arXiv:2602.06784v1 [math.RT] 6 Feb 2026

非对称移位算子及其 q 类比的初等方法

MAX VAN HORSSEN 与 MAARTEN VAN PRUIJSSEN

Abstract. 我们给出非对称 Heckman–Opdam 多项式与非对称 Macdonald–Koornwinder 多项式的移位算子的代数构造。对有限 Weyl 群的每一个线性特征，我们关联前向和后向移位算子，它们是与（Dunkl–）Cherednik 算子满足某些变换关系的微分-反射算子和差分-反射算子。在 Heckman–Opdam 情形下，该构造恢复了 Opdam 与 Toledano Laredo 针对符号特征的非对称移位算子。此外，在秩一情形下，我们恢复了作者与 Schl¨osser 先前得到的秩一非对称移位算子。

1. Introduction

1.1. 背景。 Heckman–Opdam [8] 与 Macdonald–Koornwinder [13, 16]多项式是对称函数与正交多项式的深远推广，包括 Schur 函数、Jack 多项式和 Askey–Wilson 多项式。这些多项式具有一个显著特征：它们是由微分（或差分）算子构成的交换代数的共同特征函数。这一性质从根本上将它们与 Calogero–Moser–Sutherland 型完全可积系统联系起来。这些多项式附属于（仿射）根系对与根重数，并在 Macdonald–Koornwinder 情形中伴随一个变形参数 q。对于特殊参数，这些多项式表现为（量子）紧对称对上的 zonal 球函数，参见例如 [9, 14]。

1982年，Macdonald [15] 提出了著名的常数项猜想，推广了Dyson和Mehta此前提出的猜想；五年后，他 [16] 又猜想出了多项式的范数和求值的显式公式。这些猜想对该理论产生了深远影响。在随后的几年中，几位作者借助根系的分类建立了部分结果。对于经典情形，Opdam [23] 给出了这些猜想的统一解决方案，其基础是他与Heckman合作开展的关于（超几何）移位算子的工作。Cherednik [4] 通过引入 q模拟移位算子推广了这些技术，从而解决了 q情形下的猜想。

移位算子因其定义性质而得名：它会改变多项式的根重数。起初，移位算子的存在性仅针对低秩根系 [21] 以特设方式得到，而一般情形则依赖超越方法 [22]。Dunkl 发现，在有理情形下存在一族彼此可交换、且在 Weyl 群作用下保持等变的微分-反射算子，此后这一状况发生了巨变。Heckman [6]利用 Dunkl 算子的三角函数类比，提出了一种构造移位算子的初等代数方法，同时也构造出以 Heckman–Opdam 多项式为特征函数的微分算子。这些 Dunkl–Heckman 算子在 Weyl 群作用下仍保持等变；然而，它们不再保持彼此可交换的性质。

Date: 2026年2月9日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 33D80、33C52、33D52。
Key words and phrases. 移位算子、赫克代数、与根系相关的正交多项式。

Cherednik [2], 提出了另一种三角函数类比，即所谓的 Dunkl–Cherednik 算子；这种算子以放弃 Weyl 群等变性为代价，保留了彼此可交换的性质。随着这一进展，（仿射）赫克代数的表示论也被纳入研究视野，后来又扩展到著名的双仿射 Hecke 代数 [4]。此外，这些算子彼此可交换，因此可以研究其共同特征函数，从而得到 Heckman–Opdam [24] 多项式以及 Macdonald–Koornwinder [17, 27] 多项式的非对称类比。

一个自然的问题是，类似的移位算子是否也存在于非对称多项式中。最早考虑这类所谓非对称移位算子的是 Opdam 和 Toledano Laredo；他们宣布了非对称 Heckman–Opdam 多项式的（前向和后向）移位算子的存在性。他们的方法本质上是超越性的，因为它依赖于 Paley–Wiener 型定理 [24, Thm.8.6]。与此同时，作者与 Schl¨osser [10, 11] 研究了秩一非对称移位算子，并将其与矩阵值 Jacobi[1] 多项式及 Askey–Wilson 多项式的移位算子联系起来。这些方法是代数性的，尽管显然局限于秩一情形；它们确立了前向、后向及邻接型非对称移位算子的存在性。

1.2. **主要结果**。 本文提出一种初等代数方法，用于构造非对称 Heckman–Opdam 多项式和 Macdonald–Koornwinder 多项式的（非对称）移位算子。该方法的核心是移位原理，其思路与 Heckman 构造对称移位算子的方法一致。

下面我们详细阐述主要结果。为此，我们简要介绍一些必要的符号。第 2.1–2.4 节（Heckman–Opdam）和第 4.1–4.3 节（Macdonald–Koornwinder）对定义和符号作了全面说明。

令 $E_\mu(k)$ 表示与根系 R 及其根重数 k相关、以 R的权格 P 为指标的非对称 Heckman–Opdam 多项式。我们将这些多项式视为 P的群代数 $\mathbb{C}[P]$ 中的元素。Dunkl–Cherednik 算子 $T_\xi(k)$ 是微分反射算子，即由方向导数和反射构成、作用于 $\mathbb{C}[P]$ 上的算子，其指标由向量空间 $\mathfrak{h}$给出。

定义 1.1. 若微分-反射算子 $\mathcal{S}(k)$ 满足以下关于 Dunkl– Cherednik 算子的变换性质，则称其为带有移位 l、根重数为 a 的非对称移位算子：

$$\mathcal{S}(k)T_\xi(k) = T_\xi(k+l)\mathcal{S}(k), \qquad \xi \in \mathfrak{h}.$$

根据变换性质，算子 $\mathcal{S}(k)$ 将 $T_\xi(k)$ 的特征函数映射为 $T_\xi(k+l)$ 的特征函数。因此，对于 $\mu \in P$，有 $\mathcal{S}(k)E_\mu(k) = \mathcal{H}(\mu,\ k)E_\nu(k+l)$，其中某个 $\nu \in P$ 和常数 $\mathcal{H}(\mu,\ k)$ 满足该关系；我们将此常数称为移位因子。

基本平移 l 是重数，在 R 中的某些 Weyl轨道上取值为 1 或 0。这些重数对应于 R 的 Weyl 群 W 的线性特征标。具体而言，与特征 ε对应的重数 l 定义为

$$l(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{if } \varepsilon(r_\alpha) = -1; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

如 [18, §5.5], 所述，若 R 是单纯有向的，例如 R 属于 A_n 类型，则只有两个特征：平凡特征和符号特征；否则有四个特征，例如当 R 属于 BC_n类型时。

此时，我们可以在 Heckman–Opdam框架中陈述主要结果。

[1]（非）对称Heckman–Opdam多项式常被称为（非）对称Jacobi多项式。我们将“Jacobi”这一名称保留用于经典正交多项式及其非对称类比。

定理 A (参见定理 3.15)。 对于 W 的每个线性特征 ε ，都存在带有移位 $\pm l$ 的非对称移位算子 $\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)$，即

$$\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)T_{\xi}(k) = T_{\xi}(k \pm l)\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k), \qquad \xi \in \mathfrak{h},$$

这称为 ε 向前/向后的非对称移位算子。这些算子将非对称 Heckman–Opdam 多项式的重数移位 $\pm l$:

$$\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)E_{\mu}(k) = \mathcal{H}_{\pm}^{(\varepsilon)}(\mu, k)E_{\mu_{\varepsilon,\pm}}(k \pm l), \qquad \mu \in P,$$

对于某些显式的移位因子 $\mathcal{H}_{\pm}^{(\varepsilon)}(\mu,\ k)$，见推论 3.14；权 $\mu_{\varepsilon,\ \pm} \in P$ 的定义见第 3.1 节。

对于符号特征，算子 $\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)$ 与 $[26,\ §8]$ 中的向前/向后非对称移位算子相同。在秩一情形，即当 R 属于 BC_1 类型时，我们得到 $[10],$ 中的向前/向后非对称移位算子，见例 3.17。

算子 $\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)$ 的构造受到 Felder 和 Veselov $[5]$ 为 Knizhnik–Zamolodchikov（KZ）方程构造移位算子的启发。他们的方法依赖于 Matsuo–Cherednik 对应 $[3,\ 19],$ ，该对应建立了（ε-）对称 Heckman–Opdam 多项式与 KZ 方程多项式解之间的对应关系。这些 KZ 方程的解等价于非对称 Heckman–Opdam 多项式。因此，他们的构造为这些多项式给出了一个移位算子；然而，由于它依赖于谱参数，该算子并非微分-反射算子。第 2.6 节将更详细地讨论这一构造及其障碍。通过解决由谱参数依赖性引起的障碍，我们确立了构造非对称移位算子的代数方法。

现在我们转向 Macdonald–Koornwinder 框架中的主要结果。对于以格 L 为指标的非对称多项式，我们沿用记号 $E_{\mu}(k)$。这些多项式与一对仿射根系 (S, S')、一对根重数 (k, k') 以及变形参数 q 相关。我们将这些多项式视为群代数 $K[L]$ of L over a certain subfield $K$of $\mathbb{R}$ 的元素。Cherednik 算子 $Y^{\lambda'}(k)$ 是差分-反射算子，即由差分算子和反射构成、作用于 $K[L]$ 上的算子，其指标由格 L' 给出。

定义 1.2. 若差分-反射算子 $\mathcal{S}(k)$ 满足以下关于 Cherednik 算子的变换性质，则称其为具有移位 $l^{\wedge}$、在 S 上具有根重数的非对称 q-移位算子:

$$\mathcal{S}(k)Y^{\lambda'}(k) = Y^{\lambda'}(k \pm l^{\wedge})\mathcal{S}(k), \qquad \lambda' \in L'.$$

仿射根系 S 包含一个（有限）根系 S_0，其 Weyl 群为 W_0。与前文一样， W_0 的每个线性特征都会在 S_0 上诱导一个根重数，并可扩展为 S 上的重数 l。在此情形下， l 的重标度版本 $l^{\wedge}$ （见注 4.3）将作为基本移位。

作为本节的结尾，我们陈述 Macdonald–Koornwinder 框架下的主要结果。

定理 B (见定理 4.21)。 对于 W_0 的每个线性特征 ε ，都存在非对称q-移位算子 $\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)$，其移位为 $\pm l^{\wedge}$，即

$$\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)Y^{\lambda'}(k) = Y^{\lambda'}(k \pm l^{\wedge})\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k), \qquad \lambda' \in L',$$

它们称为 ε-向前/向后的非对称 q-移位算子。这些算子使非对称 Macdonald–Koornwinder 多项式的重数移位 $\pm l^{\wedge}$:

$$\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)E_{\mu}(k) = \mathcal{H}_{\pm}^{(\varepsilon)}(\mu, k)E_{\mu_{\varepsilon,\pm}}(k \pm l^{\wedge}),$$

有关明确的移位因子 $\mathcal{H}_{\pm}^{(\varepsilon)}(\mu,\ k)$，参见推论 4.20。

据作者所知，定理 B 中描述的算子是高秩情形下首批已知的非对称 Macdonald–Koornwinder 多项式移位算子实例。对于秩一情形，与 [11] 中的秩一非对称 q-移位算子的关系将在注 4.22 中讨论。

1.3. **结构**。本文分为两部分。第一部分由第 2 节和第 3 节组成，讨论（非）对称Heckman–Opdam多项式及其移位算子。第二部分（第 4 节）讨论 Macdonald–Koornwinder 情形。

第 2.1–2.4 节介绍（非）对称Heckman–Opdam多项式、Dunkl–Cherednik 算子和分次 Hecke代数。第 2.5 节介绍 Heckman 对称移位算子的构造，并着重讨论移位原理。第 2.6 节讨论其与 KZ 方程的关系，同时介绍 Felder 和 Veselov 构造的 KZ 移位算子。

本文的核心是非对称移位算子的代数构造，详见第 3.1 节和第 3.2 节，其中移位原理再次发挥了重要作用。第 3.3 节讨论了这些算子的若干性质，包括一个关于基本非对称移位算子的猜想，参见猜想3.19。第 3.4 节给出了一个应用，即计算非对称Heckman–Opdam多项式的 L^2-范数。

最后，在第 4 节中，我们将代数构造推广，以得到非对称 Macdonald–Koornwinder 多项式的移位算子。本文的论述遵循第 2 节和第 3 节的结构。

2. Background on Heckman–Opdam theory

下面我们按照 [9, 25]的做法，介绍 Heckman–Opdam 理论的一些背景知识。

2.1. **根系预备知识**。初始数据包括一个不可约根系R、一个正根系统的选取 $R_+ \subset R$（它确定单根基 $\{\alpha_i\}_{i\in I}$，满足$I = \{1,\dots,n\}$），以及根重数 $k\colon\ R \to \mathbb{R}$。根系 R允许是非约化的，即属于 BC_n 类型；对此，引入不可倍根$R^0 = \{\alpha \in R \mid 2\alpha \notin R\}$以及定义在 R^0上的根重数 k^0将会很方便，其定义为 $k^0(\alpha) = \frac{1}{2}k(\alpha/2)+k(\alpha)$，并约定当 $\alpha/2 \notin R$时，$k(\alpha/2) = 0$。我们用 $\varepsilon\colon W \to \mathbb{R}^\times$ 表示 Weyl 群 W 在 R上的一个线性特征，它决定了 ε-对称 Heckman–Opdam 多项式的变换性质。

