in } \Omega, \\
0 = \varepsilon D \Delta v - f(u,v) & \text{in } \Omega, \\
\partial_\nu u = 0 = \partial_\nu v & \text{on } \partial\Omega,
\end{cases} \tag{1.4}
$$

满足质量约束

$$
\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega [u(x) + v(x)]\,dx = M, \tag{1.5}
$$

其中 $M > 0$ 表示给定的平均总质量。

不难验证，系统（1.4）等价于以下重述后的系统：

$$
\begin{cases}
0 = \varepsilon^2 \Delta u + f(u,v) & \text{in } \Omega, \\
0 = \Delta\Big(\dfrac{\varepsilon}{D} u + v\Big) & \text{in } \Omega, \\
\partial_\nu u = 0 = \partial_\nu v & \text{on } \partial\Omega.
\end{cases} \tag{1.6}
$$

设 (u,v) 是满足质量约束（1.5）的（1.6）的经典解。诺伊曼边界条件因此意味着

$$
\frac{\varepsilon}{D} u + v \equiv \text{const} \ \text{ on } \bar{\Omega},
$$

这与（1.5）结合可得恒等式

$$v = \mathcal{S}^{\varepsilon}[u] - \frac{\varepsilon}{D}u, \tag{1.7}$$

其中，非局部算子 $\mathcal{S}^{\varepsilon}[u]$ 定义为

$$\mathcal{S}^{\varepsilon}[u] := M - \frac{1}{|\Omega|}\left(1 - \frac{\varepsilon}{D}\right)\int_{\Omega} u(x)\,dx. \tag{1.8}$$

将（1.7）代入（1.6）的第一个方程，可知 u 满足以下非局部椭圆标量方程：

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta u + f\left(u, \mathcal{S}^{\varepsilon}[u] - \dfrac{\varepsilon}{D}u\right) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \partial_{\nu} u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.9}$$

综上，在质量约束（1.5）下，系统（1.4）等价于非局部标量椭圆问题（1.9）。更准确地说，一对（u，v）是满足（1.4）和（1.5）的经典解，当且仅当 u 是（1.9）的经典解，且 v 由（1.7）给出。这种等价性将满足（1.4）和（1.5）的非恒定解的构造，归结为对非局部标量方程（1.9）的分析。

现在我们开始介绍关于非线性反应项$f(u,\ v)$的结构假设。本文始终假设非线性反应项 $f(u,\ v)$满足以下条件：

(A1)（双稳态）。函数 $f(u,\ v)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上光滑（C^{∞}），且存在两个常数 $v < \bar{v}$，使得对于每个固定的 $v \in (\underline{v},\ \bar{v})$，方程 $f(u,\ v) = 0$ 恰有三个不同的实根，记为 $h^{-}(v) < h^{0}(v) < h^{+}(v)$。此外，

$$f_u(h^{-}(v), v) < 0, \quad f_u(h^{0}(v), v) > 0 \quad \text{and} \quad f_u(h^{+}(v), v) < 0.$$

(A2)（横截性）。对于每个 $v \in (\underline{v},\ \bar{v})$，以下不等式成立：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right)\Big|_{(u,v)=(h^{\pm}(v),v)} < 0.$$

(A3)（质量平衡条件）。对于每个 $v \in (\underline{v},\ \bar{v})$，定义函数

$$J(v) := \int_{h^{-}(v)}^{h^{+}(v)} f(s, v)\,ds.$$

存在一个 $v^{*} \in (\underline{v},\ \bar{v})$，使得

$$J(v^{*}) = 0 \quad \text{and} \quad J'(v^{*}) \neq 0.$$

我们注意到，条件 (A2) 确保了系统 $(u,\ v) \equiv (h^{\pm}(v)\ v)$（1.3）对所有 $v \in (\underline{v},\ \bar{v})$的空间均匀稳态具有局部渐近稳定性。关于这一稳定性结论的严格论证可见 [13, 28]。

在生物学应用中，u和 v 通常表示化学物质的浓度，并且通常要求为正。然而，我们的分析并未对 u 和 v施加正性约束，即使u 和 v 取非正值，该数学框架仍然有效。

在一维情形下，作者们 [17, 21] 证明了MCRD系统（1.1）存在带有内部过渡层的稳态解，其中 u-分量在一个薄层两侧发生跳跃。技术上，他们通过引入一个 先验 未知的匹配点 $x^{(\varepsilon)} \in (0,1)$，采用内在的拼接构造，将区间分解为 $(0, x^{(\varepsilon)})$ 和 $(x^{(\varepsilon)},1)$。随后，他们分别在每个子区间上求解边值问题，并通过隐函数定理，在满足全局质量约束的同时，施加 C^1-匹配于 $x = x^{(\varepsilon)}$。

作者在 [21, 注记2.2] 中声称，对于任意 k，都可以得到解的 k阶近似。然而，将 [21, 定理2.1] 中的构造推广到更高阶似乎并不直接：需要进行细致的递归计算，以验证隐函数定理论证在每一阶都能闭合，这是一项艰巨的工作。例如，在缺乏对高阶项的明确理解时，尚不清楚非退化条件 $h^+(v)-h^-(v)\neq 0$ 本身是否足以匹配任意高阶展开。

本文针对一般 MCRD 系统（1.3）在 N 维球上建立了统一的高阶展开框架，从而克服了上述挑战。通过将全局质量约束纳入精细的匹配渐近构造，并为由此得到的奇异摄动算子建立一致的谱与线性理论，我们推导出了径向对称单过渡层解的任意高阶渐近近似，并给出了显式误差界。这些近似及误差控制将作为本研究所构造解的稳定性分析中的主要技术工具；该分析将在后续工作中展开。

1.2. **假设与主要结果陈述**。本小节将精确陈述关于 MCRD 系统（1.3）在给定总质量下存在定常单过渡层解的结果，即方程（1.4）–（1.5）的解，或等价地，方程（1.9）的解。

为便于后文讨论，在本文余下部分我们始终假设

$$\Omega = B_1,$$

其中 $B_r := B_r(0)$ 表示半径为 $r>0$ 且以 $\mathbb{R}^N$中的原点为中心的球。我们的目标是在1.4所示的质量约束（1.5）下，构造系统（Ω）的径向对称解。具体而言，我们旨在构造在尖锐界面处具有内部过渡层的解

$$\Gamma_* = \{x\in\Omega : |x| = R_*\} = \partial B_{R_*},$$

其中 $R_*\in(0,1)$ 表示界面位置参数。正如将在（1.10）中推导的那样，R_* 由给定的平均总质量M 在构造过程中确定，见（1.5）。为方便记号，令

$$I_{v^*} := \big(v^* + h^-(v^*), v^* + h^+(v^*)\big)$$

表示本文中参数 M 的可取范围。

由于我们研究的是径向对称解，因此稍作记号上的滥用，将径向函数 g 在 Ω 中的 $g(x)$ 和 $g(r)$ 互换使用，其中 $r=|x|$。

本文的主要结果陈述如下。

定理 1.1。 假设条件(A1)-(A3)成立。那么，对于每个给定的

$$M\in I_{v^*} \ and \ D_0>0,$$

存在一个常数 $\bar\varepsilon=\bar\varepsilon(M,D_0)>0$，使得系统 (1.4) 存在一族球对称经典解 $(u^{\varepsilon,D}(r)\ v^{\varepsilon,D}(r))$，其定义于 $\varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]$，并且满足质量约束

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega [u^{\varepsilon,D}(x)+v^{\varepsilon,D}(x)]dx = M.$$

此外，这些解满足以下性质：

(i) 存在一个常数 $C=C(M,D_0,\bar\varepsilon)>0$，使得

$$\|u^{\varepsilon,D}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v^{\varepsilon,D}\|_{L^\infty(\Omega)} \le C, \quad \forall\, \varepsilon\in(0,\bar\varepsilon] \ and \ D\ge D_0.$$

(ii) 对于每个 $\eta>0$，存在两个常数 $K=K(\eta)>0$ 和 $\bar{\varepsilon}'=\bar{\varepsilon}'(M,D_0,\eta)\in(0,\bar{\varepsilon}]$，使得

$$\begin{cases}|u^{\varepsilon,D}(r)-h^+(v^*)|<\eta & on\ [0,R_*-\varepsilon K]\\ |u^{\varepsilon,D}(r)-h^-(v^*)|<\eta & on\ [R_*+\varepsilon K,1]\end{cases}\quad \forall\,\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}']\ and\ D\geq D_0,$$

其中

$$R_*=R_*(M):=\Big[\frac{M-v^*-h^-(v^*)}{h^+(v^*)-h^-(v^*)}\Big]^{1/N}\in(0,1). \tag{1.10}$$

(iii) $v^{\varepsilon,D}(x)=\mathcal{S}^\varepsilon[u^{\varepsilon,D}]-\frac{\varepsilon}{D}u^{\varepsilon,D}(x)$ 和

$$\lim_{\varepsilon\to0}\|v^{\varepsilon,D}-v^*\|_{L^\infty(\Omega)}=0\ uniformly\ in\ D\geq D_0.$$

定理1.1 有若干直接推论，概述如下。

注 1.2. (a) 定理 *1.1* 的第*(ii)*部分证明，在 $u^{\varepsilon,D}$ 中分隔高浓度区和低浓度区的过渡层紧密地局部化在界面 $r=R_*$附近，从而直接精确地刻画了过渡层的宽度为 $O(\varepsilon)$ 量级。

(b) 此外，对于任意固定的 $\delta>0$ 且满足 $\delta<\min\{R_*,1-R_*\}$，我们得到一致收敛

$$\lim_{\varepsilon\to0}u^{\varepsilon,D}(r)=\begin{cases}h^+(v^*) & uniformly\ on\ [0,R_*-\delta]\ and\ D\geq D_0\\ h^-(v^*) & uniformly\ on\ [R_*+\delta,1]\ and\ D\geq D_0.\end{cases}$$

(c) 取 $D=d/\varepsilon$ 于定理 *1.1*，即可恢复 *[27, 28]*, 中考虑的典型 ***MCRD*** 标度，从而得到系统 (1.1)的一族球对称稳态解。

(d) 还值得一提的是，一维情形 $N=1$ 要简单得多；例如，见下文的展开式(2。17)。主要原因是，对于 $N\geq2$ （在径向对称情形下），必须处理具有变系数的微分算子，例如径向拉普拉斯算子 $u_{rr}+\frac{N-1}{r}u_r$，这使分析复杂得多。此外，如第 ***1.1*** 小节所述，推导高阶渐近近似并给出一致的显式误差界，需要相当繁复的计算。因此，采用单个全局闭式表达式更有优势，正如我们的方法所采用的那样。

为证明定理 1.1，我们利用前一小节末尾所示的等价性：只需证明以下非局部标量问题（1.9）的存在性结果，然后令

$$v^{\varepsilon,D}(x):=\mathcal{S}^\varepsilon[u^{\varepsilon,D}]-\frac{\varepsilon}{D}u^{\varepsilon,D}(x).$$

定理 1.3。 假设条件(A1)-(A3)成立。那么，对于每个给定的

$$M\in I_{v^*}\ and\ D_0>0,$$

存在一个常数 $\bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}(M,D_0)>0$，使得系统 (1.9) 存在一族球对称经典解 $u^{\varepsilon,D}(r)$，其定义于 $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]$ 且满足 $D\geq D_0$。此外，这些解满足以下性质：

(i) 存在一个常数 $C=C(M,D_0,\bar{\varepsilon})>0$，使得

$$\|u^{\varepsilon,D}\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C\quad\forall\,\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]\ and\ D\geq D_0.$$

(ii) 对于每个 $\eta > 0$，存在两个常数 $K = K(\eta) > 0$ 和 $\bar{\varepsilon}' = \bar{\varepsilon}'(M, D_0, \eta) \le \bar{\varepsilon}$，使得

$$\begin{cases} |u^{\varepsilon,D}(r) - h^+(v^*)| < \eta & on\ [0, R_* - \varepsilon K] \\ |u^{\varepsilon,D}(r) - h^-(v^*)| < \eta & on\ [R_* + \varepsilon K, 1] \end{cases} \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}']\ and\ D \ge D_0,$$

其中 R_* 定义如(1.10)所示。

我们证明定理1.3 的方法包含两个主要步骤。首先，我们构造一族光滑的（C^∞）径向对称近似解，用于求解问题（1.9），其特征是在尖锐界面 Γ_*附近存在内部过渡层。这些近似解通过匹配渐近展开得到，特别注重满足质量约束（1.5），该约束现已编码在非局部项 $\mathcal{S}^\varepsilon[u]$中。第二步，在进行有限维谱约化（通过谱投影）后，我们应用压缩映射论证，对于充分小的 $\varepsilon > 0$，利用 Lyapunov-Schmidt 型分解约化问题，从而将近似解扰动为精确解。分析中的关键环节包括过渡层附近精确的渐近匹配、对非局部项 $\mathcal{S}^\varepsilon[u]$的谨慎处理（该项决定耦合内外层系统的可解性），以及针对近似解线性化算子的尖锐谱估计。

最后，我们通过讨论定理1.1所带来的建模洞见及其更广泛的影响，为本小节作结，重点阐述其与相分离、分析学挑战以及生物系统中的多尺度图案形成之间的联系。

(a) 定理1.1表明，在一般结构假设 (A1)-(A3) 下，MCRD系统存在以具有液滴状界面的相分离为特征的空间非均匀稳态。当平均总质量M严格位于两个临界阈值 $v^* + h^-(v^*)$ 与 $v^* + h^+(v^*)$之间时，便会出现此类解。此外，在该区间内改变 M 只会通过界面位置 $R_* = R_*(M)$ （定义见式1.10）影响高浓度区域与低浓度区域之间的体积分数。这与关于液-液相分离的实验发现定性一致 [1, 3]，并支持将MCRD系统用作生物分子凝聚体形成的理论模型。

(b) 在经典的非质量守恒反应扩散（Non-MCRD）系统中，具有内部/边界过渡层或尖峰的图案化解已得到广泛研究，例如以下形式:

$$\begin{cases} \varepsilon u_t = \varepsilon^2 \Delta u + f(u, v) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ v_t = d\, \Delta v + g(u, v) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \partial_\nu u = \partial_\nu v = 0 & \text{in } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

例如， [10, 19, 25, 26, 32, 36, 40]关于一维空间中的结果，以及[9, 16, 31, 37, 38] 关于多维情形的结果。然而，由于存在非局部质量约束（1.5），这些研究中发展的分析技术无法直接应用于 MCRD 系统，因为该约束从根本上改变了问题的结构，将局部动力学与全局积分条件耦合起来。

（c）图案形成的一种经典理论是图灵不稳定性 [41]，，它通常预测均匀稳态 [30]经由线性不稳定性产生空间周期斑图。相比之下，MCRD系统常表现出时空粗化动力学 [15, 18]，，在此过程中，瞬态斑图逐渐演化为由两个不同相态——浓相和稀相——组成的极化态。要严格理解

导致此类极化稳态的完整动力学路径，仍是一个重大且具有挑战性的开放问题。

(d) 我们的广义 MCRD 模型（1.3）通过参数 D，涵盖了多种标度机制。当 D 被视为独立于 ε时，该模型刻画了扩散与反应过程之间的多尺度层级。或者，取 $D = d/\varepsilon$ 则重新得到（1.1）中使用的经典标度。鉴于自然界中的图案形成系统往往涉及相距甚远的时空尺度，MCRD 模型所赋予的标度灵活性使其能够成为一个统一的跨尺度框架，用于研究生物学和生态学背景下的多样化图案形成。

本文其余部分安排如下。第 2 节构造一族光滑的（C^∞）径向对称近似解，该解具有内部过渡层，并推导出精确的渐近估计。第 3 节对近似解附近的线性化算子进行谱分析。第 4 节结合有限维谱约化与压缩映射论证，求得充分小的 ε对应的、靠近该近似解族的精确解，从而证明主要结果。

2. 近似解的构造

本节将构造一族光滑的球对称近似解，它们满足问题（1.9），并在界面 Γ_*处呈现内部过渡层。这些近似解在以 ε^k 衡量时，可达到任意高阶精度，对任意给定的 $k \in \mathbb{N}$均如此。过渡层的宽度为 $O(\varepsilon)$阶。

2.1. 预备知识。 在条件（A1）和（A3）下，对每个 $s \in (v, \bar{v})$，我们将确定一对 $(Q(z;s)\ c(s))$，使其成为以下边值问题的解：

$$\begin{cases} Q_{zz} - c(s)Q_z + f(Q,s) = 0 \quad z \in \mathbb{R}, \\ Q(0;s) = h^0(s), \quad \lim_{z\to\mp\infty} Q(z;s) = h^{\pm}(s). \end{cases} \tag{2.1}$$

以下结果可由 [11] 得出。另见 [16, 命题2.3]。

命题2.1。 在条件 (A1) 下，对每个 $s \in (v, \bar{v})$，问题 (2.1) 存在唯一解 $(Q(z;\ s)\ c(s))$，满足以下性质：

(i) 当 $z \to \mp\infty$ 时，函数 $Q(z;s)$（分别为 Q_z 和 Q_{zz}）以指数速率趋近于极限 $h^{\pm}(s)$（分别为 0），且对于 $z \in \mathbb{R}$，$Q_z(z;s) < 0$。(ii) 于是，函数 $c(s)$ 可明确表示为

$$c(s) = -\frac{J(s)}{m(s)}, \quad where\ m(s) := \int_{\mathbb{R}} Q_z^2(z;s)\,dz.$$

此外，若满足(A3)，则

$$c'(v^*) = -\frac{J'(v^*)}{m(v^*)}.$$

2.2. **近似解存在性的陈述。** 我们首先构造问题（1.9）的一族近似解，它们具有内部过渡层。本节的核心结果陈述如下。

定理 2.2. 假设条件 (A1)-(A3) 成立。那么对于每个给定的 $M \in I_{v^*}$，存在一族光滑的 (C^∞) 径向对称函数 $u^{\varepsilon}{}_{,k}{}^{D}(r)$，定义于 $\varepsilon > 0$、$D > 0$ 和 $k \in \mathbb{N}$，并满足以下结论：

(i) 对于每个 $D_0>0$、 $k\in\mathbb{N}$ 和 $\eta>0$，存在两个常数 $K=K(\eta)>0$ 和 $\bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}(M$、$D_0$、$k$、$\eta)>0$，使得

$$\begin{cases}|u_k^{\varepsilon,D}(r)-h^+(v^*)|<\eta & on\ [0,R_*-\varepsilon K]\\ |u_k^{\varepsilon,D}(r)-h^-(v^*)|<\eta & on\ [R_*+\varepsilon K,1]\end{cases}\quad \forall\,\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]\ and\ D\geq D_0,$$

其中 $R_*=R_*(M)$ 定义同 (1.10)。

(ii) 对于每个 $D_0>0$、 $\varepsilon_0>0$ 和 $k\in\mathbb{N}$，存在一个常数 $C_k=C_k(M,D_0,\varepsilon_0)>0$，使得

$$\|u_k^{\varepsilon,D}\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C_k,\quad \forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]\ and\ D\geq D_0 \tag{2.2}$$

and

$$\left\|\mathcal{R}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}]\right\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C_k\varepsilon^{k+1},\quad \forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]\ and\ D\geq D_0, \tag{2.3}$$

其中

$$\mathcal{R}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}]:=\varepsilon^2\Delta u_k^{\varepsilon,D}+f(u_k^{\varepsilon,D},\mathcal{S}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}]-\frac{\varepsilon}{D}u_k^{\varepsilon,D}).$$

(iii) *Set* $v_k^{\varepsilon,D}:=\mathcal{S}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}]-\frac{\varepsilon}{D}u_k^{\varepsilon,D}$, *then*

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega[u_k^{\varepsilon,D}(x)+v_k^{\varepsilon,D}(x)]dx=M$$

且对于每个 $k\in\mathbb{N}$,

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left\|v_k^{\varepsilon,D}-v^*\right\|_{L^\infty(\Omega)}=0\ uniformly\ in\ D\geq D_0.$$

注意，定理 2.2 的结果也可以在系统（1.4）的框架下重新表述，因为系统（1.4）在质量约束（1.5）下与问题（1.9）等价。

2.3. **外层与内层展开**。 设 u^ε 是具有内部过渡层的径向对称解，满足方程 **(1.9)**，即 u^ε 满足以下方程

$$\begin{cases}\varepsilon^2\Delta u^\varepsilon+f\left(u^\varepsilon,\mathcal{S}^\varepsilon[u^\varepsilon]-\frac{\varepsilon}{D}u^\varepsilon\right)=0 & \text{in } \Omega,\\ \partial_\nu u^\varepsilon=0 & \text{on } \partial\Omega.\end{cases} \tag{2.4}$$

注意，为简化记号，我们省略了 u^ε 对参数 D 和M 的显式依赖。本小节旨在构造 u^ε 在远离界面 $\Gamma_*=\partial B_{R_*}$ 的区域中的外层展开，以及在 Γ_*邻域内的内层展开，其中 $R_*\in(0,1)$ 表示界面位置参数，该参数将在构造过程中确定（参见下文命题 2.6）。

记作

$$\Omega^-:=B_{R_*}\quad\text{and}\quad\Omega^+:=B_1\backslash\overline{B}_{R_*}. \tag{2.5}$$

我们首先通过将方程 **(2.4)** 的解u^ε 形式地展开为关于 ε 的如下幂级数，来构造 U^j 关于 $j\in\mathbb{N}$ 的外层展开

$$u^\varepsilon(x)\sim\sum_{j\geq0}\varepsilon^jU^j(x), \tag{2.6}$$

使得截断展开渐近满足方程（2.4）在外层区域$\Omega\backslash\Gamma_*=\Omega^-\cup\Omega^+$，其中

$$U^j(x):=\begin{cases}U^{-,j}(x) & \text{in } \Omega^-\\ U^{+,j}(x) & \text{in } \Omega^+\end{cases} \tag{2.7}$$

并且要求在 $|x| = R_*$处不连续，从而展现出横跨 Γ_*的尖锐过渡层。

为推导 $U^j(x)$所满足的方程，还需要将方程（ $S^\varepsilon[u^\varepsilon]$ 中的非局部项展开为关于 2.4 的形式幂级数。该非局部项涉及 u^ε的积分。然而，由于尚未知晓 ε，因此无法显式计算这一展开。为此，我们形式上假设存在如下形式的展开： u^ε

$$\mathcal{S}^\varepsilon[u^\varepsilon] \sim \sum_{j\geq 0} \varepsilon^j A_j, \tag{2.8}$$

其中，系数 A_j 为待定常数，需结合下文命题 u^ε 中 2.6 给出的 2.8外层与内层展开来确定。我们将证明，将展开式（ ε 应用于通过匹配渐近展开得到的近似解时，该展开式在 2.6 中对 的任意高阶次均成立。这凸显了构造方程（2.4近似解时面临的一项关键分析挑战，即妥善处理质量约束（1.5），该约束如今已编码在非局部项 $\mathcal{S}^\varepsilon[u^\varepsilon]$ 中。

将（2.6）和（2.8）代入（2.4），并令 ε 的同次幂系数相等，可得关于 $U^{\pm,j}$ 的方程如下

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad 0 = f(U^{\pm,0}, A_0) \\ \text{(ii)} \quad 0 = f_u^{\pm,0} U^{\pm,1} + f_v^{\pm,0}(A_1 - \frac{1}{D} U^{\pm,0}) & \text{in } \Omega^\pm, \\ \text{(iii)} \quad 0 = f_u^{\pm,0} U^{\pm,j} + f_v^{\pm,0}(A_j - \frac{1}{D} U^{\pm,j-1}) + f^{\pm,j} \quad (j \geq 2) \end{cases} \tag{2.9}$$

其中 $f^{\pm}_{,u}{}^{0} := f_u(U^{\pm,0}, A_0)$， $f^{\pm}_{,v}{}^{0} := f_v(U^{\pm,0}, A_0)$ 以及 $f^{\pm,j} (j \geq 2)$ 由 b 给出 y

$$\begin{aligned} f^{\pm,j} = \Delta U^{\pm,j-2} &- \left[f_u^{\pm,0} U^{\pm,j} + f_v^{\pm,0}(A_j - \tfrac{1}{D} U^{\pm,j-1}) \right] \\ &+ \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial \varepsilon^j} f\Big(\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k U^{\pm,k},\ A_0 + \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k (A_k - \frac{1}{D} U^{\pm,k-1}) \Big)\Big|_{\varepsilon=0}. \end{aligned}$$

注意， $f^{\pm,j}$仅依赖于（$U^{\pm,k}, A_k$），其中 $0 \leq k \leq j-1$。

由于我们寻求在 Γ_* 两侧具有尖锐内部过渡层的解，根据条件（A1），我们选取

$$U^{\pm,0}(x) \equiv h^{\mp}(A_0) \qquad \text{in } \Omega^\pm \tag{2.10}$$

作为（2.9)-(i) 的解。由此可得 $f^{\pm}_{,u}{}^{0} < 0$，此结论由条件（A1）得出。注意，（2.10）的另一种选择为 $U^{\pm,0}$（x） $\equiv h^{\pm}$（A_0） 在 $\Omega^\pm$ 中分别成立。于是我们将得到另一族与当前选择在结构上对称的过渡层解。参见定理 4.3 下文。然后对 $j \geq 1$ 进行归纳，由（2.9）可见

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad U^{\pm,0}(x) \equiv h^{\mp}(A_0) \\ \text{(ii)} \quad U^{\pm,1}(x) \equiv h_v^{\mp}(A_0)(A_1 - \frac{1}{D} U^{\pm,0}) & \text{in } \Omega^\pm. \\ \text{(iii)} \quad U^{\pm,j}(x) \equiv h_v^{\mp}(A_0)(A_j - \frac{1}{D} U^{\pm,j-1}) - (f_u^{\pm,0})^{-1} f^{\pm,j} \quad (j \geq 2) \end{cases} \tag{2.11}$$

因此， $U^{\pm,j} (j \geq 0)$由 A_k与 $0 \leq k \leq j$确定。注意， $U^{\pm,j}$在$\Omega^\pm$ 中对所有 $j \geq 0$均为常数。此后，为记号方便，我们将用 $U^{\pm,j}$ 表示该常数值或定义在$\Omega^\pm$上的相应函数，而不会有

混淆之虞。现在可将 $f^{\pm,j}$ $(j \geq 2)$的表达式简化为

$$
\begin{aligned}
f^{\pm,j} = &-\Big[f_u(h^{\mp}(A_0), A_0)U^{\pm,j} + f_v(h^{\mp}(A_0), A_0)(A_j - \tfrac{1}{D}U^{\pm,j-1})\Big] \\
&+ \frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial \varepsilon^j} f\Big(\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k U^{\pm,k},\ A_0 + \sum_{k\geq 1}\varepsilon^k (A_k - \tfrac{1}{D}U^{\pm,k-1})\Big)\Big|_{\varepsilon=0}.
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

为分析界面附近的尖锐过渡 Γ_*，我们引入拉伸变量$z = \frac{r-R_*}{\varepsilon}$。在此变换下，方程（2.4）改写为:

$$
u^\varepsilon_{zz} + \varepsilon\tfrac{N-1}{R_*+\varepsilon z}u^\varepsilon_z + f\left(u^\varepsilon, \mathcal{S}^\varepsilon[u^\varepsilon] - \tfrac{\varepsilon}{D}u^\varepsilon\right) = 0 \qquad z \in \left(-\tfrac{R_*}{\varepsilon}, \tfrac{1-R_*}{\varepsilon}\right). \tag{2.13}
$$

