通过经典理论研究共形半群的混沌动力学

Mohamed Khoulane[a], Aziz El Ghazouani[a], M'hamed Elomari[a]

[a]苏丹穆莱·斯利曼大学应用数学与科学计算实验室，贝尼迈拉勒，*23000*，摩洛哥

arXiv:2602.06782v1 [math.DS] 6 Feb 2026

摘要

共形导数包含一个分数阶参数，同时保持局部性：对于光滑函数，它们可化为乘以显式权的经典导数。利用这一结构特征，我们证明，共形时间演化并不会产生一种真正全新的半群理论。相反，它可以被完整地解释为通过非线性时间变换观察到的经典 C_0–半群。对于 $\delta \in (0,1],$ ，我们引入共形时钟

$$\Psi(t) = \frac{t^\delta}{\delta},$$

并证明每个 C_0–δ–半群 $\mathcal{S}_\delta$ 都具有如下表示

$$\mathcal{S}_\delta(t) = \mathcal{T}(\Psi(t)),$$

其中， $\mathcal{T}$是在同一状态空间上唯一确定的经典 C_0–半群。这种对应在无穷小层面上是精确的：$\mathcal{S}_\delta$ 的 δ–生成元与 $\mathcal{T}$的生成元在一个公共定义域上重合，并且在重新参数化 $s = \Psi(t)$下，相容温和解与经典温和解一一对应。特别地，共形时钟不会改变轨道集，因此，基于轨道的线性动力学性质保持不变； δ–超循环性和 δ–混沌与其经典对应性质一致。作为应用，我们通过迁移经典结果，推导出 Desch–Schappacher–Webb 混沌判据的一个相容版本。分析在相容勒贝格空间 $L^{p,\,\delta}$中进行，并证明这些空间与标准 L^p 空间等距等价，从而可以直接迁移估计和谱论论证。总而言之，这些结果阐明了相容模型的哪些动力学特征是内在的，哪些仅仅源于非线性时间变换。

关键词： 共形微积分；共形 C_0-半群；非线性时间变换；Desch–Schappacher–Webb 判据；超循环性；Devaney混沌

1. 引言

分数阶模型如今被广泛用于描述演化问题中的反常输运、非标准弛豫和记忆效应。在经典分数阶框架中，这些现象通过积分型非局部算子来刻画，例如 Riemann–Liouville 导数或 Caputo导数。尽管这些算子带来了全新的分析特征，但也引入了长程时间记忆，并显著增加了技术复杂性。

近年来，共形微积分 被提出作为一种替代性的分数阶形式体系。其主要吸引力在于其局部性：对于光滑函数，相容导数可化为经典导数乘以一个显式的权。这一特性使该方法颇具吸引力

在算子理论以及偏微分方程分析中。与此同时，它提出了一个根本性问题：共形模型所产生的动力系统在多大程度上真正不同于经典演化族所产生的动力系统?

多项研究指出，共形导数缺乏真正分数阶算子所特有的内在记忆效应。这一观察表明，理解共形动力学应依托明确的结构机制，而非采用临时拼凑的计算方法。本文旨在从算子理论的角度对此问题给出精确解答。我们证明，共形时间演化并未定义一种新的半群理论，而是可以精确地描述为一个在非线性时间变换下演化的经典 C_0–半群。

全文固定一个共形阶数 $\delta \in (0,1]$。所有可顺应对象（导数、积分、半群和函数空间）均由这一相同参数索引。与共形微积分相关的非线性时间重参数化由以下映射给出

$$\Psi(t) = \frac{t^\delta}{\delta}, \qquad t \geq 0,$$

该映射连续、严格递增，且映射到 $[0,\infty)$ 上。我们将 Ψ 称为共形时钟。我们的第一个主要结果表明，对于巴拿赫空间 X 上任意一个共形 C_0–δ–半群 $\mathcal{S}_\delta = \{\mathcal{S}_\delta(t)\}_{t\geq 0}$，都存在唯一的定义在同一空间上的经典 C_0–半群 $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}(s)\}_{s\geq 0}$，使得

$$\mathcal{S}_\delta(t) = \mathcal{T}(\Psi(t)), \qquad t \geq 0. \tag{1}$$

因此，共形演化不过是在扭曲的时间尺度上观察到的经典演化。在无穷小层面上，这种对应关系是精确的： δ– S_δ 的生成元在公共定义域上与 $\mathcal{T}$的经典生成元一致，而共形时间下的温和解与经典温和解在变量替换 $s = \Psi(t)$下是一一对应的。

明确这种时钟变换后，许多共形结果都可以直接从经典理论中得到。无需在共形变量下重新推导论证，只需转而研究相应的半群 $\mathcal{T}$，运用成熟的 C_0–半群理论工具，再通过（1）回到 $\mathcal{S}_\delta$ 。这一观点使生成性、适定性、耗散性和稳定性的证明一目了然，也说明了为何许多共形结果与其经典对应结果如出一辙。

本文的第二个目标是阐明共形时钟对线性动力系统的影响。超循环性和 Devaney混沌等轨道型性质，在 C_0–半群理论中发挥着核心作用。我们证明，这些概念在重参数化$t \mapsto \Psi(t)$下保持不变： δ–超循环性和 δ–混沌性与 $\mathcal{S}_\delta$ 的经典超循环性和混沌性等价于 $\mathcal{T}$。因此，无需额外进行谱分析，便可将经典混沌判据迁移到共形时间下。特别地，我们通过时钟关系（1）将经典定理应用于共形情形，从而得到 Desch–Schappacher–Webb 判据的共形版本。

共形积分自然诱导加权测度 $d\mu_\delta(t) = t^{\delta-1}\,dt$ 以及空间 $L^{p,\delta}$ 和 $W^{m,p}_{,\delta}$。我们证明，这些空间经由变量替换$s = \Psi(t)$显式地、且在相关表述中等距地等价于经典的勒贝格尺度与索伯列夫尺度。这一等同为生成元、能量空间和边界条件提供了自然的函数空间框架，并使我们能够无损地迁移经典估计与谱论论证。

最后，我们将迁移原理应用于定义在加权希尔伯特空间上的共形扩散-输运方程。通过对空间变量进行非线性变换，可将共形

算子化为经典漂移–扩散算子，从而使两种实现酉等价。根据已知的经典结果，可立即推出共形半群具有混沌行为，无需进行新的谱计算。这个例子凸显了本文所建立的共轭机制的实际意义：只要能通过显式的变量替换将共形模型化为经典模型，就可以直接迁移其定性动力学性质。

本文的贡献并非只是对共形导数已知性质的重新表述，而是确立了共形演化与经典半群理论之间精确的结构等价，表明共形动力学并未产生真正新颖的分数阶行为。与积分型分数阶模型不同，后者内在地包含非局部记忆效应，而共形微积分仍然是局部的，其“分数阶”特征完全由确定性的时间重参数化所编码。我们的结果在各个层面明确揭示了这一机制：生成元、温和解、函数空间和线性动力系统。从这个意义上说，本文厘清了共形演化在半群理论中的概念地位，并为其奠定了坚实明确的分析基础。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾后文所需的共形微积分基础，并引入共形 C_0–δ–半群。第 3 节构建共形勒贝格空间与索伯列夫空间，并确立它们与经典尺度的明确对应关系。第 4 节引入共形能量空间 $H^1_{\delta,\,0}(\mathbb{R}_+)$，并证明一个分部积分公式。第 5 节研究温和解，明确给出时间变换原理，并通过 Lumer–Phillips定理推导生成性结果。第 6 节专门讨论线性动力系统：我们证明轨道类型概念在共形时钟下的不变性，并推导出共形Desch–Schappacher–Webb准则。最后，第 7 节介绍共形扩散-输运方程的应用，并提出一个一般的共轭原理，用于将混沌性从经典情形传递到共形情形。

2. 预备框架

本节汇集了全文将要用到的概念。我们仅讨论共形微积分中对后续算子理论构造至关重要的部分。一个指导原则是，共形算子保持局部性：对于足够光滑的函数，它们会化为乘以显式权函数的经典导数或积分。这一特征使共形微积分与积分型非局部分数阶模型 [8, 10, 13]截然不同，也是本研究框架中能够采用半群方法的关键原因。

共形框架源自 [7]中引入的定义，并在 [1, 2]中得到进一步发展。与分数时间尺度相关的广义半群概念在 [3]中得到形式化。我们的目的是将这些思想与 C_0–半群的经典理论[11, 12, 6], 联系起来；后者也为稍后讨论的动力学方面[5]提供了自然背景。本文着重阐明共形演化背后的结构机制，而非复述分数阶算子的一般理论。

2.1. 共形积分与微分

我们首先介绍共形积分，它在 $\mathbb{R}_+$ 上自然诱导出一种加权测度。

定义1（共形积分 [7, 1]）。令 $\delta \in (0,1]$，并令 $g:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ 为可测函数。对于$0 \le a < t$，阶数为 δ 的共形积分定义为

$$(\mathcal{I}_\delta g)(t) := \int_a^t g(\xi)\,\xi^{\delta-1}\,d\xi,$$

当积分存在时。

此定义表明应使用加权测度

$$d\mu_\delta(\xi) := \xi^{\delta-1}\, d\xi,$$

并且，除非另有说明，$\mathbb{R}_+$ 上的所有积分均视为相对于 $d\mu$进行 δ.