令 P为 R的权格。Heckman–Opdam 多项式构造为 P的群代数 $\mathbb{C}[P]$中的元素，并将其视为指数多项式；我们将在其上定义一个内积。我们使用 R的环境欧氏空间（$\mathfrak{a}$，$(\cdot,\ \cdot)$）来定义环面 $T = i\mathfrak{a}/2\pi i\mathbb{Z}R^\vee$，其中 $R^\vee = \{\alpha^\vee := 2\alpha/(\alpha,\ \alpha) \mid \alpha \in R\}$ 是对偶根系。商映射 $\exp\colon i\mathfrak{a} \to T$具有一个多值逆映射 $\log\colon T \to i\mathfrak{a}$，这使我们能够通过将 e^λ与 $t^\lambda\colon\ t \mapsto e^{(\lambda,\log(t))}$等同，将 $\mathbb{C}[P]$ 的元素视为 T上的函数。我们用 $M(k)$表示空间 $\mathbb{C}[P]$及其内积

$$(f,g)_k = \int_T f(t)\overline{g(t)} \prod_{\alpha\in R}(1-t^\alpha)^{k(\alpha)}dt,$$

其中 dt 表示 T上的归一化 Haar测度。

空间 $M(k)$带有 W的一个自然作用，该作用由转置给出，即 $\phi^w(t) := \phi(w^{-1}t)$。对于特征 ε，我们将 $M(k)$的 ε-等型分量记为 $M^{(\varepsilon)}(k)$。若特征为平凡特征，则简记为 $M^W(k)$。

2.2. **正交多项式**。非对称 Heckman–Opdam 多项式 $E_\lambda(k)$通过对 $M(k)$的基$(e^\lambda)_{\lambda\in P}$应用 Gram–Schmidt过程定义，其中所用内积为$(\cdot,\cdot)_k$，偏序为 $\le$（定义在 P上）。令 $P_+ \subset P$ 为主导权锥，并用 λ_+表示 P_+ 在 $\lambda \in P$的 Weyl轨道中的唯一元素。对于 $\lambda \in P_+$，群 W 分解为

$W^\lambda W_\lambda$，其中 W_λ 是 λ 在 W 中的稳定化子， W^λ 是最短陪集代表的集合。每个 $\lambda \in P$ 都可以唯一地写成 $v(\lambda)\lambda_+$ ，其中 $v(\lambda) \in W^{\lambda_+}$。 P_+^- 上的偏序定义为 $\mu \le \lambda \iff \lambda - \mu \in \mathbb{Z}_{\ge 0} R_+$。将 W 上的 Bruhat序记为 $\le_W$，我们将偏序 $\le$ 扩展到 P，定义如下

$$\lambda \le \mu \iff \begin{cases} \lambda_+ \le \mu_+ & \text{if } \lambda_+ \ne \mu_+; \\ \overline{v}(\lambda) \le_W \overline{v}(\mu) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

多项式 $E_\lambda(k)$ 是 $M(k)$ 中满足以下条件的唯一元素

(i) $E_\lambda(k) = e^\lambda +$低阶项；(ii) ($E_\lambda(k)\ e^\mu)_k = 0$ 对所有 $\mu < \lambda$ 均成立。

对于可比权 λ 和 μ，由定义可直接得出 $E_\lambda(k)$ 与 $E_\mu(k)$ 正交；然而，对于不可比权，这一点并非显而易见，须加以证明，参见例如 [24, Cor.2.11]。类似地，通过对基 $\big(m_\lambda^{(\varepsilon)} := \sum_{w\in W_\lambda} \varepsilon(w)\ e^{w\lambda}\big)_{\lambda\in P_+\,:\,\varepsilon(W_\lambda)=\{1\}}$ of$M_{(\varepsilon)}(k)$ 应用 Gram–Schmidt过程，定义 ε-对称 Heckman–Opdam 多项式 $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$，使得 $P_{(\varepsilon)\lambda}(k)$ 是 $M^{(\varepsilon)}(k)$ 中满足以下条件的唯一元素

(i) $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k) = m_\lambda^{(\varepsilon)} +$ 低阶项；

(ii) $(P_\lambda^{(\varepsilon)}(k)\ m_\mu^{(\varepsilon)})_k = 0$ 对所有 $\mu < \lambda_\circ$

条件 $\varepsilon(W_\lambda) = \{1\}$ 旨在确保 $m_\lambda^{(\varepsilon)} \ne 0$，从而 $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k) \ne 0$ 也成立。对于平凡特征，该条件显然成立，在这种情况下，我们将 $P_\lambda(k) := P_{(\varepsilon)\lambda}(k)$ 简称为（对称）Heckman–Opdam 多项式。

非对称与 ε-对称 Heckman–Opdam 多项式通过关于特征 ε 的对称化相关联。

引理 2.1. 设 $\lambda \in P_+$ 满足 $\varepsilon(W_\lambda) = \{1\}$。则

$$P_\lambda^{(\varepsilon)}(k) = \frac{1}{|W_\lambda|} \sum_{w\in W} \varepsilon(w) E_\lambda^w(k).$$

Proof. 这可由 [24, 定理 2.12(1)]的证明得出。 □

2.3. **Dunkl–Cherednik 算子**。多项式 $E_\lambda(k)$ 是 Dunkl– Cherednik 算子的特征函数

$$T_\xi(k) = \partial_\xi + \sum_{\alpha\in R_+} k(\alpha)(\xi,\alpha)\frac{1 - r_\alpha}{1 - e^{-\alpha}} - (\xi, \rho_k), \qquad \xi \in \mathfrak{h} := \mathfrak{a} \otimes \mathbb{C},$$

满足 $\rho_k = \sum_{\alpha\in R_+} k(\alpha)\alpha$。更具体地说，

$$T_\xi(k)E_\lambda(k) = (\xi, r_k(\lambda))E_\lambda(k), \qquad \xi \in \mathfrak{h},$$

其中 $r_k(\lambda) = \lambda + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+} k(\alpha)\epsilon((\lambda,\ \alpha^\vee))\alpha$。这里 $\epsilon(x) = 1$ 若 $x > 0$，而 $\epsilon(x) = -1$ 否则

e.

令 $S(\mathfrak{h})$ 为 $\mathfrak{h}$ 上由元素 $\xi \in \mathfrak{h}$ 生成的对称代数。众所周知，Dunkl–Cherednik 算子彼此可交换，因此我们看到，映射 $\xi \in \mathfrak{h} \mapsto T_\xi(k) \in \mathrm{End}(M(k))$ 可扩张为一个代数同态$p \in S(\mathfrak{h}) \mapsto T_p(k) \in \mathrm{End}(M(k))$。代数 $S(\mathfrak{h})$ 自然带有 W 的作用。W-不变元素构成的子代数记作 $S(\mathfrak{h})^W$。当 $p \in S(\mathfrak{h})^W$ 时，空间 $M^{(\varepsilon)}(k)$ 在 $T_p(k)$ 的作用下保持不变，而 ε-对称多项式 $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$ 是 $T_p(k)$ 的特征函数，即:

$$T_p(k)P_\lambda^{(\varepsilon)}(k) = p(r_k(\lambda))P_\lambda^{(\varepsilon)}(k), \qquad p \in S(\mathfrak{h})^W.$$

或者，若 $\lambda \in P_+$，则 $r_k(\lambda)$ 可写为 $w_\lambda(\lambda+\rho_k)$，其中 w_λ 表示 W_λ 的最长元素。因此，对于所有 $p \in S(\mathfrak{h})^W$，特征值 $p(r_k(\lambda))$ 等于 $p(\lambda+\rho_k)$。此外，对于所有 $\mu \in W\lambda$，我们有 $r_k(\mu) = v(\mu)r_k(\lambda) = v(\mu)w_\lambda(\lambda+\rho_k)$。

对于作用在 $M^W(k)$ 上的任意微分-反射 $T(k)$ 算子，都存在唯一的微分算子 $\mathrm{Rad}(T(k))$，称为径向部分。它通过将反射替换为恒等元得到，从而使其在 $M^W(k)$ 上与 $T(k)$ 一致。取 $T_p(k)$ 的径向部分，我们便可恢复 [8, Def.2.13]中的超几何微分方程组：

$$\mathrm{Rad}(T_p(k))P_\lambda(k) = p(\lambda+\rho_k)P_\lambda(k), \qquad p \in S(\mathfrak{h})^W. \tag{2.1}$$

2.4. 分次Hecke代数。 Dunkl–Cherednik 算子给出了分次Hecke代数的一个表示。下面回顾该代数的定义。

定义 2.2。 分次Hecke代数 $\mathcal{H}(k^0)$ 是向量空间 $S(\mathfrak{h}) \otimes \mathbb{C}[W]$，其乘法由下列条件唯一确定：

(i) $S(\mathfrak{h}) \to \mathcal{H}(k^0)$ $p \mapsto p \otimes e$ 和 $\mathbb{C}[W] \to \mathcal{H}(k^0)$ $w \mapsto 1 \otimes w$ 是代数同态；(ii) 对所有 $p \in S(\mathfrak{h})$ 和 $w \in W$，有 $(p \otimes e)(1 \otimes w) = p \otimes w$；(iii) 对所有 $i \in I$ 和 $\xi \in \mathfrak{h}$，有 $(1 \otimes r_i)(\xi \otimes e) = r_i(\xi) \otimes r_i - k^0(\alpha_i)(\xi, \alpha_i)$。

注意，我们将 r_i 用于表示 $i \in I$，作为 r_{α_i} 的简写。

映射 $p \otimes e \mapsto T_p(k) \in \mathrm{End}(M(k))$ 和 $1 \otimes w \mapsto w \in \mathrm{End}(M(k))$ 扩张为 $\mathcal{H}(k^0)$ 的忠实表示。$\mathcal{H}(k^0)$ 的中心与 $S(\mathfrak{h})^W$ 重合，因此该模

$$M_\lambda(k) = \{\phi \in M(k) \mid T_p(k)\phi = p(r_k(\lambda))\phi, \quad p \in S(\mathfrak{h})^W\}, \qquad \lambda \in P_+,$$

定义了一个带中心特征 $r_k(\lambda)$ 的 $\mathcal{H}(k^0)$-模。作为向量空间，$M_\lambda(k)$ 与 $\mathbb{C}[W/W_\lambda]$ 同构，其一组基为 $(E_\mu(k))_{\mu \in W\lambda}$。对于 $\mu \in W\lambda$，权空间

$$M_\lambda^\mu(k) = \{\phi \in M(k) \mid T_\xi(k)\phi = (\xi, r_k(\mu))\phi, \quad \xi \in \mathfrak{h}\}$$

是一维的，由 $E_\mu(k)$ 张成。

该模 $M_\lambda(k)$ 也可能包含某个特征 ε 对应的 ε-等型分量，即 .,

$$M_\lambda^{(\varepsilon)}(k) = \{\phi \in M^{(\varepsilon)}(k) \mid T_p(k)\phi = p(r_k(\lambda))\phi, \quad p \in S(\mathfrak{h})^W\},$$

其维数至多为一。我们定义根重数

$$l(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{if } \varepsilon(r_\alpha) = -1; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

可以证明

$$\dim M_\lambda^{(\varepsilon)}(k) = 1 \iff \varepsilon(W_\lambda) = \{1\} \iff \lambda \in \rho_l + P_+,$$

在这种情况下，$M_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$ 由 $P_{(\varepsilon)\lambda}(k)$ 张成，参见引理 4.4 的证明。

多项式 $P_{(\varepsilon)\lambda}(k)$ 是基 $(E_\mu(k))_{\mu \in W\lambda}$ 中元素的某个线性组合，这些元素属于 $M_\lambda(k)$，参见引理 2.1；其系数可用**c**-函数来描述

$$\mathbf{c}_k^{\pm}(w)(\cdot) = \prod_{\alpha \in R_+^0 \cap w^{-1}R_\pm^0} \left(1 + \frac{k^0(\alpha)}{(\cdot, \alpha^\vee)}\right), \qquad w \in W.$$

假设 2.3。 $\lambda+\rho_k$ 或 $r_k(\mu)$（其中 $\lambda \in P_+$ 和$\mu \in W\lambda$）处的**c**函数将经常被计算。为确保其定义良好，我们对重数 k 施加贯穿假设，即对于所有 $\alpha \in R^0$，$k^0(\alpha) > 0$。这保证了 $\lambda+\rho_k$ 和 $r_k(\mu)$ 始终是正则的，因此 $(\lambda+\rho_k, \alpha^\vee)$ 和 $(r_k(\mu)\ \alpha^\vee)$ 对所有 $\alpha \in R^0$均保持非零。

引理 2.4。令 $\lambda \in \rho_l + P_+$。则

$$P_\lambda^{(\varepsilon)}(k) = \frac{1}{|W_\lambda|} \sum_{\mu \in W\lambda} \varepsilon(\overline{v}(\mu)) \mathbf{c}^+_{-\varepsilon k}(\overline{v}(\mu))(r_k(\lambda)) E_\mu(k),$$

其中 εk 表示根重数 $\alpha \mapsto \varepsilon(r_\alpha)k(\alpha)$。

PROOF. 对于平凡特征，该结论可直接由 [24, Thm.4.1,Lem.5.1] 得出。此外，[24] 中的论证也可用于证明其余情形。□

2.5. **对称移位算子**。对称移位算子将具有不同重数的对称 Heckman–Opdam 多项式联系起来。我们回顾 ε-前向移位算子的构造，该构造取自 [6], following [7, 25]。这一构造的基石是移位原理。

令 Δ_ε 为相对于特征 ε的 Weyl 分母，即

$$\Delta_\varepsilon = \prod_{\alpha \in R_+^0,\, l(\alpha)=1} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}).$$

命题 2.5（移位原理）。设 $\lambda \in \rho_l + P_+$。则

$$P_{\lambda-\rho_l}(k+l) = \Delta_\varepsilon^{-1} P_\lambda^{(\varepsilon)}(k).$$