我们将通过对方程（ w^j 的解 $j \in \mathbb{N}$ 进行形式上的幂级数展开，来确定u^ε （2.13）在 ε下的内层展开，形式如下:

$$
u^\varepsilon(z) \sim \sum_{j\geq 0}\varepsilon^j w^j(z), \tag{2.14}
$$

使截断展开渐近满足（2.13）。将（2.14）和（2.8）代入（2.13），并令 ε的同次幂系数相等，可得关于 w^j的方程如下:

$$
0 = w^0_{zz} + f(w^0, A_0) \tag{2.15}
$$

以及对于 $j \geq 1$,

$$
0 = w^j_{zz} + f_u(w^0, A_0)w^j + f_j, \tag{2.16}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
f_j := &\frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial \varepsilon^j} f\Big(\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k w^k, A_0 + \sum_{k\geq 1}\varepsilon^k (A_k - \frac{1}{D}w^{k-1})\Big)\Big|_{\varepsilon=0} \\
&- f_u(w^0, A_0)w^j + (N-1)\sum_{k=0}^{j-1}(-1)^k \frac{z^k}{R_*^{k+1}} w_z^{j-1-k}.
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

注意， f_j 仅依赖于低阶项 w^k $(0 \leq k \leq j-1)$和 A_k $(0 \leq k \leq j)$。就本文目的而言，我们在全文中固定一个正常数 d_0 ， 使得

$$
0 < d_0 < \min\left\{\sqrt{-f_u(h^-(v^*), v^*)}, \sqrt{-f_u(h^+(v^*), v^*)}\right\}. \tag{2.18}
$$

常数 d_0 仅依赖于《非线性》 f ，且与参数M、 ε 和 D无关。因此，在下文中，我们将不再显式追踪其他量对 d_0的依赖。

在得到外展开 $U^j(x)$和内展开 $w^j(z)$之后，我们将采用标准的截断函数技术，在界面 Γ_* 处将它们光滑地匹配起来。为便于这一匹配，我们将每个内展开 w^j的定义域从$(-\frac{R_*}{\varepsilon}, \frac{1-R_*}{\varepsilon})$ 延拓到 $\mathbb{R}$，并要求 w^j 对每个 $j \in \mathbb{N}$满足如下指数匹配条件:

$$
|w^j(z) - U^{+,j}| \cdot \chi_{[0,\infty)}(z) + |w^j(z) - U^{-,j}| \cdot \chi_{(-\infty,0]}(z) \leq c_j e^{-d_0|z|} \text{ in } \mathbb{R}, \tag{2.19}
$$

其中 χ 表示所指标集的特征函数， $U^{\pm,j}$ 为常数（参见（2.11）之后的注释）， $c_j > 0$ 是某个待与 w^j一同确定的常数。

现在，我们在条件（2.15）和（2.16）下寻找满足（2.19）的解。

对于方程（2.15），在假设（2.19）下，由命题2.1、（2.11）-(i) 及假设（A3）可知，我们必须选择

$$
A_0 := v^* \tag{2.20}
$$

以使方程（2.15）存在一个解，该解由以下形式给出： $w^0(z) = Q(z+a_0;\ v^*)$，其中 $a_0 \in \mathbb{R}$ 是一个平移参数，将在命题2.6中确定。为简化记号，下文将用 $Q(z+a_0)$ 代替 $Q(z+a_0;\ v^*)$，并令

$$w^0(z) := Q(z+a_0). \tag{2.21}$$

由于 $w^0(z) - h^{\mp}(v^*)$、$w^0_z(z)$ 和 $w^0_{zz}(z)$ 根据命题 2.1，当 $z \to \pm\infty$ 时均指数地趋于零，因此存在一个常数 $c_0 = c_0(a_0) > 0$，使得

$$\begin{aligned} |w^0(z) - h^-(v^*)| \cdot \chi_{[0,\infty)}(z) + |w^0(z) - h^+(v^*)| \cdot \chi_{(-\infty,0]}(z) \\ + |w^0_z(z)| + |w^0_{zz}(z)| \le c_0 e^{-d_0|z|} \quad \text{in } \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

这保证了条件（2.19）对 $j=0$ 成立。

由（2.20）和（2.11）-(i)可知， U^0 现已确定为

$$U^0(x) = \begin{cases} U^{-,0} \equiv h^+(v^*) & \text{in } \Omega^- \\ U^{+,0} \equiv h^-(v^*) & \text{in } \Omega^+. \end{cases} \tag{2.23}$$

接下来，我们求解满足条件（2.16）的方程（2.19）。为此，我们需要先建立一个技术性引理。首先引入以下 Banach 空间

$$\begin{aligned} \mathcal{X} := \Big\{ g \in C(\mathbb{R}) \,|\, g_{\pm\infty} := \lim_{z\to\pm\infty} g(z) \text{ exist and there exists a constant } C_g > 0 \\ \text{such that } |g(z) - g_{\mathrm{sgn}(z)\infty}| \le C_g e^{-d_0|z|} \text{ in } \mathbb{R} \Big\}, \end{aligned}$$

赋予范数

$$\|g\|_{\mathcal{X}} := |g_\infty| + |g_{-\infty}| + \sup_{z\ge 0} \left|(g(z) - g_\infty)e^{d_0 z}\right| + \sup_{z\le 0} \left|(g(z) - g_{-\infty})e^{-d_0 z}\right|.$$

我们还定义由以下函数构成的闭子空间 $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$，这些函数在正负无穷处都指数地快速衰减至零:

$$\mathcal{X}_0 := \{ g \in \mathcal{X} \,|\, g_{\pm\infty} = 0 \}.$$

定义线性算子 L^0 如下:

$$L^0\varphi := \varphi_{zz} + f_u(w^0(z), v^*)\varphi. \tag{2.24}$$

由（2.21）、（2.22）和命题 2.1 容易看出

$$w^0_z \in \mathcal{X}_0 \quad \text{and} \quad L^0 w^0_z = 0.$$

接下来，我们定义 $\mathcal{X}$ 的闭子空间:

$$[w^0_z]^\perp := \{ g \in \mathcal{X} \,|\, \langle g, w^0_z \rangle = 0 \}, \quad \text{where } \langle \varphi, \psi \rangle := \int_{\mathbb{R}} \varphi \overline{\psi}\, dz.$$

它继承了 $\mathcal{X}$ 的 Banach 空间结构。

容易验证，求解方程（2.16）并满足边界条件（2.19）等价于在 $\mathcal{X}$ 中求解（2.16）。我们现在断言

引理2.3。 考虑线性非齐次方程

$$L^0\varphi = g, \quad \textit{where } g \in \mathcal{X}. \tag{2.25}$$

则以下结论成立。

（i）问题（2.25）有解 $\varphi \in \mathcal{X}$ 当且仅当$g \in [w^0_z]^\perp$。

（ii）算子 L^0 有一个有界右逆

$$(L^0)^{-1}:[w_z^0]^{\perp}\to[w_z^0]^{\perp}.$$

也就是说，对于每个 $g\in[w_z^0]^{\perp}$，问题 (2.25) 在 $[w_z^0]^{\perp}$中有唯一解，记作 $\varphi:=(L^0)^{-1}g$ 并且它满足

$$\varphi_{\pm\infty}=\frac{g_{\pm\infty}}{f_u(h^{\mp}(v^*),v^*)}\ and\ \varphi_z,\varphi_{zz}\in\mathcal{X}_0. \tag{2.26}$$

此外，

$$\|\varphi\|_{\mathcal{X}}+\|\varphi_z\|_{\mathcal{X}}+\|\varphi_{zz}\|_{\mathcal{X}}\le C\|g\|_{\mathcal{X}}, \tag{2.27}$$

其中，$C>0$ 是一个仅依赖于 w^0的常数。事实上，φ 可以显式表示为

$$\varphi(z)=\alpha w_z^0(z)+\bar{\varphi}(z), \tag{2.28}$$

其中

$$\bar{\varphi}(z)=w_z^0(z)\int_0^z\frac{d\xi}{(w_z^0(\xi))^2}\int_{\pm\infty}^{\xi}w_z^0(\eta)g(\eta)\,d\eta,\quad \alpha=-\frac{\langle\bar{\varphi},w_z^0\rangle}{\langle w_z^0,w_z^0\rangle}.$$

注2.4。与引理 *2.3*类似的结果已在 *[16,* 引理 *3*。*1]*中得到。然而，我们结果的一个关键区别在于，我们将其置于合适的函数空间框架中表述，从而确认常数 C 在 (2.27) 仅依赖于 w^0，且与非齐次项 g无关。这一改进对于后续分析至关重要，因为我们将系统地应用 (2.27) 来监控一系列估计中的参数依赖性。

引理的证明 *2.3*。我们先证明第 (i) 部分。假设 $g\in[w_z^0]^{\perp}$。由常数变易公式可直接得到，φ由 (2.28) 定义的函数满足方程 (2.25)。反复应用洛必达法则，可容易地证明

$$\left|\varphi-\frac{g_{\pm\infty}}{f_u(h^{\mp}(v^*),v^*)}\right|\le C(\|g\|_{\mathcal{X}},\|w^0\|_{\mathcal{X}})\cdot e^{-d_0|z|}.$$

其中 $C(\|g\|_{\mathcal{X}},\ \|w^0\|_{\mathcal{X}})>0$是一个仅依赖于所示变量的常数。这意味着 (2.26) 中的第一个恒等式；将其与关于 φ 的方程结合，可得$(\varphi_{zz})_{\pm\infty}=0$。然后由插值不等式可得 $(\varphi_z)_{\pm\infty}=0$。因此，$\varphi_z,\ \varphi_{zz}\in\mathcal{X}_0$。至此，(2.26) 的证明完成。

另一方面，假设 (2.25) 有一个解 $\varphi\in\mathcal{X}$。由于 $g\in\mathcal{X}$，$w_z^0\in\mathcal{X}_0$并且 $L^0w_z^0=0$，将 $L^0\varphi=g$ 两边乘以 w_z^0 并在 $\mathbb{R}$上积分，再利用分部积分，可得 $\langle g,\ w_z^0\rangle=0$，这意味着 $g\in[w_z^0]^{\perp}$。至此，第 (i) 部分的证明完成。

要完成第(ii)部分的证明，只需证明（2.27）。事实上，容易验证$(L^0)^{-1}:\ [w_z^0]^{\perp}\to[w_z^0]^{\perp}$ 是一个图闭的连续算子。因此，根据闭图定理，存在一个 $C>0$ 仅依赖于 w^0 的常数，使得

$$\|\varphi\|_{\mathcal{X}}\le C\|g\|_{\mathcal{X}}\quad\forall\, g\in[w_z^0]^{\perp}.$$

由 φ 的方程可得 $\|\varphi_{zz}\|_{\mathcal{X}}\le C\|g\|_{\mathcal{X}}$。现在，由上述两个估计和插值不等式可得（2.27）。至此，引理的证明完成。□

现在，我们可以在条件（2.16）下求解方程（2.19）。

命题 *2.5.* 假设条件 *(A1)-(A3)* 成立。令 A_0、U^0 和 w^0 分别由 *(2.20)*、*(2.23)* 和 *(2.21)* 定义，其中 $R_*\in$ *(0, 1)* 是 *(2.23)* 中 $\Omega^{\pm}$ 定义里出现的界面位置参数（参见 *(2.5)*），而 $a_0\in\mathbb{R}$ 是 *(2.21)* 中的自由参数。那么，对于每个 $D>0$，以下陈述成立：

(i) 对于 $j=1$，方程 (2.16) 有解 $w^1\in\mathcal{X}$ 当且仅当

$$A_1=\frac{G_0(R_*,D)}{J'(v^*)}, \tag{2.29}$$

其中

$$G_0(R_*,D):=\frac{N-1}{R_*}\int_{\mathbb{R}}Q_z(z)^2dz-\frac{1}{D}\int_{\mathbb{R}}f_v(Q(z),v^*)Q(z)Q_z(z)dz.$$

当条件 (2.29) 成立时，相应的解 w^1 可显式写为

$$w^1=a_1w_z^0+\widehat{w}^1, \tag{2.30}$$

其中 a_1 是一个自由参数，且 $\widehat{w}^1=-(L^0)^{-1}f_1\in[w_z^0]^\perp$。

(ii) 对于每个 $j\geq 2$，方程 (2.16) 有解 $w^j\in\mathcal{X}$ 当且仅当

$$A_j=\frac{G_{j-1}(R_*,D,a_0,\cdots,a_{j-2})}{J'(v^*)}, \tag{2.31}$$

其中 G_{j-1} 是关于所示变量的光滑函数，且 a_0，$\cdots$，a_{j-2} 分别是表达式 w^0，$\cdots$，w^{j-2} 中的自由参数。当条件(2.31) 成立时，相应的解 w^j 可显式写为

$$w^j=a_jw_z^0+\widehat{w}^j, \tag{2.32}$$

where a_j is a free parameter and $\widehat{w}^j=-(L^0)^{-1}f_j\in[w_z^0]^\perp$.

此外，对每个 $D_0>0$ 和 $j\geq 1$，都存在一个常数

$$c_j=c_j(R_*,D_0,a_0,\cdots,a_j)>0$$

使得对所有 $D\geq D_0$，

$$\begin{aligned}|w^j(z)-U^{+,j}|\cdot\chi_{[0,\infty)}(z)+|w^j(z)-U^{-,j}|\cdot\chi_{(-\infty,0]}(z)\\ +|w_z^j(z)|+|w_{zz}^j(z)|\leq c_je^{-d_0|z|}\quad in\ \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2.33}$$

命题 2.5 表明，对于任意给定的平均总质量 $M\in I_{v^*}$ 和固定的 $D>0$，外层与内层展开的构造可归结为确定界面位置参数 R_* 以及 $j\geq 0$ 的“自由”参数 a_j。一旦这些量确定，所有相关量——包括常数 A_j ($j\geq 1$)（见 (2.29) 和 (2.31)）、外层展开 U^j ($j\geq 0$)（见 (2.11)）以及内层展开 w^j ($j\geq 0$)（见 (2.21)、(2.30) 和 (2.32)）——便都可以通过归纳确定。

现在，我们通过构造一个由外层展开 U^j 和内层展开 w^j 构成的近似解，来确定界面位置参数 $R_*\in(0,1)$ 以及 $j\geq 0$ 的自由参数 $a_j\in\mathbb{R}$。为此，我们引入以下简写符号，表示截断至 $k\in\mathbb{N}$ 阶的外层与内层展开：

$$U_k^\varepsilon(r):=\sum_{j=0}^k\varepsilon^jU^j(r),\quad w_k^\varepsilon(z):=\sum_{j=0}^k\varepsilon^jw^j(z). \tag{2.34}$$

接下来，我们选取一个光滑的截断函数 $\theta(z)$，使其满足

$$0\leq\theta(z)\leq 1\text{ for }z\in\mathbb{R},\quad \theta(z)=1\text{ for }|z|\leq 1\text{ and }\theta(z)=0\text{ for }|z|\geq 2. \tag{2.35}$$

Let

$$r_0:=\frac{1}{4}\min\{R_*,1-R_*\}. \tag{2.36}$$

然后，我们通过在界面 $r = R_*$ 附近将外层与内层展开平滑地拼接起来，定义 k阶近似解 $u^{\varepsilon,D}_k(r)$，如下：

$$u_k^{\varepsilon,D}(r) := U_k^{\varepsilon}(r) + \theta\Big(\frac{r-R_*}{r_0}\Big)\Big[w_k^{\varepsilon}\Big(\frac{r-R_*}{\varepsilon}\Big) - U_k^{\varepsilon}(r)\Big]. \tag{2.37}$$

命题 2.6. 假设条件 (A1)-(A3)成立。设 A_0 由 (2.20)定义。那么，对于任意给定的

$$M \in I_{v^*} \quad and \quad D > 0$$

存在常数 $R_* = R_*(M)$，由 (1.10)定义； $a_0 = a_0(M,\ D)$， $a_1 = a_1(M,\ D,\ a_0)$，$\cdots$， $a_j = a_j(M,\ D,\ a_0,\ \cdots,\ a_{j-1})$ 对所有 $j \geq 1$ 均成立，这些量与下列量一起通过归纳确定：

- 常数 A_j 对于 $j \geq 1$ *(*参见 (2.29) 和 (2.31)*)*，
- 外解 U^j 对于 $j \geq 0$ *(*参见 (2.11)*)*，以及
- 内解 w^j 对于 $j \geq 0$ （参见 (2.21)、(2.30) 和 (2.32)），

使得对于任意 $\varepsilon > 0$ 和 $k \in \mathbb{N}$，下列展开式成立：

$$\mathcal{S}^{\varepsilon}[u_k^{\varepsilon,D}] = v^* + \sum_{j=1}^{k+1} \varepsilon^j A_j + \varepsilon^{k+2} A_{k+2}^{\varepsilon,D}, \tag{2.38}$$

其中， $\mathcal{S}^{\varepsilon}[\,\cdot\,]$ 定义于 (1.8)， $u^{\varepsilon,D}_k$ 由 (2.37)给出，而 $A^{\varepsilon,D}_{k+2}$ 是余项的系数，仅依赖于 M、 D、 ε 和 k。

此外，有：

(i) 对于每个 $D_0 > 0$ 和 $k \in \mathbb{N}$，存在一个常数 $C'_k = C'_k(M、\ D_0) > 0$，使得

$$\sum_{j=0}^{k} |a_j| + \sum_{j=0}^{k+2} |A_j| \leq C'_k, \quad \forall\ D \geq D_0, \tag{2.39}$$

这进一步意味着以下一致有界性

$$\sum_{j=0}^{k+2} \|U^k\|_{L^\infty} \leq C'_k, \quad \sum_{j=0}^{k} \Big(\|w^k\|_{\mathcal{X}} + \|w^k_z\|_{\mathcal{X}} + \|w^k_{zz}\|_{\mathcal{X}}\Big) \leq C'_k \quad \forall\ D \geq D_0. \tag{2.40}$$

(ii) 对于每个 $\varepsilon_0 > 0$、 $D_0 > 0$ 和 $k \in \mathbb{N}$，都存在一个常数 $C_k = C_k(M, D_0, \varepsilon_0) > 0$，使得

$$|A^{\varepsilon,D}_{k+2}| \leq C_k, \quad \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]\ and\ D \geq D_0. \tag{2.41}$$

命题 2.6 证明，对于每个给定的 $M \in I_{v^*}$ 和 $D > 0$，界面位置参数 R_* 和“自由”参数 a_j ($j \geq 0$)，以及命题 2.5 和 (2.11) 中定义的相关量 A_j、 w^j 和 U^j，均可通过归纳确定，使得将渐近展开 (2.8) 用于近似解 $u^{\varepsilon,D}_k$ 时，其关于 ε 的幂次展开可达到任意指定阶数 $k+1$，且余项具有 $\varepsilon^{k+2}A^{\varepsilon,D}_{k+2}$ 的形式。此外，(2.39)-(2.41) 中给出的一致有界性保证，当 $\varepsilon \to 0$ 和 $D \to \infty$ 时，外层展开 U^j、内层展开 w^j 以及近似解 $u^{\varepsilon,D}_k$ 均保持一致受控。这些结果为后续各节开展微扰分析奠定了坚实基础，以便在 $u^{\varepsilon,D}_k$ 的邻域内构造精确解。

现在我们来证明命题2.5 和2.6。

命题2.5的证明。我们首先证明在以下情形下的第 (i) 部分：$j=1$。那么，方程 (2.16) 在 $j=1$ 下写作 $L^0 w^1 = -f_1$ 其中

$$f_1 = \Big(A_1 - \frac{1}{D}w^0\Big) f_v(w^0, v^*) + \frac{N-1}{R_*} w_z^0.$$

由（2.22），可知 $f_1 \in \mathcal{X}$满足 $f_1^{\pm\infty} = f_v(h^{\mp}(v^*)\ v^*)(A_1 - \frac{1}{D}h^{\mp}(v^*))$。因此，由引理 2.3 (i)，为保证方程（2.16）在 $j=1$ 中关于 $\mathcal{X}$可解，我们需要验证$f_1 \in [w_z^0]^{\perp}$，即

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega f_1(z) w_z^0(z)\, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big(A_1 - \frac{w^0(z)}{D}\Big) f_v(w^0(z), v^*) w_z^0(z)\, dz + \frac{N-1}{R_*}\int_{\mathbb{R}} (w_z^0)^2(z)\, dz \\ &= -J'(v^*)A_1 - \frac{1}{D}\int_{\mathbb{R}} f_v(Q(z), v^*) Q(z) Q_z(z) dz + \frac{N-1}{R_*}\int_{\mathbb{R}} Q_z(z)^2 dz, \end{aligned}$$

其中，在第三个等式中，我们用到了恒等式

$$J'(v^*) = \int_{h^-(v^*)}^{h^+(v^*)} f_v(s, v^*)\, ds = -\int_{\mathbb{R}} f_v(w^0(z), v^*) w_z^0(z)\, dz. \tag{2.42}$$

这意味着

$$J'(v^*)A_1 = \frac{N-1}{R_*}\int_{\mathbb{R}} Q_z(z)^2 dz - \frac{1}{D}\int_{\mathbb{R}} f_v(Q(z), v^*) Q(z) Q_z(z) dz = G_0(R_*, D).$$

由于 $J'(v^*) \neq 0$ 根据条件 (A3) 成立，因此（2.29）的证明至此完成，并确定了A_1。因此，$U^{\pm,\,1}$ 现在可由（2.11）-(ii) 根据 A_0 和 A_1 确定为

$$U^{\pm,1}(x) \equiv h_v^{\mp}(v^*)\Big(A_1 - \frac{1}{D}h^{\mp}(v^*)\Big) \quad \text{in } \Omega^{\pm}. \tag{2.43}$$

记 $\widehat{w}^1 := -(L^0)^{-1} f_1$。则方程（ w^1 （2.16）的任意解都可表示为（2.30）。将引理 2.3 应用于方程 $L^0\widehat{w}^1 + f_1 = 0$，由（2.22）和（2.27）可知，（2.33）在 $j=1$ 下成立。这意味着 w^1 满足条件（2.19），其中 $j=1$。由此完成第 (i) 部分的证明。

接下来，我们证明 $j=2$情形下的第(ii)部分。此时，方程 (2.16) 在 $j=2$ 条件下可写为 $L^0 w^2 = -f_2$ 其中

$$\begin{aligned} f_2 = {} & f_v(W^0)\Big(A_2 - \frac{w^1}{D}\Big) + \frac{1}{2} f_{uu}(W^0)(w^1)^2 + f_{uv}(W^0) w^1 \Big(A_1 - \frac{w^0}{D}\Big) \\ & + \frac{1}{2} f_{vv}(W^0)\Big(A_1 - \frac{w^0}{D}\Big)^2 + (N-1)\Big(\frac{1}{R_*} w_z^1 + \frac{z}{R_*^2} w_z^0\Big), \end{aligned}$$

其中 $W^0 := (w^0(z)\ v^*)$。由 (2.22) 和 (2.33)，结合 $j=1$，可知 $f_2 \in \mathcal{X}$。因此，根据引理 2.3 (i)，为保证方程 (2.16) 在 $j=2$ 条件下可解，我们需要验证$f_2 \in [w_z^0]^{\perp}$。将 ($w^1 = a_1 w_z^0 + \widehat{w}^1$ 由 (2.30) 得到，以及 A_1 由 (2.29) 得到，代入 f_2的表达式，并利用 $f_2 \in [w_z^0]^{\perp}$，得到

$$\begin{aligned} & A_2 \int_{\mathbb{R}} f_v(W^0) w_z^0(z) dz + \frac{(a_1)^2}{2}\int_{\mathbb{R}} f_{uu}(W^0)(w_z^0)^3 dz \\ & + a_1 \int_{\mathbb{R}} \Big[\Big(f_{uu}(W^0)\widehat{w}^1 + f_{uv}(W^0)\big(A_1 - \tfrac{w^0}{D}\big) - \tfrac{1}{D} f_v(W^0)\Big)(w_z^0)^2 + \tfrac{N-1}{R_*} w_{zz}^0 w_z^0\Big] dz \\ & + G_1(R_*, D, a_0) = 0. \end{aligned}$$

这里，所有不涉及 A_2 和 a_1 的其他项都归并到了最后一项 $G_1(R_*,\ D,\ a_0)$中，而我们不提供函数 $G_1(R_*,\ D,\ a_0)$的显式表达式。

由（2.42）可知， A_2 的系数等于 $-J'(v^*)$ 。通过分部积分，我们发现（a_1）^{2} 的系数为0。现在我们计算 a_1 的系数，以证明它也等于0。对方程 $L^0\widehat{w}^1 + f_1 = 0$ 关于 z求导，得到

$$0 = \widehat{w}^1_{zzz} + f_{uu}(W^0)\widehat{w}^1 w^0_z + f_{uv}(W^0)\Big(A_1 - \frac{w^0}{D}\Big)w^0_z + f_u(W^0)\widehat{w}^1_z - f_v(W^0)\frac{w^0_z}{D} + \frac{N-1}{R_*}w^0_{zz}.$$

因此，由（2.22）和（2.33），结合 $j=1$ 以及 $L^0 w^0_z = 0$ 这一事实，我们可知

$$\begin{aligned}\text{the coefficient of } a_1 &= -\int_{\mathbb{R}} \left[\widehat{w}^1_{zzz} + f_u(W^0)\widehat{w}^1_z\right] w^0_z\, dz \\ &= \Big(-w^0_z\widehat{w}^1_{zz} + w^0_{zz}\widehat{w}^1_z\Big)\Big|^{+\infty}_{-\infty} - \int_{\mathbb{R}} \widehat{w}^1_z\Big(w^0_{zzz} + f_u(W^0)w^0_z\Big)\, dz \\ &= 0.\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$-A_2 J'(v^*) + G_1(R_*, D, a_0) = 0.$$

这就完成了对 $j=2$ 的（2.31）的证明，并确定了 A_2。因此， $U^{\pm,\,2}$ 现在可由（2.11）-(iii) 根据 A_0、 A_1 和 A_2 确定。

记 $\widehat{w}^2 := -(L^0)^{-1}f_2$。那么，方程（ w^2 （2.16）的任意解均可表示为（2.32），其中 $j=2$。将引理 2.3 应用于方程 $L^0\widehat{w}^2 + f_2 = 0$，由（2.22）和（2.27）可知， （2.33）在 $j=2$ 的条件下成立。这意味着 w^2 满足条件（2.19），其中$j=2$。由此，我们完成了 $j=2$ 情况下第(ii)部分的证明。

$j \geq 3$ 第(ii)部分的证明类似，并遵循归纳法。由于计算较为繁琐，细节从略。□

命题的证明*2.6*。由（1.8）、（2.20）和（2.37）可知，（2.38）等价于

$$\begin{aligned}M &= v^* + \sum_{j=1}^{k+1}\varepsilon^j A_j + \varepsilon^{k+2}A^{\varepsilon,D}_{k+2} + \frac{1}{|\Omega|}\Big(1-\frac{\varepsilon}{D}\Big)\int_\Omega u^{\varepsilon,D}_k\, dx \\ &= v^* + \sum_{j=1}^{k+1}\varepsilon^j A_j + \varepsilon^{k+2}A^{\varepsilon,D}_{k+2} + \frac{1}{|\Omega|}\Big(1-\frac{\varepsilon}{D}\Big)\sum_{j=0}^{k}\varepsilon^j\int_\Omega U^j(x)\, dx \\ &\quad + \frac{1}{|\Omega|}\Big(1-\frac{\varepsilon}{D}\Big)\sum_{j=0}^{k}\varepsilon^j\int_\Omega \theta\Big(\frac{|x|-R_*}{r_0}\Big)\Big[w^j\Big(\frac{|x|-R_*}{\varepsilon}\Big) - U^j(x)\Big]dx \\ &= v^* + \sum_{j=1}^{k+1}\varepsilon^j A_j + \varepsilon^{k+2}A^{\varepsilon,D}_{k+2} + \frac{1}{|\Omega|}\Big(1-\frac{\varepsilon}{D}\Big)\sum_{j=0}^{k}\varepsilon^j\int_\Omega U^j(x)\, dx \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k}\varepsilon^j K^\varepsilon_j - \frac{1}{D}\sum_{j=0}^{k}\varepsilon^{j+1}K^\varepsilon_j\end{aligned} \tag{2.44}$$