相应的微分概念如下所示。

定义 2（相容导数 [7, 1]）。 设 $\delta \in (0,1]$ 且设 $v:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$。阶数为 δ 在 $t>0$ 处的相容导数定义为

$$\mathcal{D}_t^\delta v(t) := \lim_{h\to 0} \frac{v\big(t + h\, t^{1-\delta}\big) - v(t)}{h},$$

若该极限存在。对于 $\delta = 1$，这就化为通常导数。

该算子的局部性通过以下表示性质得以明确；参见[1, 2]。

命题 1. 设 $v \in C^1((0,\infty))$ 且 $\delta \in (0,1]$。则对每个 $t>0$,

$$\mathcal{D}_t^\delta v(t) = t^{1-\delta}\, \frac{dv}{dt}(t).$$

因此，可顺应微分的作用等同于加权经典导数，且不涉及记忆效应。这一结构特征将在相关演化族的分析中发挥决定性作用。

2.2. 共形半群

共形微积分还通过时间的非线性重标度 [3]导出了一种广义的单参数半群概念。

定义 3（共形 δ–半群）。 设 $\delta \in (0,a]$ 对某个 $a>0$成立，且设 X 为巴拿赫空间。一族有界线性算子 $\mathcal{S}_\delta = \{\mathcal{S}_\delta(t)\}_{t\ge 0} \subset \mathcal{L}(X)$ 称为共形δ–半群，若满足：

1. $\mathcal{S}_\delta$(0) =Id作用于 X;
2. 对于所有 $r,\ q \ge 0$,

$$\mathcal{S}_\delta\big((r+q)^{1/\delta}\big) = \mathcal{S}_\delta\big(r^{1/\delta}\big)\, \mathcal{S}_\delta\big(q^{1/\delta}\big).$$

对于 $\delta = 1$，这就归结为经典半群律 [11, 6]。

例 1. 设 $B \in \mathcal{L}(X)$ 有界，并定义

$$\mathcal{S}_{1/2}(t) = \exp\big(2\, t^{1/2} B\big), \qquad t \ge 0.$$

那么 $\mathcal{S}_{1/2}$ 是一个适应型 $_{1\ 2}$–半群。

例 2. 设 $X = C([0,\infty))$ 赋予上确界范数，并设

$$(\mathcal{S}_{1/2}(t)f)(x) = f\big(x + 2\,t^{1/2}\big), \qquad x, t \geq 0.$$

那么， $\mathcal{S}_{1/2}$ 定义了 -X 上的 1 2–有界线性算子半群。

定义 4（C_0–δ–半　　群）。称共形 δ–半群 $\mathcal{S}_\delta$ 为 C_0–δ–半群 *if*

$$\lim_{t\to 0^+} \mathcal{S}_\delta(t)x = x \quad \textit{for all } x \in X.$$

$\mathcal{S}_\delta$ 在原点处的无穷小行为由其 δ–生成元描述，定义如下：

$$D(\mathcal{A}_\delta) = \Big\{x \in X : \lim_{t\to 0^+} \mathcal{D}_t^\delta \mathcal{S}_\delta(t)x \text{ exists}\Big\}, \qquad \mathcal{A}_\delta x = \lim_{t\to 0^+} \mathcal{D}_t^\delta \mathcal{S}_\delta(t)x.$$

注 1。在极限情形 $\delta = 1$，可恢复 C_0–半群及其生成元的经典框架 *[11, 6]*。

3. 共形勒贝格空间与索伯列夫空间

相容导数以非均匀的方式改变时间尺度。在积分层面，这种变形通过权 $t^{\delta-1}$ （其中 $\delta \in (0,1]$）体现；该权已包含在第 2 节引入的共形积分中：

$$(\mathcal{I}_\delta f)(t) = \int_0^t f(s)\, s^{\delta-1}\, ds.$$

因此，在带有加权测度的 $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ 上进行研究是很自然的：

$$d\mu_\delta(t) := t^{\delta-1}\, dt.$$

这种选择将相容时间变换纳入函数空间框架，适用于能量方法、紧性论证以及相容演化方程所产生的生成元分析。本节将引入相应的勒贝格空间和索伯列夫空间，并列出后续所需的性质。对于可由标准加权 L^p 理论直接推出的结论，我们仅作简要说明，并参见经典文献。

3.1. 相容勒贝格空间

设 $I \subset \mathbb{R}_+$ 为一个区间，并固定 $\delta \in (0,1]$。

定义 5（相容勒贝格空间）。对于 $1 \leq p < \infty$，I 上的相容勒贝格空间定义为

$$L^{p,\delta}(I) := \Big\{f : I \to \mathbb{C} \ \textit{measurable};\ \int_I |f(t)|^p\, d\mu_\delta(t) < \infty\Big\},$$

赋予范数

$$\|f\|_{p,\delta} := \Big(\int_I |f(t)|^p\, d\mu_\delta(t)\Big)^{1/p} = \Big(\int_I |f(t)|^p\, t^{\delta-1}\, dt\Big)^{1/p}.$$

注 2（加权解释）。由于 $t^{\delta-1}$ 在$(0,\infty)$ 上对每个 $\delta > 0$都局部可积，测度空间(I,μ_δ) 是 σ–有限的。因此 $L^{p,\delta}(I)$ 与经典加权空间$L^p(I,t^{\delta-1}dt)$一致。诸如 *H ̈older* 不等式和 *Minkowski* 不等式、简单函数的稠密性以及完备性等标准结果，均可由加权 L^p 空间的一般理论得出；例如参见[9, 4]。

对我们的目的而言，一个关键点是，权 $t^{\delta-1}$ 可以通过简单的变量替换消去，从而使顺应尺度与经典尺度之间的可比性变得显而易见。

命题 2（等距约化至经典 L^p 尺度）。设 $I=(0,T)$ 满足 $0<T\le\infty$且 $\delta\in(0,1]$。定义递增映射

$$\Psi(t):=\frac{t^\delta}{\delta},\qquad t\in(0,T).$$

Then

$$U:L^{p,\delta}(0,T)\longrightarrow L^p\big(0,\Psi(T)\big),\qquad (Uf)(s)=f\big((\delta s)^{1/\delta}\big),$$

是一个线性等距同构。

证明 1。 映射 Ψ 是从 $(0,T)$ 到 $(0,\Psi(T))$ 的严格递增 C^1–微分同胚，并满足 $\Psi'(t)=t^{\delta-1}$。通过变量替换 $s=\Psi(t)$，得到

$$\int_0^T |f(t)|^p\,t^{\delta-1}\,dt=\int_0^{\Psi(T)}\big|f\big((\delta s)^{1/\delta}\big)\big|^p\,ds,$$

因此$\|Uf\|_{L^p(0,\Psi(T))}=\|f\|_{p,\delta}$。线性显然成立，而满射性可通过令 $f(t):=g(\Psi(t))$ 对 $g\in L^p(0,\Psi(T))$ 成立来得到。

命题 3（完备性与希尔伯特情形）。对于每个 $1\le p<\infty$，赋范空间 $\big(L^{p,\delta}(I),\|\cdot\|_{p,\delta}\big)$都是巴拿赫空间。此外，对于 $p=2$，内积

$$(f,g)_{2,\delta}:=\int_I f(t)\overline{g(t)}\,d\mu_\delta(t)$$

使 $L^{2,\delta}(I)$ 成为希尔伯特空间。

证明 2。这直接源于 σ–有限测度空间上带权 L^p 空间的完备性；见 [9]。对于 $p=2$，形式 $(\cdot,\cdot)_{2,\delta}$ 是定义良好的内积，其诱导范数为$\|\cdot\|_{2,\delta}$，而完备性保证了希尔伯特空间结构。

注 3. 命题 2 表明，顺应勒贝格尺度并未引入新的可积性范围：它通过测度层面上的顺应时间重参数化来体现这一变化。下文定义的索伯列夫尺度也将体现这一观点。

3.2. $\mathbb{R}_+$ 上的相容 *Sobole*夫空间

现在我们引入与相容导数相关的索伯列夫空间。在本小节中， $\mathcal{D}_t^\delta$ 表示第2节中定义的相容导数。对于光滑函数$u \in C^1((0,\infty))$，回顾

$$\mathcal{D}_t^\delta u(t) = t^{1-\delta} u'(t),$$

这突出了相应范数的加权性质。

定义 6（相容 Sobole夫空间）。设 $m \in \mathbb{N}$ 且 $1 \le p < \infty$。定义

$$W_\delta^{m,p}(\mathbb{R}_+) := \Big\{ u \in L^{p,\delta}(\mathbb{R}_+) \,;\, \mathcal{D}_t^{k\delta} u \in L^{p,\delta}(\mathbb{R}_+) \ \textit{for all } k = 1, \dots, m \Big\},$$