PROOF. 关于符号特征的情形，请参见 [25, Thm.5.8]；其余情形的证明只需作相应调整即可。□

记 $\pi_+^{(\varepsilon)}(k) = \prod_{\alpha \in R_+^0,\ l(\alpha)=1} \left(T_{\alpha^\vee}(k) + k^0(\alpha)\right)$，$\varepsilon$-正向移位算子 $G_+^{(\varepsilon)}(k)$ 定义为微分算子

$$G_+^{(\varepsilon)}(k) = \mathrm{Rad}\left(\Delta_\varepsilon^{-1} T_{\pi_+^{(\varepsilon)}(k)}(k)\right).$$

类似地可以定义反向变体，见 [25,定义 5.9]。

以下定理见于 [25, 定理 5.10]；不过，该处仅针对符号特征陈述了此定理。我们重新审视其证明，以说明它适用于任意特征。

定理 2.6。ε-正向移位算子 $G_+^{(\varepsilon)}(k)$ 将对称 Heckman–Opdam 多项式的重数平移 l:

$$G_+^{(\varepsilon)}(k) P_\lambda(k) = h_+^{(\varepsilon)}(\lambda, k) P_{\lambda-\rho_l}(k+l), \qquad \lambda \in P_+,$$

其中 $h_+^{(\varepsilon)}(\lambda,\ k) = \prod_{\alpha \in R_+^0,\ l(\alpha)=1} \left((\lambda+\rho_k,\ \alpha^\vee) - k^0(\alpha)\right)$。

PROOF. 由定义 2.2(iii) 可以证明

$$r_i T_{\pi_+^{(\varepsilon)}}(k)\big|_{M^W(k)} = \varepsilon(r_i) T_{\pi_+^{(\varepsilon)}}(k) r_i\big|_{M^W(k)},$$

参见 [25, 引理 5.8(a)] 的证明。由此可得，对某个常数 c，有 $T_{\pi_+^{(\varepsilon)}}(k) P_\lambda(k) = c P_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$。这表明当 $\lambda - \rho_l \notin P_+$ 时 $G_+^{(\varepsilon)}(k) P_\lambda(k) = 0$，因为此时 $P_{(\varepsilon)\lambda}(k) = 0$。这与该定理一致，因为在此情形下 $P_{\lambda-\rho_l}(k+l) = 0$。设 $\lambda \in \rho_l + P_+$。利用 Dunkl–Cherednik 算子的三角性，我们得到

$$T_{\pi_+^{(\varepsilon)}}(k) e^{w_0\lambda} = \varepsilon(w_0) h_+^{(\varepsilon)}(\lambda, k) e^{w_0\lambda} + \text{lower-order terms},$$

从而在比较 $e^{w_0\lambda}$ 的系数后得到 $c = h_+^{(\varepsilon)}(\lambda, k)$。因此，

$$G_+^{(\varepsilon)}(k) P_\lambda(k) = h_+^{(\varepsilon)}(\lambda, k) \Delta_\varepsilon^{-1} P_\lambda^{(\varepsilon)}(k) = h_+^{(\varepsilon)}(\lambda, k) P_{\lambda-\rho_l}(k+l),$$

在第二个等式中使用移位原理（命题 2.5）。 □

对称移位算子的一个显著特征是，它们具有与对应于超几何微分方程组 (2.1) 的微分算子的变换性质。 $G_+^{(\varepsilon)}(k)$ 的变换性质是定理 2.6 的直接推论。

推论 2.7. 算子 $G_+^{(\varepsilon)}(k)$ 满足变换性质

$$G_+^{(\varepsilon)}(k)\,\mathrm{Rad}(T_p(k)) = \mathrm{Rad}(T_p(k+l))G_+^{(\varepsilon)}(k), \qquad p \in S(\mathfrak{h})^W,$$

视为从 $M(k)$ 到 $M(k \pm l)$ 的算子。

Proof. 我们从 [9, 命题 1.3.7] 回忆起，作用于 $M(k)$ 的微分算子由其在不变子空间 $M^W(k)$ 上的作用唯一确定。因此，只需验证 $G_+^{(\varepsilon)}(k)\,\mathrm{Rad}(T_p(k))$ 与 $\mathrm{Rad}(T_p(k+l))G_+^{(\varepsilon)}(k)$ 作用于 $M^W(k)$ 的基 $(P_\lambda(k))_{\lambda\in P_+}$ 时相等。将这两个算子作用于 $P_\lambda(k)$，得到 $P_{\lambda-\rho_l}(k+l)$ 的若干倍，其系数为

$$h_+^{(\varepsilon)}(\lambda,k)p(-\lambda-\rho_{k'}), \quad h_+^{(\varepsilon)}(\lambda,k)p(-(\lambda-\rho_l)-\rho_{k+l})$$

由定理 2.6 得出。注意到 $\lambda-\rho_l+\rho_{k+l} = \lambda+\rho_k$，即可得到这些系数相等，从而完成推论的证明。□

2.6. **KZ 方程、Cherednik–Matsuo 对应与 KZ 移位算子。** Cherednik–Matsuo 对应描述了 Dunkl–Cherednik 算子的谱问题解与 KZ 方程解之间的关系。特别地，它指出， ε-对称 Heckman–Opdam 多项式对应于 KZ 方程的多项式解。Matsuo [19] 证明了超几何微分方程组 (2.1) 的解与 KZ 方程解之间存在对应关系

$$\mathrm{KZ}_\lambda(k) = \left\{\Phi \in (\mathbb{C}[P]\otimes\mathbb{C}[W])^W \mid \nabla_\xi(\lambda,k)\Phi = 0, \quad \xi\in\mathfrak{h}\right\}, \qquad \lambda\in P,$$

其中 $\nabla(\lambda,k)$ 是 KZ 联络。协变微分定义为

$$\begin{aligned}\nabla_\xi(\lambda,k)(\phi\otimes w) &= \partial_\xi\phi\otimes w \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+} k(\alpha)(\xi,\alpha)\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\phi\otimes(1-r_\alpha)w - \phi\otimes r_\alpha\varepsilon_\alpha w\right) - (\xi, wr_k(\lambda))\phi\otimes w,\end{aligned}$$

with

$$r_\alpha(\phi\otimes w) = \phi\otimes(r_\alpha w), \qquad \varepsilon_\alpha(\phi\otimes w) = \begin{cases}\phi\otimes w & \text{if } w^{-1}(\alpha)\in R_+;\\ -(\phi\otimes w) & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Cherednik 在 [3] 中研究了这种对应的一般化。Felder 和 Veselov [5]利用这种对应构造了一个 KZ 方程的移位算子。对于正则 $\lambda\in P_+$ 和符号特征，他们考虑了以下映射

$$\begin{aligned}&\mathrm{m}_\lambda(k) : \mathrm{KZ}_\lambda(k) \to M_\lambda^W(k),\ \sum_{w\in W}\phi_w\otimes w \mapsto \sum_{w\in W}\phi_w;\\ &\mathrm{ch}_\lambda(k) : \mathrm{KZ}_\lambda(k) \to M_{\lambda-\rho_l}^W(k+l),\ \sum_{w\in W}\phi_w\otimes w \mapsto \Delta_\varepsilon^{-1}\sum_{w\in W}\varepsilon(w)\phi_w,\end{aligned}$$

这些同构源于 Cherednik–Matsuo 对应。在 [5, §3], 中，作者显式地求出同构 $\mathrm{m}_\lambda(k)$ 的逆[2] ，并利用该逆将 KZ-移位算子定义为如下复合:

$$\mathrm{m}_{\lambda-\rho}(k+l)^{-1}\circ\mathrm{ch}_\lambda(k) : \mathrm{KZ}_\lambda(k) \to \mathrm{KZ}_{\lambda-\rho}(k+l).$$

[2]作者仅考虑有理情形，并指出三角情形也可以实现。

对于 $\lambda \in P_+$ 和 $\mu \in W\lambda$，存在一个同构

$$M_\lambda^\mu(k) \to \mathrm{KZ}_\mu(k),\ \phi \mapsto \sum_{w\in W} \phi^w \otimes w,$$

见 [24, §3]。因此，KZ 移位算子的拉回为固定正则权 $\mu = \lambda$ 下的非对称 Heckman–Opdam 多项式提供了一个候选移位算子。该算子的局限在于它依赖于谱参数，即权 λ。这种对权的依赖使该算子无法成为满足某种与 Dunkl–Cherednik 算子之间的变换性质的微分-反射算子。

3. Shift operators for non-symmetric Heckman–Opdam polynomials

我们首先详　　细阐述固定权的非对称移位算子　　.

3.1. 固定权的非对称移位算子。受第 2.6 节中 KZ 移位算子构造的启发，我们考虑以下一系列映射：

$$M_\lambda^\mu(k) \xrightarrow{\text{(i)}} M_\lambda^{(\varepsilon_\pm)}(k) \xrightarrow{\text{(ii)}} M_{\lambda\mp\rho_l}^W(k\pm l) \xrightarrow{\text{(iii)}} M_{\lambda\mp\rho_l}^{\mu_\varepsilon,\pm}(k\pm l),$$

采用记号 $\varepsilon_+ = \varepsilon$、 $\varepsilon_- = \mathrm{triv}$ 和 $\mu_{\varepsilon,\ \pm} = v(\mu)w_\lambda(\lambda \mp \rho_l)$，其中：

(i) $U_{\varepsilon_\pm}$: $M_\lambda^\mu(k) \to M(\varepsilon_\pm)\,\lambda(k)$ 是由 $U_{\varepsilon_\pm}(\phi) = \sum_{w\in W} \varepsilon_\pm(w)\phi^w$ 定义的 $\varepsilon_\pm$-对称化算子；(ii) $\Delta_\varepsilon^\mp$: $M(\varepsilon_\pm)\,\lambda(k) \to M_{\lambda\mp\rho_l}^W(k\pm l)$ 由乘以 $\Delta_\varepsilon^{\mp 1}$ 给出，这正是移位原理（命题 2.5）在此方法中的体现；(iii) $Q_{\mu_\varepsilon,\pm}(k\pm l)$: $M_{\lambda\mp\rho_l}(k\pm l) \to M^{\mu_\varepsilon}{}_{,\lambda\mp\rho_l}^{\ \pm}(k\pm l)$ 是从 $M_{\lambda\mp\rho_l}(k\pm l)$ 投影到子空间 $M^{\mu_\varepsilon}{}_{,\lambda\mp\rho_l}^{\ \pm}(k\pm l)$ 的某个标量倍数。

将这些映射复合，即得到针对固定权 $\lambda \in P_+$ 和 $\mu \in W\lambda$ 的 ε-正向/反向非对称移位算子：

$$\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(\mu,k) = Q_{\mu_\varepsilon,\pm}(k\pm l)\circ\Delta_\varepsilon^\mp\circ U_{\varepsilon_\pm} : M_\lambda^\mu(k) \to M_{\lambda\mp\rho_l}^{\mu_\varepsilon,\pm}(k\pm l).$$

令人惊讶的是，这个固定权非对称移位算子为真正的非对称移位算子提供了一种拟设，后者不再依赖于权 λ或 μ。一般而言，这些非对称移位算子彼此一致；然而，对于 μ的退化情形，这一点可能不成立。

我们接下来详细考察算子 $Q_{\mu_\varepsilon,\ \pm}(k\pm l)$。下述引理对于其定义至关重要。

引理 3.1. 设 $\pi = \prod_{\alpha\in R_+^0}(\cdot,\ \alpha^\vee)$，则存在一个多项式 $q \in S(\mathfrak{h}) \otimes S(\mathfrak{h})$，使得

$$q(\xi, w\xi) = \pi(\xi)\delta_{e,w}, \qquad w \in W, \tag{3.1}$$

对所有正则的 $\xi \in \mathfrak{h}$ 均成立。

Proof. 多项式 q 是在 [24, Lem.3.9(1)]，中构造的，该构造基于 [30, Ch.4:Ex.70]。由于多项式 q 对后续内容至关重要，我们将详述其构造。设 $H(\mathfrak{h}) \subset S(\mathfrak{h})$ 为 $\mathfrak{h}$ 上的调和多项式空间，并回忆它与 $\mathbb{C}[W]$ 作为向量空间同构。相对于 $\mathbb{C}[W]$ 的典范基 $(\delta_w)_{w\in W}$ 以及一个固定的正则 $\xi \in \mathfrak{h}$，线性同构定义如下：

$$U(\xi) : H(\mathfrak{h}) \to \mathbb{C}[W],\ h \mapsto \sum_{w\in W} h^w(\xi)\delta_w.$$

定义 $q(\xi,\ \cdot) = \pi(\xi)U(\xi)^{-1}(\delta_e) \in H(\mathfrak{h})$，对于正则的 $\xi \in \mathfrak{h}$，满足所需性质 (3.1)；然而，先验地说，它是关于 ξ 的有理函数。