其中

$$K^\varepsilon_j := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \theta\Big(\frac{|x|-R_*}{r_0}\Big)\Big[w^j\Big(\frac{|x|-R_*}{\varepsilon}\Big) - U^j(x)\Big]dx, \quad 0 \leq j \leq k.$$

为计算 K_j^ε，我们首先将拉伸变量 $z = \frac{r-R_*}{\varepsilon}$ 的定义域 $\left(-\frac{R_*}{\varepsilon}, \frac{1-R_*}{\varepsilon}\right)$ 划分为以下三个子区间：

$$\begin{aligned} I_1 &:= \left(-\tfrac{R_*}{\varepsilon}, -\tfrac{2r_0}{\varepsilon}\right] \cup \left[\tfrac{2r_0}{\varepsilon}, \tfrac{1-R_*}{\varepsilon}\right); \\ I_2 &:= \left(-\tfrac{2r_0}{\varepsilon}, -\tfrac{r_0}{\varepsilon}\right) \cup \left(\tfrac{r_0}{\varepsilon}, \tfrac{2r_0}{\varepsilon}\right); \\ I_3 &:= \left[-\tfrac{r_0}{\varepsilon}, \tfrac{r_0}{\varepsilon}\right]. \end{aligned} \tag{2.45}$$

此外，我们记

$$I_4 := \left(-\infty, -\tfrac{2r_0}{\varepsilon}\right] \cup \left[\tfrac{2r_0}{\varepsilon}, \infty\right), \quad C_{N-1}^m := \tfrac{(N-1)!}{m!(N-1-m)!}, \tag{2.46}$$

and

$$\tilde{U}^j(z) := U^{+,j}\chi_{(0,\infty)} + U^{-,j}\chi_{(-\infty,0)}$$

其中 $U^{\pm,\,j}$ 是对所有 $j \geq 0$ 在（2.11）中定义的常数（参见（2.11）后的注释）。于是，对于 $j = 0, \cdots, k$，通过直接计算并利用（2.35），可得

$$\begin{aligned} K_j^\varepsilon &= N \int_{-\frac{2r_0}{\varepsilon}}^{\frac{2r_0}{\varepsilon}} \theta\left(\tfrac{\varepsilon}{r_0}z\right)\left(w^j(z) - \tilde{U}^j(z)\right)(R_* + \varepsilon z)^{N-1}\varepsilon\, dz \\ &= N \sum_{m=0}^{N-1} C_{N-1}^m \varepsilon^{m+1} R_*^{N-1-m} \int_{\mathbb{R}} z^m \left(w^j(z) - \tilde{U}^j(z)\right) dz \\ &\quad - N \sum_{m=0}^{N-1} C_{N-1}^m \varepsilon^{m+1} R_*^{N-1-m} \int_{I_4} z^m \left(w^j(z) - \tilde{U}^j(z)\right) dz \\ &\quad + N \int_{I_2} \left[\theta\left(\tfrac{\varepsilon}{r_0}z\right) - 1\right] \left(w^j(z) - \tilde{U}^j(z)\right)(R_* + \varepsilon z)^{N-1}\varepsilon\, dz \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \varepsilon^{m+1} K_j^m + K_{j,1}^\varepsilon + K_{j,2}^\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.47}$$

其中

$$K_j^m := N C_{N-1}^m R_*^{N-1-m} \int_{\mathbb{R}} z^m \left(w^j(z) - \tilde{U}^j(z)\right) dz \quad (0 \leq m \leq N-1), \tag{2.48}$$

$$K_{j,1}^\varepsilon := -N \sum_{m=0}^{N-1} C_{N-1}^m \varepsilon^{m+1} R_*^{N-1-m} \int_{I_4} z^m \left(w^j(z) - \tilde{U}^j(z)\right) dz, \tag{2.49}$$

$$K_{j,2}^\varepsilon := N \int_{I_2} \left[\theta\left(\tfrac{\varepsilon}{r_0}z\right) - 1\right] \left(w^j(z) - \tilde{U}^j(z)\right)(R_* + \varepsilon z)^{N-1}\varepsilon\, dz. \tag{2.50}$$

注意到 K_j^m不依赖于 ε。将（2.47）和（2.23）代入（2.44），得到

$$M = \sum_{j=0}^{k+1} \varepsilon^j B_j + \varepsilon^{k+2} B_{k+2}^{\varepsilon,D}, \tag{2.51}$$

其中

$$
\begin{aligned}
B_0 &:= v^* + \Big[h^+(v^*)R_*^N + h^-(v^*)(1-R_*^N)\Big],\\
B_1 &:= A_1 + \Big(U^{-,1} - \tfrac{1}{D}h^+(v^*)\Big)R_*^N + \Big(U^{+,1} - \tfrac{1}{D}h^-(v^*)\Big)(1-R_*^N) + K_0^0,\\
B_j &:= A_j + \Big(U^{-,j} - \tfrac{1}{D}U^{-,j-1}\Big)R_*^N + \Big(U^{+,j} - \tfrac{1}{D}U^{+,j-1}\Big)(1-R_*^N)\\
&\quad + \sum_{m=(j-1-k)_+}^{(N-1)\wedge(j-1)} K_{j-1-m}^m - \frac{1}{D}\sum_{m=(j-2-k)_+}^{(N-1)\wedge(j-2)} K_{j-2-m}^m \qquad (2\le j\le k),\\
B_{k+1} &:= A_k - \frac{1}{D}\Big[U^{-,k}R_*^N + U^{+,k}(1-R_*^N)\Big] + \sum_{m=0}^{(N-1)\wedge k} K_{k-m}^m\\
&\quad - \frac{1}{D}\sum_{m=0}^{(N-1)\wedge(k-1)} K_{k-1-m}^m,\\
B_{k+2}^{\varepsilon,D} &:= A_{k+2}^{\varepsilon,D} + \sum_{j=k-m+1}^{k}\sum_{m=1}^{(N-1)\wedge(k+1)} \varepsilon^{j+m-k-1}K_j^m + \sum_{j=0}^{k}\varepsilon^{j-k-2}(K_{j,1}^\varepsilon + K_{j,2}^\varepsilon)\\
&\quad - \frac{1}{D}\sum_{j=k-m}^{k}\sum_{m=0}^{(N-1)\wedge k}\varepsilon^{j+m-k}K_j^m - \frac{1}{D}\sum_{j=0}^{k}\varepsilon^{j-k-1}(K_{j,1}^\varepsilon + K_{j,2}^\varepsilon),
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

并且我们使用了以下记号

$$k\wedge\ell := \min\{k,\ell\},\quad k\vee\ell := \max\{k,\ell\},\quad \ell_+ = \ell\vee 0.$$

由方程 比较 ε 在（2.51）中的同次幂系数，我们观察到条件

$$B_0 = M,\quad B_j = 0\quad (1\le j\le k+1)\quad\text{and}\quad B_{k+2}^{\varepsilon,D} = 0 \tag{2.53}$$

共同确保展开式（2.38）成立。

为了 为完成证明，我们通过适当选取2.53中的参数，归纳地求解该系统 g:

- 界面位置参数 R_* 以满足 $B_0 = M$,
- 自由参数 a_{j-1} 以使 $B_j = 0$ 对 $1\le j\le k+1$成立，且
- 系数 $A^{\varepsilon,D}_{k+2}$ 以确保 $B^{\varepsilon,D}_{k+2} = 0$。

我们首先在（ $B_0 = M$ 2.53）中施加条件。为此，令

$$R_* = R_*(M) := \Big[\frac{M - v^* - h^-(v^*)}{h^+(v^*) - h^-(v^*)}\Big]^{1/N}$$

如（1.10）中所定义。为保证 $R_*\in(0,1)$，我们要求

$$M\in\big(v^* + h^-(v^*), v^* + h^+(v^*)\big) = I_{v^*}.$$

由于 $R_* = R_*(M)$ 由给定的平均总质量 M确定，因此由（2.29）和（2.11）-(i)&(ii)可知，常数 A_1 以及外层展开 U^0, U^1 均由 M （通过 R_*）和 D完全确定。

现在我们确定参数 a_0 ，使条件 $B_1 = 0$ 在（2.53）中成立。由于 R_*、 A_1、 U^0和 U^1已在上文确定，因此表达式 B_1在（2.52）中的各项均已知，唯独 K_0^0尚未确定。为计算 K_0^0，我们使用其在（2.48）中的定义以及（2.21）给出的 w^0 公式，得到

$$\big(NR_*^{N-1}\big)^{-1}K_0^0 = \int_{\mathbb{R}}\big(w^0(z) - \widetilde{U}^0(z)\big)dz$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{0} \big(Q(z+a_0) - h^+(v^*)\big)dz + \int_{0}^{\infty} \big(Q(z+a_0) - h^-(v^*)\big)dz \\
&= \int_{-\infty}^{0} \big(Q(z) - h^+(v^*)\big)dz + \int_{0}^{\infty} \big(Q(z) - h^-(v^*)\big)dz \\
&\quad - a_0\big[h^+(v^*) - h^-(v^*)\big] \\
&= -a_0\big[h^+(v^*) - h^-(v^*)\big] + J_0,
\end{aligned}
$$

其中

$$
J_0 := \int_{-\infty}^{0} \big(Q(z) - h^+(v^*)\big)dz + \int_{0}^{\infty} \big(Q(z) - h^-(v^*)\big)dz
$$

是一个与 a_0 无关的已知常数。将此表达式代入 K_0^0 在 B_1 （2.52）中的公式，并注意到 h^+（v^*） $-h^-$（v^*） $\neq 0$，我们得出条件$B_1 = 0$ 成立当且仅当 a_0 由下式给出

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{A_1 + \big(U^{-,1} - \frac{1}{D}h^+(v^*)\big)R_*^N + \big(U^{+,1} - \frac{1}{D}h^-(v^*)\big)(1 - R_*^N) + NR_*^{N-1}J_0}{\big(h^+(v^*) - h^-(v^*)\big)NR_*^{N-1}} \\
&=: a_0(M, D),
\end{aligned}
$$

其中， $R_* = R_*(M)$ 由 (1.10) 给出， A_1 由 (2.29) 给出，而 $U^{\pm}$、^{0}、 $U^{\pm}$、1 由 (2.11)-(i)&(ii) 给出。因此，自由参数 a_0 现在已唯一确定。因此， $w^0(z) = Q(z + a_0)$ 已完全确定。由此， $0 \le m \le N-1$ 对应的常数 K_0^m 现在可根据 (2.48) 中的表达式显式计算。此外，由 $j = 2$ 的 (2.31) 可知，现在可通过 $G_1(R_*(M)\ D, a_0)/J'(v^*)$ 确定 A_2。因此，可通过 (2.11)-(iii) 利用 A_0、 A_1 和 A_2 确定 $U^{\pm}$、2。

此外，由上述构造以及（2.11）和（2.22）可知，对每个 $D_0 > 0$，都存在一个常数 $C_0' = C_0'(M, D_0) > 0$，使得一致有界性（2.39）和（2.40）对 $k = 0$成立。

现在我们以类似的方式确定参数 a_1，使得条件 $B_2 = 0$（2.53）成立。注意，（ B_2 2.52）中 B_2 的表达式里的所有项，除 K_1^0 外，均已在前面的步骤中确定。利用（2.48）以及（ $w^1$2.30）中的表示式，我们计算得：

$$
\begin{aligned}
\big(NR_*^{N-1}\big)^{-1} K_1^0 &= \int_{\mathbb{R}} \big(w^1(z) - \widetilde{U}^1(z)\big)dz \\
&= \int_{-\infty}^{0} \big(a_1 w_z^0(z) + \widehat{w}^1(z) - U^{-,1}\big)dz + \int_{0}^{\infty} \big(a_1 w_z^0(z) + \widehat{w}^1(z) - U^{-,1}\big)dz \\
&= -a_1\big[h^+(v^*) - h^-(v^*)\big] + J_1,
\end{aligned}
$$

其中

$$
J_1 := \int_{-\infty}^{0} \big(\widehat{w}^1(z) - U^{-,1}\big)dz + \int_{0}^{\infty} \big(\widehat{w}^1(z) - U^{-,1}\big)dz
$$

是一个已知常数，因为 $\widehat{w}^1 = -(L^0)^{-1}f_1$ （参见命题 2.5 (i)）以及 $U^{\pm,\ 1}$ 均已确定。将上述 K_1^0 的表达式代入（ B_2 2.52）中 B_2 的公式，并注意到 $h^+(v^*) - h^-(v^*) \neq 0$，我们得出 $B_2 = 0$ 成立当且仅当

$$
a_1 := a_1(M, D, a_0),
$$

其中 $a_1(M,\ D,\ a_0)$ 是通过求解 a_1 方程 B_2 =0所确定的光滑函数。因此，参数 a_1 现在已被唯一确定。一旦 a_1 已知，函数$w^1(z)$ 便可通过（2.30）完全确定。因此，利用（2.48），可以显式计算 K_1^m对于 $0 \le m \le N-1$的常数。此外，由（2.31）可知，当 $j = 3$ 时，有

A_3现在可由 $G_2(R_*(M)\ D,\ a_0,\ a_1)/J'(v^*)$确定。因此，$U^{\pm,\ 3}$可通过 A_0，A_1，A_2 以及 A_3 利用（2.11）-(iii) 确定。

类似地，由上述分析以及（2.11）、（2.22）和（2.33）可知，对每个 $D_0 > 0$，都存在一个常数 C_1'（M，D_0）> 0，使得对 $k = 1$，（2.39）和（2.40）中的一致有界性成立。

我们通过归纳确定参数a_j，使条件 $B_{j+1} = 0$在每个2.53）中对 $2 \le j \le k$均成立。事实上，对于任意这样的 j，（B_{j+1} 2.52）中 B_{j+1} 的表达式里的所有项都已在前面的步骤中确定，唯独 K_j^0 尚未确定。我们利用K_j^0（2.48）中的定义以及 w^j 在（2.32）中的表达式来计算K_j^0，如下所示：

$$\begin{aligned}\left(NR_*^{N-1}\right)^{-1} K_j^0 &= \int_{\mathbb{R}} \left(w^j(z) - \widetilde{U}^j(z)\right) dz \\ &= \int_{-\infty}^{0} \left(a_j w_z^0(z) + \widehat{w}^j(z) - U^{-,j}\right) dz + \int_0^{\infty} \left(a_j w_z^0(z) + \widehat{w}^j(z) - U^{-,j}\right) dz \\ &= -\, a_j \left[h^+(v^*) - h^-(v^*)\right] + J_j,\end{aligned}$$

其中

$$J_j := \int_{-\infty}^{0} \left(\widehat{w}^j(z) - U^{-,j}\right) dz + \int_0^{\infty} \left(\widehat{w}^j(z) - U^{-,j}\right) dz$$

可以显式计算，因为 $\widehat{w}^j = -\,(L^0)^{-1} f_j$（参见命题 2.5 （ii）），且 $U^{\pm,\ j}$ 已在前面的步骤中确定。将此表达式代入 K_j^0 在（2.52）中的公式，并注意到 $h^+(v^*) - h^-(v^*) \neq 0$，我们得出条件 $B_{j+1} = 0$唯一确定了a_j。我们将此解记为

$$a_j := a_j(M, D, a_0, \cdots, a_{j-1}),$$

其中，a_j(M，D，a_0，$\cdots$，a_{j-1}) 是关于所示变量的光滑函数。

总之，对于每个 $M \in I_{v^*}$ 和 $D > 0$，我们可以递归地确定界面位置和自由参数 a_j，使其满足

$$R_* = R_*(M), \quad a_0 = a_0(M, D) \quad \text{and} \quad a_j = a_j(M, D, a_0, \cdots, a_{j-1}) \quad \text{for } j \ge 1,$$

从而对于 $j \ge 0$，分别有 $B_0 = M$ 和 $B_{j+1} = 0$。因此，内层剖面w^j 由 (2.21)、(2.30) 和 (2.32) 确定，常数 A_{j+1} 通过 (2.29) 和 (2.31) 确定，而外层剖面 $U^{\pm,\ j}$ 则由 $j \ge 0$时的 (2.11) 得出。这些量均可递归确定，并且光滑地依赖于前几步确定的量。此外，由 (2.22) 和命题 2.5 可知，对于每个$D_0 > 0$ 和 $k \in \mathbb{N}$，都存在一个常数 $C_k'(M, D_0) > 0$，使得一致有界性 (2.39) 和 (2.40) 成立。

最后，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，为确保条件 $B^{\varepsilon,\ D}_{k+2} = 0$ 在（2.53）中成立，由 $B^{\varepsilon,\ D}_{k+2}$ 在（2.52）中的表达式可知，只需令

$$\begin{aligned}A_{k+2}^{\varepsilon,D} := &-\sum_{j=k-m+1}^{k} \sum_{m=1}^{(N-1)\wedge(k+1)} \varepsilon^{j+m-k-1} K_j^m - \sum_{j=0}^{k} \varepsilon^{j-k-2}(K_{j,1}^{\varepsilon} + K_{j,2}^{\varepsilon}) \\ &+ \frac{1}{D} \sum_{j=k-m}^{k} \sum_{m=0}^{(N-1)\wedge k} \varepsilon^{j+m-k} K_j^m + \frac{1}{D} \sum_{j=0}^{k} \varepsilon^{j-k-1}(K_{j,1}^{\varepsilon} + K_{j,2}^{\varepsilon}).\end{aligned} \tag{2.54}$$

于是，由（2.44）、（2.51）和（2.53）可得，对所有$\varepsilon > 0$，$D > 0$以及 $k \in \mathbb{N}$，展开式（2.38）均成立。

为完成该命题的证明，尚需建立一致有界（2.41）。固定 $\varepsilon_0 > 0$，$D_0 > 0$ 和 $k \in \mathbb{N}$。在 A^{ε}的表达式中，$^{D}_{k+2}$ 在（2.54）中的幂

其中 ε 在第一与第三求和中分别满足 $j+m-k-1\geq 0$ 与 $j+m-k\geq 0$。结合 K_j^m在（2.48）中的表达式及前述一致估计，可确保这两个求和均被常数 $C_k=C_k(M,D_0,\varepsilon_0)>0$一致有界，对所有 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ 以及 $D\geq D_0$。为界定第二与第四求和，注意到

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}\varepsilon^{j-k-i+m}\int_{I_2\cup I_4}e^{-d_0|z|}|z|^m\,dz<\infty \tag{2.55}$$

对于所有整数 $0\leq m\leq N-1$、$0\leq j\leq k$ 和 $i=1,2$，其中上确界仅依赖于 ε_0、k 和 M，其依赖关系通过积分区域 I_2 和 I_4 中出现的界面位置 R_*（见 (1.10)）及 r_0（见 (2.36)）体现（参见 (2.45) 和 (2.46)）。此有界性结合 (2.49)–(2.50) 中 $K_j^{\varepsilon},1$ 和 $K_j^{\varepsilon},2$ 的表达式，以及 (2.22) 和 (2.33) 中对 w^j 的估计，可得所需的一致有界性 (2.41)。至此，命题的证明完成。□

2.4.**外层展开和内层展开的性质**。我们首先总结 k阶外层展开 U_k^{ε}，其定义见 (2.34)。

推论 2.7。假设条件 (A1)-(A3) 成立。给定 $M\in I_{v^*}$ 和 D_0、$\varepsilon_0>0$。那么对于每个 $k\in\mathbb{N}$，$U_k^{\varepsilon}|_{\Omega_+}$ 和 $U_k^{\varepsilon}|_{\Omega_-}$ 均为常数，并且存在常数$C_k=C_k(M$、D_0、$\varepsilon_0)>0$，使得对于所有 $\varepsilon\in(0$、$\varepsilon_0]$ 和 $D\geq D_0$，

$$\left|\varepsilon^2\Delta U_k^{\varepsilon}+f\Big(U_k^{\varepsilon},\mathcal{S}^{\varepsilon}[u_k^{\varepsilon,D}]-\tfrac{\varepsilon}{D}U_k^{\varepsilon}\Big)\right|=\left|f\Big(U_k^{\varepsilon},\mathcal{S}^{\varepsilon}[u_k^{\varepsilon,D}]-\tfrac{\varepsilon}{D}U_k^{\varepsilon}\Big)\right|\leq C_k\varepsilon^{k+1}\qquad in\ \Omega\backslash\Gamma_*,$$

其中 U_k^{ε} 定义于 (2.34)，且 $u^{\varepsilon,}{}_k{}^D$ 定义于 (2.37)。

推论 2.7 的证明可直接由 U^j 在 (2.9) 中的方程以及命题 2.6推出。因此省略细节。

接下来，我们总结 k 阶内层展开 w_k^{ε} 在 (2.34) 中的定义及其性质。

推论 2.8。假设条件 (A1)-(A3) 成立。设 $M\in I_{v^*}$、D_0、$\varepsilon_0>0$ 已给定。那么对每个 $k\in\mathbb{N}$，存在一个常数 $C_k=C_k(M,D_0,\varepsilon_0)>0$，使得对所有 $\varepsilon\in(0$、$\varepsilon_0]$ 和 $D\geq D_0$，

$$\left|\big(w_k^{\varepsilon}\big)_{zz}+\varepsilon\tfrac{N-1}{R_*+\varepsilon z}\big(w_k^{\varepsilon}\big)_z+f\big(w_k^{\varepsilon},\mathcal{S}^{\varepsilon}[u_k^{\varepsilon,D}]-\tfrac{\varepsilon}{D}w_k^{\varepsilon}\big)\right|\leq C_k\varepsilon^{k+1}\qquad in\ \left(-\tfrac{2r_0}{\varepsilon},\tfrac{2r_0}{\varepsilon}\right),$$

其中 w_k^{ε} 定义于 (2.34)，且 $u^{\varepsilon,}{}_k{}^D$ 定义于 (2.37)。

请注意，在上述推论中，得益于 u^{ε} 的定义，$_k{}^D$ 在 (2.37) 中，我们只要求对 $z\in\left(-\frac{2r_0}{\varepsilon},\frac{2r_0}{\varepsilon}\right)$对每个 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$成立。

推论的证明 *2.8*。注意，对于 $i=0,\cdots,k$，w^j是通过（2.15）-（2.16）选取的，使得

$$\tfrac{\partial^i}{\partial\varepsilon^i}\left[\big(w_k^{\varepsilon}\big)_{zz}+\varepsilon\tfrac{N-1}{R_*+\varepsilon z}\big(w_k^{\varepsilon}\big)_z+f\big(w_k^{\varepsilon},\mathcal{S}^{\varepsilon}[u_k^{\varepsilon,D}]-\tfrac{\varepsilon}{D}w_k^{\varepsilon}\big)\right]\Big|_{\varepsilon=0}\equiv 0.$$

因此，对于每个 $z\in\left(-\frac{2r_0}{\varepsilon},\frac{2r_0}{\varepsilon}\right)$，都存在某个 $\tau\in(0,\varepsilon)$，使得

$$\begin{aligned}&\big(w_k^{\varepsilon}\big)_{zz}+\varepsilon\tfrac{N-1}{R_*+\varepsilon z}\big(w_k^{\varepsilon}\big)_z+f\big(w_k^{\varepsilon},\mathcal{S}^{\varepsilon}[u_k^{\varepsilon,D}]-\tfrac{\varepsilon}{D}w_k^{\varepsilon}\big)\\&=\tfrac{\varepsilon^{k+1}}{(k+1)!}\tfrac{\partial^{k+1}}{\partial\varepsilon^{k+1}}\left[\varepsilon\tfrac{N-1}{R_*+\varepsilon z}\big(w_k^{\varepsilon}\big)_z+f\big(w_k^{\varepsilon},\textstyle\sum_{j=0}^{k+1}\varepsilon^jA_j+\varepsilon^{k+2}A_{k+2}^{\varepsilon,D}-\tfrac{\varepsilon}{D}w_k^{\varepsilon}\big)\right]\Big|_{\varepsilon=\tau}.\end{aligned}$$

由于 $R_*+\varepsilon z\in(R_*-2r_0,\ R_*+2r_0)$，由（2.34）和命题2.6，可直接得出结论。□

在本小节末尾，我们证明近似解 $u^{\varepsilon,}{}_k{}^D(r)$ 由 (2.37定义，且一致有界，并在界面 Γ_*处呈现宽度为 $O(\varepsilon)$ 的尖锐过渡层。Γ_*。

推论 2.9。 设 $M \in I_{v^*}$ 给定，且 $u^{\varepsilon,D}_k(r)$ 为由 (2.37) 定义的光滑径向对称函数族，其中 ε， $D>0$ 且 $k \in \mathbb{N}$。则以下结论成立。

(i) 对于每个 D_0、$\varepsilon_0>0$ 和 $k \in \mathbb{N}$，都存在一个常数 $C_k = C_k(M、D_0、\varepsilon_0)$ >0使得

$$\|u_k^{\varepsilon,D}\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_k, \quad \forall\, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0] \ and\ D \ge D_0. \tag{2.56}$$

(ii) 对于每个 $D_0>0$、 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\eta>0$，都存在两个正的常数 $K=K(\eta)$和 $\bar\varepsilon = \bar\varepsilon(M、D_0、k、\eta)>0$，使得对于所有 $\varepsilon \in (0、\bar\varepsilon]$ 和 $D \ge D_0$，

$$\begin{cases} |u_k^{\varepsilon,D}(r) - h^+(v^*)| < \eta & on\ [0, R_* - \varepsilon K] \\ |u_k^{\varepsilon,D}(r) - h^-(v^*)| < \eta & on\ [R_* + \varepsilon K, 1]. \end{cases} \tag{2.57}$$

证明。 第 (i) 部分可直接由（2.37）和（2.40）得出。

现在证明第(ii)部分。由（2.23）、（2.34）和（2.40，可知存在一个常数$\bar\varepsilon_1 = \bar\varepsilon_1(M, D_0, k, \eta)$ >0 使得对于任意 $\varepsilon \in (0, \bar\varepsilon_1]$ 和 $D \ge D_0$，

$$|U_k^\varepsilon(r) - h^+(v^*)| < \eta \text{ on } [0, R_*] \quad \text{and} \quad |U_k^\varepsilon(r) - h^-(v^*)| < \eta \text{ on } [R_*, 1].$$

另一方面，由（2.34）、（2.22）和（2.40）可知，存在两个常数$K = K(\eta) > 0$和 $\bar\varepsilon_2 = \bar\varepsilon_2(M, D_0, k, \eta) > 0$ 使得

$$\begin{cases} |w_k^\varepsilon(z) - h^+(v^*)| < \eta & \text{on } (-\infty, -K] \\ |w_k^\varepsilon(z) - h^-(v^*)| < \eta & \text{on } [K, \infty) \end{cases} \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \bar\varepsilon_2] \text{ and } D \ge D_0.$$

现在，令 $\bar\varepsilon := \min\{\bar\varepsilon_1, \bar\varepsilon_2\}$，由（2.37）及上述两个估计可知，（2.57）成立。至此，推论的证明完成。 □

2.5. **命题 2.2 的证明**。 在本文余下部分，我们采用记号$\widetilde{g}(z)$ 表示径向函数 $g(r)$ （其中 $r=|x|$）在 Ω 中的拉伸版本，其定义为 $\widetilde{g}(z) := g(R_* + \varepsilon z)$ 当 $z \in (-\frac{R_*}{\varepsilon}, \frac{1-R_*}{\varepsilon})$。

我们将 Ω 划分为以下三个子区域:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \{x \in \Omega : |x| \le R_* - 2r_0 \text{ or } |x| \ge R_* + 2r_0\}, \\ \Omega_2 &:= \{x \in \Omega : |x| \in (R_* - 2r_0, R_* - r_0) \cup (R_* + r_0, R_* + 2r_0)\}, \\ \Omega_3 &:= \{x \in \Omega : |x| \in [R_* - r_0, R_* + r_0]\}. \end{aligned} \tag{2.58}$$