赋予范数

$$\|u\|_{W_\delta^{m,p}} := \Big(\sum_{k=0}^{m} \|\mathcal{D}_t^{k\delta} u\|_{p,\delta}^p \Big)^{1/p}, \qquad \mathcal{D}_t^{0\cdot\delta} u := u.$$

注 4（关于定义的选择）。导数 $\mathcal{D}_t^{k\delta} u$ 被解释为迭代相容导数：对于光滑函数逐点取值，并在 $L^{p,\delta}$中按相应的弱意义理解。在本文中， $W^{m,p}_{,\delta}(\mathbb{R}_+)$ 被用作适用于局部相容微积分的函数空间框架。与其他 *Sobole*夫型构造进行系统比较超出了本文范围；关于一般背景，读者可参阅加权 *Sobole*夫空间的相关文献（例如 *[9, 4]*）。

命题 4（完备性）。对于所有 $m \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le p < \infty$，空间 $W^{m,p}_{,\delta}(\mathbb{R}_+)$ 是一个巴拿赫空间。

证明 *3.* 设 (u_n) 是 $W^{m,p}_{,\delta}(\mathbb{R}_+)$ 中的柯西序列。那么对每个 $k = 0, \dots, m$，序列 $(\mathcal{D}_t^{k\delta} u_n)$ 在 $L^{p,\delta}(\mathbb{R}_+)$ 中是柯西序列，因此收敛到某个 $v_k \in L^{p,\delta}(\mathbb{R}_+)$。令 $u := v_0$，得到 $u_n \to u$属于 $L^{p,\delta}(\mathbb{R}_+)$。根据弱相容导数的定义，这些极限满足 $v_k = \mathcal{D}_t^{k\delta} u$，因此 $u \in W^{m,p}_{,\delta}(\mathbb{R}_+)$，且 $u_n \to u$ 在 *Sobole*夫范数下收敛。

希尔伯特情形

定义 7（相容希尔伯特–Sobole夫空间）。对于 $m \in \mathbb{N}$，我们设 t

$$H_\delta^m(\mathbb{R}_+) := W_\delta^{m,2}(\mathbb{R}_+), \qquad \|u\|_{H_\delta^m}^2 = \sum_{k=0}^{m} \|\mathcal{D}_t^{k\delta} u\|_{2,\delta}^2.$$

命题 5。 对于每个 $m \in \mathbb{N}$，空间 $H_\delta^m(\mathbb{R}_+)$ 都是一个带有内积的希尔伯特空间 t

$$(u, v)_{H_\delta^m} := \sum_{k=0}^{m} \big(\mathcal{D}_t^{k\delta} u, \mathcal{D}_t^{k\delta} v \big)_{2,\delta}.$$

证明 4. 每一项都在 $L^{2,\delta}(\mathbb{R}_+)$上定义一个内积，而有限和仍然是 $H_\delta^m(\mathbb{R}_+)$上的一个内积。完备性由命题 *4* 结合 $p = 2$得出。

消失迹子空间
定义 8（空间$H^1_{\delta,0}(\mathbb{R}_+)$）。我们定义

$$H^1_{\delta,0}(\mathbb{R}_+) := \overline{C_c^\infty(0,\infty)}^{H^1_\delta}.$$

注 5。空间 $H^1_{\delta,0}(\mathbb{R}_+)$ 可视为半直线上经典 H^1_0 的共形类比。它适用于 $t=0$ 处的齐次边界条件，并将在下一节生成生成元和能量恒等式的构造中发挥核心作用。

注 6（局部与非局部分数阶设定）。上述构造关键依赖于 $\mathcal{D}_t^\delta$ 的局部性以及 μ_δ 中所蕴含的权。它们不应与为积分型非局部分数阶算子量身设计的 *Sobolev* 框架混淆；在后者中，记忆效应是其结构性特征 *[8, 10, 13]*。

4. 温和解 、时间重参数化与共形半群的生成性 s

本节将介绍一种基于半群的共形演化方程研究方法。我们将反复采用两种互补的视角：

(i) 由 C_0–δ–半群生成的温和形式，它为巴拿赫空间中的解提供了一种自然概念；

(ii) 时间变换解释 表明，共形动力学是在非线性时钟下观测到的经典 C_0–半群演化。

第二种观点尤其有用，因为它使我们能够将标准理论中的生成性与稳定性结果迁移到共形情形。特别是，它使我们能够直接应用希尔伯特空间中的 Lumer–Phillips准则。

在全文中， X 表示一个巴拿赫空间（在需要时，后文也表示希尔伯特空间），并且

$$\mathcal{S}_\delta = \{\mathcal{S}_\delta(t)\}_{t\ge 0} \subset \mathcal{L}(X), \qquad \delta \in (0,1],$$

是一个 C_0–δ–半群，其 δ–生成元为 $\mathcal{A}_\delta$。

时间重参数化与诱导的经典半群

共形微积分的一个基本特征是非线性时间变换

$$s = \Psi(t) := \frac{t^\delta}{\delta}, \qquad t \ge 0,$$

该变换连续、严格递增，并将 $[0,\infty)$ 映射到自身。我们将 Ψ 称为共形时钟。利用这种重新参数化，我们为 $\mathcal{S}_\delta$ 关联算子族

$$\mathcal{T}(s) := \mathcal{S}_\delta\big(\Psi^{-1}(s)\big) = \mathcal{S}_\delta\big((\delta s)^{1/\delta}\big), \qquad s \ge 0.$$

引理 1. 族 $\{\mathcal{T}(s)\}_{s\ge 0}$ 是 X 上的（经典） C_0–半群。

证明 5. 零点处的恒等性。由于 $\Psi^{-1}(0) = 0$ 且 $\mathcal{S}_\delta(0) = I$，因此 $\mathcal{T}(0) = I$。半群律。固定 s, $r \geq 0$ 并令 $t_1 = \Psi^{-1}(s) = (\delta s)^{1/\delta}$ 且 $t_2 = \Psi^{-1}(r) = (\delta r)^{1/\delta}$。于是

$$\Psi^{-1}(s+r) = (\delta(s+r))^{1/\delta} = (t_1^\delta + t_2^\delta)^{1/\delta}.$$

根据 δ–半群的定义复合规则，

$$\mathcal{T}(s+r) = \mathcal{S}_\delta\big((t_1^\delta + t_2^\delta)^{1/\delta}\big) = \mathcal{S}_\delta(t_1)\,\mathcal{S}_\delta(t_2) = \mathcal{T}(s)\,\mathcal{T}(r).$$

零点处的强连续性。令 $x \in X$。当 $s \to 0^+$, $\Psi^{-1}(s) = (\delta s)^{1/\delta} \to 0$。由于 $\mathcal{S}_\delta$ 在0处强连续，

$$\|\mathcal{T}(s)x - x\| = \|\mathcal{S}_\delta(\Psi^{-1}(s))x - x\| \longrightarrow 0.$$

因此 $\mathcal{T}$ 是一个 C_0–半群。

共形时间与经典时间中的温和解

现在我们记录两种时间变量下的温和形式。

定义9（温和解）。

1. 映射 $x : [0,\infty) \to X$ 称为共形柯西问题的温和解

$$\mathcal{D}_t^\delta x(t) = \mathcal{A}_\delta x(t), \qquad x(0) = x_0,$$

若其由下式给出

$$x(t) = \mathcal{S}_\delta(t)x_0, \qquad t \geq 0.$$

2. 映射 $y : [0,\infty) \to X$ 称为经典柯西问题的温和解

$$y'(s) = \mathcal{B}y(s), \qquad y(0) = y_0,$$

若其由下式给出

$$y(s) = \mathcal{T}(s)y_0, \qquad s \geq 0,$$

其中， $\mathcal{B}$ 表示 $\mathcal{T}$–半群的生成元。

注7. 在这两种情形下，温和解均通过演化族定义。当初始数据不要求属于算子定义域时，这是巴拿赫空间中的自然概念。

通过时钟变换识别生成元

下一个结果表明，共形生成元与时间变换半群的经典生成元重合。

定理 1（生成元的重合）。设 $\mathcal{A}_\delta$ 是 $\mathcal{S}_\delta$ 的 δ–生成元， $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{T}$ 的（经典）生成元。那么

$$D(\mathcal{A}_\delta) = D(\mathcal{B}), \qquad \mathcal{A}_\delta x = \mathcal{B}x \quad \textit{for all } x \in D(\mathcal{A}_\delta).$$

证明6。 F令 $x \in X$，并通过 $t = \Psi^{-1}(s) = (\delta s)^{1/\delta}$ 关联 s 和 t。根据 $\mathcal{T}$ 的定义，

$$\frac{\mathcal{T}(s)x - x}{s} = \frac{\mathcal{S}_\delta(t)x - x}{\Psi(t)} = \frac{\mathcal{S}_\delta(t)x - x}{t^\delta/\delta}.$$

令 $s \to 0^+$ 等价于令 $t \to 0^+$。因此，定义 $\mathcal{B}x$ 的极限存在，当且仅当定义 $\mathcal{A}_\delta x$ 的极限存在，且两个极限相等。因此，在这个公共定义域上， $D(\mathcal{A}_\delta) = D(\mathcal{B})$ 以及 $\mathcal{A}_\delta x = \mathcal{B}x$。