为证明 q 实际上是多项式，我们取 $H(\mathfrak{h})$ 的一组基 $u_1, \ldots\ldots, u_d$，其中 $d = |W|$ 由齐次多项式构成，使得线性同构 $U(\xi)$ 可由矩阵 $\check{U}(\xi) = (u_j^w(\xi))_{1\le j\le d,\ w\in W}$ 表示。正如 [30, 第 4 章：例 70], 中所述，$U(\xi)$ 的行列式是 $\pi(\xi)^{d/2}$ 的一个非零倍数，而 $\check{U}(\xi)$ 的子式可被 $\pi(\xi)^{d/2-1}$ 整除。因此，$\pi(\xi)\,\check{U}(\xi)^{-1}$ 在 ξ 中的各项都是多项式，这意味着 q 是关于 ξ 的多项式。具体而言，我们得到

$$q = \sum_{j=1}^{d} q_j \otimes u_j, \tag{3.2}$$

其中 $q_1(\xi)\ldots, q_d(\xi)$ 是 $\pi(\xi)\,\check{U}(\xi)^{-1}$ 第一列的元素 . □

对于 $\mu \in P$，我们定义算子 $Q_\mu(k) = q(r_k(\mu)\ T(k))$，其中 q 是引理 3.1 中的多项式。具体而言，根据展开式 (3.2)，该算子由下式给出

$$Q_\mu(k) = \sum_{j=1}^{d} q_j(r_k(\mu)) T_{u_j}(k).$$

算子 $Q_\mu(k)$ 的作用由下述引理给出，参见 [24,引理 3.9(2)]。

引理 3.2. 设 $\lambda \in P_+$ 与 $\mu \in W\lambda$。算子 $Q_\mu(k)$ 定义了从 $M_\lambda(k)$ 到 $M_\lambda^\mu(k)$ 的映射。特别地，我们有

$$Q_\mu(k)E_\nu(k) = \delta_{\mu,\nu}\pi(r_k(\mu))E_\mu(k).$$

Proof. 根据我们对 k的贯穿假设，可知 $r_k(\mu)$ 是正则的。因此，

$$Q_\mu(k)E_\nu(k) = q(r_k(\mu), r_k(\nu))E_\nu(k) = \delta_{\mu,\nu}\pi(r_k(\mu))E_\mu(k),$$

利用 $r_k(\nu) = v(\nu)v(\bar{\mu})^{-1}\bar{r}_k(\mu)$。 □

例 3.3。

(i) 对于类型为 BC_1 的根系 $R = \{\pm\epsilon_1, \pm 2\epsilon_1\}$，多项式 q 由 $\frac{1}{4}\big(\epsilon_1^\vee \otimes 1 + 1 \otimes \epsilon_1^\vee\big)$ 给出，因此 $Q_\mu(k) = \frac{1}{4}\big((r_k(\mu)\ \epsilon_1^\vee) + T_{\epsilon_1^\vee}(k)\big)$。(ii) 设 $R = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i, j = 1, 2, 3,\ i \ne j\}$ 为类型 A_2 的根系。将 $\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2$ 和 $\alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3$ 记为单根的标准选择，则 $H(\mathfrak{h})$ 的一个齐次基为

$$u_1 = 1, \quad u_2 = \alpha_1, \quad u_3 = \alpha_2, \quad u_4 = 2\alpha_1(\alpha_1 + 2\alpha_2);$$
$$u_5 = 2\alpha_2(2\alpha_1 + \alpha_2), \qquad u_6 = 3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2).$$

关于这个基，多项式 q 可写成 $\frac{1}{18}\sum_{j=1}^{6} u_{7-j} \otimes u_j$ 的形式。

注 3.4。 多项式 q 还有另一种选择，见引理 3.1：

$$q_{\xi'} = \prod_{w\in W,\, w\ne e} \big(\xi' \otimes 1 - 1 \otimes w^{-1}\xi'\big),$$

它取决于满足 $q_{\xi'}(\xi, \xi) \ne 0$ 的辅助向量 $\xi' \in \mathfrak{h}$。之所以在[5, §3] 和 [25, Rmk.7.4] 中使用多项式 $q_{\xi'}$，是因为它满足类似于 (3.1) 的性质，即对于所有 $w \in W$，$q_{\xi'}(\xi, w\xi) = q_{\xi'}(\xi, \xi)\delta_{e,w}$。注意，$q_{\xi'}$ 更容易定义；然而，它也带来两个缺点。首先，它依赖于向量 ξ'，而该向量必须满足关于 ξ 的正则性条件。其次，$q_{\xi'}$ 的次数等于 $|W|$，而 q 的次数较低，即 $|R_0^+|$；关于 q的次数的重要性，见第 3.3 节。

接下来，我们计算算子 $\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(\mu, k)$ 对多项式 $E_\mu(k)$ 的作用，即确定常数 $H_\pm^{(\varepsilon)}(\mu, k)$，使得 $\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(\mu, k)E_\mu(k) = H_\pm^{(\varepsilon)}(\mu, k)E_{\mu_{\varepsilon,\pm}}(k \pm l)$。将所有 c 函数的自变量改写为用 $\lambda + \rho_k$ 而不是 $r_k(\lambda)$ 表示会更方便，后者将是移位因子 $H_\pm^{(\varepsilon)}(\mu, k)$ 的一部分。第一次出现这种情况是在引理 2.4 中。

引理 3.5。对于 $\lambda \in P_+$，有 $\mathbf{c}_k^-(w_\lambda)(\lambda+\rho_k) = |W_\lambda|$。

PROOF. 写作 $R_\lambda^0 = \{\alpha \in R^0 \mid (\lambda, \alpha) = 0\}$ 和 $R_{\lambda,+}^0 = R_\lambda^0 \cap R_+^0$，注意到 $R_+^0 \cap w_\lambda^{-1} R_-^0 = R_{\lambda,+}^0$。由此可得

$$\mathbf{c}_k^-(w_\lambda)(\lambda+\rho_k) = \prod_{\alpha \in R_{\lambda,+}^0} \left(1 + \frac{k^0(\alpha)}{(\rho_k, \alpha^\vee)}\right) = |W_\lambda|,$$

其中第二个等式正是来自 [24, (4.4)] 的恒等元。 □

引理 3.6. 设 $\lambda \in \rho_l + P_+$。则

$$P_\lambda^{(\varepsilon)}(k) = \sum_{\mu \in W\lambda} \varepsilon(\overline{v}(\mu)) \mathbf{c}_{-\varepsilon k}^+(\overline{v}(\mu) w_\lambda)(\lambda+\rho_k) E_\mu(k).$$

PROOF. 利用分解

$$w_\lambda(R_+^0 \cap \overline{v}(\mu)^{-1} R_-^0) = (R_+^0 \cap (\overline{v}(\mu) w_\lambda)^{-1} R_-^0) \sqcup R_{\lambda,-}^0,$$

例如，参见 [24, p.98]，我们得到

$$\mathbf{c}_{-\varepsilon k}^+(\overline{v}(\mu))(r_k(\lambda)) = \mathbf{c}_{-\varepsilon k}^+(\overline{v}(\mu) w_\lambda)(\lambda+\rho_k) \mathbf{c}_k^-(w_\lambda)(\lambda+\rho_k).$$

这里，由于 $R_{\lambda,-}^0 = -(R_+^0 \cap w_\lambda^{-1} R_-^0)$ 且 $\varepsilon k \equiv k$ 在 R_λ^0 上，因此可以将重数 $-\varepsilon k$ 替换为 k。该引理现由引理 2.4 和引理 3.5 得出。□

由引理 3.2 可知，算子 $Q_\mu(k)$ 作用于 $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$ 的结果，恰由引理 3.6 中的系数给出。由此得到以下推论。

推论 3.7。设 $\lambda \in \rho_l + P_+$ 和 $\mu \in W\lambda$。则

$$Q_\mu(k) P_\lambda^{(\varepsilon)}(k) = \varepsilon(\overline{v}(\mu)) \pi(r_k(\mu)) \mathbf{c}_{-\varepsilon k}^+(\overline{v}(\mu) w_\lambda)(\lambda+\rho_k) E_\mu(k).$$

当权 μ 为支配权时，即 $\mu = \lambda$，我们现在能够利用 $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k) = |W_\lambda|^{-1} U_\varepsilon E_\lambda(k)$ 来计算 $\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(\lambda, k)$ 作用于 $E_\lambda(k)$ 的结果。然而，对于一般权 μ，若要使用移位原理（命题 2.5），我们首先必须建立 $U_\varepsilon E_\mu(k)$ 与 $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$ 之间的关系。

引理 3.8。设 $\lambda \in \rho_l + P_+$ 和 $\mu \in W\lambda$。则

$$U_\varepsilon E_\mu(k) = \varepsilon(\overline{v}(\mu)) \mathbf{c}_{\varepsilon k}^-(\overline{v}(\mu) w_\lambda)(\lambda+\rho_k) P_\lambda^{(\varepsilon)}(k).$$

PROOF. 将引理 [28,4.5] 的证明方法调整到我们的情形，可得

$$U_\varepsilon E_\mu(k) = \varepsilon(\overline{v}(\mu)) \mathbf{c}_{\varepsilon k}^-(\overline{v}(\mu))(r_k(\lambda)) U_\varepsilon E_\lambda(k).$$

在 [24, 第98],页还有另一种分解，即

$$w_\lambda^{-1}(R_+^0 \cap \overline{v}(\mu)^{-1} R_-^0) \sqcup R_{\lambda,+}^0 = R_+^0 \cap (\overline{v}(\mu) w_\lambda)^{-1} R_-^0,$$

利用它可得到

$$\mathbf{c}_{\varepsilon k}^-(\overline{v}(\mu))(r_k(\lambda)) = \mathbf{c}_{\varepsilon k}^-(\overline{v}(\mu) w_\lambda)(\lambda+\rho_k) \mathbf{c}_k^-(w_\lambda)(\lambda+\rho_k)^{-1},$$

参见引理 3.6 的证明。将这个恒等元代入 $U_\varepsilon E_\mu(k)$ 的表达式，并结合引理 3.5 和 $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k) = |W_\lambda|^{-1} U_\varepsilon E_\lambda(k)$（见引理 2.1），即可得出该引理。□

在重新表述**c**-函数时，我们依赖于假设 $\lambda \in \rho_l + P_+$。当该假设不成立，即 $\lambda - \rho_l \notin P_+$ 时，$\mathcal{G}_+^{(\varepsilon)}(\mu, k)$ 对 $E_\mu(k)$ 的作用显然为 0，因为 $U_\varepsilon E_\mu(k) = 0$。下一个引理保证系数中的**c**-函数会将这一消失性考虑在内。

引理 3.9（消失引理 1）。令 $\lambda \in P_+$ 和 $\mu \in W\lambda$。假设 $\lambda - \rho_l \notin P_+$，则有

$$\mathbf{c}^-_{\varepsilon k}(\overline{v}(\mu)w_\lambda)(\lambda+\rho_k) = 0.$$

Proof. 存在一个 $i \in I$，使得根 α_i 是 $R^0_{\lambda,+}$ 的元素，并且根据 $\varepsilon(W_\lambda) \neq \{1\}$，$\varepsilon(r_i) = -1$。回顾一下关于 W^λ 的一个众所周知的刻画：

$$w \in W^\lambda \iff w(R^0_{\lambda,+}) \subset R^0_+. \tag{3.3}$$

根据定义 $W^\lambda = \{w \in W \mid \ell(wr_i) > \ell(w)$，对所有满足 $\alpha_i \in R^0_\lambda$ 的 $i \in I$，以及如下事实：当且仅当 $w(\alpha_i) \in R^0_\pm$ 时，$\ell(wr_i) = \ell(w) \pm 1$，即可直接得到这一刻画。由于 $v(\mu) \in W^\lambda$ 且 $w_\lambda(\alpha_i) \in R^0_{\lambda,-}$，由 (3.3) 可得 $(v(\mu)w_\lambda)(\alpha_i) \in R^0_-$，或者等价地，$\overline{\alpha}_i \in R^0_+ \cap (v(\mu)w_\lambda)^{-1}R^0_-$。因此，$(\lambda+\rho_k, \alpha_i^\vee) + \varepsilon(r_i)k^0(\alpha_i) = (\rho_k, \alpha_i^\vee) - k^0(\alpha_i) = 0$。这说明 $\mathbf{c}^-_{\varepsilon k}(v(\mu)w_\lambda)(\lambda+\rho_k) = 0$，因为我们已经证明其中一个因子为零。□

Fin接下来，我们结合前面的引理来计算移位因子 $H^{(\varepsilon)}_\pm(\mu,\ k)$.