那么由（2.37）， $u^{\varepsilon,D}_k(r)$ 满足

$$u_k^{\varepsilon,D}(r) = \begin{cases} U_k^\varepsilon(r) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^j U^j(r) & \text{in } \Omega_1 \\ U_k^\varepsilon(r) + \theta(\frac{r-R_*}{r_0})\left[w_k^\varepsilon\left(\frac{r-R_*}{\varepsilon}\right) - U_k^\varepsilon(r)\right] & \text{in } \Omega_2 \\ w_k^\varepsilon(\frac{r-R_*}{\varepsilon}) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^j w^j(\frac{r-R_*}{\varepsilon}) & \text{in } \Omega_3. \end{cases} \tag{2.59}$$

回顾一下， I_i 对于 $i=1$，2、3 定义见（2.45）。拉伸函数 $\widetilde{u}^{\varepsilon,D}_k$ (z) 的导数满足

$$(\widetilde{u}_k^{\varepsilon,D})_z=\begin{cases}0 & \text{in } I_1\\ \theta(\frac{\varepsilon}{r_0}z)\sum\limits_{j=0}^{k}\varepsilon^j w_z^j(z)+\frac{\varepsilon}{r_0}\theta'(\frac{\varepsilon}{r_0}z)\sum\limits_{j=0}^{k}\varepsilon^j[w^j(z)-\widetilde{U}^j(z)] & \text{in } I_2\\ \sum\limits_{j=0}^{k}\varepsilon^j w_z^j(z) & \text{in } I_3.\end{cases}\tag{2.60}$$

现在我们证明命题2.2。

证明。 根据 $u^{\varepsilon,D}_k$ (r) 的光滑性显然可由其在（2.37）中的定义得出

命题 2.2 的第 (i) 部分可直接由推论 2.9 (ii) 得出。

现在我们继续证明命题 2.2的第(ii)部分。令 $\varepsilon_0>0$ 在本证明余下部分中为固定常数。（2.2）中的一致有界性可直接由推论 2.9 (i) 得出。为证明（2.3），我们在每个子域 $\mathcal{R}^{\varepsilon}[u_k^{\varepsilon,D}]$ 上，以 L^∞范数估计残差项Ω_i，其中 $i=1$，2，3，定义域 Ω_i 由（2.58）定义。

在 Ω_1，上，由（2.59）和推论 2.7可知，存在一个常数 $C_k=C_k(M,\ D_0,\ \varepsilon_0)>0$，使得对所有 $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$ 以及 $D\geq D_0$,

$$\left\|\mathcal{R}^{\varepsilon}[u_k^{\varepsilon,D}]\right\|_{L^\infty(\Omega_1)}=\left\|f\big(U_k^{\varepsilon},\mathcal{S}^{\varepsilon}[u_k^{\varepsilon,D}]-\tfrac{\varepsilon}{D}U_k^{\varepsilon}\big)\right\|_{L^\infty(\Omega_1)}\leq C_k\varepsilon^{k+1}.$$

在 Ω_3，上，由（2.59）和推论 2.8 可知，存在一个常数 $C_k=C_k(M,\ D_0,\ \varepsilon_0)>0$，使得对所有 $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$ 以及 $D\geq D_0$,

$$\left\|\mathcal{R}^{\varepsilon}[u_k^{\varepsilon,D}]\right\|_{L^\infty(\Omega_3)}\leq C_k\varepsilon^{k+1}.$$

对每个 $x\in\Omega_2$,，我们有

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{R}^{\varepsilon}[u_k^{\varepsilon,D}](x)\right|&=\left|f\big(u_k^{\varepsilon,D}(x),\mathcal{S}^{\varepsilon}[u_k^{\varepsilon,D}](x)-\tfrac{\varepsilon}{D}u_k^{\varepsilon,D}(x)\big)+\varepsilon^2\Delta u_k^{\varepsilon,D}(x)\right|\\&\leq\left|f\big(u_k^{\varepsilon,D}(x),\mathcal{S}^{\varepsilon}[u_k^{\varepsilon,D}](x)-\tfrac{\varepsilon}{D}u_k^{\varepsilon,D}(x)\big)\right|\\&\quad+\left|\{\theta(\frac{\varepsilon}{r_0}z)\,[w_k^{\varepsilon}(z)-U_k^{\varepsilon}(R_*+\varepsilon z)]\}_{zz}\right|\\&\quad+\varepsilon\left|\tfrac{N-1}{R_*+\varepsilon z}\right|\cdot\left|\{\theta(\tfrac{\varepsilon}{r_0}z)\,[w_k^{\varepsilon}(z)-U_k^{\varepsilon}(R_*+\varepsilon z)]\}_{z}\right|\\&=:K_1^{\varepsilon}(x)+K_2^{\varepsilon}(z)+K_3^{\varepsilon}(z),\end{aligned}$$

其中我们利用了（2.59），并用拉伸变量$z=\frac{r-R_*}{\varepsilon}\in I_2$表示，计算了相应的导数，其中 $r=|x|$当 K_2^{ε}且 K_3^{ε}时。接下来我们估计 K_i^{ε}当 $i=1$、2、3时。

当 K_1^{ε}时，由命题2.6、推论 2.7、（2.59）、（2.22）和（2.33）可知，存在一个常数 $C_k=C_k$（M，D_0，ε_0）>0，使得对所有 $\varepsilon\in$（0，ε_0] 以及 $D\geq D_0$,

$$\begin{aligned}K_1^{\varepsilon}(x)&\leq\left|f\big(U_k^{\varepsilon}(x),\mathcal{S}^{\varepsilon}[u_k^{\varepsilon,D}](x)-\tfrac{\varepsilon}{D}U_k^{\varepsilon}(x)\big)\right|\\&\quad+\left|f\big(u_k^{\varepsilon,D}(x),\mathcal{S}^{\varepsilon}[u_k^{\varepsilon,D}]-\tfrac{\varepsilon}{D}u_k^{\varepsilon,D}(x)\big)-f\big(U_k^{\varepsilon}(x),\mathcal{S}^{\varepsilon}[u_k^{\varepsilon,D}](x)-\tfrac{\varepsilon}{D}U_k^{\varepsilon}(x)\big)\right|\\&\leq C_k\varepsilon^{k+1}+C\big(\|\nabla f\|_{L^\infty((-C_k,C_k)^2)}\big)\cdot\left|w_k^{\varepsilon}\big(\tfrac{r-R_*}{\varepsilon}\big)-U_k^{\varepsilon}(r)\right|\\&\leq C_k\varepsilon^{k+1}+C_ke^{-d_0|z|},\end{aligned}$$

其中，右端最后一项的估计是用拉伸变量 $z=\frac{r-R_*}{\varepsilon}\in I_2$ 结合 $r=|x|$ 计算得出的。

对于 K_2^{ε}，由（2.34）、（2.22）和（2.33），我们可知

$$\begin{aligned}K_2^{\varepsilon}(z)&\leq\left|\theta''(\tfrac{\varepsilon}{r_0}z)\tfrac{\varepsilon^2}{r_0^2}\right|\cdot\left|w_k^{\varepsilon}(z)-U_k^{\varepsilon}(R_*+\varepsilon z)\right|+2\left|\theta'(\tfrac{\varepsilon}{r_0}z)\tfrac{\varepsilon}{r_0}\right|\cdot|(w_k^{\varepsilon})_z(z)|+|(w_k^{\varepsilon})_{zz}(z)|\\&\leq(\varepsilon^2+\varepsilon+1)C_ke^{-d_0|z|}.\end{aligned}$$

类似地，对于 $K_3^\varepsilon(z)$，通过直接计算，我们可知

$$K_3^\varepsilon(z) \le \frac{\varepsilon(N-1)}{R_*-2r_0}\left[\left|\theta'\left(\frac{\varepsilon}{r_0}z\right)\frac{\varepsilon}{r_0}\right|\cdot|w_k^\varepsilon(z)-U_k^\varepsilon(R_*+\varepsilon z)|+\left|\left(w_k^\varepsilon\right)_z(z)\right|\right] \le (\varepsilon^2+\varepsilon)C_k e^{-d_0|z|}.$$

现在，对于固定的 $M \in I_{v^*}$，容易看出

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0],z\in I_2}\frac{e^{-d_0|z|}}{\varepsilon^{k+1}} < \infty$$

并且，上确界仅取决于 k、ε_0 和 M（通过在 (1.10) 中定义的 R_*，以及在 (2.45) 的区间 I_2 定义中出现、在 (2.36) 中定义的 r_0）。因此，将上述关于 K_i^ε 在 $i=1$、2、3 时的估计结合起来，可知存在一个常数$C_k = C_k(M、D_0、\varepsilon_0) > 0$，使得对所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ 和 $D \ge D_0$,

$$\left\|\mathcal{R}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}]\right\|_{L^\infty(\Omega_2)} \le C_k\varepsilon^{k+1}.$$

最后，将上述关于$\left\|\mathcal{R}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}]\right\|_{L^\infty(\Omega_i)}$在 $i=1$、2、3 的估计结合起来，我们完成命题 2.2(ii) 的证明。

定理2.2 第 (iii) 部分中的第一条陈述直接由$\mathcal{S}^\varepsilon[\cdot]$在（1.8）中的定义得出，而第二条陈述则由（2.38）、（2.39）、（2.41）和（2.2）得出。至此，命题的证明完成。□

3. 近似解的谱分析

3.1. 近似解的谱分析。为了证明（1.9）在定理2.2构造的近似解 ${u^\varepsilon}_{,k}{}^D$ 附近存在精确解，我们对将（1.9）在${u^\varepsilon}_{,k}{}^D$ 处线性化所得的线性化算子进行谱分析。为此，我们首先引入一些函数空间。对于 $1 \le s \le \infty$，令

$$L^s_{rad} := \left\{u \in L^s(\Omega)\,|\,u(x) = u(|x|)\right\},$$
$$W^{2,s}_{rad} := W^{2,s}(\Omega) \cap L^s_{rad}$$

and

$$W^{2,s}_\nu := \left\{u \in W^{2,s}(\Omega)\,|\,\partial_\nu u = 0 \text{ on } \partial\Omega\right\}.$$

我们考虑以下具有齐次诺伊曼边界条件的非局部径向特征值问题，其中 $H^2_{rad} := W^{2,}_{rad}{}^2$：

$$\mathscr{L}_k^\varepsilon\Phi = \lambda\Phi \ \text{ in } \Omega, \quad \Phi_r(1) = 0, \tag{3.1}$$

其中，算子 $\mathscr{L}_k^\varepsilon$ 定义为

$$\mathscr{L}_k^\varepsilon\Phi := \varepsilon^2\Delta\Phi + \left(f_u^{\varepsilon,k} - \frac{\varepsilon}{D}f_v^{\varepsilon,k}\right)\Phi - \frac{1}{|\Omega|}\left(1-\frac{\varepsilon}{D}\right)f_v^{\varepsilon,k}\int_\Omega \Phi(x)\,dx \tag{3.2}$$

with

$$f_u^{\varepsilon,k} := f_u\left(u_k^{\varepsilon,D}, \mathcal{S}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}] - \frac{\varepsilon}{D}u_k^{\varepsilon,D}\right), \quad f_v^{\varepsilon,k} := f_v\left(u_k^{\varepsilon,D}, \mathcal{S}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}] - \frac{\varepsilon}{D}u_k^{\varepsilon,D}\right) \tag{3.3}$$

且 $\mathcal{S}^\varepsilon[\cdot]$在（1.8）中定义。

请注意，为了简化记号，我们省略了 $\mathscr{L}_k^\varepsilon$ 对参数 D 和 M 的显式依赖。本文后续涉及依赖这些参数的其他数学记号时，也将沿用这一约定。

为了准确陈述特征值问题（3.1），我们引入一些简写记号。回顾一下，$R_* = R_*(M) \in (0,1)$ 在（1.10）中定义，$\Omega^- = B_{R_*}$ 和 $\Omega^+ = B_1 \backslash B_{R_*}$ 在（2.5）中定义。接下来记为

$$f_u^*(x) := \begin{cases} f_u(h^+(v^*), v^*) & x \in \Omega^- \\ f_u(h^-(v^*), v^*) & x \in \Omega^+ \end{cases} \quad \text{and} \quad f_v^*(x) := \begin{cases} f_v(h^+(v^*), v^*) & x \in \Omega^- \\ f_v(h^-(v^*), v^*) & x \in \Omega^+. \end{cases} \tag{3.4}$$

我们进一步记

$$\begin{aligned} f_u^{*,-} &= f_u^*|_{\Omega^-} \equiv f_u(h^+(v^*), v^*), \qquad f_u^{*,+} = f_u^*|_{\Omega^+} \equiv f_u(h^-(v^*), v^*), \\ f_v^{*,-} &= f_v^*|_{\Omega^-} \equiv f_v(h^+(v^*), v^*), \qquad f_v^{*,+} = f_v^*|_{\Omega^+} \equiv f_v(h^-(v^*), v^*), \end{aligned} \tag{3.5}$$

and

$$\begin{aligned} E &:= f_u^{*,-} + f_u^{*,+} - R_*^N f_v^{*,-} - (1 - R_*^N) f_v^{*,+} < 0, \\ G &:= f_u^{*,+} f_u^{*,-} - R_*^N f_u^{*,+} f_v^{*,-} - (1 - R_*^N) f_u^{*,-} f_v^{*,+} > 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

其中，E 和 G 的符号由条件 (A1)、(A2) 以及$R_* \in$ 属于(0，1)这一事实得出。

我们现在陈述本节的主要结果——定理3.1，该结果将在第 4 节证明定理 1.3 时用到。我们还强调，本节中的所有结论对任意整数 $k \geq 1$均成立，其中 $k \in \mathbb{N}$ 是近似解 u^ε的阶 D_k，其定义见 (2.37)。

定理 3.1. 假设条件 (A1)-(A3)成立。设 $M \in I_{v^*}$ 给定。则对于每个 $D_0 > 0$ 以及整数 $k \geq 1$，存在两个常数 $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(M, D_0, k) > 0$ 和$\lambda_* = \lambda_*(M, D_0, k) > 0$，使得非局部径向特征值问题 (3.1)满足以下结论：

(i) 非局部算子 $\mathscr{L}_k^\varepsilon$有唯一特征值 $\lambda_0^{\varepsilon,k}$ *(称为 临界特征值)*，位于区域 $\mathbb{C}_{\lambda_*} := \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\,\lambda > -\lambda_*\}$ 对所有 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ 且 $D \geq D_0$。(ii) 方程 的临界特征值 $\lambda_0^{\varepsilon,k} \in \mathbb{C}_{\lambda_*}$ 对于 (3.1) 为实数、单重，且

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda_0^{\varepsilon,k}}{\varepsilon} = \Lambda^* \quad \textit{uniformly in } D \geq D_0, \tag{3.7}$$

其中

$$\Lambda^* := -\frac{N R_*^{N-1} (h^+(v^*) - h^-(v^*))}{m(v^*)} \cdot \frac{f_u^{*,+} f_u^{*,-}}{G} \cdot J'(v^*), \tag{3.8}$$

$m(\cdot)$ 在命题 *2.1(ii)* 中定义，而 G 在 (3.6)中定义。

(iii) 令 $\Phi_0^{\varepsilon,k}$ 表示对应于特征值 $\lambda_0^{\varepsilon,k}$ 的 L^2-归一化特征函数。则存在常数 $C_k = C_k(M, D_0, \bar{\varepsilon}) > 0$，使得对所有$\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ 和 $D \geq D_0$，

$$\|\Phi_0^{\varepsilon,k}\|_{L^1(\Omega)} \leq C_k \sqrt{\varepsilon}, \quad \|\Phi_0^{\varepsilon,k}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C_k}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

(iv) 令 $\widehat{\mathscr{L}_k^\varepsilon}$表示非局部算子 $\mathscr{L}_k^\varepsilon$的 L^2-伴随。则对所有 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$和 $D \geq D_0$，算子 $\widehat{\mathscr{L}_k^\varepsilon}$有唯一特征值 $\widehat{\lambda}_0^{\varepsilon,k}$ 位于区域 $\mathbb{C}_{\lambda_*}$内，该特征值为实数、单重，并满足

$$\widehat{\lambda}_0^{\varepsilon,k} = \lambda_0^{\varepsilon,k}.$$

记 $\widehat{\Phi}_0^{\varepsilon,k}$ 为对应于特征值 $\widehat{\lambda}_0^{\varepsilon,k}$ 的特征函数。于是$\widehat{\Phi}_0^{\varepsilon,k}$ 可以归一化，使其满足

$$\langle \widehat{\Phi}_0^{\varepsilon,k}, \Phi_0^{\varepsilon,k} \rangle = 1,$$

并满足

$$\|\widehat{\Phi}_0^{\varepsilon,k}\|_{L^1(\Omega)} \le C_k\sqrt{\varepsilon}, \quad \|\widehat{\Phi}_0^{\varepsilon,k}\|_{L^\infty(\Omega)} \le \frac{C_k}{\sqrt{\varepsilon}}$$

对所有 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ 以及 $D \ge D_0$。

定理 3.1 的证明将在第 3.4小节中给出。

根据椭圆正则性理论，$\mathscr{L}_k^\varepsilon$的特征函数 $\Phi^{\varepsilon,k}_0$属于某个$0<\alpha<1$的 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$。$\widehat{\Phi}^{\varepsilon,k}_0$ 也同样如此。因此，对于所有 $1 \le s \le \infty$，$\Phi^{\varepsilon,k}_0$，$\widehat{\Phi}^{\varepsilon,k}_0 \in L^s_{rad}$。注意，容易验证 $\mathscr{L}_k^\varepsilon(W^{2,s}_\nu \cap L^s_{rad}) \subset L^s_{rad}$。对于每个 $1 < s \le \infty$，定义

$$X^s := \Big\{ g \in L^s_{rad} \,|\, \langle \widehat{\Phi}_0^{\varepsilon,k}, g\rangle_{s',s} = 0 \Big\}, \tag{3.9}$$

其中 $s' = \frac{s}{s-1}$和 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{s,s'}$ 表示 $L^s(\Omega)$ 与 $L^{s'}(\Omega)$ 之间的配对。令

$$X^{2,s}_\nu := W^{2,s}_\nu \cap X^s.$$

由于 $\mathscr{L}_k^\varepsilon$ 的预解算子是紧的，且定理 3.1 保证

$$\mathrm{Ker}(\mathscr{L}_k^\varepsilon - \lambda_0^{\varepsilon,k}) \cap X^s = \{0\} \quad \forall\, s \in (1,\infty),$$

根据 Riesz-Schauder理论可直接得到以下引理。

引理 3.2。假设条件 (A1)-(A3) 成立。给定 $M \in I_{v^*}$。那么，对于每个 $D_0 > 0$和整数 $k \ge 1$，存在一个常数 $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(M, D_0, k) > 0$，使得闭线性算子 $\mathscr{L}_k^\varepsilon - \lambda^{\varepsilon,k}_0$具有有界右逆 $(\mathscr{L}_k^\varepsilon - \lambda^{\varepsilon,k}_0)^{-1}$，其从 X^s 映射到$X^{2,s}_\nu$，对每个 $1 < s < \infty, \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ 和 $D \ge D_0$均成立。

现在，给定 $g \in X^\infty \subset X^s$，方程

$$(\mathscr{L}_k^\varepsilon - \lambda_0^{\varepsilon,k})h = g$$

根据引理 3.2，对于每个 $s \in (1,\infty)$，该方程有唯一解 $h \in X^{2,s}_\nu$。通过类似于 [31], 中引理 2.2 后注记所用的论证，我们可以证明 h 与 s无关。因此，取 $s > (N/2)\vee 1$，由 Sobolev 嵌入定理可知，$h \in C^\alpha(\Omega)$, $0<\alpha<1$。特别地，$h \in X^\infty$。于是，$(\mathscr{L}_k^\varepsilon - \lambda^{\varepsilon,k}_0)^{-1}$ 可视为从 X^∞ 到 X^∞的线性映射。事实上，我们有以下结果。

引理3.3. 假设条件 (A1)-(A3) 成立。设 $M \in I_{v^*}$ 已给定。则对于每个 $D_0 > 0$ 和整数 $k \ge 1$，存在常数 $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(M, D_0, k) > 0$，使得逆算子 $(\mathscr{L}_k^\varepsilon - \lambda^{\varepsilon,k}_0)^{-1}: X^\infty \to X^\infty$ 存在，并且存在常数 $C_k = C_k(M, D_0, \bar{\varepsilon}) > 0$，使得

$$\big\|(\mathscr{L}_k^\varepsilon - \lambda_0^{\varepsilon,k})^{-1} g\big\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_k \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{3.10}$$

对于所有 $g \in X^\infty, \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ 和 $D \ge D_0$。

引理3.3 将在第3.5小节中证明。

3.2. **的主特征值** $\mathcal{L}_k^\varepsilon$。为证明定理3.1 和引理 3.3，我们首先需要考虑以下局部对称径向特征值问题，其在 $H^2_{rad}(\Omega)$ 上满足齐次诺伊曼边界条件：

$$\begin{cases} \mathcal{L}_k^\varepsilon \phi := \varepsilon^2 \Delta\phi + \big(f_u^{\varepsilon,k} - \frac{\varepsilon}{D} f_v^{\varepsilon,k}\big)\phi = \mu\phi & \text{in } \Omega, \\ \phi_r(1) = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.11}$$

其中 $f^{\varepsilon,k}_u$ 和 $f^{\varepsilon,k}_v$ 定义见（3.3）。令

$$\mu_0^{\varepsilon,k} > \mu_1^{\varepsilon,k} > \mu_2^{\varepsilon,k} > \cdots$$

记 $\mathcal{L}_k^\varepsilon$ 的（径向）特征值序列及其对应的特征函数 $\phi^{\varepsilon,k}_0$、$\phi^{\varepsilon,k}_1$、$\phi^{\varepsilon,k}_2$，依此类推。

算子 $\mathcal{L}_k^\varepsilon$ 的主特征值 $\mu^{\varepsilon,k}_0$ 在确定特征值问题（3.1）的谱方面起着关键作用。为分析其在 $\varepsilon \to 0$ 时的渐近行为，我们先建立两个预备引理。

引理 3.4。设 $W \subset \mathbb{R}^N$ 是一个有界光滑区域。对于 $\delta > 0$，定义

$$W_\delta := \{x \in W \mid d(x) < \delta\},$$

其中 $d(x) = \mathrm{dist}(x, \partial W)$。假设 $d \in C^2(W_\delta)$，且 $\rho \in C^2(W_\delta)$ 满足

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta \rho - c^\varepsilon(x)\rho = 0 & in\ W_\delta, \\ \partial_\nu \rho = 0 & on\ \partial W, \end{cases}$$

其中 $c^\varepsilon(x) \geq c_0 > 0$ 对所有 $x \in \overline{W_\delta}$ 和 $\varepsilon > 0$ 均成立，且 ν 是 ∂W 上的单位外法向量。则对每个 $\varepsilon_0 > 0$，存在一个常数 $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon_0, \|\Delta d\|_{L^\infty(W_\delta)}, c_0) > 0$，使得

$$\begin{aligned} |\rho(x)| &\leq 2\|\rho\|_{L^\infty(W_\delta)} \cdot e^{-\frac{\sigma_1(\delta - d(x))}{\varepsilon}} \\ |\nabla \rho(x)| &\leq \frac{C}{\varepsilon}\|\rho\|_{L^\infty(W_\delta)} \cdot e^{-\frac{\sigma_1(\delta - d(x))}{\varepsilon}} \end{aligned} \quad \forall\, x \in W_\delta \ and\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{3.12}$$

其中，$C > 0$ 是仅依赖于 N 和 $\|c^\varepsilon\|_{L^\infty(W_\delta)}$ 的常数。

与引理 3.4讨论 $\rho(x)$ 和 $\nabla\rho(x)$在定义域边界附近的衰减行为不同，下面的引理研究 x 趋近内点时的衰减情况。我们在以原点为中心的球 $B_R \subset \mathbb{R}^N$ 上表述该引理。

引理 3.5。假设 $\rho \in C^2(B_R)$ 满足

$$\varepsilon^2 \Delta \rho - c^\varepsilon(x)\rho = 0 \quad in\ B_R,$$

其中 $c^\varepsilon(x) \geq c_0 > 0$ 对所有$x \in \overline{B_R}$和 $\varepsilon > 0$均成立。于是，对每个 $\varepsilon_0 > 0$，存在一个常数 $\sigma_2 = \sigma_2(\varepsilon_0, R^{-1}, c_0, N) > 0$，使得

$$\begin{aligned} |\rho(x)| &\leq 2\|\rho\|_{L^\infty(B_R)} \cdot e^{-\frac{\sigma_2(R - |x|)}{\varepsilon}} \\ |\nabla \rho(x)| &\leq \frac{C}{\varepsilon}\|\rho\|_{L^\infty(B_R)} \cdot e^{-\frac{\sigma_2(R - |x|)}{\varepsilon}} \end{aligned} \quad \forall\, x \in B_R \ and\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{3.13}$$

其中，$C > 0$ 是仅依赖于 N 和$\|c^\varepsilon\|_{L^\infty(B_R)}$的常数。

引理 3.4 和3.5 将在小节 3.3中证明。由于空间维数 N 是固定的，应用引理时，我们今后将不再明确说明后续量对 N 的依赖性：引理3.4 和 3.5。

命题 3.6. 假设条件(A1)-(A3) 成立。设给定 $M \in I_{v^*}$。则对每个整数 $k \geq 1$ 和 $D_0 > 0$，$\mathcal{L}_k^\varepsilon$ 的主特征值 $\mu^{\varepsilon,k}_0$ 满足

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu_0^{\varepsilon,k}}{\varepsilon} = 0 \quad uniformly\ in\ D \geq D_0 \tag{3.14}$$

以及经 L^2 归一化的正主特征函数 $\phi^{\varepsilon,k}_0$ 对应于 $\mathcal{L}_k^\varepsilon$ $\mu^{\varepsilon,k}_0$ 满足

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{\varepsilon}\phi_0^{\varepsilon,k}(R_* + \varepsilon z) = -w_z^0(z)\sqrt{\frac{R_*^{1-N}}{N|\Omega|m(v^*)}} \quad in\ C^2_{loc}(\mathbb{R}) \tag{3.15}$$

关于 $D \geq D_0$ 一致。此外，存在常数 $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(M, D_0, k) > 0$，使得对所有 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ 以及 $D \geq D_0$,

$$\left\|\phi_0^{\varepsilon,k}\right\|_{L^1(\Omega)} \leq C_k\sqrt{\varepsilon}, \qquad \left\|\phi_0^{\varepsilon,k}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C_k}{\sqrt{\varepsilon}}, \tag{3.16}$$

其中 $C_k = C_k(M, D_0, \bar{\varepsilon}) > 0$ 是仅依赖于所标明变量的常数 .