重参数化下温和解的等价性

时间变换在两种温和形式之间建立了直接对应关系。

命题 6. 令 $x_0 \in X$，并设 $x(t) = \mathcal{S}_\delta(t)x_0$。定义

$$y(s) := x\big(\Psi^{-1}(s)\big) = x\big((\delta s)^{1/\delta}\big), \qquad s \geq 0.$$

则 $y(s) = \mathcal{T}(s)x_0$，因此 y 是由 $\mathcal{B}$生成的经典温和解。反之，若 $y(s) = \mathcal{T}(s)x_0$，则

$$x(t) := y(\Psi(t)) = y(t^\delta/\delta), \qquad t \geq 0,$$

满足 $x(t) = \mathcal{S}_\delta(t)x_0$，并且是相容温和解。

证明 7. 根据 $\mathcal{T}$ 的定义，

$$y(s) = x((\delta s)^{1/\delta}) = \mathcal{S}_\delta((\delta s)^{1/\delta})x_0 = \mathcal{T}(s)x_0.$$

对于逆向结论，从 $y(s) = \mathcal{T}(s)x_0$ 出发，并设 $s = \Psi(t)$:

$$x(t) = y(\Psi(t)) = \mathcal{T}(\Psi(t))x_0 = \mathcal{S}_\delta\big(\Psi^{-1}(\Psi(t))\big)x_0 = \mathcal{S}_\delta(t)x_0.$$

希尔伯特空间中的耗散性与预解式界

从现在起，我们假设 $X = H$ 是一个带有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和范数 $\|\cdot\|$ 的复希尔伯特空间。

定义 10（耗散算子与极大耗散算子）。稠定算子 $B : D(B) \subset H \to H$ 称为 耗散的 当且仅当

$$\Re\langle Bx, x\rangle \leq 0 \quad \textit{for all } x \in D(B).$$

若存在 $\lambda > 0$ 使得，则称其为极大耗散。

$$\mathrm{Ran}(\lambda I - B) = H.$$

引理 2。 假设 B 是耗散的。那么对于每个 $\lambda > 0$ 和 $x \in D(B)$，

$$\|(\lambda I - B)x\| \geq \lambda\|x\|.$$

因此，若 $\lambda I - B$ 是满射，则$(\lambda I - B)^{-1}$ 存在，并且

$$\|(\lambda I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

证明 8。 固定 $\lambda > 0$ 和 $x \in D（B）$。耗散性给出

$$\Re\langle(\lambda I - B)x, x\rangle = \lambda\|x\|^2 - \Re\langle Bx, x\rangle \geq \lambda\|x\|^2.$$

根据柯西–施瓦茨不等式，

$$\Re\langle(\lambda I - B)x, x\rangle \leq |\langle(\lambda I - B)x, x\rangle| \leq \|(\lambda I - B)x\|\,\|x\|.$$

结合这两个不等式可得 $\|(\lambda I - B)x\| \geq \lambda\|x\|$。如果 $\lambda I - B$ 是满射，那么该不等式意味着它是单射，进而是双射，并且其逆映射的界也随之成立。

共形时间中的 *Lumer–Phillips* 定理与生成性

我们回顾适用于本文需求的 Lumer–Phillips 刻画。

定理 2（Lumer–Phillips）。设 B 是 H 上的稠定算子。那么， B 在 H 上生成压缩 C_0–半群，当且仅当 B 是极大耗散的。

证明 *9.* 必要性。假设 B 生成压缩半群 $\{T(s)\}_{s\geq 0}$。对于 $x \in D(B)$，轨道 $s \mapsto T(s)x$ 可微且满足 $\frac{d}{ds}T(s)x = BT(s)x$，其中 $T(0)x = x$。令 $\phi(s) := \|T(s)x\|^2$。在 $s = 0$ 处求导，得到 $\phi'(0) = 2\Re\langle Bx, x\rangle$。由于 $\|T(s)\| \leq 1$，函数 ϕ 在 0 附近单调不增，因此 $\Re\langle Bx, x\rangle \leq 0$。此外，标准半群理论给出，对每个 $\lambda > 0$，$Ran(\lambda I - B) = H$，所以 B 是极大耗散的。

充分性。假设 B 是极大耗散的。那么 值域$(\lambda I - B) = H$ 对某个 $\lambda > 0$成立，而引理 *2* 给出预解算子估计 $\|(\lambda I - B)^{-1}\| \leq 1/\lambda$。由预解算子恒等式可知，对所有充分大的 λ，同一估计仍然成立；*Hille–Yosida* 定理表明， B 生成一个压缩 C_0–半群。

推论 1（共形压缩半群的生成）。设 $\mathcal{S}_\delta$ 是希尔伯特空间 H 上的一个 C_0–δ–半群，其 δ–生成元为 $\mathcal{A}_\delta$。假设 $\mathcal{A}_\delta$ 稠密定义、耗散，并且

$$\mathrm{Ran}(\lambda I - \mathcal{A}_\delta) = H \quad \textit{for some } \lambda > 0.$$

那么 $\mathcal{S}_\delta$ 是压缩的：

$$\|\mathcal{S}_\delta(t)\| \leq 1 \qquad \textit{for all } t \geq 0.$$

证明 10。令 $\mathcal{T}(s) = \mathcal{S}_\delta((\delta s)^{1/\delta})$。由引理 *1*， $\mathcal{T}$ 是一个经典 C_0–半群。令 $\mathcal{B}$ 为其生成元。由定理 *1*，

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_\delta \quad \textit{and} \quad D(\mathcal{B}) = D(\mathcal{A}_\delta).$$

因此， $\mathcal{B}$ 定义稠密、具有耗散性，并且满足值域$(\lambda I - \mathcal{B}) = H$。根据定理 *2*， $\mathcal{B}$ 生成一个压缩半群，因此 $\|\mathcal{T}(s)\| \leq 1$ 对所有 $s \geq 0$均成立。最后，

$$\mathcal{S}_\delta(t) = \mathcal{T}(\Psi(t)) = \mathcal{T}(t^\delta/\delta),$$

由此得到 $\|\mathcal{S}_\delta(t)\| \leq 1$ 对所有 $t \geq 0$均成立。

注 8. 推论 *1* 为希尔伯特空间中的共形柯西问题提供了一个便捷的稳定性判据。在应用中，通常通过将共形分部积分恒等式与 $H^1_{\delta,0}(\mathbb{R}_+)$中所包含的边界条件相结合，来获得耗散性。

5. 共形时间重参数化下的线性动力学

设 X 是一个可分巴拿赫空间，并固定 $\delta \in (0, 1]$。设 $\mathcal{S}_\delta = \{\mathcal{S}_\delta(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ 是第 C_0–δ 节意义下的半群。共形动力学的一个核心观点是，参数 t 不会产生新的轨迹：它只会改变给定轨道的运行速度。这一简单观察使我们能够在共形半群与经典半群之间转移基于轨道的性质（超循环性、周期点稠密性和混沌），并利用经典理论中已有的判据 [5, 11, 6]。尤其是，明确时间变换机制后，共形情形也满足 Desch–Schappacher–Webb 判据。

5.1. 共形时钟及其对应的经典半群定义共形时钟如下:

$$\Psi : [0,\infty) \to [0,\infty), \qquad \Psi(t) = \frac{t^{\delta}}{\delta}.$$

那么 Ψ 连续、严格递增且为满射，其反函数为

$$\Psi^{-1}(s) = (\delta s)^{1/\delta}, \qquad s \geq 0.$$

对于 $\mathcal{S}_\delta$ ，我们关联如下算子族

$$\mathcal{T}(s) := \mathcal{S}_\delta\big(\Psi^{-1}(s)\big) = \mathcal{S}_\delta\big((\delta s)^{1/\delta}\big), \qquad s \geq 0, \tag{2}$$

因此，等价地,

$$\mathcal{S}_\delta(t) = \mathcal{T}(\Psi(t)), \qquad t \geq 0. \tag{3}$$

引理 3. 族 $\{\mathcal{T}(s)\}_{s\geq 0}$ 是定义在 X 上的一个（经典） C_0–半群。

证明 11. （i）零点处的恒等性。由于 $\Psi^{-1}(0) = 0$ 且 $\mathcal{S}_\delta(0) = I$，我们得到 $\mathcal{T}(0) = \mathcal{S}_\delta(0) = I$。

（ii）半群律。令 $s, r \geq 0$ ，并设 $t_1 = \Psi^{-1}(s) = (\delta s)^{1/\delta}$ 以及 $t_2 = \Psi^{-1}(r) = (\delta r)^{1/\delta}$。则 $t_1^\delta = \delta s$ 和 $t_2^\delta = \delta r$，因此

$$\Psi^{-1}(s+r) = (\delta(s+r))^{1/\delta} = (t_1^\delta + t_2^\delta)^{1/\delta}.$$