命题 3.10. 设 $\lambda \in P_+$ 且 $\mu \in W\lambda$。则

$$\mathcal{G}^{(\varepsilon)}_\pm(\mu,k)E_\mu(k) = H^{(\varepsilon)}_\pm(\mu,k)E_{\mu_{\varepsilon,\pm}}(k \pm l),$$

with

$$H^{(\varepsilon)}_\pm(\mu,k) = \varepsilon_\pm(\overline{v}(\mu))\varepsilon_\mp(\overline{v}(\mu_{\varepsilon,\pm}))\pi(r_{k\pm l}(\mu_{\varepsilon,\pm}))\mathbf{c}^-_{\varepsilon_\pm k}(\overline{v}(\mu)w_\lambda)(\lambda+\rho_k)$$
$$\times\, \mathbf{c}^+_{-\varepsilon_\mp(k\pm l)}(\overline{v}(\mu_{\varepsilon,\pm})w_{\lambda\mp\rho_l})(\lambda+\rho_k).$$

Proof. 首先，假设 $\lambda \mp \rho_l \in P_+$。由移位原理（命题 2.5）和引理 3.8，得到

$$(\Delta^\mp_\varepsilon \circ U_{\varepsilon_\pm})E_\mu(k) = \varepsilon_\pm(\overline{v}(\mu))\mathbf{c}^-_{\varepsilon_\pm k}(\overline{v}(\mu)w_\lambda)(\lambda+\rho_k)P^{(\varepsilon_\mp)}_{\lambda\mp\rho_l}(k\mp l).$$

该命题 由此可得；再结合推论 3.7 应用于 $Q_{\mu_{\varepsilon,\ \pm}}(k \pm l)$，即。 e.,

$$Q_{\mu_{\varepsilon,\pm}}(k\pm l)P^{(\varepsilon_\mp)}_{\lambda\mp\rho_l}(k\mp l) = \varepsilon_\mp(\overline{v}(\mu_{\varepsilon,\pm}))\mathbf{c}^+_{-\varepsilon_\mp(k\pm l)}(\overline{v}(\mu_{\varepsilon,\pm})w_{\lambda\mp\rho_l})(\lambda+\rho_k)\pi(r_{k\pm l}(\mu_{\varepsilon,\pm}))E_{\mu_{\varepsilon,\pm}}(k\pm l).$$

其次，唯一可能出现的情况是 $\lambda - \rho_l \notin P_+$。由此可得 $U_\varepsilon E_\mu(k) = 0$。因此，$\mathcal{G}^{(\varepsilon)}_+(\mu,\ k)E_\mu(k) = 0$，所以我们必须证明 $H^{(\varepsilon)}_+(\mu,\ k) = 0$。引理 3.9 中，我们已经证明其中一个因子为零，由此完成了该命题的证明。□

3.2. 真正的非对称移位算子。我们通过将固定权非对称移位算子 $\mathcal{G}^{(\varepsilon)}_\pm(\mu,k)$ 改写如下来继续：

$$\mathcal{G}^{(\varepsilon)}_\pm(\mu,k) = \sum_{w\in W}\varepsilon_\pm(w)Q_{\mu_{\varepsilon,\pm}}(k\pm l)\Delta^\mp_\varepsilon w, \tag{3.4}$$

并且注意到，我们希望消除的 μ 依赖性完全包含在算子 $Q_{\mu_{\varepsilon,\pm}}(k \pm l)$ 之中。在 (3.4) 中，算子 $Q_{\mu_{\varepsilon,\pm}}(k \pm l)$ 存在一定的未利用的自由度，因为允许它随 $w \in W$ 变化。更具体地说，我们试图将算子 $Q_{\mu_{\varepsilon,\pm}}(k \pm l)$ 替换为算子 $\mathcal{Q}^{(\varepsilon)}_\pm(w,k)$（其中 $w \in W$），使其满足

$$\mathcal{Q}^{(\varepsilon)}_\pm(w,k)\Delta^\mp_\varepsilon w\big|_{M^\mu_\lambda(k)} = Q_{\mu_{\varepsilon,\pm}}(k\pm l)\Delta^\mp_\varepsilon w\big|_{M^\mu_\lambda(k)} \tag{3.5}$$

对 P 和 $\lambda = \mu_+ \in P_+$ 的一个扎里斯基稠密子集中的所有 μ。

引理 3.11。对每个 $w \in W$，定义算子

$$\mathcal{Q}^{(\varepsilon)}_\pm(w,k) = \sum_{j=1}^d T_{u_j}(k\pm l)C_{\Delta^\mp_\varepsilon w}(T_{q_j}(k))$$

简记为 $C_{\Delta_\varepsilon^\mp w}(T_{q_j}(k)) = (\Delta_\varepsilon^\mp w) T_{q_j}(k) (\Delta_\varepsilon^\mp w)^{-1}$。令 $\lambda \in P_+$ 和 $\mu \in W\lambda$。则

$$\mathcal{Q}_\pm^{(\varepsilon)}(w,k)\Delta_\varepsilon^\mp w\big|_{M_\lambda^\mu(k)} = Q_\mu(k, k\pm l)\Delta_\varepsilon^\mp w\big|_{M_\lambda^\mu(k)}.$$

这里，$Q_\mu(m,\ k) = \sum_{j=1}^d q_j(r_m(\mu))T_{u_j}(k)$ 扩展了 $Q_\mu(k)$ 的定义，即 $Q_\mu(k,\ k) = Q_\mu(k)$。

Proof. 该引理由以下观察可得

$$C_{\Delta_\varepsilon^\mp w}(T_{q_j}(k))(\Delta_\varepsilon^\mp \phi^w) = q_j(r_\mu(k))\Delta_\varepsilon^\mp \phi^w$$

对所有 $\phi \in M_\lambda^\mu(k)$ 都成立。 □

注意，引理 3.11 几乎已经证明了 (3.5)，而当 $Q_\mu(k,\ k\pm l) = Q_{\mu_{\varepsilon,\ \pm}}(k\pm l)$ 时，这一条件便得以满足。这发生在 $r_k(\mu) = r_{k\pm l}(\mu_{\varepsilon,\ \pm})$ 时。我们来更仔细地考察这一条件。回忆一下，$r_k(\mu) = v(\mu)w_\lambda(\lambda+\rho_k)$，并注意到 $r_{k\pm l}(\mu_{\varepsilon,\ \pm}) = v(\overline{\mu_{\varepsilon,\ \pm}})^{w_{\lambda\mp\rho l}}(\lambda+\rho_k)$，因此

$$r_k(\mu) = r_{k\pm l}(\mu_{\varepsilon,\pm}) \iff \overline{v}(\mu)w_\lambda = \overline{v}(\mu_{\varepsilon,\pm})w_{\lambda\mp\rho_l} \tag{3.6}$$

因为根据关于 k 的贯穿假设，$\lambda+\rho_k$ 是正则的。我们注意到，对于 μ，(3.6) 定义了一个扎里斯基稠密集。该集合包含 μ 和 $\mu_{\varepsilon,\ \pm}$ 均为正则的所有情形，因为此时 w_λ 和 $w_{\lambda\mp\rho_l}$ 都等于恒等元，并且 $v(\mu) = v(\mu_{\varepsilon,\ \pm})$，这是因为 μ 和 $\mu_{\varepsilon,\ \pm}$ 位于同一个魏尔室内。

将条件改写为使用反主导权而非主导权，可使条件略为简化。令 $\mu_- = w_0\lambda$ 为 μ 的 Weyl轨道中的反主导权，并用 $v(\mu)$ 表示满足 $w\mu = \mu_-$ 的最短元素 $w \in W$。它与 $v(\mu)$ 的关系由 [18, (2.7.3)]，给出，该式指出 $v(\mu)v(\mu) = v(\lambda)$。注意，$v(\lambda) = w_0 w_\lambda$，因此得到 $v(\mu) = w_0 w_\lambda v(\mu)^{-1}$。于是，该条件等价于 $v(\mu) = v(\mu_{\varepsilon,\ \pm})$。从几何角度看，我们可以将该条件解释为 $\mu_{\varepsilon,\ \pm} = \mu \pm v(\mu)^{-1}\rho_l$，同时保持 μ 的正则性。

将算子 $\mathcal{Q}_\pm^{(\varepsilon)}(w,\ k)$ 代入表达式 (3.4) 中，以替换 $Q_{\mu_{\varepsilon,\ \pm}}(k\pm l)$，得到一个算子 $\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k)$，它在由条件 (3.6) 给出的扎里斯基稠密集上与 $\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(\mu,\ k)$ 一致。接下来，我们计算 $\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k)$ 在该扎里斯基稠密集之外的作用。

命题 3.12. 对每个线性特征 ε，我们关联一个 ε-前向/后向非对称移位算子

$$\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k) = \sum_{w\in W} \varepsilon_\pm(w)\mathcal{Q}_\pm^{(\varepsilon)}(w,k)\Delta_\varepsilon^\mp w.$$

算子 $\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k)$ 定义了一个从 $M(k)$ 到 $M(k\pm l)$ 的映射。对于 $\lambda \in P_+$和 $\mu \in W\lambda$，将 $\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k)$ 限制到 $M_\lambda^\mu(k)$ 上，得到

$$\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k)\big|_{M_\lambda^\mu(k)} = \begin{cases} \mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(\mu,k)\big|_{M_\lambda^\mu(k)} & \text{if } v(\mu) = v(\mu_{\varepsilon,\pm}); \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. 利用引理 3.11，我们得到

$$\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k)\phi = Q_\mu(k, k\pm l)(\Delta_\varepsilon^\mp U_{\varepsilon_\pm}\phi) \tag{3.7}$$

对所有 $\phi \in M_\lambda^\mu(k)$ 都成立。如果 $v(\mu) = v(\mu_{\varepsilon,\pm})$，那么如前所述，$Q_\mu(k, k\pm l) = Q_{\mu_{\varepsilon,\pm}}(k\pm l)$，因此$\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k)\phi = \mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(\mu,k)\phi$。否则，假设 $v(\mu) \neq v(\mu_{\varepsilon,\pm})$，并分别考虑 $\lambda\mp\rho_l \notin P_+$和 $\lambda\mp\rho_l \in P_+$ 这两种情况。

在第一种情形中（仅当 $\lambda - \rho_l \notin P_+$ 时才会出现），我们有 $U_\varepsilon\phi = 0$。由此可得$\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k)\phi = 0 = \mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(\mu,\ k)\phi$，参见命题 3.10 的证明。

其次，对于情形 $\lambda \mp \rho_l \in P_+$，我们将 $\Delta_\varepsilon^{\mp} U_{\varepsilon_\pm}\phi$ 表示为基 $(E_\nu(k \pm l))_{\nu \in W\,(\lambda \mp \rho_l)}$ 中的元素的线性组合，其中该基属于 $M_{\lambda \mp \rho_l}(k)$；也就是说，$\sum_{\nu \in W\,(\lambda \mp \rho_l)} c_\nu E_\nu(k \pm l)$。利用 (3.7)，我们得到

$$\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k)\phi = \sum_{\nu \in W(\lambda \mp \rho_l)} c_\nu q(r_k(\lambda), r_{k\pm l}(\nu)) E_\nu(k \pm l). \tag{3.8}$$

注意到 $r_{k\pm l}(\nu) = w_\nu r_k(\mu)$，其中 $w_\nu = v(\nu) w_{\lambda \mp \overline{\rho}_l} w_\lambda^{-1} v(\mu)^{-1}$，并断言对所有 $\nu \in W(\lambda \mp \rho_l)$，都有 $w_\nu \neq e$。根据多项式 q 的定义，这意味着 $q(r_k(\lambda)\ r_{k\pm l}(\nu)) = 0$，因此由 (3.8) 可得 $\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k)\phi = 0$。

为证明我们的断言，我们需要证明 $v(\mu) w_\lambda \notin \overline{W}^{\lambda \mp \rho_l} w_{\lambda \mp \rho_l}$。若结论不成立，则 $v(\mu) w_\lambda = \overline{w} w_{\lambda \mp \rho_l}$，其中 $\overline{w} \in W^{\lambda \mp \rho_l}$，且 $v(\mu) w_\lambda = v(\mu_{\varepsilon,\pm}) w'$，其中 $\overline{w}' \in W_{\lambda \mp \overline{\rho_l}}$，这是由分解 $W = W^{\lambda \mp \rho_l} W_{\lambda \mp \rho_l}$ 得出的。然而，由于每个元素的分解都是唯一的，这就导致矛盾：$w = v(\mu_{\varepsilon,\pm})$ 且 $w' = w_{\lambda \mp \rho_l}$。命题的证明到此完成。□

我们继续确定算子 $\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k)$ 的移位因子。在由 (3.6) 给出的扎里斯基稠密集上，根据命题 3.12，它与移位因子 $H_\pm^{(\varepsilon)}(\mu,\ k)$ 一致。接下来，我们希望将扎里斯基稠密集之外 $\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k)$ 的消失性纳入移位因子。出于类似的考虑，我们在 $H_\pm^{(\varepsilon)}(\mu,\ k)$ 中用 $v(\mu) w_\lambda$ 替换 $v(\mu_{\varepsilon,\ \pm}) w_{\lambda \mp \rho_l}$，事实证明，这能够捕捉由 $H_\pm^{(\varepsilon)}(\mu, -k)$ 中第二个 $\mathbf{c}$-函数因子所导致的恰当消失性。

引理 3.13（消失引理 2）。设 $\lambda \in P_+$、$\mu \in W\lambda$，并且 $v(\mu) \neq v(\mu_{\varepsilon,\ \pm})$。则

$$\mathbf{c}^+_{-\varepsilon_\mp(k\pm l)}(\overline{v}(\mu) w_\lambda)(\lambda + \rho_k) = 0.$$

Proof. 由 $v(\mu) w_\lambda w_{\lambda \mp \rho_l}^- \notin W^{\lambda \mp \rho_l}$ 可知，参见命题 3.12 的证明以及 (3.3)，存在一个 $i \in I$，使得 $\alpha_i \in R^0_{\lambda \mp \rho_l,\ +}$，且 $(v(\mu) w_\lambda)(\alpha_i) \in R^0_+$，从而 $\alpha_i^- \in R^0_+ \cap (v(\mu) w_\lambda)^{-1} R^0_+$。注意，在两种情况下 $\varepsilon_\mp(r_i) = 1$，因为要么 $\varepsilon_- =$ 为 triv，要么 $\varepsilon_+(W_{\lambda + \rho_l}) = \{1\}$。因此，

$$(\lambda + \rho_k, \alpha_i^\vee) - \varepsilon_\mp(r_i)(k^0(\alpha_i) \pm l(\alpha_i)) = (\lambda \mp \rho_l + \rho_{k\pm l}, \alpha_i^\vee) - (k^0(\alpha_i) \pm l(\alpha_i)) = 0,$$

由此 $\mathbf{c}^+_{-\varepsilon_\mp(k\pm l)}(v(\mu) w_\lambda)(\lambda + \rho_k) = 0$，因为其因子之一为零。 □

由此得到如下推论。

推论 3.14. 设 $\lambda \in P_+$ 与 $\mu \in W\lambda$。记

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\pm^{(\varepsilon)}(\mu, k) = \varepsilon(\overline{v}(\mu)) \pi(r_k(\mu)) \mathbf{c}^-_{\varepsilon_\pm k}(\overline{v}(\mu) w_\lambda)(\lambda + \rho_k) \\ \times \mathbf{c}^+_{-\varepsilon_\mp(k\pm l)}(\overline{v}(\mu) w_\lambda)(\lambda + \rho_k),\end{aligned}$$