证明。设 $M \in I_{v^*}$, $D_0 > 0$ 以及整数 $k \geq 1$ 给定。我们首先证明（3.14）。我们断言

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \mu_0^{\varepsilon,k} \geq 0 \text{ uniformly in } D \geq D_0. \tag{3.17}$$

为证明这一点，我们使用 $\mu^{\varepsilon}{}_0{}^k$ 的如下变分刻画

$$\mu_0^{\varepsilon,k} = -\inf\left\{ \frac{\varepsilon^2 \int_\Omega \left[|\nabla\phi|^2 - \left(f_u^{\varepsilon,k} - \frac{\varepsilon}{D} f_v^{\varepsilon,k}\right)\phi^2\right] dx}{\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)}} \,\middle|\, \phi \in H^1_{rad}, \phi \neq 0 \right\}.$$

以 $\phi(r) = w_z^0\left(\frac{r-R_*}{\varepsilon}\right)$ 作为试验函数，我们容易看出

$$\mu_0^{\varepsilon,k} \geq -\frac{\int_{-\frac{R_*}{\varepsilon}}^{\frac{1-R_*}{\varepsilon}} \left[\left(w_{zz}^0(z)\right)^2 - \left(\widetilde{f}_u^{\varepsilon,k} - \frac{\varepsilon}{D}\widetilde{f}_v^{\varepsilon,k}\right)\left(w_z^0(z)\right)^2\right](R_* + \varepsilon z)^{N-1}\, dz}{\int_{-\frac{R_*}{\varepsilon}}^{\frac{1-R_*}{\varepsilon}} \left(w_z^0(z)\right)^2 (R_* + \varepsilon z)^{N-1}\, dz},$$

其中 $\widetilde{g}(z)$ 表示径向函数 $g(r)$ 在 $r = |x|$ 中的拉伸版本（Ω，定义为 $\widetilde{g}(z) = g(R_* + \varepsilon z)$，如第2.5小节开头所采用。令$\varepsilon \to 0$，由（2.22）、（2.34）—（2.38）以及控制收敛定理可得:

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \mu_0^{\varepsilon,k} \geq -\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(w_{zz}^0(z)\right)^2 - f_u(w^0, v^*)\left(w_z^0(z)\right)^2\right] dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(w_z^0(z)\right)^2 dz} \text{ uniformly in } D \geq D_0.$$

由 $L^0 w_z^0 = 0$ 和（2.22）可知，分子中的积分等于零。因此，（3.17）成立。

回忆一下，d_0 是满足（2.18）的固定常数。于是，由定理2.2、（2.18）和（3.3），存在两个常数 $K > 0$ 和 $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(M, D_0, k) > 0$，使得对所有 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ 和 $D \geq D_0$,

$$f_u^{\varepsilon,k}(r) \leq -d_0^2 \quad \text{on } [0, R_* - \varepsilon K] \cup [R_* + \varepsilon K, 1], \tag{3.18}$$

这里省略了 K 和 $\bar{\varepsilon}$ 对 d_0 的依赖，因为 d_0 是固定的。记 $\phi^{\varepsilon}{}_0{}^k$ 为对应于特征值 $\mu^{\varepsilon}{}_0{}^k$ 的正特征函数。我们首先将其归一化，使得

$$\|\phi_0^{\varepsilon,k}\|_{L^\infty(\Omega)} = 1.$$

那么 $\phi^{\varepsilon}{}_0{}^k$ 满足

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta\phi_0^{\varepsilon,k} - \left[\mu_0^{\varepsilon,k} - \left(f_u^{\varepsilon,k} - \frac{\varepsilon}{D} f_v^{\varepsilon,k}\right)\right]\phi_0^{\varepsilon,k} = 0 & \text{in } \Omega = B_1, \\ \partial_\nu \phi_0^{\varepsilon,k} = 0 & \text{on } \partial\Omega = \partial B_1. \end{cases} \tag{3.19}$$

根据（3.17）、（3.18）和定理2.2，必要时我们可以选择 $\bar{\varepsilon}$ 更小一些，使得对于所有 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ 以及 $D \geq D_0$,

$$\mu_0^{\varepsilon,k} - \left(f_u^{\varepsilon,k}(r) - \frac{\varepsilon}{D} f_v^{\varepsilon,k}(r)\right) \geq \frac{d_0^2}{2} \quad \text{on } [0, R_* - \varepsilon K] \cup [R_* + \varepsilon K, 1], \tag{3.20}$$

现在，我们将引理 3.4 应用于关于 $\phi^{\varepsilon,k}_0$ 的方程，其中 $(\rho, c_0, W, \delta) = (\phi^{\varepsilon,k}_0, d_0^2/2, \Omega\ 1 - R_* - \varepsilon K)$，并由 (3.17)、(3.18) 和定理 2.2 得出，存在两个常数$\sigma_1 = \sigma_1(\bar{\varepsilon}, 1/R_*, D_0) > 0$ 和 $C_{k,1} = C_{k,1}(M, D_0, \bar{\varepsilon}) > 0$，使得对于所有 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ 和$D \geq D_0$,

$$\begin{cases} \left|\phi_0^{\varepsilon,k}(r)\right| \leq 2e^{\sigma_1 K} e^{-\frac{\sigma_1(r-R_*)}{\varepsilon}} \\ \left|(\phi_0^{\varepsilon,k})_r(r)\right| \leq \frac{C_{k,1}}{\varepsilon} e^{\sigma_1 K} e^{-\frac{\sigma_1(r-R_*)}{\varepsilon}} \end{cases} \quad \text{on } [R_* + \varepsilon K, 1]. \tag{3.21}$$

同样，将引理3.5 应用于关于 $\phi^{\varepsilon,k}_0$ 的方程，其中$(\rho, c_0, R) = (\phi^{\varepsilon,k}_0, d_0^2/2, R_* - \varepsilon K)$，我们得到存在 $\sigma_2 = \sigma_2(\bar{\varepsilon}, 1/R_*, D_0)$和$C_{k,2} = C_{k,2}(M, D_0, \bar{\varepsilon}) > 0$，使得对所有 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ 以及 $D \geq D_0$,

$$\begin{cases} \left|\phi_0^{\varepsilon,k}(r)\right| \leq 2e^{\sigma_2 K} e^{-\frac{\sigma_2(R_*-r)}{\varepsilon}} \\ \left|(\phi_0^{\varepsilon,k})_r(r)\right| \leq \frac{C_{k,2}}{\varepsilon} e^{\sigma_2 K} e^{\frac{-\sigma_2(R_*-r)}{\varepsilon}} \end{cases} \quad \text{on } [0, R_* - \varepsilon K]. \tag{3.22}$$

因此，令 $\sigma := \min\{\sigma_1, \sigma_2\}$ 并回顾 $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(M, D_0, k)$ 以及 $R_* = R_*(M)$在(1.10)中所定义，由(3.21)和(3.22)可知，对所有 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ 以及 $D \geq D_0$,

$$\left|\widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k}(z)\right| + \left|(\widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k})_z(z)\right| \leq C_k e^{-\sigma|z|} \quad \text{in } (-\tfrac{R_*}{\varepsilon}, -K] \cup [K, \tfrac{1-R_*}{\varepsilon}), \tag{3.23}$$

其中 $C_k = C_k(M, D_0, \bar{\varepsilon}) > 0$ 是一个仅取决于所示变量的常数。

显然，$\widetilde{\phi}^{\varepsilon,k}_0(z)$ 满足

$$\begin{cases} (\widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k})_{zz} + \varepsilon \frac{N-1}{R_* + \varepsilon z} (\widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k})_z + \left(\widetilde{f}_u^{\varepsilon,k} - \frac{\varepsilon}{D} \widetilde{f}_v^{\varepsilon,k}\right) \widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k} = \mu_0^{\varepsilon,k} \widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k} & \text{in } \left(-\frac{R_*}{\varepsilon}, \frac{1-R_*}{\varepsilon}\right), \\ (\widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k})_z(-\frac{R_*}{\varepsilon}) = (\widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k})_z(\frac{1-R_*}{\varepsilon}) = 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

根据最大值原理和（3.20），我们可以看到，$\widetilde{\phi}^{\varepsilon,k}_0$ 只能在区间 $[-K, K]$ 上取得其最大值，对所有 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ 和 $D \geq D_0$均如此。通过将最大值原理应用于（3.19）中关于 $\phi^{\varepsilon,k}_0$ 的方程，容易看出，$\mu^{\varepsilon,k}_0$ 对于所有 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ 和 $D \geq D_0$必须一致地有上界。因此，对于满足 $D_n \geq D_0$的任意序列 ε_n（其中 $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ 且 D_n），存在一个子序列（仍记为 ε_n 和 D_n），使得

$$\lim_{n\to\infty} \mu_0^{\varepsilon_n,k} = \mu_0^* \geq 0.$$

由于 $\left|\widetilde{\phi}^{\varepsilon_n,k}_0(z)\right| \leq 1$，利用（3.24）和（3.23）、插值不等式以及标准的紧性论证，我们发现，必要时取 ε_n andD_n 的另一个适当子序列后，$\widetilde{\phi}^{\varepsilon_n,k}_0$ 在 $C^2_{loc}(\mathbb{R})$中收敛到一个非负函数 $\widetilde{\phi}_0^*$，当 $n \to \infty$时，其中$\sim \quad \sim \quad \sim\phi_0^*$ 在 $\mathbb{R}$上满足 $|\phi_0^*| \leq 1$，$\phi_0^*(z_*)$在某点 $z_* \in [-K, K]$处满足 $= 1$，并且

$$L^0 \widetilde{\phi}_0^* = (\widetilde{\phi}_0^*)_{zz} + f_u(w^0, v^*)\widetilde{\phi}_0^* = \mu_0^* \widetilde{\phi}_0^* \quad \text{in } \mathbb{R}. \tag{3.25}$$

~此外，将上述结论与（3.23）结合可得 ϕ_0^* 满足以下估计：

$$\left|\widetilde{\phi}_0^*(z)\right| + \left|(\widetilde{\phi}_0^*)_z(z)\right| \leq C_k e^{-\sigma|z|} \quad \forall\, |z| \geq K. \tag{3.26}$$

因此，将（3.25）两边乘以 w_z^0，在 $\mathbb{R}$上进行积分，利用分部积分，然后令 $n \to \infty$，由 $L^0 w_z^0 = 0$、（2.22）和（3.26）可知

$$\mu_0^* \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\phi}_0^* w_z^0 \, dz = 0.$$

然而，由于 $w_z^0 < 0$ 和 $\widetilde{\phi}_0^*$ 是一个非平凡的非负连续函数，这意味着$\mu_0^* = 0$。因此，$\widetilde{\phi}_0^* \in C^2(\mathbb{R})$是一个满足以下条件的有界解

$$L^0\widetilde{\phi}_0^* = (\widetilde{\phi}_0^*)_{zz} + f_u\big(w^0(z), v^*\big)\widetilde{\phi}_0^* = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

该方程有两个线性无关的解，即

$$w_z^0(z) \quad \text{and} \quad w_z^0(z)\int_0^z \big(w_z^0(\eta)\big)^{-2}\, d\eta.$$

~后一个解趋于无穷大，当 $|z| \to \infty$，这与（3.26）矛盾。因此 $\phi_0^* = -k_*^{-1}w_z^0$ 其中 $k_* := \|w_z^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$。由于原序列 ε_n 和 D_n 可以任意选取，我们得出

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_0^{\varepsilon,k} = 0 \text{ and } \lim_{\varepsilon\to 0}\widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k} = -k_*^{-1}w_z^0 \text{ in } C^2_{loc}(\mathbb{R}) \text{ uniformly in } D \ge D_0. \tag{3.27}$$

记

$$f^{\varepsilon,k}(x) := f\big(u_k^{\varepsilon,D}(x), \mathcal{S}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}] - \tfrac{\varepsilon}{D}u_k^{\varepsilon,D}(x)\big) \quad \text{for } x \in \Omega. \tag{3.28}$$

由定理 2.2可知，$\widetilde{u}^{\varepsilon,D}_k$ 满足

$$(\widetilde{u}_k^{\varepsilon,D})_{zz} + \varepsilon\tfrac{N-1}{R_*+\varepsilon z}(\widetilde{u}_k^{\varepsilon,D})_z + \widetilde{f}^{\varepsilon,k}(z) = \widetilde{\mathcal{R}}^\varepsilon \quad \text{in } \big(-\tfrac{R_*}{\varepsilon}, \tfrac{1-R_*}{\varepsilon}\big),$$

其中 $\widetilde{\mathcal{R}}^\varepsilon(z) := \mathcal{R}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}](R_* + \varepsilon z)$。将上述方程乘以 $(\widetilde{\phi}^{\varepsilon,k}_0)_z$，分部积分并将结果除以 ε，可得

$$\frac{\mu_0^{\varepsilon,k}}{\varepsilon}\int_{-\frac{R_*}{\varepsilon}}^{\frac{1-R_*}{\varepsilon}} \widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k}(\widetilde{u}_k^{\varepsilon,D})_z\, dz = T_1^\varepsilon + T_2^\varepsilon + T_3^\varepsilon + 2(N-1)T_4^\varepsilon. \tag{3.29}$$

其中

$$T_1^\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon}(\widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k})_z(\widetilde{u}_k^{\varepsilon,D})_z\Big|_{-\frac{R_*}{\varepsilon}}^{\frac{1-R_*}{\varepsilon}}, \quad T_2^\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon}\widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k}\,\widetilde{f}^{\varepsilon,k}\Big|_{-\frac{R_*}{\varepsilon}}^{\frac{1-R_*}{\varepsilon}},$$

$$T_3^\varepsilon := -\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\frac{R_*}{\varepsilon}}^{\frac{1-R_*}{\varepsilon}} (\widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k})_z\widetilde{\mathcal{R}}^\varepsilon\, dz, \quad T_4^\varepsilon := \int_{-\frac{R_*}{\varepsilon}}^{\frac{1-R_*}{\varepsilon}} \frac{(\widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k})_z(\widetilde{u}_k^{\varepsilon,D})_z}{R_*+\varepsilon z}\, dz.$$

注意到，积分 T_4^ε 是良定义的，因为 $(\widetilde{u}^{\varepsilon,D}_k)_z$ 在积分区间的边界附近为零（参见（2.60））。

现在我们估计 T_i^ε当 $1 \le i \le 4$ 满足（3.29）时。

断言 3.7。 以下结论对 T_i^ε 成立：

(i) $T_1^\varepsilon = 0$ 对所有 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ 以及 $D \ge D_0$ 均成立。(ii) 存在常数 $C_k = C_k(M, D_0, \bar{\varepsilon})$，使得对所有 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ 以及 $D \ge D_0$,

$$|T_2^\varepsilon| \le C_k\varepsilon^k \quad \text{and} \quad |T_3^\varepsilon| \le C_k\varepsilon^k. \tag{3.30}$$

(iii) 极限 $\lim_{\varepsilon\to 0} T_4^\varepsilon = 0$ 关于 $D \ge D_0$ 一致收敛。

现在证明断言 3.7。事实上，断言 3.7 的第 (i) 部分由以下事实可得：$(\widetilde{\phi}^{\varepsilon,k}_0)_z$和$(\widetilde{u}^{\varepsilon,D}_k)_z$在 $-\frac{R_*}{\varepsilon}$和 $\frac{1-R_*}{\varepsilon}$处均为零。对于第(ii)部分，(3.30)中的第一个不等式由 $\widetilde{\phi}^{\varepsilon,k}_0$ 的一致有界性、(3.28)、(2.59)以及推论 2.7 得出。(3.30)中的第二个不等式由定理 2.2 (ii)、(3.23)、(3.27)以及控制收敛定理得出。剩下只需证明断言 3.7 的第 (iii) 部分。利用(2.45)和(2.60)，我们得到

$$T_4^\varepsilon = \int_{I_2\cup I_3} \frac{(\widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k})_z(\widetilde{u}_k^{\varepsilon,D})_z}{R_*+\varepsilon z}\, dz, \tag{3.31}$$

其中 $I_2=(-\frac{2r_0}{\varepsilon},\ -\frac{r_0}{\varepsilon})\cup(\frac{r_0}{\varepsilon},\ \frac{2r_0}{\varepsilon})$ 以及 $I_3=[-\frac{r_0}{\varepsilon},\frac{r_0}{\varepsilon}]$ 定义于(2.45)。由控制收敛定理，根据(3.27)、(2.60和命题2.1 可知，对每个$\sim K>K>0$ 固定值，均有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\widetilde{K}}^{\widetilde{K}}\frac{(\widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k})_z(\widetilde{u}_k^{\varepsilon,D})_z}{R_*+\varepsilon z}\,dz=-\frac{1}{R_*k_*}\int_{-\widetilde{K}}^{\widetilde{K}}w_{zz}^0w_z^0\,dz=-\frac{1}{2R_*k_*}\left(w_z^0\right)^2\Big|_{-\widetilde{K}}^{\widetilde{K}}$$

在 $D\geq D_0$上一致成立。另一方面，由 (2.40) 和 (2.60)，$(\widetilde{u}^{\varepsilon,k}{}^{D})_z$ 在 $I_2\cup I_3$ 上对所有 $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]$ 以及 $D\geq D_0$均一致有界。因此，由 (3.23) 可知，存在常数 $C_k=C_k(M,D_0,\bar{\varepsilon})>0$ 使得

$$\Big|\int_{(I_2\cup I_3)\setminus(-\widetilde{K},\widetilde{K})}\frac{(\widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k})_z(\widetilde{u}_k^{\varepsilon,D})_z}{R_*+\varepsilon z}\,dz\Big|\leq C_k\int_{(I_2\cup I_3)\setminus(-\widetilde{K},\widetilde{K})}\left|(\widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k})_z\right|dz\leq C_ke^{-\sigma\widetilde{K}}$$

~对所有 $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]$ 以及 $D\geq D_0$。因此，先令 K 充分大，然后在 ($\varepsilon\to0$ 3.31) 中令其趋于无穷，我们由命题 2.1 以及上述两个估计可知，命题 3.7 的第 (iii) 部分成立。至此，命题 3.7的证明。

现在我们估计 (3.29) 的右端。由于由 (2.60) 可知，

$$\int_{-\frac{R_*}{\varepsilon}}^{\frac{1-R_*}{\varepsilon}}\widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k}(\widetilde{u}_k^{\varepsilon,D})_z\,dz=\int_{I_2\cup I_3}\widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k}(\widetilde{u}_k^{\varepsilon,D})_z\,dz,$$

由2.22、2.60、3.27、3.23以及控制收敛定理可知

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\frac{R_*}{\varepsilon}}^{\frac{1-R_*}{\varepsilon}}\widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k}(\widetilde{u}_k^{\varepsilon,D})_z\,dz=-k_*^{-1}\int_{\mathbb{R}}\left(w_z^0\right)^2\,dz\ \text{uniformly in}\ D\geq D_0. \tag{3.32}$$

现在，在 $\varepsilon\to0$ 中令3.29，由断言3.7 和3.32可得

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\mu_0^{\varepsilon,k}}{\varepsilon}=0\ \text{uniformly in}\ D\geq D_0.$$

至此，3.14的证明完成。

接下来，我们证明3.15。现在用归一化常数 $c_\varepsilon>0$ 对 $\phi^{\varepsilon,}{}_0{}^k$ 进行重新缩放，使得 $c_\varepsilon\phi^{\varepsilon,}{}_0{}^k$ 是 L^2-归一化的。然后由3.23、3.27以及上述类似论证可知

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon N|\Omega|c_\varepsilon^2}&=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\frac{R_*}{\varepsilon}}^{\frac{1-R_*}{\varepsilon}}\left[\widetilde{\phi}_0^{\varepsilon,k}(z)\right]^2(R_*+\varepsilon z)^{N-1}dz\\&=k_*^{-2}R_*^{N-1}\int_{\mathbb{R}}(w_z^0)^2\,dz=k_*^{-2}R_*^{N-1}m(v^*)\end{aligned}$$

关于 $D\geq D_0$ 一致，这意味着

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sqrt{\varepsilon}c_\varepsilon=\sqrt{\frac{k_*^2R_*^{1-N}}{N|\Omega|m(v^*)}}\quad\text{uniformly in}\ D\geq D_0.$$

结合3.27可得3.15。

最后，假设现在 $\phi^{\varepsilon,}{}_0{}^k$ 是 L^2-归一化的，则（3.16）由（3.15）、（3.21）和（3.22）推出。命题得证。□

推论 3.8. 假设条件 (A1)-(A3) 成立。设给定 $M\in I_{v^*}$，且 $\phi^{\varepsilon,}{}_0{}^k$ 为对应于 $\mu^{\varepsilon,}{}_0{}^k$ 的 L^2-归一化正主特征函数 $\mathcal{L}_k^\varepsilon$。那么

¯对每个 $D_0 > 0$ 和 $g \in C_{rad}(\Omega)$，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\langle g,\left(\frac{\phi_0^{\varepsilon,k}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right\rangle = g(R_*)\sqrt{\frac{N|\Omega|R_*^{N-1}}{m(v^*)}}\big(h^+(v^*)-h^-(v^*)\big), \tag{3.33}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\langle g,\left(\frac{\phi_0^{\varepsilon,k}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)f_v^{\varepsilon,k}\right\rangle = g(R_*)\sqrt{\frac{N|\Omega|R_*^{N-1}}{m(v^*)}}J'(v^*) \tag{3.34}$$

关于 $D \geq D_0$一致地，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 L^2（Ω）中的标准希尔伯特内积，而

¯C_{rad}（Ω）表示 C（Ω）中所有径向对称函数构成的子空间。

证明。利用（3.15）和（2.42），可得

$$\begin{aligned}
&\left\langle g,\left(\frac{\phi_0^{\varepsilon,k}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)f_v^{\varepsilon,k}\right\rangle\\
&= N|\Omega|\int_0^1 g(r)\phi_0^{\varepsilon,k}(r)f_v^{\varepsilon,k}(r)r^{N-1}\frac{dr}{\sqrt{\varepsilon}}\\
&= N|\Omega|\int_{-\frac{R_*}{\varepsilon}}^{\frac{1-R_*}{\varepsilon}}\sqrt{\varepsilon}g(R_*+\varepsilon z)\phi_0^{\varepsilon,k}(R_*+\varepsilon z)\widetilde{f}_v^{\varepsilon,k}(R_*+\varepsilon z)(R_*+\varepsilon z)^{N-1}dz\\
&\longrightarrow g(R_*)\sqrt{\frac{N|\Omega|R_*^{N-1}}{m(v^*)}}J'(v^*) \quad \text{as } \varepsilon\to 0 \text{ uniformly in } D\geq D_0,
\end{aligned}$$

其中我们使用了（2.42）、（2.60）、（3.15）、（3.23）、定理 2.2 （iii）以及控制收敛定理。这就证明了（3.34）。式（3.33）的证明类似，故略去。□

根据椭圆正则性理论，$\mathcal{L}_k^\varepsilon$ 的主特征函数 $\phi^{\varepsilon,\,k}_{\,0}$ 属于 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$，其中某个 $0<\alpha<1$。因此，对于 $1\leq s\leq\infty$，有 $\phi^{\varepsilon,\,k}_{\,0}\in L^s_{rad}$。现在，对每个 $1<s\leq\infty$，定义

$$Y^s := \big\{g\in L^s_{rad}\,|\,\langle g,\phi_0^{\varepsilon,k}\rangle_{s,s'}=0\big\}. \tag{3.35}$$

Set

$$Y^{2,s}_\nu := W^{2,s}_\nu \cap Y^s.$$

由于 $\mathcal{L}_k^\varepsilon$ 的预解算子是紧的，且命题 3.6 保证了

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_k^\varepsilon-\mu_0^{\varepsilon,k})\cap Y^s=\{0\}$$

对每个 $s\in(1,\infty)$，以下引理可由黎曼-施瓦茨理论直接推出 y.

引理 3.9. 假设条件 (A1)-(A3) 成立。设 $M\in I_{v^*}$ 已给定。那么闭线性算子 $\mathcal{L}_k^\varepsilon-\mu^{\varepsilon,\,k}_{\,0}$ 有一个有界右逆 $(\mathcal{L}_k^\varepsilon-\mu^{\varepsilon,\,k}_{\,0})^{-1}$，它从 Y^s 映射到 $Y^{2,\,s}_{\,\nu}$对每个 $\varepsilon>0$、$D>0$、$k\in\mathbb{N}$ 和 $1<s<\infty$均成立。

现在，给定 $g\in Y^\infty$，根据引理 3.9 以及引理 3.3之前的类似论证，我们可以看出方程

$$(\mathcal{L}_k^\varepsilon-\mu_0^{\varepsilon,k})h=g$$

对某个 $0<\alpha<1$有唯一解 $h\in Y^\infty\cap C^\alpha(\bar{\Omega})$。因此，$(\mathcal{L}_k^\varepsilon-\mu^{\varepsilon,\,k}_{\,0})^{-1}$ 可视为从 Y^∞ 到 Y^∞的线性映射。现在我们准备证明以下结果。

引理 3.10. 假设条件 (A1)-(A3)成立。设 $M\in I_{v^*}$ 已给定。则对于每个 $D_0>0$ 和整数 $k\geq 1$，存在常数 $\bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}(M,D_0,k)>0$，使得

逆算子 $(\mathcal{L}_k^{\varepsilon} - \mu_{,0}^{\varepsilon,k})^{-1}: Y^{\infty} \to Y^{\infty}$ 存在，且存在常数$C_k = C_k(M, D_0, \bar{\varepsilon}) > 0$ 满足

$$\left\|(\mathcal{L}_k^{\varepsilon} - \mu_0^{\varepsilon,k})^{-1} g\right\|_{L^{\infty}(\Omega)} \le C_k \|g\|_{L^{\infty}(\Omega)} \tag{3.36}$$

对所有 $g \in Y^{\infty}$, $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ 和 $D \ge D_0$。

证明。 我们用3.36)的反证法。假设存在两列参数 $\varepsilon_n \to 0$, $D_n \ge D_0$ 以及一列 $\{g_n\} \subset Y^{\infty}$ 使得

$$\|g_n\|_{L^{\infty}} = 1 \quad \text{and} \quad \left\|(\mathcal{L}_k^{\varepsilon_n} - \mu_0^{\varepsilon_n,k})^{-1} g_n\right\|_{L^{\infty}} \ge n.$$

记为

$$\varrho_n := \frac{(\mathcal{L}_k^{\varepsilon_n} - \mu_0^{\varepsilon_n,k})^{-1} g_n}{\|(\mathcal{L}_k^{\varepsilon_n} - \mu_0^{\varepsilon_n,k})^{-1} g_n\|_{L^{\infty}}} \quad \text{and} \quad q_n := \frac{g_n}{\|(\mathcal{L}_k^{\varepsilon_n} - \mu_0^{\varepsilon_n,k})^{-1} g_n\|_{L^{\infty}}}.$$

那么 ϱ_n 满足

$$(\mathcal{L}_k^{\varepsilon_n} - \mu_0^{\varepsilon_n,k})\varrho_n = q_n$$

其中 $\|\varrho_n\|_{L^{\infty}} = 1$和 $\|q_n\|_{L^{\infty}} \le \frac{1}{n}$。由于 $\varrho_n \in Y^{\infty} \cap C^{\alpha}(\bar{\Omega})$，必要时用 $(-\varrho_n, -q_n)$ 替换 (ϱ_n, q_n)，可知对于每个 n，都存在某个 $r_n \in [0,1]$ 使得$\|\varrho_n\|_{L^{\infty}} = \varrho_n(r_n) = 1$。

由于根据 (3.14)，当 $\varepsilon_n \to 0$ 时，$\|q_n\|_{L^{\infty}} \to 0$ 和 $\mu_n := \mu_{,0}^{\varepsilon_n\ k} = o(\varepsilon_n)$；通过与命题 3.6 的证明类似的论证，我们由 ϱ_n 的方程得知，对所有充分大的 n， $r_n \in [R_* - \varepsilon_n K, R_* + \varepsilon_n K]$。现在，我们用拉伸变量 $z = \frac{x - R_* - \varepsilon_n z_n}{\varepsilon_n}$ 表示 $r_n = R_* + \varepsilon_n z_n$ 以及 ϱ_n 的方程： $\widehat{\varrho}_n(z) = \varrho_n(R_* + \varepsilon_n(z_n + z))$。于是， $|z_n| \le K$， 且 $\widehat{\varrho}_n(z)$ 的方程为

$$\begin{aligned}(\widehat{\varrho}_n)_{zz}(z) + \tfrac{\varepsilon_n(N-1)}{R_* + \varepsilon_n(z+z_n)}(\widehat{\varrho}_n)_z(z) - \mu_n \widehat{\varrho}_n(z) \\ + \left[f_u^{\varepsilon_n,k}\big(R_* + \varepsilon_n(z_n+z)\big) - \tfrac{\varepsilon_n}{D_n} f_v^{\varepsilon_n,k}\big(R_* + \varepsilon_n(z_n+z)\big)\right]\widehat{\varrho}_n(z) = \widehat{q}_n(z),\end{aligned} \tag{3.37}$$