利用 C_0–δ–半群的定义性复合规则,

$$\mathcal{S}_\delta\big((t_1^\delta + t_2^\delta)^{1/\delta}\big) = \mathcal{S}_\delta(t_1)\mathcal{S}_\delta(t_2),$$

我们得到

$$\mathcal{T}(s+r) = \mathcal{S}_\delta(\Psi^{-1}(s+r)) = \mathcal{S}_\delta(t_1)\mathcal{S}_\delta(t_2) = \mathcal{T}(s)\mathcal{T}(r).$$

(iii) 零点处的强连续性。 固定 $x \in X$。当 $s \to 0^+$, $\Psi^{-1}(s) = (\delta s)^{1/\delta} \to 0^+$ 时。由 $\mathcal{S}_\delta$ 在0处的强连续性,

$$\|\mathcal{T}(s)x - x\| = \|\mathcal{S}_\delta(\Psi^{-1}(s))x - x\| \longrightarrow 0.$$

因此， $\mathcal{T}$ 是一个 C_0–半群。

注9（轨道恒等式）。 由 (3) 以及 Ψ 是 $[0,\infty)$的双射这一事实，我们推知，对于每个 $x \in X$,

$$\{\mathcal{S}_\delta(t)x : \ t \geq 0\} = \{\mathcal{T}(s)x : \ s \geq 0\}.$$

因此，相容重参数化只改变轨道的参数化方式，而不改变沿轨道经过的点集。

5.2. 共形半群的轨道类型概念

现在我们介绍下文将用到的动力学概念。

定义11（δ–超循环性与 δ–混沌）。

1. 若存在 $x \in X$，使得轨道 $\{\mathcal{S}_\delta(t)x : t \geq 0\}$ 在 X 中稠密，则称半群 $\mathcal{S}_\delta$ 为 δ–超循环的。这样的 x 称为 δ–超循环向量。2. 若其为 δ–超循环的，且其 δ–周期点集

$$X_p^\delta := \{x \in X : \ \exists t > 0 \ such \ that \ \mathcal{S}_\delta(t)x = x\}$$

在 X 中稠密。

按照经典半群动力学框架的思路 [5], 我们也定义

$$X_0^\delta := \Big\{x \in X : \ \lim_{t\to\infty} \mathcal{S}_\delta(t)x = 0\Big\},$$

and

$$X_\infty^\delta := \Big\{x \in X : \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in X, \ t > 0 \text{ such that } \|y\| < \varepsilon \text{ and } \|\mathcal{S}_\delta(t)y - x\| < \varepsilon\Big\}.$$

集合 X_∞^δ 体现了从任意小的初始数据逼近任意目标状态的能力。

5.3. 动力学集合在共形时钟下的不变性

令 X_0, X_∞ 和 X_p 表示经典半群 $\mathcal{T}$的对应集合 :

$$\begin{aligned}
X_0 &= \Big\{x \in X : \lim_{s\to\infty} \mathcal{T}(s)x = 0\Big\},\\
X_\infty &= \Big\{x \in X : \forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in X, \ s > 0 : \|y\| < \varepsilon, \ \|\mathcal{T}(s)y - x\| < \varepsilon\Big\},\\
X_p &= \Big\{x \in X : \exists s > 0 \text{ with } \mathcal{T}(s)x = x\Big\}.
\end{aligned}$$

引理 4（动力学集合的不变性）。设 $\mathcal{T}$ 由 (2)定义，则有

$$X_0^\delta = X_0, \qquad X_\infty^\delta = X_\infty, \qquad X_p^\delta = X_p.$$

特别地， $\mathcal{S}_\delta$ 是 δ–超循环的（分别是 δ–混沌的），当且仅当 $\mathcal{T}$ 在经典意义下是超循环的（分别是混沌的）。

证明 12。我们利用 (3) 以及 Ψ 是 $[0,\infty)$ 到其自身的一个同胚这一事实。步骤 1:
的不变性。对于 $x \in X$,

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{S}_\delta(t)x = 0 \iff \lim_{t\to\infty} \mathcal{T}(\Psi(t))x = 0.$$

由于 $\Psi(t) \to \infty$ 当 $t \to \infty$ 且 $\Psi([0,\infty)) = [0,\infty)$，这等价于 $\lim_{s\to\infty} \mathcal{T}(s)x = 0$。因此$X_0^\delta = X_0$。

步骤 2：周期点的不变性。若 $x \in X_p^\delta$，则 $\mathcal{S}_\delta(t)x = x$ 对某个 $t > 0$成立，因此$\mathcal{T}(\Psi(t))x = x$ 且 $\Psi(t) > 0$，故 $x \in X_p$。反过来，若 $x \in X_p$，则存在 $s > 0$ 使得 $\mathcal{T}(s)x = x$；取 $t = \Psi^{-1}(s)$ 即可得到

$$\mathcal{S}_\delta(t)x = \mathcal{T}(\Psi(t))x = \mathcal{T}(s)x = x,$$

因此 $x \in X_p^\delta$。故 $X_p^\delta = X_p$。

步骤 *3*：X_∞^δ 的不变性。固定 $x \in X$ 和 $\varepsilon > 0$。假设 $x \in X_\infty^\delta$。则存在 $y \in X$ 和 $t > 0$，使得 $\|y\| < \varepsilon$ 且 $\|\mathcal{S}_\delta(t)y - x\| < \varepsilon$。由于 $\mathcal{S}_\delta(t) = \mathcal{T}(\Psi(t))$，我们得到 $\|\mathcal{T}(\Psi(t))y - x\| < \varepsilon$，因此 $x \in X_\infty$。反之，若 $x \in X_\infty$，则存在 $y \in X$ 和 $s > 0$，使得 $\|y\| < \varepsilon$且$\|\mathcal{T}(s)y - x\| < \varepsilon$。令 $t = \Psi^{-1}(s)$，得到

$$\|\mathcal{S}_\delta(t)y - x\| = \|\mathcal{T}(\Psi(t))y - x\| = \|\mathcal{T}(s)y - x\| < \varepsilon,$$

因此 $x \in X_\infty^\delta$。故 $X_\infty^\delta = X_\infty$。

步骤 4：超循环性与混沌。由注 *9* 可知，$\mathcal{S}_\delta$ 与 $\mathcal{T}$ 的轨道集相同，因此存在稠密轨道对于这两个族是等价的。结合 $X_p^\delta = X_p$，可得混沌等价。

5.4. 无穷小生成元与时间重参数化

设 $\mathcal{A}_\delta$ 表示 $\mathcal{S}_\delta$ 的 δ–生成元，并设 $\mathcal{B}$ 表示 $\mathcal{T}$ 的经典生成元。

引理 5（生成元的识别）。则有

$$D(\mathcal{A}_\delta) = D(\mathcal{B}), \qquad \mathcal{A}_\delta x = \mathcal{B}x \quad \textit{for all } x \in D(\mathcal{A}_\delta).$$

证明 13. 固定 $x \in X$，并通过 $s = \Psi(t) = t^\delta/\delta$ 将 s 与 t 联系起来，即 $t = \Psi^{-1}(s) = (\delta s)^{1/\delta}$。于是

$$\frac{\mathcal{T}(s)x - x}{s} = \frac{\mathcal{S}_\delta(t)x - x}{t^\delta/\delta}.$$

令 $s \to 0^+$ 等价于令 $t \to 0^+$，且差商在相应取值处一致。因此，定义 $\mathcal{B}x$ 的极限存在当且仅当定义 $\mathcal{A}_\delta x$ 的极限存在，并且二者在存在时取值相等。

注记 10. 引理 *5* 是轨道恒等式的无穷小对应。特别地，线性动力系统中所用的谱条件（例如出现在混沌判据中的那些）可针对 $\mathcal{A}_\delta$ 完全如同在经典生成元框架中那样加以验证。

5.5. 共形时间下的 *Desch–Schappacher–Webb* 判据

现在，我们将经典的 Desch–Schappacher–Webb [5] 定理通过共形时钟进行转换，从而为 C_0–δ–半群提出一个混沌性判据。

定理 3（Desch–Schappacher–Webb 判据：适用于 C_0–δ–半群）。设 X 为可分的，且 $\mathcal{S}_\delta$ 是定义在 X 上的 C_0–δ–半群，其 δ–生成元为 $\mathcal{A}_\delta$。假设存在：

- 一个开集 $V \subset \sigma_p(\mathcal{A}_\delta)$，使得 $V \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$;
- 对每个 $\lambda \in V$，存在一个满足 $\mathcal{A}_\delta x_\lambda = \lambda x_\lambda$的特征向量 $x_\lambda \in X \setminus \{0\}$；
- 对于每个 $\phi \in X^*$，标量映射 $\lambda \mapsto \langle \phi\, x_\lambda \rangle$ 在 V 上是解析的；

- 并且如果在 V 上有 $\langle \phi x_\lambda \rangle \equiv 0$，则 $\phi = 0$。

于是 $\mathcal{S}_\delta$ 是 δ–混沌的（因而是 δ–超循环的）。

证明 14。 令 $\mathcal{T}$ 由 (2) 定义。根据引理 3，$\mathcal{T}$ 是一个 C_0–半群；根据引理 5，其生成元与 $\mathcal{A}_\delta$ 一致（定义域相同）。因此，这些假设恰好满足经典 *Desch–Schappacher–Webb* 判据对 $\mathcal{T}$ [5]的要求。由此可知，$\mathcal{T}$ 在经典意义下是混沌的。