则有

$$\mathcal{H}_\pm^{(\varepsilon)}(\mu, k) = \begin{cases} H_\pm^{(\varepsilon)}(\mu, k) & \text{if } v(\mu) = v(\mu_{\varepsilon,\pm}); \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们以主要结果结束本节，证明算子 $\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k)$ 实际上是非对称移位算子，即它与 Dunkl–Cherednik 算子满足变换性质。

定理 3.15. 算子 $\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k) : M(k) \to M(k \pm l)$ 是移位为 $\pm l$ 的非对称移位算子，即它满足变换性质

$$\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k) T_p(k) = T_p(k \pm l) \mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k), \qquad p \in S(\mathfrak{h}).$$

此外，$\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k)$ 将非对称 Heckman–Opdam 多项式的重数移位 $\pm l$：

$$\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k) E_\mu(k) = \mathcal{H}_\pm^{(\varepsilon)}(\mu, k) E_{\mu_{\varepsilon,\pm}}(k \pm l), \qquad \mu \in P.$$

PROOF. 第二个性质指出， $\mathcal{H}_{\pm}^{(\varepsilon)}(\mu,\ k)$ 是 $\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)$ 的移位因子，这是命题 3.12 和推论 3.14 的直接结果。为证明变换性质，只需证明 $\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)T_p(k)$ 与 $T_p(k\pm l)\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)$ 作用于基 $(E_\mu(k))_{\mu\in P}$of $M(k)$ 时相等。将这些算子作用于 $E_\mu(k)$，我们得到 $E_{\mu_\varepsilon,\ \pm}(k\pm l)$ 的倍数，其系数为

$$p(r_k(\mu))\mathcal{H}_{\pm}^{(\varepsilon)}(\mu,k),\quad p(r_{k\pm l}(\mu_{\varepsilon,\pm}))\mathcal{H}_{\pm}^{(\varepsilon)}(\mu,k).$$

如果 $v(\mu)=v(\mu_{\varepsilon,\ \pm})$，那么这些系数相等是由恒等式 $r_k(\mu)=r_{k\pm l}(\mu_{\varepsilon,\ \pm})$推出的；当 $v(\mu)\neq v(\mu_{\varepsilon,\ \pm})$ 时，它们仍然相等，因为此时二者都由推论 3.14 消失。□

注 3.16。 定理 3.15 的证明迫使任意非对称移位算子都将由满足 $r_k(\mu)\neq r_{k\pm l}(\mu_{\varepsilon,\ \pm})$的多项式 $E_\mu(k)$ 张成的子空间包含在其核中。这一点已在命题 3.12 中针对算子 $\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)$ 观察到。

例 3.17。 对于 BC_1 类型的根系，符号特征 ε 是唯一的非平凡线性特征。在此情形下，（非）对称Heckman–Opdam多项式可与（非）对称Jacobi多项式对应起来，二者仅相差一个归一化因子。利用例 3.3 中多项式 q 的显式形式，经过一些初等计算后，非对称移位算子可完全显式地表示为：

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{+}^{(\varepsilon)}(k)&=\frac{1}{e^{\epsilon_1}-e^{-\epsilon_1}}\partial_{\epsilon_1}-\frac{e^{\epsilon_1}(1-r_1)}{(e^{\epsilon_1}-e^{-\epsilon_1})^2};\\ \mathcal{G}_{-}^{(\varepsilon)}(k)&=\partial_{\epsilon_1}+(k(\epsilon_1)+2k(2\epsilon_1)-1)(e^{\epsilon_1}+e^{-\epsilon_1})+2k(\epsilon_1)+e^{-\epsilon_1}-e^{\epsilon_1}r_1.\end{aligned}$$

这些算子与 [10,命题 4.3]和 [26, §8.7]中的非对称移位算子一致。推论 3.14 中的移位因子可简化为

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)E_{(n+1)\epsilon_1}(k)&=(n+k^0(2\epsilon_1)\mp k^0(2\epsilon_1))E_{(n+1\mp1)\epsilon_1}(k\pm l);\\ \mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)E_{-n\epsilon_1}(k)&=(n+k^0(2\epsilon_1)\mp k^0(2\epsilon_1))E_{-(n\mp1)\epsilon_1}(k\pm l)\end{aligned}$$

对所有 $n\geq0$均成立。这些关系与 [10, 引理 4.5]一致。重数 k 可与元组（k（ϵ_1） k（$2\epsilon_1$））对应，此时 $\pm l$ 对应于 $\pm$（0，1）。

最后，我们指出， [10],中也发现了移位为 $\pm$（2，-1）的非对称移位算子，它们提供了具有这些移位的对称移位算子的类似形式，参见例如 [9,命题 3.3.1]。

3.3. 非对称移位算子的性质。 本节讨论非对称移位算子的三种性质。首先，我们观察到，对称移位算子$G_{+}^{(\varepsilon)}$（k）的阶等于 $d_\varepsilon=|\{\alpha\in R_+^0\mid l(\alpha)=1\}|$，而非对称移位算子 $\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}$（$k$）的“阶”总是由 $|R_+^0|$给出，与特征 ε无关。这使我们猜想，存在一个基本非对称移位算子 $\tilde{\mathcal{G}}_{\pm}^{(\varepsilon)}$（$k$），对于 ε 而言，其“阶”同样为 d_ε。其次，我们证明，若 $\tilde{\mathcal{G}}_{+}^{(\varepsilon)}$（$k$）存在，则其在不变子空间$M^W$（$k$）上的限制是一个微分算子，且恰由 $G_{+}^{(\varepsilon)}$（k）给出。最后，第三种性质断言， $\mathcal{G}_{-}^{(\varepsilon)}$（$k+l$）是 $\mathcal{G}_{+}^{(\varepsilon)}$（$k$）的伴随算子，这体现了它们构造中的对偶性。

改写推论 3.14 中的移位因子，使我们得以洞察 ε 的基本非对称移位算子的结构，并据此提出猜想 3.19。

引理 3.18. 设 $\lambda \in P_+$ 与 $\mu \in W\lambda$。则

$$\mathcal{H}_{\pm}^{(\varepsilon)}(\mu,k) = \prod_{\alpha\in R_+^0,\, l(\alpha)=1} \left((\lambda+\rho_k,\alpha^\vee) \mp k^0(\alpha) - 1 + \delta_{\overline{v}(\mu)w_\lambda}(\alpha)\right) \times \prod_{\alpha\in R_+^0,\, l(\alpha)=0} \left((r_k(\mu),\alpha^\vee) - k^0(\alpha)\right),$$

其中，$\delta_w(\alpha) = 1$ 当 $\alpha \in R_+^0 \cap w^{-1}R_-^0$ 且 $\delta_w(\alpha) = 0$ 否则。

Proof. 将c-函数的定义展开后，由推论 3.14 即可得到该引理。展开后显然可见，$\pi(r_k(\mu))$ 消去了它们的分母，剩下的量恰好就是所需的表达式。□

猜想3.19. 对于 W 的任意线性特征 ε，存在一个具有移位 $\pm l$ 的非对称移位算子$\tilde{\mathcal{G}}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)$，它在以下意义下是基本的。所有具有移位 $\pm l$ 的非对称移位算子均具有如下形式:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)T_p(k) \qquad \text{for some } p \in S(\mathfrak{h}).$$

特别地，非对称移位算子 $\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)$可分解如下:

$$\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k) = \tilde{\mathcal{G}}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k) \prod_{\alpha\in R_+^0,\, l(\alpha)=0} (T_{\alpha^\vee}(k) - k^0(\alpha)).$$

注意，对于符号特征，$\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k) = \tilde{\mathcal{G}}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)$，因此该猜想指出，在这种情况下，$\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)$ 是基本的。

猜想3.19 对类型 BC_1 的根系成立，见 [10, 定理4.8]。支持这一猜想的另一项证据是对称移位算子的结构定理，见 [9, 定理3.3.7]„ 该定理指出，对于所有整数重数 l，猜想3.19 的类似结论均成立。$\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)$ 的分解与引理 3.18 中的移位因子一致。

在 [26, 定理8.2(iii)], 中，已经指出，对于符号特征 ε，（基本）非对称移位算子 $\mathcal{G}_{+}^{(\varepsilon)}(k)$ 在不变子空间 $M^W(k)$ 上的限制为 $G_{+}^{(\varepsilon)}(k)$。下面的命题将再次证明这一事实，并在假设猜想3.19成立的前提下，将其推广到任意 ε。

命题 3.20. 猜想3.19 中的算子 $\tilde{\mathcal{G}}_{+}^{(\varepsilon)}(k)$，即符号特征情形下的 $\mathcal{G}_{+}^{(\varepsilon)}(k)$，在 $M^W(k)$ 上的限制是一个微分算子。该微分算子与定理 2.6 中的 $G_{+}^{(\varepsilon)}(k)$ 一致，因此

$$\tilde{\mathcal{G}}_{+}^{(\varepsilon)}(k)P_\lambda(k) = h_{+}^{(\varepsilon)}(\lambda,k)P_{\lambda-\rho_l}(k+l), \qquad \lambda \in P_+.$$

Proof. 为了证明该命题，只需验证将 $\tilde{\mathcal{G}}_{+}^{(\varepsilon)}(k)$ 和 $G_{+}^{(\varepsilon)}(k)$ 作用于 $M^W(k)$ 的基 $(P_\lambda(k))^{\lambda\in P_+}$ 时，二者结果相同。由定理 3.15 和引理 3.18 可得

$$\tilde{\mathcal{G}}_{+}^{(\varepsilon)}(k)E_\mu(k) = \tilde{\mathcal{H}}_{+}^{(\varepsilon)}(\mu,k)E_{\mu_{\varepsilon,+}}(k+l)$$

对所有 $\mu \in P$，其中

$$\tilde{\mathcal{H}}_{+}^{(\varepsilon)}(\mu,k) = \prod_{\alpha\in R_+^0,\, l(\alpha)=1} \left((\lambda+\rho_k,\alpha^\vee) - k^0(\alpha) - 1 + \delta_{\overline{v}(\mu)w_\lambda}(\alpha)\right).$$

对于 $\lambda \in P_+$，根据引理 3.6，我们将 $P_\lambda(k)$ 表示为多项式 $E_\mu(k)$ 的线性组合，其系数为 $\mu \in W\lambda$，由此得到所需的方程

$$\tilde{\mathcal{G}}_{+}^{(\varepsilon)}(k)P_\lambda(k) = h_{+}^{(\varepsilon)}(\lambda,k)P_{\lambda-\rho_l}(k+l) = G_{+}^{(\varepsilon)}(k)P_\lambda(k)$$

is e等价于系数与移位因子之间的下列关系 s

$$\tilde{\mathcal{H}}_+^{(\varepsilon)}(\mu,k)\mathbf{c}_{-k}^{+}(\overline{v}(\mu)w_\lambda)(\lambda+\rho_k)=h_+^{(\varepsilon)}(\lambda,k)\mathbf{c}_{-(k+l)}^{+}(\overline{v}(\mu_{\varepsilon,+})w_{\lambda-\rho_l})(\lambda+\rho_k) \tag{3.9}$$

对所有 $\mu\in W\lambda$。

还需证明关系 (3.9)。当 $\lambda-\rho_l\notin P_+$ 时，该关系显然成立，因为根据引理 3.9（的证明），$\tilde{\mathcal{H}}_+^{(\varepsilon)}(\mu,k)$ 和 $h_+^{(\varepsilon)}(\lambda,k)$ 均为零。设 $\lambda\in\rho_l+P_+$。若 $v(\mu)=v(\mu_{\varepsilon,\pm})$，则只需展开定义并代入 $v(\mu)\underline{w}_\lambda=v(\mu_{\varepsilon,\pm})w_{\lambda-\rho_l}$，即可验证 (3.9)。最后，当 $v(\mu)\neq v(\mu_{\varepsilon,\pm})$ 时，因子 $\tilde{\mathcal{H}}_+^{(\varepsilon)}(\mu,k)$ 根据引理 3.13 为零，因此我们还需证明 (3.9) 右侧也为零。与引理 3.13 的证明类似，存在一个 $i\in I$，使得根 $\alpha_i\in R_+^0\cap(v(\mu_{\varepsilon,+})w_{\lambda-\rho_l})^{-1}R_+^0$ 满足 $\alpha_i\in R_\lambda^0$。由于 $\varepsilon(W_{0\lambda})=\{1\}$，我们有 $\varepsilon(r_i)=1$，因此 $l(\alpha_i)=0$。因此，

$$(\lambda+\rho_k,\alpha_i^\vee)-(k^0(\alpha_i)+l(\alpha_i))=k^0(\alpha_i)-k^0(\alpha_i)=0,$$

由此可得 $\mathbf{c}_{-(k+l)}^{+}(v(\mu_{\varepsilon,+})w_{\lambda-\rho_l})(\lambda+\rho_k)$，因为其中一个因子为零。这就完成了该命题的证明。□

最后，为了证明 $\mathcal{G}_-^{(\varepsilon)}(k+l)$ 是 $\mathcal{G}_+^{(\varepsilon)}(k)$ 的伴随算子，我们首先证明该结论对固定权重成立。

引理 3.21。设 $\lambda\in P_+$ 和 $\mu\in W\mu$。则

$$\big(\mathcal{G}_+^{(\varepsilon)}(\mu,k)E_\mu(k),E_{\mu_{\varepsilon,+}}(k+l)\big)_{k+l}=\big(E_\mu(k),\mathcal{G}_-^{(\varepsilon)}(\mu_{\varepsilon,+},k+l)E_{\mu_{\varepsilon,+}}(k+l)\big)_k.$$