其中 $\widehat{q}_n(z) = q_n(R_* + \varepsilon_n(z_n + z))$。由于对所有 n, $\|\widehat{\varrho}_n\|_{L^{\infty}} = 1$ 且 $|z_n| \le K$， 紧性论证表明存在子序列（仍记为 $\{\varepsilon_n\}$、 $\{z_n\}$ 和 $\{\widehat{\varrho}_n\}$），使得

$$\varepsilon_n \to 0, \quad z_n \to z_* \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varrho}_n \to \widehat{\varrho}_0 \text{ in } C^1_{loc}(\mathbb{R}) \text{ as } n \to \infty. \tag{3.38}$$

令 $n \to \infty$ 在（H^1 的弱形式（3.37）中取极限，并利用正则性论证，可得 $\widehat{\varrho}_0 \in C^2$（$\mathbb{R}$）满足 $\widehat{\varrho}_0$（0） $= 1$， （$\widehat{\varrho}_0$）$_z$（0） $= 0$ 且

$$L^0_{z_*}\widehat{\varrho}_0 := (\widehat{\varrho}_0)_{zz} + f_u(w^0(z+z_*), v^*)\widehat{\varrho}_0 = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

由于 $\widehat{\varrho}_0$ 是一个有界解，且 $\widehat{\varrho}_0$（0） $= 1$， $\widehat{\varrho}_0$ 必为主特征函数 w^0_z（$z + z_*$）的倍数 $L^0_{z_*}$, 即 $\widehat{\varrho}_0 = cw^0_z$（$z + z_*$），其中 $c \ne 0$为某个常数 $\varrho_n \in Y^{\infty}$。然而，由于3.35），由（

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n} N|\Omega|}\int_{\Omega} \varrho_n \phi_0^{\varepsilon_n,k} dx \\ &= \int_{-\frac{R_* + \varepsilon_n z_n}{\varepsilon_n}}^{\frac{1 - R_* - \varepsilon_n z_n}{\varepsilon_n}} \widehat{\varrho}_n(z)\widehat{\phi}_0^{\varepsilon_n,k}(z)(R_* + \varepsilon_n z_n + \varepsilon_n z)^{N-1}\sqrt{\varepsilon_n} dz,\end{aligned}$$

其中 $\widehat{\phi}^{\varepsilon_n}_{,\ 0}{}^{k}(z) = \phi^{\varepsilon_n}_{,\ 0}{}^{k}(R_* + \varepsilon_n z_n + \varepsilon_n z)$。令 $n \to \infty$，由（3.15）、（3.23）、（3.38）、 $\|\widehat{\varrho}_n\|_{L^{\infty}} = 1$ 以及控制收敛定理可得

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varrho}_0 w^0_z(z + z_*)\, dz = c\int_{\mathbb{R}} \left(w^0_z(z + z_*)\right)^2 dz.$$

因此， $c=0$ 从而 $\widehat{\varrho}_0 \equiv 0$，这与 $\widehat{\varrho}_0(0)=1$矛盾。证毕。 □

由于与 μ_1^ε 的 $\mathcal{L}_k^\varepsilon$ 相关的特征函数属于 Y^∞，以下结果可直接由引理3.10得出。

推论 3.11。 假设条件 (A1)-(A3) 成立。设 $M \in I_{v^*}$ 已给定，且 $\mu_{1}^{\varepsilon,k}$ 是算子 $\mathcal{L}_k^\varepsilon$的第二特征值。那么对于每个 $D_0>0$ 和整数 $k\geq 1$，存在一个常数 $\bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}(M,D_0,k)>0$，使得

$$\mu_1^{\varepsilon,k} < -\mu_* \quad \forall\, \varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon}] \text{ and } D \geq D_0, \tag{3.39}$$

其中 $\mu_*=\mu_*(M,D_0,k)>0$ 是一个仅依赖于所示参数的常数。

我们将 $[\phi_0^{\varepsilon,k}]^\perp$ 记为 $\phi_{0}^{\varepsilon,k}$ 在 L^2_{rad} 中的正交补，并将 $\mathcal{P}^\varepsilon: L^2_{rad}\to L^2_{rad}$ 记为到 $[\phi_0^{\varepsilon,k}]^\perp$ 上的正交投影算子。现在我们准备证明以下结果。

命题 3.12。 假设条件 (A1)-(A3) 成立。给定 $M\in I_{v^*}$、 $D_0>0$ 和整数 $k\geq 1$ 。则存在常数 $\bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}(M,D_0,k)>0$，使得以下结论成立。

(i) 逆算子 $(\mathcal{L}_k^\varepsilon-\mu)^{-1}: [\phi_0^{\varepsilon,k}]^\perp \to [\phi_0^{\varepsilon,k}]^\perp$ 存在，且 L^2-有界，并且在 $(\varepsilon,D)\in(0,\bar{\varepsilon}]\times[D_0,\infty)$ 上关于 $\mu\in\mathbb{C}$一致，其中 $\operatorname{Re}\mu>-\mu_*$，其中 μ_* 的定义同推论 *3.11*。此外，对于 $g\in L^2_{rad}$ 以及 $\mu\in\mathbb{C}$ 满足 $\operatorname{Re}\mu>-\mu_*$的情形，

$$\|(\mathcal{L}_k^\varepsilon-\mu)^{-1}\mathcal{P}^\varepsilon g\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{|\mu+\mu_*|}\|g\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.40}$$

对所有 $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]$ 和 $D\geq D_0$ 均成立。

(ii) 设 F 为 $\mathbb{R}^2$中的光滑函数。定义

$$F_k^\varepsilon := F\big(u_k^{\varepsilon,D}, \mathcal{S}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}]-\tfrac{\varepsilon}{D}u_k^{\varepsilon,D}\big), \quad F^*|_{\Omega^\pm} := F\big(h^\mp(v^*),v^*\big).$$

记

$$\widehat{\mu} := \frac{1}{2}\min\{\mu_*, -f_u^{*,-}, -f_u^{*,+}\} > 0, \tag{3.41}$$

其中 $f_{u}^{*,\pm}$在（3.5）中定义。则对任意 $g\in L^\infty_{rad}$和 $\mu\in\mathbb{C}$ 满足$\operatorname{Re}\mu\geq-\widehat{\mu}$，

$$\lim_{\varepsilon\to0}\big[(\mathcal{L}_k^\varepsilon-\mu)^{-1}\mathcal{P}^\varepsilon(F_k^\varepsilon g)\big] = \frac{F^*g}{f_u^*(x)-\mu} \quad \text{in } L^2_{rad} \tag{3.42}$$

关于 $D\geq D_0$和 $\mu\in\{\mu\in\mathbb{C}\,|\,\operatorname{Re}\mu\geq-\widehat{\mu}\}$一致，其中 $f_u^*(x)$在(3.4)中定义。

证明。 第 (i) 部分直接由推论3.11以及预解算子$(\mathcal{L}_k^\varepsilon-\mu)^{-1}$的特征函数展开得到。

对于第(ii)部分，我们请读者参阅 [32, 引理2.2]的证明。 □

3.3. 引理3.4 和3.5的证明。

引理*3.4*的证明。 我们只需找到合适的障碍函数。令

$$\eta_1(x)=\cosh(\sigma_1 d(x)/\varepsilon),$$

其中， $\sigma_1>0$ 是稍后确定的一个常数。然后通过直接计算，我们得到

$$\varepsilon^2\Delta\eta_1 - c^\varepsilon(x)\eta_1 \leq \Big[\sigma_1^2+\varepsilon\sigma_1\tanh\Big(\frac{\sigma_1 d(x)}{\varepsilon}\Big)\Delta d - c_0\Big]\eta_1 \quad \text{in } W_\delta.$$

由于 $|\tanh(\sigma_1 d(x)/\varepsilon)| < 1$ 和 Δd 在 W_δ上是一致有界的，因此存在一个常数$\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon_0, \|\Delta d\|_{L^\infty(W_\delta)}, c_0) > 0$，使得

$$\varepsilon^2 \Delta \eta_1 - c^\varepsilon(x)\eta_1 \le 0 \ \text{ in } W_\delta, \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Let

$$\vartheta_1(x) = \rho(x) - \frac{\eta_1(x)}{\cosh(\sigma_1 \delta/\varepsilon)} \|\rho\|_{L^\infty(W_\delta)} \ \text{ on } \overline{W_\delta}.$$

Then

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta \vartheta_1 - c^\varepsilon(x)\vartheta_1 \ge 0 & \text{in } W_\delta, \\ \vartheta_1 \le 0 & \text{on } \partial W_\delta \backslash \partial W, \\ \partial_\nu \vartheta_1 = 0 & \text{on } \partial W. \end{cases}$$

因此，根据最大值原理，我们可知 $\vartheta_1(x) \le 0$ in W_δ. 利用如下事实：对于所有 $y \ge 0$, $\frac{e^y}{2} \le \cosh(y) \le e^y$，可得

$$\rho(x) \le 2\|\rho\|_{L^\infty(W_\delta)} e^{-\frac{\sigma_1(\delta - d(x))}{\varepsilon}} \ \text{ in } W_\delta, \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

类似地，通过考察 $\rho(x) + \eta_1(x)\cosh(\sigma_1\delta/\varepsilon)\|\rho\|_{L^\infty(W_\delta)}$，可以证明

$$\rho(x) \ge -\frac{1}{2}\|\rho\|_{L^\infty(W_\delta)} e^{-\frac{\sigma_1(\delta - d(x))}{\varepsilon}} \ \text{ in } W_\delta, \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

结合上述两个不等式，可得（3.12）中的第一个估计。

（3.12）中的第二个估计可由导数的标准逐点插值不等式得出。参见例如 [12, 第 3 章。4]□

引理 *3.5* 的证明。设 $\eta_2(x) = \cosh(\sigma_2|x|/\varepsilon)$，其中 $\sigma_2 > 0$ 是一个稍后确定的常数。然后通过直接计算可知

$$\varepsilon^2 \Delta \eta_2 - c^\varepsilon(x)\eta_2 \le \Big[\sigma_2^2 + \sigma_2 \tanh\Big(\frac{\sigma_2|x|}{\varepsilon}\Big) \cdot \frac{\varepsilon(N-1)}{|x|} - c_0\Big]\eta_2 \quad \text{in } B_R.$$

注意到

$$\sup_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0], \sigma_2 \in (0, \bar\sigma_2], x \in B_R} \tanh\Big(\frac{\sigma_2|x|}{\varepsilon}\Big)\frac{\varepsilon(N-1)}{|x|} < \infty,$$

且上确界仅依赖于 $\bar\sigma_2 > 0$、N、ε_0 和 R。因此，存在一个常数$\sigma_2 = \sigma_2(\varepsilon_0, R, c_0, N) > 0$ 使得

$$\varepsilon^2 \Delta \eta_2 - c^\varepsilon(x)\eta_2 \le 0 \text{ in } B_R, \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Let

$$\vartheta_2(x) = \rho(x) - \frac{\eta_2(x)}{\cosh(\sigma_2 R/\varepsilon)} \|\rho\|_{L^\infty(B_R)} \text{ in } B_R.$$

接下来，证明的其余部分可由引理3.4证明中的类似论证得出。因此，我们省略细节。□

3.4. **定理3.1的证明。**

证明。 设 $M \in I_{v^*}$、$D_0 > 0$ 和整数 $k \ge 1$ 已给定。

我们首先分析 $\mathscr{L}_k^\varepsilon$ 中具有最大实部的特征值。为此，定义

$$\lambda_* := \min\Big\{\widehat{\mu}, \ -\frac{\mathrm{Re}(E + \sqrt{E^2 - 4G})}{4}\Big\} > 0, \tag{3.43}$$

其中 $\widehat{\mu} > 0$ 由式（3.41）给出，而 $E < 0$、$G > 0$ 定义于式（3.6）中。接下来，我们引入定义域

$$\mathbb{C}_{\lambda_*} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda \geq -\lambda_*\}.$$

我们的首要目标是刻画 $\mathscr{L}_k^\varepsilon$ 在区域 $\mathbb{C}_{\lambda_*}$中的谱，以便证明定理 3.1 的 (i) 和 (ii)。

接下来，我们假设 $\lambda^\varepsilon \in \mathbb{C}_{\lambda_*}$ 是 $\mathscr{L}_k^\varepsilon$的一个特征值，并令 Φ^ε 为相应的特征函数。

令 $(\mu^{\varepsilon,\ k}_{\ 0},\ \phi^{\varepsilon,\ k}_{\ 0})$ 为算子 $\mathcal{L}_k^\varepsilon$ 的主特征对，该算子定义于 (3.11) 中，其中 $\phi^{\varepsilon,\ k}_{\ 0}$ 已按 L^2归一化。我们将 Φ^ε 分解为

$$\Phi^\varepsilon = a^\varepsilon \phi_0^{\varepsilon,k} + \eta^\varepsilon \in \operatorname{span}\{\phi_0^{\varepsilon,k}\} \oplus [\phi_0^{\varepsilon,k}]^\perp. \tag{3.44}$$

于是，Φ^ε 的方程可改写如下：

$$\begin{aligned}(\mu_0^{\varepsilon,k} - \lambda^\varepsilon)a^\varepsilon &= \frac{1}{|\Omega|}\Big(1 - \frac{\varepsilon}{D}\Big)\Big(a^\varepsilon \int_\Omega \phi_0^{\varepsilon,k}\,dx + \int_\Omega \eta^\varepsilon\,dx\Big)\int_\Omega f_v^{\varepsilon,k}\phi_0^{\varepsilon,k}\,dx,\\ (\mathcal{L}_k^\varepsilon - \lambda^\varepsilon)\eta^\varepsilon &= \frac{1}{|\Omega|}\Big(1 - \frac{\varepsilon}{D}\Big)\Big(a^\varepsilon \int_\Omega \phi_0^{\varepsilon,k}\,dx + \int_\Omega \eta^\varepsilon\,dx\Big)\mathcal{P}^\varepsilon f_v^{\varepsilon,k}.\end{aligned} \tag{3.45}$$

根据命题 3.12 (i) 以及假设 $\lambda^\varepsilon \in \mathbb{C}_{\lambda_*}$，$\eta^\varepsilon$ 可由方程 (3.45) 中的第二个方程求得：

$$\eta^\varepsilon = \frac{1}{|\Omega|}\Big(1 - \frac{\varepsilon}{D}\Big)\Big(a^\varepsilon \int_\Omega \phi_0^{\varepsilon,k}\,dx + \int_\Omega \eta^\varepsilon\,dx\Big)(\mathcal{L}_k^\varepsilon - \lambda^\varepsilon)^{-1}\mathcal{P}^\varepsilon f_v^{\varepsilon,k}. \tag{3.46}$$

为简化记号，记

$$b^\varepsilon := \int_\Omega \eta^\varepsilon\,dx \tag{3.47}$$

and

$$\psi^\varepsilon_{\lambda^\varepsilon} := (\mathcal{L}_k^\varepsilon - \lambda^\varepsilon)^{-1}\mathcal{P}^\varepsilon f_v^{\varepsilon,k} \in [\phi_0^{\varepsilon,k}]^\perp. \tag{3.48}$$

对3.46式在Ω上积分，得到

$$b^\varepsilon = \frac{b^\varepsilon}{|\Omega|}\Big(1 - \frac{\varepsilon}{D}\Big)\int_\Omega \psi^\varepsilon_{\lambda^\varepsilon}\,dx + \frac{a^\varepsilon}{|\Omega|}\Big(1 - \frac{\varepsilon}{D}\Big)\int_\Omega \phi_0^{\varepsilon,k}\,dx \int_\Omega \psi^\varepsilon_{\lambda^\varepsilon}\,dx. \tag{3.49}$$

我们先证明定理3.1的（i）—（ii）部分。由于证明较长，我们将论证分解为若干关键的中间结果，即下文的断言 3.13-3.18 。每个断言都确立了论证中的一个关键步骤，它们共同导出定理3.1 （i）—（ii）的证明。

断言 3.13。 存在一个常数 $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(M, D_0, k) > 0$，使得对每个 $(\varepsilon, \lambda^\varepsilon) \in (0, \bar{\varepsilon}] \times \mathbb{C}_{\lambda_*}$ 及 $D \geq D_0$，方程 (3.49) 存在唯一解，且可明确写为

$$b^\varepsilon = a^\varepsilon \cdot \frac{\big(1 - \frac{\varepsilon}{D}\big)\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \psi^\varepsilon_{\lambda^\varepsilon}\,dx}{1 - \big(1 - \frac{\varepsilon}{D}\big)\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \psi^\varepsilon_{\lambda^\varepsilon}\,dx}\int_\Omega \phi_0^{\varepsilon,k}\,dx. \tag{3.50}$$

事实上，由（3.48）和命题 3.12 （ii）可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\psi^\varepsilon_\xi(x) = \frac{f_v^*(x)}{f_u^*(x) - \xi} \quad \text{in } L^2_{rad} \tag{3.51}$$

一致地 在 $\xi \in \mathbb{C}_{\lambda_*}$和 $D \geq D_0$中， f_v^*以及 f_u^*定义见（3.4）。因此，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[1 - \Big(1 - \frac{\varepsilon}{D}\Big)\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \psi^\varepsilon_\xi\,dx\Big] = \frac{\xi^2 - E\xi + G}{(f_u^{*,+} - \xi)(f_u^{*,-} - \xi)} \tag{3.52}$$

在 $\xi \in \mathbb{C}_{\lambda_*}$ 和 $D \geq D_0$上一致地成立。根据 λ_* 在（3.43）中的定义，（3.52）的右端对所有 $\xi \in \mathbb{C}_{\lambda_*}$都一致地与零保持正距离。因此，存在一个常数 $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(M, D_0, k) > 0$足够小，使得

$$1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{D}\right) \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \psi_\xi^\varepsilon \, dx \neq 0 \quad \forall\, (\varepsilon, \xi) \in (0, \bar{\varepsilon}] \times \mathbb{C}_{\lambda_*} \text{ and } D \geq D_0.$$

这保证了 b^ε 可由方程（3.49）唯一确定，并由（3.50）给出，从而完成了断言 3.13的证明。

断言 3.14。设 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ 和 $D \geq D_0$。那么，对于 $\lambda^\varepsilon \in \mathbb{C}_{\lambda_*}$ 成为 $\mathscr{L}_k^\varepsilon$的特征值，必要条件是 $a^\varepsilon \neq 0$ 在 (3.44)中成立。

反设断言 3.14 不成立，即 $a^\varepsilon = 0$。由（3.50）可知 $b^\varepsilon = 0$。结合（3.46）和（3.47）可得 $\eta^\varepsilon = 0$，因而 $\Phi^\varepsilon = 0$，这与 Φ^ε 是 $\mathscr{L}_k^\varepsilon$的特征函数矛盾。至此，断言 3.14的证明完成。

根据命题 3.14，不妨设

$$a^\varepsilon = 1$$

在本证明的其余部分成立。将 $a^\varepsilon = 1$、（3.47）以及表达式（3.50）代入（3.45）的第一个方程，我们得到：

$$\lambda^\varepsilon = \mu_0^{\varepsilon,k} - \frac{1}{|\Omega|}\left(1 - \frac{\varepsilon}{D}\right) \frac{\int_\Omega \phi_0^{\varepsilon,k} \, dx}{1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{D}\right) \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \psi_{\lambda^\varepsilon}^\varepsilon \, dx} \int_\Omega f_v^{\varepsilon,k} \phi_0^{\varepsilon,k} \, dx. \tag{3.53}$$

命题 3.15。

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda^\varepsilon}{\varepsilon} = \Lambda^* \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad \textit{uniformly in } D \geq D_0, \tag{3.54}$$

其中 Λ^* 定义见（3.8）。

现在证明命题3.15。令 $\bar{\varepsilon}$ 如命题 3.13中所述给定。我们首先证明，通过在必要时将 $\bar{\varepsilon}$取得更小，存在一个常数 $C_k = C_k(M, D_0, \bar{\varepsilon}) > 0$，使得

$$|\lambda^\varepsilon| \leq C_k \varepsilon \quad \text{for all } \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}] \text{ and } D \geq D_0. \tag{3.55}$$

现在证明（3.55）。由于（3.52）右端是关于 ξ 的有理函数，其分子与分母具有相同的次数，因此，鉴于我们在（3.43）中对 λ_* 的选择，在区域 $\mathbb{C}_{\lambda_*}$内，其模数的上界和下界分别由两个正常数一致控制。因此，在必要时将 $\bar{\varepsilon}$ 取得更小，由（3.52）可知，存在两个常数 $\bar{c}_1$，$\bar{c}_2 > 0$，它们仅依赖于 M、D_0、k和 $\bar{\varepsilon}$，使得

$$\bar{c}_1 \leq \left|1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{D}\right) \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \psi_{\lambda^\varepsilon}^\varepsilon \, dx\right| \leq \bar{c}_2 \quad \forall\, (\varepsilon, \lambda^\varepsilon) \in (0, \bar{\varepsilon}] \times \mathbb{C}_{\lambda_*} \text{ and } D \geq D_0. \tag{3.56}$$

另一方面，由推论3.8 可知

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \phi_0^{\varepsilon,k} \, dx = \sqrt{\frac{N|\Omega| R_*^{N-1}}{m(v^*)}} \big(h^+(v^*) - h^-(v^*)\big), \tag{3.57}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} f_v^{\varepsilon,k} \phi_0^{\varepsilon,k} \, dx = \sqrt{\frac{N|\Omega| R_*^{N-1}}{m(v^*)}} J'(v^*), \tag{3.58}$$

这两个结论均在 $D \geq D_0$上一致成立。因此，由（3.55）、（3.14）、（3.53）以及（3.56）–（3.58）可直接得到（

现在证明（3.54）。由（3.52）和（3.55），可知

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|1-\left(1-\frac{\varepsilon}{D}\right)\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \psi_{\lambda^\varepsilon}^{\varepsilon}\,dx\right| = \frac{G}{f_u^{*,+}f_u^{*,-}} > 0 \text{ uniformly in } D\geq D_0. \tag{3.59}$$

将（3.53）两边同除以 ε 并令 $\varepsilon\to 0$，由（3.14）及（3.57）-（3.59）可知

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda^\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{R_*^{N-1}(h^+(v^*)-h^-(v^*))}{Nm(v^*)}\cdot\frac{f_u^{*,+}f_u^{*,-}}{G}\cdot J'(v^*) =: \Lambda^*$$

关于 $D\geq D_0$一致成立。至此完成命题3.15 的证明，从而得到（3.7）。

命题 3.16. 设 $\varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]$ 且 $D\geq D_0$。则若 $\lambda^\varepsilon\in\mathbb{C}_{\lambda_*}$ 为 $\mathscr{L}_k^\varepsilon$的特征值， λ^ε 必须为实数，即$\operatorname{Im}\lambda^\varepsilon=0$。

现在证明命题3.16。由于 $\Lambda^*\in\mathbb{R}$，由（3.54）可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\operatorname{Im}\lambda^\varepsilon}{\varepsilon} = 0 \quad \text{uniformly with } D\geq D_0. \tag{3.60}$$

另一方面，由（3.53）可知

$$\operatorname{Im}\lambda^\varepsilon = \frac{1}{|\Omega|}\left(1-\frac{\varepsilon}{D}\right)\int_\Omega \phi_0^{\varepsilon,k}\,dx\int_\Omega f_v^{\varepsilon,k}\phi_0^{\varepsilon,k}\,dx\cdot\operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-\left(1-\frac{\varepsilon}{D}\right)\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\psi_{\lambda^\varepsilon}^{\varepsilon}\,dx}\right). \tag{3.61}$$

回顾一下， $\psi_{\lambda^\varepsilon}^{\varepsilon}$ 定义于式（3.48）中，可将其改写为以下形式

$$\psi_{\lambda^\varepsilon}^{\varepsilon} = (\lambda^\varepsilon-\mu_0^{\varepsilon,k})(\mathcal{L}_k^\varepsilon-\mu_0^{\varepsilon,k})^{-1}\psi_{\lambda^\varepsilon}^{\varepsilon} + (\mathcal{L}_k^\varepsilon-\mu_0^{\varepsilon,k})^{-1}\mathcal{P}^\varepsilon f_v^{\varepsilon,k}, \tag{3.62}$$

其中， $\mathcal{P}^\varepsilon$ 表示到 $[\phi_0^{\varepsilon,k}]^\perp$上的正交投影。然后，必要时进一步缩小 $\bar\varepsilon$，由引理 3.10 可知，存在一个常数 $C_k=C_k(M,D_0,\bar\varepsilon)>0$，使得对所有$(\varepsilon,\lambda^\varepsilon)\in(0,\bar\varepsilon]\times\mathbb{C}_{\lambda_*}$ 以及 $D\geq D_0$,

$$\begin{aligned}
\|\psi_{\lambda^\varepsilon}^{\varepsilon}\|_{L^\infty} &\leq C_k\big(|\lambda^\varepsilon-\mu_0^{\varepsilon,k}|\cdot\|\psi_{\lambda^\varepsilon}^{\varepsilon}\|_{L^\infty}+\|\mathcal{P}^\varepsilon f_v^{\varepsilon,k}\|_{L^\infty}\big)\\
&\leq C_k\left(|\lambda^\varepsilon-\mu_0^{\varepsilon,k}|\cdot\|\psi_{\lambda^\varepsilon}^{\varepsilon}\|_{L^\infty}+\|f_v^{\varepsilon,k}\|_{L^\infty}+\left|\left\langle f_v^{\varepsilon,k},\frac{\phi_0^{\varepsilon,k}}{\sqrt{\varepsilon}}\right\rangle\right|\cdot\|\sqrt{\varepsilon}\phi_0^{\varepsilon,k}\|_{L^\infty}\right)\\
&\leq \frac{1}{2}\|\psi_{\lambda^\varepsilon}^{\varepsilon}\|_{L^\infty}+C_k.
\end{aligned}$$

这里，为了得到最后一个不等式，我们利用式（3.14）和（3.54）确保 $C_k|\lambda^\varepsilon-\mu_0^{\varepsilon,k}|\leq\frac{1}{2}$，并利用定理 2.2确保 $\|f_v^{\varepsilon,k}\|_{L^\infty}\leq C_k$，再利用式（3.57）和（3.58）控制最后一项。因此，我们得到

$$\|\psi_{\lambda^\varepsilon}^{\varepsilon}\|_{L^\infty}\leq C_k \quad \forall\,(\varepsilon,\lambda^\varepsilon)\in(0,\bar\varepsilon]\times\mathbb{C}_{\lambda_*} \text{ and } D\geq D_0. \tag{3.63}$$

将式（3.48）分别改写为其实部和虚部，可得

$$\begin{cases}(\mathcal{L}_k^\varepsilon-\operatorname{Re}\lambda^\varepsilon)\operatorname{Re}\psi_{\lambda^\varepsilon}^{\varepsilon}+\operatorname{Im}\lambda^\varepsilon\cdot\operatorname{Im}\psi_{\lambda^\varepsilon}^{\varepsilon}=\mathcal{P}^\varepsilon f_v^{\varepsilon,k},\\ (\mathcal{L}_k^\varepsilon-\operatorname{Re}\lambda^\varepsilon)\operatorname{Im}\psi_{\lambda^\varepsilon}^{\varepsilon}=\operatorname{Im}\lambda^\varepsilon\cdot\operatorname{Re}\psi_{\lambda^\varepsilon}^{\varepsilon}.\end{cases}$$

然后，按照（3.63）的证明中的论证，我们得到，对于所有 $(\varepsilon,\lambda^\varepsilon)\in(0,\bar\varepsilon]\times\mathbb{C}_{\lambda_*}$ 且$D\geq D_0$,

$$\begin{aligned}
\left\|\operatorname{Im}\psi_{\lambda^\varepsilon}^{\varepsilon}\right\|_{L^\infty} = |\operatorname{Im}\lambda^\varepsilon|\cdot\left\|(\mathcal{L}_k^\varepsilon-\operatorname{Re}\lambda^\varepsilon)^{-1}\operatorname{Re}\psi_{\lambda^\varepsilon}^{\varepsilon}\right\|_{L^\infty} &\leq C_k|\operatorname{Im}\lambda^\varepsilon|\cdot\|\operatorname{Re}\psi_{\lambda^\varepsilon}^{\varepsilon}\|_{L^\infty}\\
&\leq C_k|\operatorname{Im}\lambda^\varepsilon|,
\end{aligned} \tag{3.64}$$