最后，引理 4 表明，稠密轨道的存在性和周期点稠密性在时钟变换 $s = \Psi(t)$ 下均保持不变。因此，$\mathcal{S}_\delta$ 是 δ–混沌的。

注 11（时钟变换的动力学意义）。 恒等式 $\mathcal{S}_\delta(t) = \mathcal{T}(\Psi(t))$ 意味着，基于轨道的性质仅取决于轨道集，因此在共形重参数化下保持不变。因此，可以利用$\mathcal{T}$ 的经典判据来检验 $\mathcal{S}_\delta$ 的混沌性（等价地，也可利用 $\mathcal{A}_\delta$的经典判据），反之亦然。

6. 应用

我们通过两个模型问题来说明抽象结果。这两个例子依赖于同一结构机制：定义在加权空间上的共形演化，可以通过对空间变量进行非线性变换，化归为经典演化。在我们的设定中，这种化归通过酉映射 U （下文将介绍）实现，它将加权空间与标准 L^2 空间对应起来。因此，相容解算子不仅是第2节意义下的共形半群，而且与经典 C_0–半群共轭。对于基于轨道的动力系统而言，这一点至关重要：稠密轨道和周期点在此类共轭变换下保持不变，因此共形半群的混沌性可直接从经典半群继承，例如可借助 Desch–Schappacher–Webb 理论 [5]。

6.1. $X^\delta = L^2$上的相容扩散-输运流，$^\delta(0,1)$

固定 $\delta \in (0,1]$。我们用 ∂_x^δ 表示关于空间变量$x > 0$的相容导数，即

$$\partial_x^\delta u(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u\big(x + \varepsilon x^{1-\delta}\big) - u(x)}{\varepsilon},$$

只要极限存在。对于 $u \in C^1((0,1))$，该导数是局部的，并满足逐点表示（参见 [7, 1, 2]）

$$\partial_x^\delta u(x) = x^{1-\delta} u'(x), \qquad x \in (0,1). \tag{4}$$

我们在相容勒贝格空间上进行研究

$$X^\delta := L^{2,\delta}(0,1) = \Big\{ f : (0,1) \to \mathbb{C} : \int_0^1 |f(x)|^2 \, x^{\delta-1} \, dx < \infty \Big\},$$

赋予范数$\|f\|_{X^\delta}^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 x^{\delta-1}\, dx$.这是与相容权 $x^{\delta-1}dx$相关联的自然希尔伯特框架。

引理 6（空间时钟变换与酉传递）。定义变量替换

$$\xi = x^{\delta} \in (0,1), \qquad x = \xi^{1/\delta},$$

以及线性映射 $U:\ X^{\delta} \to L^2(0,1)$ 由

$$(Uf)(\xi) := \delta^{-1/2}\, f(\xi^{1/\delta}), \qquad \xi \in (0,1).$$

那么 U 是酉的。特别地，对于每个 $f \in X^{\delta}$，

$$\int_0^1 |f(x)|^2\, x^{\delta-1}\, dx = \int_0^1 |(Uf)(\xi)|^2\, d\xi. \tag{5}$$

此外，若 $u(\cdot,t)$ 足够光滑，并令

$$w(\xi,t) := u(\xi^{1/\delta},t),$$

那么对每个 $t \geq 0$ 以及每个 $\xi \in (0,1)$，

$$\partial_x^{\delta} u(\xi^{1/\delta},t) = \delta\, \partial_{\xi} w(\xi,t), \qquad \partial_x^{\delta}\big(\partial_x^{\delta} u\big)(\xi^{1/\delta},t) = \delta^2\, \partial_{\xi\xi} w(\xi,t). \tag{6}$$

证明 15。 酉性。 取 $\xi = x^{\delta}$，有 $d\xi = \delta x^{\delta-1}\, dx$，因此 $x^{\delta-1}\, dx = \delta^{-1} d\xi$。所以，对于$f \in X^{\delta}$，

$$\|f\|_{X^{\delta}}^2 = \int_0^1 |f(x)|^2\, x^{\delta-1}\, dx = \frac{1}{\delta}\int_0^1 \left|f(\xi^{1/\delta})\right|^2 d\xi = \int_0^1 \left|\delta^{-1/2} f(\xi^{1/\delta})\right|^2 d\xi = \|Uf\|_{L^2(0,1)}^2,$$

这就证明了 (5)并表明 U 是一个等距映射。其逆映射是显式的：

$$(U^{-1}g)(x) = \delta^{1/2}\, g(x^{\delta}), \qquad x \in (0,1),$$

因此 U 是满射，故为酉算子。

导数恒等式。设 $u(\cdot,t) \in C^1((0,1))$ 并定义 $w(\xi,t) = u(\xi^{1/\delta},t)$。由于 $x = \xi^{1/\delta}$，

$$\partial_{\xi} x = \frac{1}{\delta}\xi^{\frac{1}{\delta}-1} = \frac{1}{\delta} x^{1-\delta}.$$

根据链式法则，

$$\partial_{\xi} w(\xi,t) = u_x(x,t)\, \partial_{\xi} x = u_x(\xi^{1/\delta},t)\, \frac{1}{\delta}\, x^{1-\delta}.$$

利用 (4)可推得

$$\partial_x^{\delta} u(\xi^{1/\delta},t) = x^{1-\delta} u_x(\xi^{1/\delta},t) = \delta\, \partial_{\xi} w(\xi,t),$$

这就是 (6)中的第一个恒等式。再应用一次相同的论证，即可得到第二个恒等式。

命题 7（共形生成元与经典生成元的酉等价）。设 $a,b,c>0$。考虑算子 A_{δ} 在 X^{δ} 上定义如下：

$$(A_{\delta} f)(x) := a\, \partial_x^{\delta}\big(\partial_x^{\delta} f\big)(x) + b\, \partial_x^{\delta} f(x) + c\, f(x), \qquad x \in (0,1),$$

定义域为

$$D(A_{\delta}) := \Big\{ f \in X^{\delta} :\ f,\ \partial_x^{\delta} f,\ \partial_x^{\delta}(\partial_x^{\delta} f) \in X^{\delta},\ \textit{and}\ \lim_{x \downarrow 0} f(x) = 0 \Big\}.$$

~定义经典算子 A 于 $L^2(0,\ 1)$ 上为

$$(\widetilde{A}g)(\xi) := \widetilde{a}\, g''(\xi) + \widetilde{b}\, g'(\xi) + c\, g(\xi), \qquad \widetilde{a} := a\delta^2, \quad \widetilde{b} := b\delta,$$

定义域为

$$D(\widetilde{A}) := \{g \in W^{2,2}(0,1) :\ g(0) = 0\}.$$

Th在自然核心上，其中逐点计算是有依据的，有一 s

$$\widetilde{A} = U A_\delta U^{-1}. \tag{7}$$

~特别地，如果 A 生成经典的 C_0–半群 $\{S\ (t)\ \}_{t\geq 0}$ 在 L^2（0，1）上，那么 A_δ 生成一个共形半群 $\mathcal{S}_\delta = \{\mathcal{S}_\delta\ (t)\ \}_{t\geq 0}$ 在 X^δ 上，其定义为

$$\mathcal{S}_\delta(t) = U^{-1} S(t) U, \qquad t \geq 0.$$

证明 16。设 $g \in D$（$\widetilde{A}$）并令 $f = U^{-1}g$，即 f（x）$= \delta^{1/2} g$（x^δ）。记 $\xi = x^\delta$，于是 f（x）$=\delta^{1/2} g$（ξ）。由引理 *6*，

$$\partial_x^\delta f(x) = \delta^{3/2} g'(\xi), \qquad \partial_x^\delta\big(\partial_x^\delta f\big)(x) = \delta^{5/2} g''(\xi).$$

因此，

$$(A_\delta f)(x) = \delta^{1/2}\Big((a\delta^2) g''(\xi) + (b\delta) g'(\xi) + c\, g(\xi)\Big).$$

应用 U并利用 （Uf）（ξ）$= \delta^{-1/2} f$（$\xi^{1/\delta}$）可得

$$(U A_\delta U^{-1} g)(\xi) = (a\delta^2) g''(\xi) + (b\delta) g'(\xi) + c\, g(\xi) = (\widetilde{A} g)(\xi),$$

这证明了(7)。半群关系可由酉等价下的标准对应关系得出（例如，参见 *[6, 11]*）。

定理 4（共形扩散–输运半群的混沌性）。考虑定义在(0,1)上的共形漂移–扩散方程

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = a\, \partial_x^\delta\big(\partial_x^\delta u\big)(x,t) + b\, \partial_x^\delta u(x,t) + c\, u(x,t), & x \in (0,1),\ t \geq 0, \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,1), \end{cases} \tag{8}$$