Proof. 当 $\lambda-\rho_l\notin P_+$ 或 $v(\mu)\neq v(\mu_{\varepsilon,+})$ 时，该引理显然成立，因为根据推论 3.14，恒等式两边均为零。设 $\lambda\in\rho_l+P_+$ 且 $v(\mu)=v(\mu_{\varepsilon,+})$。利用 Dunkl–Cherednik 算子和 U_ε 均为形式自伴，且 $\Delta_\varepsilon^*=\Delta_\varepsilon^{-1}$，可得

$$\big(\mathcal{G}_+^{(\varepsilon)}(\mu,k)E_\mu(k),E_{\mu_{\varepsilon,+}}(k+l)\big)_{k+l}=\big(E_\mu(k),U_\varepsilon\Delta_\varepsilon Q_{\mu_{\varepsilon,+}}(k+l)E_{\mu_{\varepsilon,+}}(k+l)\big)_k.$$

注意到 $U_\varepsilon\Delta_\varepsilon=\Delta_\varepsilon U_{\mathrm{triv}}$ 和 $r_{k+l}(\mu_{\varepsilon,+})=r_k(\mu)$，因此

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{G}_+^{(\varepsilon)}(\mu,k)E_\mu(k),E_{\mu_{\varepsilon,+}}(k+l)\big)_{k+l}&=\big(E_\mu(k),\pi(r_k(\mu))\Delta_\varepsilon U_{\mathrm{triv}}E_{\mu_{\varepsilon,+}}(k+l)\big)_k\\&=\big(E_\mu(k),Q_\mu(k)\Delta_\varepsilon U_{\mathrm{triv}}E_{\mu_{\varepsilon,+}}(k+l)\big)_k.\end{aligned}$$

这证明了该引理，因为 $\mathcal{G}_-^{(\varepsilon)}(\mu_{\varepsilon,+},k+l)=Q_\mu(k)\Delta_\varepsilon U_{\mathrm{triv}}$。对于第二个等式，为引入 $Q_\mu(k)$，我们使用了

$$\big(E_\mu(k),\pi(r_k(\mu))E_\nu(k)\big)_k=\delta_{\mu,\nu}\pi(r_k(\mu))\|E_\mu(k)\|_k^2=\big(E_\mu(k),Q_\mu(k)E_\nu(k)\big)_k$$

对所有 $\nu\in W\lambda$均成立。这是非对称 Heckman–Opdam 多项式的正交性和引理 3.2 的结果。□

命题 3.22。算子 $\mathcal{G}_+^{(\varepsilon)}(k):M(k)\to M(k+l)$ 的伴随为 $\mathcal{G}_-^{(\varepsilon)}(k+l):M(k+l)\to M(k)$，即

$$(\mathcal{G}_+^{(\varepsilon)}(k)\phi,\psi)_{k+l}=(\phi,\mathcal{G}_-^{(\varepsilon)}(k+l)\psi)_k,\qquad\phi\in M(k),\psi\in M(k+l).$$

Proof. 该命题可由引理 3.21 得出：分别将 ϕ和 ψ 展开为 $(E_\mu(k))_{\mu\in P}$和 $(E_\nu(k+l))_{\nu\in P}$的形式，并应用命题 3.12。□

3.4. L^2**非对称 Heckman–Opdam 多项式的 -范数。** 接下来，我们将介绍非对称移位算子在非对称 Heckman–Opdam 多项式的 L^2-范数中的一项应用。在 [23], 中，对称移位算子对于 Opdam 解决 Macdonald 常数项猜想以及计算对称 Heckman–Opdam 多项式的L^2-范数起到了关键作用。

根据命题 3.22 中的伴随关系，我们推导出具有移位重数的L^2范数之间的递推关系。 L^2范数公式可以优雅地表示为（广义）Harish-Chandra c函数：

$$\tilde{c}_w(\lambda,k)=\prod_{\alpha\in R_+^0}\left(\frac{\Gamma\big((\lambda,\alpha^\vee)+\delta_w(\alpha)\big)}{\Gamma\big((\lambda,\alpha^\vee)+k^0(\alpha)+\delta_w(\alpha)\big)}\right);$$
$$c_w^*(\lambda,k)=\prod_{\alpha\in R_+^0}\left(\frac{\Gamma\big(-(\lambda,\alpha^\vee)-k^0(\alpha)+\delta_w(\alpha)\big)}{\Gamma\big(-(\lambda,\alpha^\vee)+\delta_w(\alpha)\big)}\right).$$

我们回顾引理 3.18 中 $\delta_w(\alpha)$的定义： $\delta_w(\alpha)=1$ 当 $\alpha\in R_+^0\cap w^{-1}R_-^0$ 时，以及 $\delta_w(\alpha)=0$否则。

命题 3.23. 设 $\lambda\in P_+$ 为正则，且 $\mu\in W\lambda$。假设 $k\geq 0$ 且 $k-l\geq 0$。则

$$\frac{\|E_\mu(k)\|_k^2}{\|E_{\mu_{\varepsilon,-}}(k-l)\|_{k-l}^2}=\frac{\tilde{c}_{\overline{v}(\mu)w_\lambda}(\lambda+\rho_k,k-l)c^*_{\overline{v}(\mu)w_\lambda}(-(\lambda+\rho_k),k)}{\tilde{c}_{\overline{v}(\mu)w_\lambda}(\lambda+\rho_k,k)c^*_{\overline{v}(\mu)w_\lambda}(-(\lambda+\rho_k),k-l)},$$

且右侧既无零点也无极点。

Proof. 移位算子的一个标准结果，参见例如 [9, 命题 3.5.1], ，在我们的情形下依赖于定理 3.15 和命题 3.22，可得关系

$$\frac{\|E_\mu(k)\|_k^2}{\|E_{\mu_{\varepsilon,-}}(k-l)\|_{k-l}^2}=\frac{\mathcal{H}_-^{(\varepsilon)}(\mu,k)}{\mathcal{H}_+^{(\varepsilon)}(\mu_{\varepsilon,-},k-l)}. \tag{3.10}$$

利用函数方程 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$，我们得到

$$\frac{c^*_{\overline{v}(\mu)w_\lambda}(-(\lambda+\rho_k),k)}{c^*_{\overline{v}(\mu)w_\lambda}(-(\lambda+\rho_k),k+l)}=\prod_{\alpha\in R_+^0,\,l(\alpha)=1}\big((\lambda+\rho_k,\alpha^\vee)-k^0(\alpha)-1+\delta_{\overline{v}(\mu)w_\lambda}(\alpha)\big);$$
$$\frac{\tilde{c}_{\overline{v}(\mu)w_\lambda}(\lambda+\rho_k,k-l)}{\tilde{c}_{\overline{v}(\mu)w_\lambda}(\lambda+\rho_k,k)}=\prod_{\alpha\in R_+^0,\,l(\alpha)=1}\big((\lambda+\rho_k,\alpha^\vee)+k^0(\alpha)-1+\delta_{\overline{v}(\mu)w_\lambda}(\alpha)\big),$$

它们分别等于 $\mathcal{H}_+^{(\varepsilon)}(\mu_{\varepsilon,-},k-l)\varpi(\mu,k)^{-1}$和 $\mathcal{H}_-^{(\varepsilon)}(\mu,k)\varpi(\mu,k)^{-1}$，并具有公共因子 $\varpi(\mu,k)^{-1}=\prod_{\alpha\in R_+^0,\,l(\alpha)=0}\big((r_k(\mu)\ \alpha^\vee)-k^0(\alpha)\big)^{-1}$。这里我们用到了 $v(\mu_{\varepsilon,-})w_{\lambda+\rho_l}=v(\mu)w_\lambda$和 $r_{k-l}(\mu_{\varepsilon,-})=r_k(\mu)$，它们因 λ的正则性而成立。将这些表达式代入 (3.10)，公共因子约去后即可证明该命题。

关于右端不存在零点和极点的说明，直接来自 Harish–Chandra c-函数的定义以及命题的假设。□

注记 3.24. 命题 3.23 的公式对于由特征 ε所对应的重数作正整数线性组合 l 得到的重数仍然成立，只需迭代该结果即可。如果重数 k 也具有这种形式，那么我们得到

$$\|E_\mu(k)\|_k^2=\frac{c^*_{\overline{v}(\mu)w_\lambda}(-(\lambda+\rho_k),k)}{\tilde{c}_{\overline{v}(\mu)w_\lambda}(\lambda+\rho_k,k)}$$

令 l 等于 k即可。这个关于非对称 Heckman–Opdam 多项式的 L^2-范数公式推广到了一般的正重数 k，此结果归功于 Opdam，参见 [24, 定理 5.3]。证明依赖于某些酉 $\mathcal{H}(k^0)$-模的结构，参见 [24, 定理 4.1]，，以及一个 [24, 引理 5.2]，该引理使人联想到移位原理。我们采用非对称移位算子的方法更加直接，且与 [23] 中对称情形所采用的原始方法十分相似。

4. Shift operators for non-symmetric Macdonald–Koornwinder polynomials

我们首先 回顾一些 Macdonald–Koornwinder 理论的背景，这些内容基于 [18] .

4.1. 仿射根系预备知识。 设 R 是实仿射空间 E上的一个不可约根系。回忆一下， R 由定义在 E 上的线性函数组成。存在一种典范构造，将 R 关联到一个不可约仿射根系 $S(R)$，它由定义在 E 上的仿射线性函数组成，见 [18, (1.2.1)]。用 V 表示 n维实向量空间，即 E的平移空间。向量空间 V在 E上忠实且传递地作用，因此 E 的每个元素都具有 $x+v$ 的形式，其中$v \in V$取某个固定的 $x \in E$。我们在 V 上赋予内积 $<\cdot,\ \cdot>$。f 上任意仿射线性函数f 均具有如下形式

$$f(x+v) = f(x) + < v, Df >,$$

其中 $v \in V$，而 $Df \in V$ 是 f的梯度。此外， V 上的内积在定义于 E上的仿射线性函数上诱导出一个半正定配对，也记作 $<\cdot,\ \cdot>$，定义为$< f,\ g >=< Df,\ Dg >$。 $S(R)$的对偶为 $S(R)^\vee = \{a^\vee := 2a\,/\,< a,\ a >|\ a \in S(R)\}$。

仿射根系 $S(R)$ 总是约化的。所有约化不可约仿射根系都类似于 $S(R)$ 或 $S(R)^\vee$。因此，我们可以为每个约化不可约仿射根系 S 赋予一个类型，该类型由 R 的类型给出。在 $S \cong S(R)^\vee$ 的情况下，我们在类型上加注 $\vee$。例如，如果 R 是 A_n 类型的根系，那么 $S(R)$ 是 A_n 类型的，而 $S(R)^\vee$ 是 $A_n^\vee$ 类型的。对于非约化不可约仿射根系 S，我们关联两个约化不可约仿射根系

$$S_1 = \{a \in S \mid \tfrac{1}{2}a \notin S\}, \quad S_2 = \{a \in S \mid 2a \notin S\}.$$

S 的类型记作（ S_1 的类型， S_2 的类型）。所有非约化不可约仿射根系都类似于类型为（$C_n^\vee$, C_n）的仿射根系的子系。此外，类型为（$C_n^\vee$, C_n）的仿射根系包含所有仿射根系 $S(R)$ 和 $S(R)^\vee$，其中 R 是以下类型之一： B_n、 C_n、 BC_n 或 D_n。

麦克唐纳–库恩温德多项式与一对带有根重数的不可约仿射根系 (S, S') 相关联： $S \to \mathbb{R}$ 和 $S' \to \mathbb{R}$ 分别对应 k 和 k'，二者互为对偶；此外还有一个变形参数 $q \in (0,1)$。所考虑的数对 (S, S') 满足某些对偶关系，这些关系由另外两对对象描述：一对不可约根系 (R, R') 和一对格 (L, L')。分别以 P和 $P^\vee$ 表示 R和 $R^\vee$的权格，以 Q 和 $Q^\vee$ 表示它们的根格，则有以下三种情形：

情形 1： $S = S(R)$、 $S' = S(R^\vee)$、 $R' = R^\vee$、 $L = P$和 $L' = P^\vee$；
情形 2： $S = S' = S(R)^\vee$、 $R' = R$和 $L = L' = P^\vee$；**情形 3**： $S = S'$的类型为 ($C_n^\vee$, C_n)， $R' = R$的类型为 C_n，且 $L = L' = Q^\vee$，

其中，在前两种情形下， R 为任意约化不可约根系。每种情形下， S 与 S'的根之间都存在一个双射 $a \mapsto a'$。我们固定与双射 $a \mapsto a'$相容的正系 $S^+ \subset S$ 和 $S'^+ \subset S'$。由此确定 S和 S'的单根基底 $\{a_i\}_{i\in I}$ 和 $\{a_i'\}_{i\in I}$，且满足 $I = \{0, \ldots, n\}$。这也导出正系 $R^+ \subset R$和 $R'^+ \subset R'$，以及 R和 R'的单根基底 $\{\alpha_i\}_{i\in I_0}$和 $\{\alpha_i'\}_{i\in I_0}$，且满足 $I_0 = I \setminus \{0\}$。此外，我们分别用 W_S 和 W_0 表示 S 和 R的（仿射）Weyl 群。

k' 在前两种情况下， k 的对偶重数是由 $k'(a') = k(a)$ 给出的 S' 的根重数。对于第三种情况，我们注意到 S 中有五个（若 $n = 1$，则为四个） W_S-轨道，因此 k 由五个参数 k_1、.....、 k_5 确定，因为 k 在 W_S-轨道上为常数。对偶重数 k'