其中，在最后一个不等式中，我们使用了（3.63）。通过直接计算，由（3.59）、（3.60）和（3.64）可知，对于所有 $(\varepsilon,\lambda^\varepsilon)\in(0,\bar\varepsilon]\times\mathbb{C}_{\lambda_*}$ 且 $D\geq D_0$,

$$\left|\operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-\left(1-\frac{\varepsilon}{D}\right)\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\psi^\varepsilon_{\lambda^\varepsilon}\,dx}\right)\right|\leq C_k|\operatorname{Im}\lambda^\varepsilon|. \tag{3.65}$$

利用估计（3.57）、（3.58）和（3.65），由（3.61）可知

$$|\operatorname{Im}\lambda^\varepsilon|\leq C_k\,\varepsilon|\operatorname{Im}\lambda^\varepsilon|,\quad\forall\,(\varepsilon,\lambda^\varepsilon)\in(0,\bar\varepsilon]\times\mathbb{C}_{\lambda_*}\text{ and }D\geq D_0.$$

通过选取 $\bar\varepsilon$ 足够小，使得 $C_k\bar\varepsilon<1$，由上述不等式可得$\operatorname{Im}\,\lambda^\varepsilon=0$对所有 $\varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]$ 以及 $D\geq D_0$. 成立。命题3.16的证明至此完成。

命题3.17。 设 $\varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]$ 且 $D\geq D_0$。则方程(3.53) 有唯一解 λ^ε，该解属于 $\mathbb{C}_{\lambda_*}$。

现在证明命题3.17。定义映射 $\Gamma^\varepsilon_k{:}[-\frac{\lambda_*}{\varepsilon},\infty)\to\mathbb{R}$如下

$$\Gamma^\varepsilon_k(\beta):=\frac{\mu_0^{\varepsilon,k}}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{|\Omega|}\left(1-\frac{\varepsilon}{D}\right)\frac{\int_\Omega\phi_0^{\varepsilon,k}\,dx}{1-\left(1-\frac{\varepsilon}{D}\right)\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\psi^\varepsilon_{\varepsilon\beta}\,dx}\int_\Omega f_v^{\varepsilon,k}\phi_0^{\varepsilon,k}\,dx.$$

于是，方程（3.53）等价于 $\Gamma^\varepsilon_k(\frac{\lambda^\varepsilon}{\varepsilon})=\frac{\lambda^\varepsilon}{\varepsilon}$。因此，必要时进一步减小 $\bar\varepsilon$，由命题3.15 和3.16可知，为证明命题3.17，只需证明方程 $\Gamma^\varepsilon_k(\beta)=\beta$ 在区间 I_{Λ^*} 上对所有 $\varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]$ 及 $D\geq D_0$均有唯一解，其中

$$I_{\Lambda^*}:=\left\{\beta\in\mathbb{R}\,\middle|\,\tfrac{|\Lambda^*|}{2}\leq\operatorname{sgn}(\Lambda^*)\beta\leq 2|\Lambda^*|\right\}.$$

事实上，由（3.62）可知，对于任意 $\beta_1,\ \beta_2\in I_{\Lambda^*}$,

$$\psi^\varepsilon_{\varepsilon\beta_1}-\psi^\varepsilon_{\varepsilon\beta_2}=\left[\varepsilon\beta_2-\mu_0^{\varepsilon,k}(\mathcal{L}^\varepsilon_k-\mu_0^{\varepsilon,k})^{-1}\right](\psi^\varepsilon_{\varepsilon\beta_1}-\psi^\varepsilon_{\varepsilon\beta_2})+\varepsilon(\beta_1-\beta_2)\psi^\varepsilon_{\varepsilon\beta_1}.$$

然后，根据（3.63）以及与（3.63）的证明类似的论证，我们得到

$$\left\|\psi^\varepsilon_{\varepsilon\beta_1}-\psi^\varepsilon_{\varepsilon\beta_2}\right\|_{L^\infty}\leq C_k\varepsilon|\beta_1-\beta_2|,\quad\forall\,\beta_1,\beta_2\in I_{\Lambda^*},\varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]\text{ and }D\geq D_0.$$

然后，利用估计（3.57）、（3.58）、（3.59）、上述不等式以及与命题3.15的证明类似的论证，可以容易地证明

$$\Gamma^\varepsilon_k(\beta)\in I_{\Lambda^*}\quad\text{and}\quad|\Gamma^\varepsilon_k(\beta_1)-\Gamma^\varepsilon_k(\beta_2)|\leq\frac{|\beta_1-\beta_2|}{2}$$

对于所有 $\beta,\ \beta_1,\ \beta_2\in I_{\Lambda^*},\ \varepsilon\in(0,\ \bar\varepsilon]$ 和 $D\geq D_0$。根据压缩映射定理，$\beta=\Gamma^\varepsilon_k(\beta)$ 在 I_{Λ^*} 中对于所有 $\varepsilon\in(0,\ \bar\varepsilon]$ 和 $D\geq D_0$ 都有唯一解。因此证明完毕。

命题3.18。 非局部特征值问题 （3.1） 有唯一的特征值 λ^ε 属于 $\mathbb{C}_{\lambda_*}$，且它是单重的。

确实，根据断言 3.17，λ^ε 由方程 (3.53) 唯一确定。将 (3.47)、(3.48)、(3.50) 和 $a^\varepsilon=1$ 代入 (3.46)，可得

$$\eta^\varepsilon=\frac{1}{|\Omega|}\left(1-\frac{\varepsilon}{D}\right)\frac{\int_\Omega\phi_0^{\varepsilon,k}\,dx}{1-\left(1-\frac{\varepsilon}{D}\right)\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\psi^\varepsilon_{\lambda^\varepsilon}\,dx}\cdot\psi^\varepsilon_{\lambda^\varepsilon}. \tag{3.66}$$

这意味着，对于给定的 λ^ε，(3.45) 中的第二个方程也有唯一解。因此，λ^ε 是 $\mathscr{L}^\varepsilon_k$ 在 $\mathbb{C}_{\lambda_*}$ 中的唯一特征值，并且存在一个特征函数$\Phi^\varepsilon=\phi^\varepsilon_{,\ 0}{}^k+\eta^\varepsilon$ 属于 $\mathscr{L}^\varepsilon_k$，对应于 λ^ε，且在相差一个常数倍的意义下唯一。至此，断言 3.18的证明完成。

现在，定理 3.1 的 (i) 和 (ii) 可直接由断言 3.15-3.18得出。

为明确起见，在本证明余下部分中，我们将 $\mathbb{C}_{\lambda_*}$ 中 $\mathscr{L}_k^\varepsilon$ 的临界特征值 λ^ε 记为 $\lambda^{\varepsilon,k}_0$ 并将相应的特征函数 Φ^ε 记为 $\Phi^{\varepsilon,k}_0$。

接下来，我们证明定理 3.1 (iii)。将估计（3.16）、（3.59）和（3.63）代入（3.66），我们立即得到：存在常数 $C_k = C_k(M, D_0, \bar{\varepsilon})$ 使得对所有 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ 以及 $D \geq D_0$,

$$\|\eta^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\eta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\eta^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \leq C_k\sqrt{\varepsilon}. \tag{3.67}$$

因此，将 $\Phi^{\varepsilon,k}_0 = \phi^{\varepsilon,k}_0 + \eta^\varepsilon$ 除以 $\|\Phi^{\varepsilon,k}_0\|_{L^2}$，使得所得函数是 L^2-规范化的，并且仍将所得函数记为 $\Phi^{\varepsilon,k}_0$，我们由（3.16）和（3.67）看出

$$\|\Phi_0^{\varepsilon,k}\|_{L^1(\Omega)} \leq C_k\sqrt{\varepsilon}, \quad \|\Phi_0^{\varepsilon,k}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C_k}{\sqrt{\varepsilon}}$$

对所有 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ 以及 $D \geq D_0$。这就完成了定理 3.1 (iii) 的证明。

最后，我们证明定理 3.1 (iv)。注意，$L^s(\Omega)$ 上定义域为 $W^{2,s}_\nu$ 的伴随算子 $\mathscr{L}_k^\varepsilon$ 定义为：

$$\begin{aligned}\widehat{\mathscr{L}_k^\varepsilon}\psi &:= \varepsilon^2\Delta\psi + \left(f_u^{\varepsilon,k} - \frac{\varepsilon}{D}f_v^{\varepsilon,k}\right)\phi - \frac{1}{|\Omega|}\left(1 - \frac{\varepsilon}{D}\right)\int_\Omega f_v^{\varepsilon,k}\psi\,dx \\ &= \mathcal{L}_k^\varepsilon\psi - \frac{1}{|\Omega|}\left(1 - \frac{\varepsilon}{D}\right)\int_\Omega f_v^{\varepsilon,k}\psi\,dx.\end{aligned} \tag{3.68}$$

在下文中，我们假设 $\lambda^\varepsilon \in \mathbb{C}_{\lambda_*}$ 是 $\mathscr{L}_k^\varepsilon$的一个特征值，并令 Φ^ε 为相应的特征函数。接下来，我们将采用与定理 3.1 （i）—（iii）的证明中所使用的类似论证。

分解 $\widehat{\Phi}^\varepsilon$ 为

$$\widehat{\Phi}^\varepsilon = \widehat{a}^\varepsilon\phi_0^{\varepsilon,k} + \widehat{\eta}^\varepsilon \in \operatorname{span}\{\phi_0^{\varepsilon,k}\} \oplus [\phi_0^{\varepsilon,k}]^\perp, \tag{3.69}$$

则 Φ^ε 的方程可改写为：

$$\begin{aligned}(\mu_0^{\varepsilon,k} - \widehat{\lambda}^\varepsilon)\widehat{a}^\varepsilon &= \frac{1}{|\Omega|}\Big(1 - \frac{\varepsilon}{D}\Big)\Big(\widehat{a}^\varepsilon\int_\Omega f_v^{\varepsilon,k}\phi_0^{\varepsilon,k}\,dx + \int_\Omega f_v^{\varepsilon,k}\widehat{\eta}^\varepsilon\,dx\Big)\int_\Omega \phi_0^{\varepsilon,k}\,dx, \\ (\mathcal{L}_k^\varepsilon - \widehat{\lambda}^\varepsilon)\widehat{\eta}^\varepsilon &= \frac{1}{|\Omega|}\Big(1 - \frac{\varepsilon}{D}\Big)\Big(\widehat{a}^\varepsilon\int_\Omega f_v^{\varepsilon,k}\phi_0^{\varepsilon,k}\,dx + \int_\Omega f_v^{\varepsilon,k}\widehat{\eta}^\varepsilon\,dx\Big)\mathcal{P}^\varepsilon\mathbb{1},\end{aligned} \tag{3.70}$$

其中，$\mathbb{1}$ 表示在 Ω 上取值为 1 的常值函数。根据命题 3.12 （i）以及 $\lambda^\varepsilon \in \mathbb{C}_{\lambda_*}$这一假设，我们可以从（3.70）中的第二个方程求出 $\widehat{\eta}^\varepsilon$。将 $\widehat{\eta}^\varepsilon$ 的所得表达式乘以 $f_v^{\varepsilon,k}$得到

$$f_v^{\varepsilon,k}\widehat{\eta}^\varepsilon = \frac{1}{|\Omega|}\Big(1 - \frac{\varepsilon}{D}\Big)\Big(\widehat{a}^\varepsilon\int_\Omega f_v^{\varepsilon,k}\phi_0^{\varepsilon,k}\,dx + \int_\Omega f_v^{\varepsilon,k}\widehat{\eta}^\varepsilon\,dx\Big)f_v^{\varepsilon,k}(\mathcal{L}_k^\varepsilon - \widehat{\lambda}^\varepsilon)^{-1}\mathcal{P}^\varepsilon\mathbb{1}. \tag{3.71}$$

为简化记号，记

$$\widehat{b}^\varepsilon := \int_\Omega f_v^{\varepsilon,k}\widehat{\eta}^\varepsilon\,dx \quad \text{and} \quad \widehat{\psi}^\varepsilon_{\widehat{\lambda}^\varepsilon} := f_v^{\varepsilon,k}(\mathcal{L}_k^\varepsilon - \widehat{\lambda}^\varepsilon)^{-1}\mathcal{P}^\varepsilon\mathbb{1}. \tag{3.72}$$

对方程积分 (3.71) 于Ω，可得

$$\widehat{b}^\varepsilon = \frac{\widehat{b}^\varepsilon}{|\Omega|}\left(1 - \frac{\varepsilon}{D}\right)\int_\Omega \widehat{\psi}^\varepsilon_{\widehat{\lambda}^\varepsilon}\,dx + \frac{\widehat{a}^\varepsilon}{|\Omega|}\left(1 - \frac{\varepsilon}{D}\right)\int_\Omega f_v^{\varepsilon,k}\phi_0^{\varepsilon,k}\,dx\int_\Omega \widehat{\psi}^\varepsilon_{\widehat{\lambda}^\varepsilon}\,dx. \tag{3.73}$$

通过与命题证明 3.13中类似的论证，我们可知存在一个常数$\widehat{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}(M,D_0,k)>0$使得对于每个 $(\varepsilon,\lambda^\varepsilon)\in(0,\bar{\varepsilon}]\times\mathbb{C}_{\lambda_*}$且 $D\geq D_0$，方程 (3.73) 有唯一解，其显式表达式为

$$\widehat{b}^\varepsilon=\widehat{a}^\varepsilon\cdot\frac{\left(1-\frac{\varepsilon}{D}\right)\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\widehat{\psi}^\varepsilon_{\widehat{\lambda}^\varepsilon}\,dx}{1-\left(1-\frac{\varepsilon}{D}\right)\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\widehat{\psi}^\varepsilon_{\widehat{\lambda}^\varepsilon}\,dx}\int_\Omega f_v^{\varepsilon,k}\phi_0^{\varepsilon,k}\,dx. \tag{3.74}$$

然后，仿照断言的证明 3.14中的推理，我们由(3.74) 可推知，若 $\lambda^\varepsilon\in\mathbb{C}_{\lambda_*}$是 $\mathscr{L}_k^\varepsilon$的特征值，则必须满足

$$\widehat{a}^\varepsilon\neq 0\quad\forall\,\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]\text{ and }D\geq D_0. \tag{3.75}$$

将（3.72）和（3.74）代入（3.70）的第一个方程，并约去两边的因子$\widehat{a}^\varepsilon\neq 0$，即可得到 λ^ε的显式表达式：

$$\widehat{\lambda}^\varepsilon=\mu_0^{\varepsilon,k}-\frac{1}{|\Omega|}\left(1-\frac{\varepsilon}{D}\right)\frac{\int_\Omega\phi_0^{\varepsilon,k}\,dx}{1-\left(1-\frac{\varepsilon}{D}\right)\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\widehat{\psi}^\varepsilon_{\widehat{\lambda}^\varepsilon}\,dx}\int_\Omega f_v^{\varepsilon,k}\phi_0^{\varepsilon,k}\,dx. \tag{3.76}$$

然后，仿照断言 3.15-3.18证明中的类似论证，可得：

断言 3.19。令 $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]$和 $D\geq D_0$。则 L^2的伴随算子 $\widehat{\mathscr{L}_k^\varepsilon}$ $\mathscr{L}_k^\varepsilon$在 $\mathbb{C}_{\lambda_*}$中有且仅有一个特征值 λ^ε，且该特征值为单重。此外，λ^ε 为实数，并满足

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\widehat{\lambda}^\varepsilon}{\varepsilon}=\Lambda^*\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\qquad \textit{uniformly in } D\geq D_0, \tag{3.77}$$

其中 Λ^* 定义见 (3.8)。

下文中，我们将 $\mathbb{C}_{\lambda_*}$ 中 $\widehat{\mathscr{L}_k^\varepsilon}$ 的临界特征值 $\widehat{\lambda}^\varepsilon$ 记为 $\widehat{\lambda}^{\varepsilon,\ k}_{0}$ 并将相应的特征函数 $\widehat{\Phi}^\varepsilon$ 记为 $\widehat{\Phi}^{\varepsilon,\ k}_{0}$。

通过与证明 3.67 类似的论证，我们可以证明存在一个常数$C_k=C_k(M,\ D_0,\ \bar{\varepsilon})>0$，使得对于所有 $\varepsilon\in(0,\ \bar{\varepsilon}]$ 以及 $D\geq D_0$,

$$\|\widehat{\eta}^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\widehat{\eta}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}+\|\widehat{\eta}^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)}\leq C_k\widehat{a}^\varepsilon\sqrt{\varepsilon}. \tag{3.78}$$

现在我们断言

断言 3.20。 $\lambda^{\varepsilon,\ k}_{0}=\widehat{\lambda}^{\varepsilon,\ k}_{0}$以及 $\langle\Phi^{\varepsilon,\ k}_{0},\widehat{\Phi}^{\varepsilon,\ k}_{0}\rangle\neq 0$对于所有 $\varepsilon\in(0,\ \bar{\varepsilon}]$以及 $D\geq D_0$。

现在证明断言3.20。由于 $\Phi^{\varepsilon,\ k}_{0}=\phi^{\varepsilon,\ k}_{0}+\eta^\varepsilon$ 以及 $\widehat{\Phi}^{\varepsilon,\ k}_{0}=\widehat{a}^\varepsilon\phi^{\varepsilon,\ k}_{0}+\widehat{\eta}^\varepsilon$，其中$0\neq\widehat{a}^\varepsilon\in\mathbb{R}$，$\eta^\varepsilon$，$\widehat{\eta}^\varepsilon\in[\phi_0^{\varepsilon,k}]^\perp$都是实函数，由（3.67）和（3.78）可得

$$\left|\frac{\langle\Phi_0^{\varepsilon,k},\widehat{\Phi}_0^{\varepsilon,k}\rangle}{\widehat{a}^\varepsilon}-1\right|=\left|\frac{1}{\widehat{a}^\varepsilon}\int_\Omega\eta^\varepsilon\widehat{\eta}^\varepsilon\,dx\right|\leq C_k\varepsilon,\quad\forall\,\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]\text{ and }D\geq D_0. \tag{3.79}$$

因此，如有必要，进一步减小 $\bar{\varepsilon}$，可知对所有$\varepsilon\in(0,\ \bar{\varepsilon}]$和 $D\geq D_0$，都有 $\langle\Phi^{\varepsilon,\ k}_{0}$，$\widehat{\Phi}^{\varepsilon,\ k}_{0}\rangle\neq 0$。现在，将方程 $\mathscr{L}_k^\varepsilon\Phi^{\varepsilon,\ k}_{0}=\lambda^{\varepsilon,\ k}_{0}\Phi^{\varepsilon,\ k}_{0}$乘以 $\widehat{\Phi}^{\varepsilon,\ k}_{0}$，并将方程 $\widehat{\mathscr{L}_k^\varepsilon}\widehat{\Phi}^{\varepsilon,\ k}_{0}=\widehat{\lambda}^{\varepsilon,\ k}_{0}\widehat{\Phi}^{\varepsilon,\ k}_{0}$乘以 $\Phi^{\varepsilon,\ k}_{0}$，在$\Omega$上积分并将所得方程相减，得到

$$(\lambda_0^{\varepsilon,k}-\widehat{\lambda}_0^{\varepsilon,k})\cdot\langle\Phi_0^{\varepsilon,k},\widehat{\Phi}_0^{\varepsilon,k}\rangle=0.$$

由此可得 $\langle\Phi^{\varepsilon,\ k}_{0}$，$\widehat{\Phi}^{\varepsilon,\ k}_{0}\rangle\neq 0$ 从而 $\widehat{\lambda}^{\varepsilon,\ k}_{0}=\lambda^{\varepsilon,\ k}_{0}$。这就完成了断言 3.20的证明。

最后，将特征函数归一化 $\widehat{\Phi}^{\varepsilon,\ k}_{0}$，该伴随算子的 $\mathscr{L}_k^\varepsilon$ 对应于$\widehat{\lambda}^{\varepsilon,\ k}_{0}$使得 $\langle\widehat{\Phi}^{\varepsilon,\ k}_{0}$，$\Phi^{\varepsilon,\ k}_{0}\rangle=1$，由式（3.79）可得

$$|\widehat{a}^\varepsilon-1|\leq C_k\varepsilon. \tag{3.80}$$

这一点与（3.78）相结合，便完成了定理 3.1 （iv）的证明。 □

3.5. **引理的证明3.3.**

证明。 我们证明（3.10）时采用矛盾法。假设存在两个序列 $\varepsilon_j \to 0$, $D_j \geq D_0$ 以及一个函数序列 $\{g_j\} \subset X^\infty$ 使得

$$\|g_j\|_{L^\infty} = 1 \quad \text{and} \quad \|(\mathscr{L}_k^{\varepsilon_j} - \lambda_0^{\varepsilon_j,k})^{-1} g_j\|_{L^\infty} \geq j.$$

Put

$$h_j := \frac{(\mathscr{L}_k^{\varepsilon_j} - \lambda_0^{\varepsilon_j,k})^{-1} g_j}{\|(\mathscr{L}_k^{\varepsilon_j} - \lambda_0^{\varepsilon_j,k})^{-1} g_j\|_{L^\infty}} \quad \text{and} \quad q_j := \frac{g_j}{\|(\mathscr{L}_k^{\varepsilon_j} - \lambda_0^{\varepsilon_j,k})^{-1} g_j\|_{L^\infty}}.$$

那么 h_j 满足

$$(\mathscr{L}_k^{\varepsilon_j} - \lambda_0^{\varepsilon_j,k}) h_j = q_j, \quad \text{with } \|h_j\|_{L^\infty} = 1 \text{ and } \|q_j\|_{L^\infty} \leq j^{-1}. \tag{3.81}$$

我们将对 (3.81) 采用与定理 3.1 证明中相同的步骤。注意，由于 $\lambda^{\varepsilon_j}{}_0{}^k \in \mathbb{R}$，我们可以将 h_j 分解为

$$h_j = c_j \phi_0^{\varepsilon_j,k} + \theta_j \in \operatorname{span}\{\phi_0^{\varepsilon_j,k}\} \oplus [\phi_0^{\varepsilon_j,k}]^\perp.$$

那么方程 (3.81) 可以改写如下:

$$\begin{aligned}(\mu_0^{\varepsilon_j,k} - \lambda_0^{\varepsilon_j,k}) c_j = \frac{1}{|\Omega|}\Big(1 - \frac{\varepsilon_j}{D_j}\Big)\Big(c_j \int_\Omega \phi_0^{\varepsilon_j,k}\, dx + \int_\Omega \theta_j\, dx\Big) \int_\Omega f_v^{\varepsilon_j,k} \phi_0^{\varepsilon_j,k}\, dx \\ + \int_\Omega q_j \phi_0^{\varepsilon_j,k} dx,\end{aligned} \tag{3.82}$$

and

$$\begin{aligned}\theta_j = \frac{1}{|\Omega|}\Big(1 - \frac{\varepsilon_j}{D_j}\Big)\Big(c_j \int_\Omega \phi_0^{\varepsilon_j,k} dx + \int_\Omega \theta_j\, dx\Big)(\mathcal{L}_k^{\varepsilon_j} - \lambda_0^{\varepsilon_j,k})^{-1} \mathcal{P}^{\varepsilon_j} f_v^{\varepsilon_j,k} \\ + (\mathcal{L}_k^{\varepsilon_j} - \lambda_0^{\varepsilon_j,k})^{-1} \mathcal{P}^{\varepsilon_j} q_j.\end{aligned} \tag{3.83}$$

记

$$b_j := \int_\Omega \theta_j\, dx, \quad \psi_j := (\mathcal{L}_k^{\varepsilon_j} - \lambda_0^{\varepsilon_j,k})^{-1} \mathcal{P}^{\varepsilon_j} f_v^{\varepsilon_j,k} \quad \text{and} \quad \rho_j := (\mathcal{L}_k^{\varepsilon_j} - \lambda_0^{\varepsilon_j,k})^{-1} \mathcal{P}^{\varepsilon_j} q_j.$$

那么，方程（3.83）可以改写为

$$\theta_j = \frac{1}{|\Omega|}\Big(1 - \frac{\varepsilon_j}{D_j}\Big)\Big(c_j \int_\Omega \phi_0^{\varepsilon_j,k} dx + b_j\Big)\psi_j + \rho_j. \tag{3.84}$$

通过与（3.63）的证明类似的论证，我们可以证明存在一个常数$C_k = C_k(M, D_0) > 0$ 使得对于所有 j 充分大的情形，

$$\|\psi_j\|_{L^\infty} \leq C_k \quad \text{and} \quad \|\rho_j\|_{L^\infty} \leq C_k \|q_j\|_{L^\infty}. \tag{3.85}$$

对方程（3.84）在Ω上积分，可得

$$b_j = \frac{1}{|\Omega|}\Big(1 - \frac{\varepsilon_j}{D_j}\Big)\Big(c_j \int_\Omega \phi_0^{\varepsilon_j,k} dx + b_j\Big) \int_\Omega \psi_j dx + \int_\Omega \rho_j dx. \tag{3.86}$$

通过与（3.59）的证明类似的论证，可得

$$\lim_{j\to 0}\Big[1 - \frac{1}{|\Omega|}\Big(1 - \frac{\varepsilon_j}{D_j}\Big) \int_\Omega \psi_j\, dx\Big] = \frac{G}{f_u^{*,+} f_u^{*,-}} > 0. \tag{3.87}$$

因此，我们可以求解 b_j 由（3.86）可知，对所有 j 充分大的值，均可得到

$$b_j = \frac{c_j \frac{1}{|\Omega|}\Big(1 - \frac{\varepsilon_j}{D_j}\Big) \int_\Omega \phi_0^{\varepsilon_j,k} dx \int_\Omega \psi_j dx + \int_\Omega \rho_j dx}{1 - \frac{1}{|\Omega|}\Big(1 - \frac{\varepsilon_j}{D_j}\Big) \int_\Omega \psi_j\, dx}. \tag{3.88}$$

将（3.88）代入（3.84），可得

$$\theta_j = \frac{1}{|\Omega|}\Big(1-\frac{\varepsilon_j}{D_j}\Big)\frac{c_j\int_\Omega \phi_0^{\varepsilon_j,k}dx+\int_\Omega \rho_j dx}{1-\frac{1}{|\Omega|}\Big(1-\frac{\varepsilon_j}{D_j}\Big)\int_\Omega \psi_j\,dx}\psi_j+\rho_j,$$

结合式（3.85）、（3.87）和（3.57）可知，存在一个常数 $C_k = C_k(M, D_0) > 0$ 使得对所有 j 充分大的情形，

$$\|\theta_j\|_{L^\infty} \le C_k\left(|c_j|\sqrt{\varepsilon_j}+\|q_j\|_{L^\infty}\right). \tag{3.89}$$

另一方面，由于 $h_j \in X^\infty$，见式（3.9），我们有 $\langle h_j,\ \widehat{\Phi}^{\varepsilon_j,}{}_0{}^k\rangle = 0$，其中 $\widehat{\Phi}^{\varepsilon_j,}{}_0{}^k$ 是伴随算子 $\widehat{\mathscr{L}}_k^{\varepsilon_j}$ 对应于 λ^{ε_j}的特征函数$_0{}^k$ 。由定理3.1 (iv) 的证明可知 $\widehat{\Phi}^{\varepsilon_j,}{}_0{}^k = \widehat{a}^{\varepsilon_j}\phi^{\varepsilon_j,}{}_0{}^k + \widehat{\eta}^{\varepsilon_j}$，其中 $\widehat{\eta}^{\varepsilon_j} \in [\phi_0^{\varepsilon_j,k}]^\perp$ 和 $\widehat{a}^{\varepsilon_j} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$分别满足式（3.78）和（3.80）。因此，

$$0 = \big\langle h_j, \widehat{\Phi}_0^{\varepsilon_j,k}\big\rangle = \big\langle c_j\phi_0^{\varepsilon_j,k}+\theta_j,\ \widehat{a}^{\varepsilon_j}\phi_0^{\varepsilon_j,k}+\widehat{\eta}^{\varepsilon_j}\big\rangle = c_j\widehat{a}^{\varepsilon_j}+\int_\Omega \theta_j\widehat{\eta}^{\varepsilon_j}\,dx,$$