其中 $f \in X^\delta = L^{2,\ \delta}(0,1)$ 且参数 a、b、$c > 0$ 满足

$$c < \frac{b^2}{2a} < 1.$$

设 A_δ 如命题7中所述，并设 $\mathcal{S}_\delta = \{\mathcal{S}_\delta(t)\}_{t\geq 0}$ 为定义在 X^δ 上、由 A_δ生成的共形半群。则 $\mathcal{S}_\delta$ 在 X^δ上是混沌的。特别地，存在 $f \in X^\delta$ 使得轨道 $\{\mathcal{S}_\delta(t) f :\ t \geq 0\}$ 在 X^δ中稠密，并且 $\mathcal{S}_\delta$ 的周期点集在 X^δ中稠密。

此外，在空间变量变换 $\xi = x^\delta$和 $w(\xi,t)\ = u(\xi^{1/\delta}, t)$下，方程(8)的温和解满足

$$u(\cdot,t) = \mathcal{S}_\delta(t) f \quad \Longleftrightarrow \quad w(\cdot,t) = S(t)\,(Uf),$$

~其中，$\{S(t)\}$ 是由 A 在 $L^2(0,1)$ 上生成的经典 C_0–半群。

证明 17。 步骤 1：化归为经典演化。 设 u 具有足够的正则性，并定义$w(\xi,t) = u(\xi^{1/\delta},t)$ 其中 $\xi = x^{\delta}$。引理 6推出 (6)，因此 (8) 等价于

$$\partial_t w(\xi,t) = (a\delta^2)\,\partial_{\xi\xi} w(\xi,t) + (b\delta)\,\partial_{\xi} w(\xi,t) + c\,w(\xi,t), \qquad \xi \in (0,1),\ t \geq 0,$$

在 $w(0,t) = 0$和 $w(\cdot,0) = Uf$。

~步骤 2：经典图景中的混沌性。 设 A 如命题 7所述。在漂移–扩散条件

$$c < \frac{\widetilde{b}^2}{2\widetilde{a}} < 1,$$

~由 A 生成的经典半群是混沌的；这可由 *Desch–Schappacher–Webb* 型判据 [5]推出。由于

$$\frac{\widetilde{b}^2}{2\widetilde{a}} = \frac{(b\delta)^2}{2(a\delta^2)} = \frac{b^2}{2a},$$

我们的假设 $c < \frac{b^2}{2a} \leqslant 1$ 恰好满足所需条件，因此 $\{S(t)\}$ 是混沌的。

步骤 3：转移到共形半群。 根据命题 7,

$$\mathcal{S}_{\delta}(t) = U^{-1} S(t) U, \qquad t \geq 0.$$

由于 U 是酉的，它保持集合的稠密性，并将周期点映射为周期点。因此， $\{S(t)\}$ 的混沌性意味着 $\mathcal{S}_{\delta}$ 在 X^{δ}上的混沌性。

最后，温和解对应恰好就是交织恒等式 $U(\mathcal{S}_{\delta}(t)f) = S(t)(Uf)$，这等价于 $w(\cdot,t) = S(t)(Uf)$，其中 $w(\xi,t) = u(\xi^{1/\delta},t)$。

注 12。 在此例中，经过空间时钟 $\xi = x^{\delta}$ 变换后，共形漂移–扩散算子成为经典算子。重新缩放 $(a,b) \mapsto (a\delta^2, b\delta)$ 使比值 $\frac{b^2}{2a}$ 保持不变，这解释了为何同一个不等式能够控制两种表述中的混沌性。

6.2. 共轭原理：将混沌从 $L^2(0,1)$ 传递到 X^{δ}

定理 4 基于两个结构性事实： (i) 空间时钟 $\xi = x^{\delta}$ 在 X^{δ} 和 $L^2(0,1)$ 之间建立酉等价（引理 6）； (ii) 共形生成元 A_{δ} 与经典漂移–扩散算子酉等价 ~（命题 A 7）。综合这两点可知，两个半群由一个同胚交织；因此，基于轨道的性质在此共轭下保持不变。我们将这一推论单独表述，以便在其他共形模型中重复使用。

定理 5（酉空间等价下的混沌性传递）。 固定 $\delta \in (0,1]$ 并假设命题7中的设定成立。设 $U : X^{\delta} \to L^2(0,\ 1)$ 为引理6中定义的酉算子，并假设

$$\widetilde{A} = U A_{\delta} U^{-1}. \tag{9}$$

~记 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 为由 A 在 $L^2(0,1)$上生成的 C_0–半群，记 $\mathcal{S}_{\delta} = \{\mathcal{S}_{\delta}(t)\}_{t\geq 0}$ 为由 A_{δ} 在 X^{δ}上生成的共形半群。则有以下结论。

1.（半群共轭）对于每一个 $t \geq 0$,

$$\mathcal{S}_{\delta}(t) = U^{-1} S(t) U, \qquad \textit{equivalently} \qquad U\mathcal{S}_{\delta}(t) = S(t)U. \tag{10}$$

2.（轨道对应）对于每个 $f \in X^\delta$,

$$U\big(\{\mathcal{S}_\delta(t)f : \ t \geq 0\}\big) = \{S(t)(Uf) : \ t \geq 0\},$$

因此

$$\overline{\{\mathcal{S}_\delta(t)f : \ t \geq 0\}} = X^\delta \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\{S(t)(Uf) : \ t \geq 0\}} = L^2(0,1).$$

3.（周期点）令

$$\mathrm{Per}(\mathcal{S}_\delta) = \{f \in X^\delta : \ \exists t_0 > 0 \ \textit{such that} \ \mathcal{S}_\delta(t_0)f = f\},$$
$$\mathrm{Per}(S) = \{g \in L^2(0,1) : \ \exists t_0 > 0 \ \textit{such that} \ S(t_0)g = g\}.$$

于是 $U(\mathrm{Per}(\mathcal{S}_\delta)) = \mathrm{Per}(S)$，因此

$$\overline{\mathrm{Per}(\mathcal{S}_\delta)} = X^\delta \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\mathrm{Per}(S)} = L^2(0,1).$$

4.（混沌性传递）若 $\{S(t)\}$ 在 $L^2(0,1)$ 上是混沌的（例如，在定理4中采用的漂移–扩散机制下，通过 *Desch–Schappacher–Webb*型判据可保证这一点 [5]），则 $\mathcal{S}_\delta$ 在 X^δ上是混沌的。

证明 18.定义 $\widehat{S}(t) := U^{-1}S(t)U$于 X^δ 上。于是 $\{\widehat{S}(t)\}$是 C_0–半群，且对于$f \in D(A_\delta)$,

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\widehat{S}(t)f - f}{t} = U^{-1}\widetilde{A}(Uf) = A_\delta f,$$

^利用(9)。因此 $\{S(t)\}$ 由 A_δ生成。根据具有给定生成 C_0元的–半群的唯一性，得到 $S(t) = \mathcal{S}_\delta(t)$，从而证明了(10)。

轨道和周期点之间的对应关系可通过将 U 应用于恒等式 $\mathcal{S}_\delta(t) = U^{-1}S(t)U$以及 $U\mathcal{S}_\delta(t) = S(t)U$得到。由于 U是酉的，它保持闭包性和稠密性，因此得到结论（*2*）–（*3*）。最后，混沌性是超循环性与周期点稠密性的合取，因此结论（*4*）立即成立。

注 13。 定理 5 提供了一个可重复使用的模板：只要共形生成元能够通过酉共轭（或更一般的拓扑共轭）约化为经典生成元，轨道型动力性质就会自动传递到共形半群。

6.3. 加权空间上的共形输运模型：约化为平移及其动力学后果

在本小节中，我们将展示共形演化问题

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_x^\alpha u(t,x), \quad t,x \in \mathbb{R}_+, \\ u(0,x) = f(x), \end{cases} \tag{11}$$

通过对空间变量进行非线性变换，可以将其显式化为经典平移半群。因此，解半群基于轨道的动力学性质（超循环性和Devaney混沌）继承自适当加权空间上平移的良好理解的动力系统。

函数空间框架。 令 $\alpha \in (0,1]$，并令 $\rho_\alpha\colon \mathbb{R}_+ \to (0,\ \infty)$ 为一个权。我们在巴拿赫空间上工作

$$\widetilde{X} \in \Big\{ C_{0,\rho_\alpha}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}),\ L^p_{\rho_\alpha}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C})\ (1 \le p < \infty) \Big\},$$

配备标准加权范数。在本小节中，∂_x^α 表示关于 x 的共形导数，其定义见第 2节。特别地，对于 $v \in C^1((0,\infty))$,

$$\partial_x^\alpha v(x) = x^{1-\alpha} v'(x), \qquad x > 0. \tag{12}$$

非线性空间时钟

定义共形空间时钟

$$\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \qquad \psi(x) := \frac{x^\alpha}{\alpha}. \tag{13}$$