结合（3.78）和（3.80）可得

$$|c_j| = \Big|-\frac{1}{\widehat{a}^{\varepsilon_j}}\int_\Omega \theta_j\widehat{\eta}^{\varepsilon_j}\,dx\Big| \le C_k\sqrt{\varepsilon_j}\|\theta_j\|_{L^\infty}.$$

将其代回（3.89），得到

$$\|\theta_j\|_{L^\infty} \le C_k\left(\varepsilon_j\|\theta_j\|_{L^\infty}+\|q_j\|_{L^\infty}\right).$$

由于 $\lim_{j\to\infty}\varepsilon_j = 0$ and $\|q_j\|_{L^\infty} \le j^{-1}$，这意味着

$$\|\theta_j\|_{L^\infty} \le C_k\|q_j\|_{L^\infty} \to 0 \quad \text{and hence} \quad \frac{|c_j|}{\sqrt{\varepsilon_j}} \to 0, \quad \text{as } j\to\infty.$$

因此，由（3.16）可知

$$\|h_j\|_{L^\infty} = \|c_j\phi_0^{\varepsilon_j,k}+\theta_j\|_{L^\infty} \to 0, \quad \text{as } j\to\infty,$$

这与（3.81）矛盾。引理 3.3 的证明至此完成。 □

4. Proof of the main result

本节将证明主要结果定理 1.3。

定理 *1.3* 的证明。我们固定定理 $k \ge 2$ 中的一个逼近阶 2.2，并寻求方程（1.9）具有以下形式的解：

$$u = u_k^{\varepsilon,D} + p, \quad \text{where} p \in L^\infty_{rad}.$$

用 p表示时，方程（1.9）等价于

$$\mathscr{L}_k^\varepsilon p + \mathcal{F}^\varepsilon[p] + \mathcal{R}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}] = 0, \tag{4.1}$$

其中，$\mathcal{R}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}]$ 在定理 2.2 （ii）中定义，并且

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^\varepsilon[p] := {} & f\Big(u_k^{\varepsilon,D}+p,\ \mathcal{S}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}+p]-\frac{\varepsilon}{D}(u_k^{\varepsilon,D}+p)\Big) - f\Big(u_k^{\varepsilon,D},\ \mathcal{S}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}]-\frac{\varepsilon}{D}u_k^{\varepsilon,D}\Big)\\ & - f_u^{\varepsilon,k}p + \Big[\frac{\varepsilon}{D}p+\frac{1}{|\Omega|}\Big(1-\frac{\varepsilon}{D}\Big)\int_\Omega p(x)\,dx\Big]f_v^{\varepsilon,k}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

注意，$f^\varepsilon{}_{,u}{}^k$和 $f^\varepsilon{}_{,v}{}^k$在（3.3）中定义。

将沿着 $\widehat{\Phi}^\varepsilon{}_{,0}{}^k$ 投影到 $[\Phi_0^{\varepsilon,k}]$ 上的 $\mathcal{Q}^\varepsilon$ L^2 投影算子记为

$$\mathcal{Q}^\varepsilon p = \langle\widehat{\Phi}_0^{\varepsilon,k},\ p\rangle\Phi_0^{\varepsilon,k}.$$

将 p 改写为以下形式

$$p = \alpha\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}\Phi_0^{\varepsilon,k} + \varepsilon^k q,$$

其中 $\alpha = \langle \widehat{\Phi}^{\varepsilon,k}_0, p\rangle/\varepsilon^{k+\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}$ 以及 $q \in X^\infty$。注意， X^∞ 定义于（3.9）中。于是，（4.1）可改写为

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}\alpha\lambda_0^{\varepsilon,k} + \langle \widehat{\Phi}_0^{\varepsilon,k}, \mathcal{F}^\varepsilon[\alpha\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}\Phi_0^{\varepsilon,k} + \varepsilon^k q]\rangle = -\langle \widehat{\Phi}_0^{\varepsilon,k}, \mathcal{R}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}]\rangle, \\ &\varepsilon^k(\mathscr{L}_k^\varepsilon - \lambda_0^{\varepsilon,k})q + (I-\mathcal{Q}^\varepsilon)\mathcal{F}^\varepsilon[\alpha\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}\Phi_0^{\varepsilon,k} + \varepsilon^k q] = -\varepsilon^k\lambda_0^{\varepsilon,k}q - (I-\mathcal{Q}^\varepsilon)\mathcal{R}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

根据引理 3.3，逆算子 $(\mathscr{L}_k^\varepsilon - \lambda^\varepsilon_0{}^k)^{-1}$ 是一个从X^∞ 到自身的有界算子。此外，根据引理 3.3 上方的注释，我们实际上可以在空间

$$X_0 := C_{rad}(\overline{\Omega}) \cap X^\infty$$

并考虑如下系统:

$$\alpha = \mathcal{T}_1[\alpha, q],\ q = \mathcal{T}_2[\alpha, q], \quad \text{in } \mathbb{R}\times X_0, \tag{4.4}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1[\alpha,q] &:= -\frac{1}{\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}\lambda_0^{\varepsilon,k}}\Big\langle \widehat{\Phi}_0^{\varepsilon,k}, \mathcal{F}^\varepsilon[\alpha\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}\Phi_0^{\varepsilon,k} + \varepsilon^k q]\Big\rangle + \Big\langle \widehat{\Phi}_0^{\varepsilon,k}, \mathcal{R}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}]\Big\rangle, \\ \mathcal{T}_2[\alpha,q] &:= -(\mathscr{L}_k^\varepsilon - \lambda_0^{\varepsilon,k})^{-1}\Big(\frac{1}{\varepsilon^k}(I-\mathcal{Q}^\varepsilon)\mathcal{F}^\varepsilon[\alpha\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}\Phi_0^{\varepsilon,k} + \varepsilon^k q] + \lambda_0^{\varepsilon,k}q\Big) \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon^k}(\mathscr{L}_k^\varepsilon - \lambda_0^{\varepsilon,k})^{-1}\Big((I-\mathcal{Q}^\varepsilon)\mathcal{R}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}]\Big). \end{aligned}$$

注意，若 $(\alpha, q) \in \mathbb{R}\times X_0$ 满足（4.4），那么实际上 q 是（4.3）中第二个方程的经典解。事实上，根据 $\mathcal{Q}^\varepsilon$的定义，我们可知

$$\frac{1}{\varepsilon^k}(I-\mathcal{Q}^\varepsilon)\mathcal{F}^\varepsilon[\alpha\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}\Phi_0^{\varepsilon,k} + \varepsilon^k q] + \lambda_0^{\varepsilon,k}q + \frac{1}{\varepsilon^k}(I-\mathcal{Q}^\varepsilon)\mathcal{R}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}] \in X^\infty.$$

因此， $q \in X^2_{,\nu}{}^s \subset W^{2,}_{\nu}{}^s$对于任意 $s \in (1, \infty)$ 由引理 3.2。取 $s > N$，由 Sobolev 嵌入定理可知 $q \in C^{1+\alpha}(\Omega)$ 对某个 $\alpha \in (0, 1)$ 成立。进而由 Schauder 理论可知， w 属于 $C^{2+\alpha}(\Omega)$，并满足所需的零诺伊曼边界条件。

现在，我们通过应用 Banach 不动点定理来求解 (4.4)。为此，我们定义一个映射 $\mathcal{T}$: $\mathbb{R}\times X_0 \to \mathbb{R}\times X_0$ 如下： $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$。我们在 $\mathbb{R}\times X_0$ 上赋予范数

$$|\!|\!|(\alpha, q)|\!|\!| := |\alpha| + \|q\|_{L^\infty(\Omega)},$$

在该范数下，它成为一个 Banach 空间。我们首先建立以下预备引理。

引理 4.1. 假设条件(A1)-(A3)成立。给定 $M \in I_{v^*}$、 $D_0 > 0$、 $\varepsilon_0 > 0$和整数 $k \geq 2$。那么，对于每个常数 $R > 0$，存在常数$C_k = C_k(M, D_0, \varepsilon_0, R) > 0$，使得对于任意满足以下条件的$(\alpha, q)$、$(\alpha_i, q_i) \in \mathbb{R}\times X_0$

$$|\!|\!|(\alpha, q)|\!|\!| \leq R, \quad |\!|\!|(\alpha_i, q_i)|\!|\!| \leq R \quad (i = 1, 2),$$

以下估计对所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ 和 $D \geq D_0$ 均成立:

$$\big\|\mathcal{F}^\varepsilon[\alpha\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}\Phi_0^{\varepsilon,k} + \varepsilon^k q]\big\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \widehat{C}_k\varepsilon^{2k}\,|\!|\!|(\alpha, q)|\!|\!|^2, \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} &\big\|\mathcal{F}^\varepsilon[\alpha_1\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}\Phi_0^{\varepsilon,k} + \varepsilon^k q_1] - \mathcal{F}^\varepsilon[\alpha_2\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}\Phi_0^{\varepsilon,k} + \varepsilon^k q_2]\big\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\qquad \leq \widehat{C}_k R\varepsilon^{2k}\,|\!|\!|(\alpha_1-\alpha_1, q_1-q_2)|\!|\!|. \end{aligned} \tag{4.6}$$

证明。 我们对函数应用带余项的泰勒展开： $F^\varepsilon[p]$ 该函数定义于 (4.2) 中，从而得到

$$\left|\mathcal{F}^\varepsilon[p](x)\right| \le C\Big[|p(x)|^2 + \Big(\frac{\varepsilon}{D}p(x) + \frac{1}{|\Omega|}\Big(1-\frac{\varepsilon}{D}\Big)\int_\Omega p(x)\,dx\Big)^2\Big],$$

其中 $C>0$ 是一个常数，仅取决于 $\nabla^2 f$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中由 $\|u^\varepsilon$确定的紧区域上的上确界范数，$_k{}^D\|_{L^\infty(\Omega)}$ 和 $\|p\|_{L^\infty}$(Ω)。在上述不等式中令 $p=\alpha\varepsilon^{k+\frac12}\Phi^\varepsilon,{}_0{}^k+\varepsilon^k q$即可由定理 4.5和定理 2.2、定理 3.1 (iii) 得到式 (

通过类似的计算，我们可以证明

$$\left\|\mathcal{F}^\varepsilon[p_1]-\mathcal{F}^\varepsilon[p_2]\right\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\max\left\{\|p_1\|_{L^\infty(\Omega)},\|p_2\|_{L^\infty(\Omega)}\right\}\times\|p_1-p_2\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

在上述不等式中令 $p_i=\alpha_i\varepsilon^{k+\frac12}\Phi^\varepsilon,{}_0{}^k+\varepsilon^k q_i$ 对于 $i=1,\ 2$ 可得式 (4.6)。 □

根据定理 2.2(ii) 和定理 3.1 (iii)-(iv)，可得

$$\left|\langle\widehat{\Phi}_0^{\varepsilon,k},\,\mathcal{R}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}]\rangle\right| \le \|\mathcal{R}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}]\|_{L^\infty(\Omega)}|\langle\widehat{\Phi}_0^{\varepsilon,k},\,1\rangle| \le C_k\varepsilon^{k+\frac32},$$

这意味着

$$\|\mathcal{Q}^\varepsilon\mathcal{R}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}]\|_{L^\infty(\Omega)} = |\langle\widehat{\Phi}_0^{\varepsilon,k},\,\mathcal{R}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}]\rangle|\cdot\|\Phi_0^{\varepsilon,k}\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_k\varepsilon^{k+1},$$
$$\|(I-\mathcal{Q}^\varepsilon)\mathcal{R}^\varepsilon[u_k^{\varepsilon,D}]\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_k\varepsilon^{k+1}.$$

因此，利用上述估计、定理3.1、引理3.3 和4.1，我们得到

$$|\mathcal{T}_1[\alpha,q]| \le C_k\widehat{C}_k\varepsilon^{k-1}\,|\!|\!|(\alpha,q)|\!|\!|^2 + C_k,$$
$$\|\mathcal{T}_2[\alpha,q]\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_k\widehat{C}_k\varepsilon^{k}\,|\!|\!|(\alpha,q)|\!|\!|^2 + C_k\varepsilon\|q\|_{L^\infty(\Omega)} + C_k\varepsilon.$$

因此，如果我们定义

$$\mathcal{B} := \left\{(\alpha,q)\in\mathbb{R}\times X_0 \,\middle|\, |\!|\!|(\alpha,q)|\!|\!| \le 4C_k\right\}$$

并令 $R=4C_k$ 属于引理 4.1中的量，则 $\mathcal{T}(\mathcal{B})\subset\mathcal{B}$ 只要

$$0<\varepsilon\le\min\left\{\left(16C_k^2\widehat{C}_k\right)^{-\frac{1}{k-1}},\ \frac12,\ \frac{1}{4C_k}\right\} =: \bar{\varepsilon}(M,D_0,k) \text{ and } D\ge D_0.$$

此外，对于任意的 (α_1,q_1)、$(\alpha_2,q_2)\in\mathcal{B}$，

$$|\mathcal{T}_1[\alpha_1,q_1]-\mathcal{T}_1[\alpha_2,q_2]| \le 4C_k^2\widehat{C}_k\varepsilon^{k-1}\,|\!|\!|(\alpha_1-\alpha_1,q_1-q_2)|\!|\!|\,,$$
$$|\mathcal{T}_2[\alpha_1,q_1]-\mathcal{T}_2[\alpha_2,q_2]| \le 4C_k^2\widehat{C}_k\varepsilon^{k}\,|\!|\!|(\alpha_1-\alpha_1,q_1-q_2)|\!|\!| + C_k\varepsilon\|q_1-q_2\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

因此，采用上述对 ε 的选取，我们得到

$$|\!|\!|\mathcal{T}[\alpha_1,q_1]-\mathcal{T}[\alpha_2,q_2]|\!|\!| \le \frac58\,|\!|\!|(\alpha_1-\alpha_2,q_1-q_2)|\!|\!|\,,\quad \forall\,\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}] \text{ and } D\ge D_0.$$

因此，由压缩映射原理，映射 $\mathcal{T}$ 在球 $(\alpha^\varepsilon,q^\varepsilon)$ 中对所有 $\mathcal{B}$ 均存在唯一的不动点，条件是 $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]$ 且 $D\ge D_0$。由于 q^ε 实际上属于类 $C^{2+\alpha}$(Ω) 并满足零诺伊曼边界条件，$p=\alpha^\varepsilon\varepsilon^{k+\frac12}\Phi^\varepsilon,{}_0{}^k+\varepsilon^k q^\varepsilon$是方程 (4.1) 的经典解。因此，

$$u^{\varepsilon,D} := u_k^{\varepsilon,D} + \alpha^\varepsilon\varepsilon^{k+\frac12}\Phi_0^{\varepsilon,k} + \varepsilon^k q^\varepsilon$$

得到标量非局部问题（1.9）的一族经典解，对所有 $\varepsilon\in(0,\ \bar{\varepsilon}]$且 $D\ge D_0$。这就完成了定理 1.3中 $u^{\varepsilon,\,D}$ 存在性的证明。

现在，定理 1.3 的第 (i) 部分直接由定理 2.2 (i) 以及上述构造得出。 □

注意，为了证明定理 1.3，只需应用定理 2.2 并取 $k = 2$。尽管如此，建立定理 2.2 对于一般整数 $k \geq 2$ 的一个优点在于，结合估计$\|\Phi^{\varepsilon,D}_0{}^k\|_{L^\infty(\Omega)} = O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$（来自定理 3.1 (iii)），定理 1.3 的证明给出了这些解的如下高阶近似估计。

推论*4.2.* 假设条件 *(A1)-(A3)*成立。那么，对于任意给定的 $M \in I_{v^*}$、$D_0 > 0$和整数 $k \geq 2$，存在一个常数$\varepsilon = \varepsilon(M, D_0, k) > 0$，使得定理 *1.1*中得到的系统*(1.3)*的解$(u^{\varepsilon,D}, v^{\varepsilon,D})$可由定理 *2.2*给出的函数对$(u^{\varepsilon,D}_k, v^{\varepsilon,D}_k)$近似，其精度为

$$\left\|(u^{\varepsilon,D}, v^{\varepsilon,D}) - (u^{\varepsilon,D}_k v^{\varepsilon,D}_k)\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_k \varepsilon^k$$

对所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ 和 $D \geq D_0$，其中 $C_k = C_k(M, D_0, \bar{\varepsilon}) > 0$ 是仅依赖于所示变量的常数。

另一方面，在(2.10)中，如果我们改为选择 $U^{\pm,0}(x) \equiv h^{\pm}(A_0)$ in $\Omega^{\pm}$，那么所得的近似解会导出一族与定理2.2中得到的函数族不同但在结构上对称的函数。这给出了定理1.1的另一种存在性结果，其中我们仍将后续径向解族记为$(u^{\varepsilon,D}, v^{\varepsilon,D})$。

定理 4.3. 假设条件 (A1)-(A3)成立。则对于每个给定的

$$M \in I_{v^*} \text{ and } D_0 > 0,$$

存在常数 $\varepsilon = \varepsilon(M, D_0) > 0$，使得系统 (1.4) 存在一族球对称经典解 $(u^{\varepsilon,D}(r), v^{\varepsilon,D}(r))$，定义于 $\varepsilon \in (0, \varepsilon]$，且满足

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega [u^{\varepsilon,D}(x) + v^{\varepsilon,D}(x)]dx = M.$$

此外，这些解满足以下性质：

(i) 存在常数 $C = C(M, D_0, \varepsilon) > 0$，使得

$$\|u^{\varepsilon,D}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v^{\varepsilon,D}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}] \text{ and } D \geq D_0.$$

(ii) 对于每个 $\eta > 0$，存在两个常数 $K = K(\eta) > 0$ 和 $\varepsilon' = \varepsilon'(M, D_0, \eta) \leq \varepsilon$，使得对于任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon']$, $D \geq D_0$, 均有

$$|u^{\varepsilon,D}(r) - h^-(v^*)| < \eta \text{ on } [0, \widehat{R}_* - \varepsilon K] \text{ and } |u^{\varepsilon,D}(r) - h^+(v^*)| < \eta \text{ on } [\widehat{R}_* + \varepsilon K, 1],$$

其中

$$\widehat{R}_* = \widehat{R}_*(M) := \left[\frac{v^* + h^+(v^*) - M}{h^+(v^*) - h^-(v^*)}\right]^{1/N} \in (0,1). \tag{4.7}$$

(iii) $v^{\varepsilon,D}(x) = \mathcal{S}^\varepsilon[u^{\varepsilon,D}] - \frac{\varepsilon}{D} u^{\varepsilon,D}(x)$ 以及

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|v^{\varepsilon,D} - v^*\|_{L^\infty(\Omega)} = 0 \text{ uniformly with } D \geq D_0.$$

我们以如下注记结束本节。

注记 4.4. (i) 对任意固定整数 $k \geq 2$，由定理 *1.3* 的证明直接可知，解族 $(u^{\varepsilon,D}, v^{\varepsilon,D})$ 于定理 *1.1*中得到，且光滑依赖于参数 $(M, D, \varepsilon) \in I_{v^*} \times [D_0, \infty) \times (0, \varepsilon]$。

(ii) 一个有趣的问题是确定解族 $(u^{\varepsilon,D}, v^{\varepsilon,D})$在定理 *1.1* 中所得者是否与 k 的选取无关。我们甚至可以进一步问：当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，是否存在 (1.6) 在极限过渡层 (u^*, v^*) 附近于适当拓扑中的解的局部唯一性？这里， v^* 按条件 (A3) 定义，并且

$$u^*(r) := \begin{cases} h^+(v^*) & in\ [0, R_*), \\ h^-(v^*) & in\ (R_*, 1]. \end{cases}$$

近年来，针对奇异摄动非线性椭圆问题，尖峰/泡解的局部唯一性得到了广泛研究；参见 *[6]* 及其中的参考文献。

致谢

He 的研究部分得到国家自然科学基金项目（编号：12071141）的资助。Liu 和 He 的研究部分得到上海市基础研究领域科技创新行动计划（23JC1402600）的资助。He 和 Ye 的研究部分得到上海市科学技术委员会（编号：22DZ2229014）的资助。

参考文献

[1] Alberti S.、Gladfelter A.、Mittag T. 《研究液-液相分离和生物分子凝聚体时的考量与挑战》。《细胞》**176** (2019)，419-434。[2] Allen L.J.S.、Bolker B.M.、Lou Y.、Nevai A.L. SIS流行病反应扩散模型稳态的渐近分布。《离散与连续动力系统》**21** (2008)，1-20。[3] Berry J.、Brangwynne C.P.、Haataja M. 通过主动和被动相变实现细胞内组织的物理原理。《物理学进展报告》**81**(2018)，ARTN 046601。[4] Brauns F.、Halatek J.、Frey E. 质量守恒反应扩散动力学的相空间几何。《物理评论X》**10**(2020)，ARTN 041036。[5] Brauns F.、Halatek J.、Frey E. 两个充分混合区室的扩散耦合阐明了基于蛋白质的图案形成的基本原理。《物理评论研究》**3**(2021)，ARTN 013258。[6] Cao D.、Peng S.、Yan S. 非线性椭圆问题的奇异摄动方法。《剑桥高级数学研究》，**191**，剑桥大学出版社，剑桥，2021。[7] Castellano K.、Salako R. 关于降低人口流动对控制传染病传播的影响。《微分方程杂志》**316** (2022)，1-27。[8] Castellano K.、Salako R. 采用质量作用的扩散型SIS流行病模型的地方病平衡态的多重性。《工业与应用数学学会应用数学杂志》**84** (2024)，732-755。[9] del Pino M. 半线性椭圆系统中的径向对称内层。《美国数学会汇刊》**347**(1995)，4807-4837。[10] Fife P.C. 二阶微分方程组的边界和内部过渡层现象。《数学分析及其应用杂志》**54**(1976)，497-521。[11] Fife P.C.、McLeod J.B. 非线性扩散方程的解趋近于行波前解。《档案：合理力学与分析》**65** (1977)，335-361。[12] Gilbarg D.、Trudinger N.S. 《二阶椭圆偏微分方程》。第2版，施普林格，2001。[13] Gomez D.、Lam K.-Y.、Mori Y. 影子波钉扎模型中的前沿传播。《数学生物学杂志》**86** (2023)，文章编号72。[14] Halatek J.、Frey E. 重新思考反应扩散系统中的图案形成。《自然物理学》**14**(2018)，507-514。

[15]Halatek J.、Brauns F、Frey E. 细胞内图案形成的自组织原理。英国皇家学会哲学汇刊B辑**373** (2018)，ARTN 20170107。[16] Hale J.K.、Sakamoto K. 反应扩散系统中过渡层的Lyapunov-Schmidt方法。广岛数学杂志**35**(2005)，205-249。[17] IkedaH.、Kuwamura M. 具有双稳态非线性的质量守恒反应扩散系统中的单过渡层稳定性，《微分方程杂志》**440**(2025)，113430。[18] Ishihara S.、Otsuji M.、Mochizuki A. 质量守恒反应扩散系统的瞬态与稳态。《物理评论E》**75** (2007)，ARTN 015203。[19] Ito M. 关于奇异摄动方法的注记。广岛数学杂志**14** (1985)，619-629。[20]Jimbo S.、Morita Y. 具有质量守恒的反应扩散系统的Lyapunov函数与谱比较。《微分方程杂志》**255** (2013)，1657-1683。[21]Kuwamura M.、Teramoto T.、Ikeda H. 具有双稳态非线性的质量守恒反应扩散系统中的单过渡层，《非线性》**37** (2024)，115013。[22] Latos E.、Morita Y.、Suzuki T. 具有质量守恒的反应扩散系统的稳定性与谱比较。《动力系统与微分方程杂志》**30** (2018)，823-844。[23] Li C.、Bian Y.、Tang Y.、Meng L.、Yin P.、Hong Y.、Cheng J.、Li Y.、Lin J.、Tang C.、Chen C.、Li W.、Qi Z. 揭示双组分DNA-蛋白质共相分离中形态转变的分子机制。《结构》**2** (2025)，62-77。e8。[24] Li C.、Guo M.-T.、He X.、Liu Q.-X.、Qi Z. 生物分子凝聚体连接相分离中质量守恒反应扩散系统的实验与理论。《结构》**33** (2025)，1519-1532.e4。[25] Lin X.-B. 结构稳定内层解的构造与渐近稳定性。《美国数学会汇刊》**353**(2001)，2983-3043。[26] Mimura M.、Tabata M.、Hosono Y. 带小参数的Neumann型两点边值问题的多重解。《工业与应用数学学会数学分析杂志》**11**(1980)，613-631。[27] Mori Y.、Jilkine A.、Edelstein-Keshet L. 双稳态反应扩散系统中的波钉扎与细胞极性。《生物物理学杂志》**94**(2008)，3684-3697。[28] Mori Y.、Jilkine A.、Edelstein-Keshet L. 细胞极化反应扩散模型中波钉扎的渐近分析与分岔分析。《工业与应用数学学会应用数学杂志》**71**(2011)，1401-1427。[29] Morita Y.、Ogawa T. 具有质量守恒的反应扩散系统中非恒定解的稳定性与分岔。《非线性》**23** (2010)，1387-1411。[30] Murray J.D. 《数学生物学II：空间模型与生物医学应用》，第3版（施普林格），2003。[31] Ni W.-M.、Takagi I. 轴对称区域中由反应扩散系统产生的点凝聚。《日本工业与应用数学杂志》**12** (1995)，327-365。[32] Nishiura Y.、Fujii H. 反应扩散方程组奇异摄动解的稳定性。《工业与应用数学学会数学分析杂志》**18** (1987)，1726-1770。[33] Otsuji M.、Ishihara S.、Co C.、Kaibuchi K.、Mochizuki A.、Kuroda S. 质量守恒反应扩散系统捕捉了细胞极性的性质。《公共科学图书馆计算生物学》**3**(2007)，e108。[34] Peng R. SIS流行病反应扩散模型正稳态的渐近分布。第一部分。《微分方程杂志》**247** (2009)，1096-1119。[35] Peng R.、Salako R.、Wu Y. 具有非线性发病机制和总人口恒定的反应扩散流行病模型的空间分布。《工业与应用数学学会数学分析杂志》。

57(2025), 1586-1620.[36]Sakamoto K. 反应扩散系统中过渡层解的构造与稳定性分析. 东北数学杂志 **42**(1990), 17-44.[37] Sakamoto K., Suzuki H. 激活剂-抑制剂系统的球对称内部层. I. 通过Lyapunov-Schmidt约化证明其存在性. 《微分方程杂志》 **204**(2004), 56-92.[38] Sakamoto K., Suzuki H. 激活剂-抑制剂系统的球对称内部层 II. 稳定性与对称性破缺分岔. 《微分方程杂志》**204**(2004), 93-122.[39] Siteur K., Liu Q.-X., Rottschäfer V., van der Heide T., Rietkerk M., Doelman A., Boström C., van de Koppel J. 相分离物理学是斑块状生态系统恢复力新理论的基础. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **120** (2023), ARTN e2202683120.[40] Taniguchi M. 关于通过Lyapunov-Schmidt约化实现奇异摄动方法的一则注记. 京都大学数理科学研究所刊物 **31** (1995), 1001-1010.[41] Turing A.M. 形态发生的化学基础. 伦敦皇家学会哲学汇刊B辑 **237**(1952), 37-72.[42]Weber C.A., Zwicker D., Jülicher F., Lee C.F. 化学反应控制的相分离液滴：形成、尺寸选择与粗化. 《物理评论快报》**120**(2019), ARTN 078102.