则 ψ 是一个从 $\mathbb{R}_+$ 到其自身的 C^1–微分同胚，其逆为

$$\psi^{-1}(\xi) = (\alpha\xi)^{1/\alpha}, \qquad \xi \ge 0.$$

给定一个足够正则的解 $u(t,x)$，满足 (11)，定义

$$w(t,\xi) := u\big(t, \psi^{-1}(\xi)\big), \qquad t,\xi \ge 0. \tag{14}$$

利用 (12) 直接应用链式法则计算可得

$$\partial_\xi w(t,\xi) = \partial_x^\alpha u\big(t, \psi^{-1}(\xi)\big),$$

s因此，方程 $\partial_t u = \partial_x^\alpha u$ 等价于经典输运方程

$$\partial_t w(t,\xi) = \partial_\xi w(t,\xi), \qquad t,\xi \ge 0, \tag{15}$$

其中 $w(0,\xi) = (Qf)(\xi)$，其中 Q 是下文引入的复合算子。方程 (15) 由平移求解:

$$w(t,\xi) = w(0,\xi + t), \qquad t,\xi \ge 0. \tag{16}$$

与平移半群的共轭

令 $\widetilde{\rho}_\alpha$ 为如下定义的输运权

$$\widetilde{\rho}_\alpha(\xi) := \rho_\alpha\big(\psi^{-1}(\xi)\big), \qquad \xi \ge 0. \tag{17}$$

考虑线性映射

$$Q : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}, \qquad (Qf)(\xi) := f\big(\psi^{-1}(\xi)\big), \tag{18}$$

~其中 Y 表示相应的加权空间（变量为 ξ）：

$$\widetilde{Y} \in \Big\{ C_{0,\widetilde{\rho}_\alpha}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}),\ L^p_{\widetilde{\rho}_\alpha}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C})\ (1 \le p < \infty) \Big\}.$$

~设 $\{W(t)\}_{t\ge 0}$ 是 Y 上的经典平移半群，

$$(W(t)g)(\xi) := g(\xi + t), \qquad \xi, t \ge 0, \tag{19}$$

~并在 X 上定义 $\{S_\alpha(t)\}_{t\ge 0}$ 为

$$(S_\alpha(t)f)(x) := f\big(\psi^{-1}(\psi(x) + t)\big), \qquad x, t \ge 0. \tag{20}$$

则 $u(t,\cdot) = S_\alpha(t) f$ 是 (11) 的（温和）解。

~**命题 8（显式解半群与共轭）**。 设 $\alpha \in (0,1]$，且设 X 如上所述。~则 $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ 在 X 上定义了一个强连续半群，并且满足

$$Q\,S_\alpha(t) = W(t)\,Q, \qquad t \geq 0, \tag{21}$$

等价地，

$$S_\alpha(t) = Q^{-1}W(t)Q, \qquad t \geq 0. \tag{22}$$

~特别地，对于每个 $f \in X$，

$$Q\big(\{S_\alpha(t)f : \ t \geq 0\}\big) = \{W(t)(Qf) : \ t \geq 0\}.$$

~**证明 19.** 设 $f \in X$ 且 $\xi \geq 0$。利用 (20) 和 (18)，

$$\begin{aligned}(QS_\alpha(t)f)(\xi) &= (S_\alpha(t)f)\big(\psi^{-1}(\xi)\big)\\ &= f\Big(\psi^{-1}\big(\psi(\psi^{-1}(\xi)) + t\big)\Big)\\ &= f\big(\psi^{-1}(\xi + t)\big)\\ &= (Qf)(\xi + t)\\ &= (W(t)Qf)(\xi),\end{aligned}$$

由此得到 (21)，进而得到 (22)。强连续性由 $\{W(t)\}$ 的强连续性以及 Q的有界性得出，Q^{-1}。

推论 2（基于轨道的动力学的不变性）。在上述记号下，以下条件等价：

~1. $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ 在 X上是超循环（分别地，混沌）的；
~2. $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ 在 Y上是超循环（分别地，混沌）的。

~此外，对于 $\{S_\alpha(t)\}$，$f \in X$ 是超循环的，当且仅当对于 $\{W(t)\}$，Qf 是超循环的；周期点也有相同的对应关系。

证明 20。 映射 Q 是一个同胚，并且 (21) 将 $\{S_\alpha(t)\}$ 的轨道映到 $\{W(t)\}$的轨道上。因此，轨道稠密性和周期点稠密性在 Q 下保持不变。

注 14。 推论 *2* 将（*11*）的基于轨道的动力系统归约为输运空间上的平移半群。因此，针对加权空间上平移的判据（以 $\widetilde{\rho}_\alpha$的渐近行为表示）可以通过 ρ_α 借助 (17)传回原权。

结论

本文表明，共形时间演化完全可以在经典C_0–半群框架内理解。关键在于，对于固定阶数 $\delta \in (0,1]$, ，相容导数具有局部性，并且作用于光滑函数时可化为加权经典导数。这种局部性带来了刚性的结构机制：每个 C_0–δ–半群 $\mathcal{S}_\delta$ 恰好都是经典 C_0–半群$\mathcal{T}$经由非线性时间变换 $\Psi(t) = t^\delta/\delta$观察到的结果，即

$$\mathcal{S}_\delta(t) = \mathcal{T}(\Psi(t)).$$

这种对应关系并非徒具形式。我们证明了 δ–生成元与 $\mathcal{S}_\delta$ 的生成元在相同定义域上重合，并且相容温和解与经典温和解在 $s = \Psi(t)$下存在一一对应关系。此外，由共形积分诱导、基于测度 $t^{\delta-1}\,dt$的函数空间框架并未引入真正全新的尺度：通过同一变量替换，共形勒贝格空间与索伯列夫空间可明确地（且在相关表述中等距地）等价于相应的经典空间。这一识别使得估计结果和适定性结论能够直接迁移，其中也包括通过 Lumer–Phillips定理得到的希尔伯特空间中的生成性结论。

一个重要的动力学结论是，共形重参数化不会产生新的轨迹，只会改变轨道运行的速度。因此，基于轨道的性质保持不变。我们证明， $\mathcal{S}_\delta$ 的 δ–超循环性和 δ–混沌性分别与 $\mathcal{T}$的经典概念一致，并通过时钟关系将经典定理迁移过来，推导出了共形Desch–Schappacher–Webb准则。论文最后部分展开的应用进一步凸显了这一迁移原理：经过适当的空间变量非线性变换后，共形生成元与经典的漂移–扩散生成元或平移生成元酉等价，因此无需新的谱计算，即可根据已知结果直接得出其具有混沌性。

总的来说，这些结果阐明了共形模型在半群理论中的概念地位。与记忆效应本质内在的非局部小数阶动力学不同，共形演化仍是局部的，其“分数阶”特性完全由确定性的变量变换所体现。从实践角度看，这提供了一套系统方法：只要能通过显式的时间或空间时钟将共形问题化约为经典问题，就可以直接借用相应的定性性质和动力学判据。自然的后续研究方向包括将共轭原理推广到更广泛的权函数和边界条件类别，研究扰动下的稳健性，以及确定在哪些情形下需要加入额外的建模特征（例如真正的非局部项），才能产生超越纯粹重参数化效应的动力学。

参考文献

[1] T. Abdeljawad，论相容分数阶微积分，计算与应用数学杂志 **279** (2015), 57– 66.[2] T. Abdeljawad 和 M. Al Horani，具有相容分数阶导数的分数阶微积分，混沌、孤子与分形 **89** (2016), 1–5.[3] T. Abdeljawad、M. Al Horani 和 R. Khalil，算子分数阶半群，半群理论与应用杂志 **2015**, Article ID 7 (2015).[4] R. A. Adams 和 J. J. F. Fournier，索伯列夫空间，第 2 版，学术出版社，阿姆斯特丹 (2003).[5] W. Desch、W. Schappacher 和 G. F. Webb，线性算子的超循环与混沌半群，遍历理论与动力系统 **17** (1997), 793–819.[6]K.-J. Engel 和 R. Nagel，线性演化方程的一参数半群，施普林格，纽约 (2000).[7] R. Khalil、M. A. Horani、A. Yousef 和 M. Sababheh，分数阶导数的新定义，计算与应用数学杂志 **264** (2014), 65–70.

[8] A. A. Kilbas、H. M. Srivastava 和 J. J. Trujillo，分数阶微分方程理论与应用，爱思唯尔，阿姆斯特丹 (2006).[9] A. Kufner、O. John 和 S. Fuˇc´ık，函数空间，Noordhoff International Publishing，莱顿 (1977).[10] F. Mainardi，分数阶微积分和线性黏弹性中的波，Imperial College Press，伦敦 (2010).[11] A. Pazy，线性算子半群及其在偏微分方程中的应用，施普林格，纽约 (1983).[12] J. Pr¨uss，演化积分方程及其应用，Birkhäuser，巴塞尔 (1993).[13] V. E. Tarasov，无非局部性，无分数阶导数，《非线性科学与数值模拟通讯》 **62** (2018), 157–163.[14] Y. Wang、J. Zhou 和 Y. Li，通过相容分数阶微积分研究时间尺度上的分数阶 Sobolev 空间及其在时间尺度上分数阶微分方程中的应用，《数学物理进展》 **2016**, Article ID 9636491 (2016).