利用参数 k'_1、……、k'_5定义，这些参数是 k_1、……、k_5的某些线性组合，见 [18,(1.5.1)]。借用 [28, Def.2.28], 中的记号，我们引入以下常数集：

$$\tau_{a,k} = q^{\frac{1}{2}(k(a)+k(2a))}, \quad \tilde{\tau}_{a,k} = q^{\frac{1}{2}(k(a)-k(2a))}, \qquad a \in S,$$

按照约定，当 $2a \notin S$ 时，$k(2a) = 0$。注意，如果 $2a \notin S$，则 $\tau_{a,k} = \tilde{\tau}_{a,k}$。常数 $\tau_{a',k'}$和 $\tilde{\tau}_{a',k'}$（其中 $a' \in S'$）的定义类似。

麦克唐纳–库恩温德多项式构造为群代数$A = K[L]$ 中属于某个域 K 的元素，其中该群代数是 L 上的群代数。域 K 是 $\mathbb{R}$ 的子域，包含常数$\tau_{a,k}$, $\tilde{\tau}_{a,k}$和 $q_0 = q^{1/e}$，其中 e 是由 $< L, L' >= e^{-1}\mathbb{Z}$给出的自然数。域 K还包含常数 $\tau_{a',k'}$ 和 $\tilde{\tau}_{a',k'}$。我们在 A 上赋予一个非退化配对 $(\cdot,\cdot)_k$，并将空间 A 连同此配对记作 $A(k)$。为定义该配对，我们引入权函数

$$\Delta_{S,k} = \prod_{a \in S_1^+} (\tau_{a,k}\mathbf{c}_{a,k})^{-1},$$

其中

$$\mathbf{c}_{a,k} = \frac{(1 - \tau_{a,k}\tilde{\tau}_{a,k}e^a)(1 + \tau_{a,k}\tilde{\tau}_{a,k}^{-1}e^a)}{(1 - e^{2a})}.$$

权函数 $\Delta_{S,\,k}$ 具有形式幂级数展开 $\Delta_{S,\,k} = \sum_{r\geq 0}\sum_{\lambda\in L} u_{\lambda,\,r}q^r e^{\lambda}$，据此定义 $f\Delta_{S,\,k}$ 的常数项，其中 $f = \sum_{\lambda\in L} f_\lambda e^\lambda \in A$，如下：

$$\mathrm{ct}(f\Delta_{S,k}) = \sum_{r\geq 0}\Big(\sum_{\lambda\in L} u_{\lambda,r}f_{-\lambda}\Big)q^r.$$

配对用常数项表示为

$$(f,g)_k = \mathrm{ct}(fg^*\Delta_{S,k}),$$

其中，g^* 利用展开式 $g = \sum_{\lambda\in L} g_\lambda e^\lambda$ 定义，令 $g^* = \sum_{\lambda\in L} g_\lambda^* e^{-\lambda}$，其中 $g_\lambda^* \in K$由 g_λ 得到，方法是将 q_0、$\tau_{a,\,k}$和 $\tilde{\tau}_{a,\,k}$ 替换为它们各自的逆元。

最后，我们注意到 W_0 通过转置作用于 $A(k)$。对于线性特征 ε: $W_0 \to K^\times$，我们用 $A^{(\varepsilon)}(k)$ 表示 $A(k)$的 ε-等型分量；当 ε 为平凡特征时，我们记作 $A_0(k)$。

4.2. 正交多项式与赫克代数。回顾第 2.2 节中的记号和定义，并将其相对于 W_0 和 L 而非 W 和 P 来理解。例如，L_+ 表示主导权锥，相对于 W_0 的记号会额外加上一个 0 作为标记；例如，$W_{0\lambda}$ 是 λ 在 W_0 中的稳定化子，$w_{0\lambda}$ 表示其最长元素，而 L 上的偏序记为 $<_0$。

对于 $\lambda \in L$，非对称麦克唐纳–库恩温德多项式 $E_\lambda(k)$ 定义为 $A(k)$ 中满足以下条件的唯一元素：

(i) $E_\lambda(k) = e^\lambda$ +低阶项；(ii) 对所有 $\mu <_0 \lambda$，$(E_\lambda(k)\ e^\mu)_k = 0$。

类似地，对于满足 $\varepsilon(W_{0\lambda}) = \{1\}$ 的 $\lambda \in L_+$，我们将 ε-对称麦克唐纳–库恩温德多项式 $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$ 定义为 $A^{(\varepsilon)}(k)$ 中满足以下条件的唯一元素：

(i) $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k) = m_\lambda^{(\varepsilon)}$ + 低阶项；

(ii) $(P_\lambda^{(\varepsilon)}(k)\ m_\mu^{(\varepsilon)})_k = 0$ 对所有 $\mu <_0 \lambda$。

若 ε 是平凡特征，则多项式 $P_\lambda(k) := P_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$ 称为（对称）Macdonald–Koornwinder 多项式。

引理 2.1 的类似结果将 $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$ 表示为 $E_\lambda(k)$ 的 ε-对称化，情况更为复杂。为准确陈述这一结果，我们利用 W_0 的赫克代数引入 ε-对称化算子的 q-类比。

定义 4.1. W_0 的赫克代数 $\mathfrak{H}_0(k)$ 是一个 K-代数，其生成元为 $T(w)$（$w \in W_0$），并满足以下关系

(i) $T(w)T(w') = T(ww')$，若 $\ell(w) + \ell(w') = \ell(ww')$;
(ii) $(T(r_i) - \tau_{a_i,\,k})(T(r_i) + \tau_{a_i\,k,}^{-1}) = 0$ 对所有 $i \in I_0$,

其中 ℓ 表示 W_0的长度函数。

$\mathfrak{H}_0(k)$在 $A(k)$上有一个忠实表示，称为基本表示，参见 [18,(4.3.3,10)]。W_0 的线性特征 ε 诱导出 $\mathfrak{H}_0(k)$的线性特征 ε_k：$\mathfrak{H}_0(k) \to K^\times$，其定义为 $\varepsilon(T(w)) = \tau_{(\varepsilon)w,\,k}$，其中 $\tau_{w}^{(\varepsilon)\,,\,k} = \tau_{(\varepsilon)^{r_{i_1}},\,k} \cdots \tau_{(\varepsilon)^{r_{i_\ell}},\,k}$对于给定的约化表达式 $w = r_{i_1} \cdots r_{i_\ell}$以及

$$\tau_{r_i,k}^{(\varepsilon)} = \begin{cases} \tau_{a_i,k} & \text{if } \varepsilon(r_i) = 1; \\ -\tau_{a_i,k}^{-1} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于平凡特征，我们简记为$\tau_{w,\,k}$。ε-对称化算子定义为

$$U_\varepsilon(k) = \varepsilon(w_0)\big(\tau_{w_0,k}^{(\varepsilon)}\big)^{-1} \sum_{w \in W_0} \tau_{w,k}^{(\varepsilon)} T(w),$$

它将 $A(k)$ 映射到 $A(k)$ 的 ε_k-等型分量 $A^{(\varepsilon_k)}(k)$。相对于 ε_k 和 ε 的等型分量相同，即 $A^{(\varepsilon_k)}(k) = A^{(\varepsilon)}(k)$，这可由关系[18, (4.3.12),(5.8.7)]推得。

由此我们得到引理 2.1 的相应类比。

引理 4.2。设 $\lambda \in L_+$ 满足 $\varepsilon(W_{0\lambda}) = \{1\}$。则

$$P_\lambda^{(\varepsilon)}(k) = \tau_{w_0,k} W_{0\lambda}(\tau_k^2)^{-1} U_\varepsilon(k) E_\lambda(k),$$

其中 $W_{0\lambda}(\tau_k^2) = \sum_{w \in W_{0\lambda}} \tau_{w,\,k}^2$是 $W_{0\lambda}$的庞加莱多项式在函数 $\tau_k^2 : W_{0\lambda} \to K$，$w \mapsto \tau_{w,\,k}^2$处的取值。

Proof. 这可由 [18, (5.7.7)], 推出，只需注意我们对 $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$ 和$U_\varepsilon(k)$ 的约定与 [18]不同。首先，$P_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$ 的归一化方式使得 e^λ 的系数为 1，而非将 $e^{w_0\lambda}$的系数归一化，因此多出了一个因子 $\varepsilon(w_0)$。其次，这个额外因子已包含在 $U_\varepsilon(k)$的定义中，参见 [18, 5.5.6]。□

4.3. **Cherednik 算子与仿射 Hecke 代数**。群 W_S 等于半直积 $W_S = W_0 \ltimes t(Q^\vee)$ 与 $t(Q^\vee) = \{t(\lambda) : x \mapsto x + \lambda \mid \lambda \in Q^\vee\}$。格 $Q^\vee$ 是 L'的一个子格。为了定义仿射 Hecke 代数，我们引入扩张仿射魏尔群 $W = W_0 \ltimes t(L')$。群 W包含 W_S作为正规子群，并且 $W = W_S \rtimes \Omega'$，其中 $\Omega' = L'/Q^\vee$ 是一个有限阿贝尔群。W_S 的长度函数 ℓ 可扩展到 W，见 [18, §2.2], ，而 Ω' 同构于子群 $\{u \in W \mid \ell(u) = 0\}$。

仿射 Hecke 代数 $\mathfrak{H}(k)$ 定义为定义 4.1 中的 W 的 Hecke 代数。$\mathfrak{H}_0(k)$ 的基本表示扩展为 $\mathfrak{H}(k)$ 在 $A(k)$ 上的忠实表示 β_k：$\mathfrak{H}(k) \to$End$(A(k))$，见 [18, (4.3.10)]。对于 $\lambda' \in L'$，我们可以写成 $\lambda' = \mu' - \nu'$，其中 μ'，$\nu' \in L'_+$ 我们利用它来定义元素 $Y^{\lambda'} = T(t(\mu'))T(t(\nu'))^{-1}$。多项式 $E_\lambda(k)$ 是 Cherednik 算子 $Y^{\lambda'}(k) = \beta_k(Y^{\lambda'})$ 的特征函数，即:

$$Y^{\lambda'}(k) E_\mu(k) = q^{-<\lambda', r_{k'}(\mu)>} E_\mu(k),$$

其中 $r_{k'}(\mu) = \mu - v(\mu^{-1})\rho_{k'}$ 以及 $\rho_{k'} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R^+} k'(\alpha^\vee)\alpha$。对于每个元素 $f' \in A' = K[L']$，我们可以关联一个元素 $Y^{f'}$ 和一个算子 $Y^{f'}(k)$，其在多项式 $E_\mu(k)$ 上的作用由下式给出

$$Y^{f'}(k)E_\mu(k) = f'(-r_{k'}(\mu))E_\mu(k),$$

其中，求值 $f'(x)$ 是通过将 $f' = \sum_{\lambda'\in L'} f_{\lambda'}e^{\lambda'}$ 中的 $e^{\lambda'}$ 替换为 $q^{<\lambda',\ x>}$ 得到的。此外，算子 $Y^{f'}(k)$ 对于 $f' \in A'_0 := (A')^{W_0}$，在 ε-对称多项式 $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$ 上的作用如下：

$$Y^{f'}(k)P_\lambda^{(\varepsilon)}(k) = f'(-\mu - \rho_{k'})P_\lambda^{(\varepsilon)}(k).$$

这是由 $Y^{f'}(k)$ 对多项式 $E_\mu(k)$ 的作用以及等式 $f'(-\mu - \rho_{k'}) = f'(-r_{k'}(\mu))$ 直接得到的。

对于 $\lambda \in L_+$，我们将子空间 $A_\lambda(k) \subset A(k)$ 定义为由满足 $\mu \in W_0\lambda$ 的多项式 $E_\mu(k)$ 张成的 K-线性空间，它作为向量空间同构于 $K[W_0/W_{0\lambda}]$。空间 $A_\lambda(k)$ 是一个带有中心特征 $-r_{k'}(\lambda)$ 的 $\mathfrak{H}(k)$-模，因为 $\mathfrak{H}(k)$ 的中心与 $A'_0(Y) = \{Y^{f'}(k) \mid f' \in A'_0\}$ 重合。对于 $\mu \in W_0\lambda$，权空间

$$A_\lambda^\mu(k) = \left\{f \in A_\lambda(k) \mid Y^{\lambda'}(k)f = q^{-<\lambda',r_{k'}(\mu)>}f, \quad \lambda' \in L'\right\}$$

是一维的，并由 $E_\mu(k)$ 张成。

对于每个特征 ε，模 $A_\lambda(k)$ 可能包含一个 ε-等型分量 $A_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$，其维数至多为一。下面的引理给出两个等价条件，用以刻画这种情形何时发生。为叙述该引理，我们需要以下记号。令

$$S_0 = \{a \in S \mid a(0) = 0\}, \quad S_{01} = S_0 \cap S_1, \quad S_{01}^+ = S_{01} \cap S^+,$$

定义根重数

$$l(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } \varepsilon(r_a) = -1 \text{ and } a \in S_0; \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

并且，如 [18, (5.8.9)], 中那样，令 $\tilde{\rho}_l = \frac{1}{2}\sum_{a\in S_{01}^+} l(a)u_a a \in L$，其中当 $2a \in S$ 时 $u_a = 2$，否则为 $u_a = 1$。

注 4.3。将 $\tilde{\rho}_l$ 改写为关于 $\rho_{k'}$ 的形式会很方便，其中重数 k' 取决于不同情形。具体而言，我们有

> **情形 1** $\tilde{\rho}_l = \rho_{l'}$，这显然成立，因为 $S_{01}^+ = R$；**情形 2** $\tilde{\rho}_l = \rho_{l^\wedge{}'}$，用根重数 $l^\wedge(a) = 2l(a)/|a|^2$ 表示，其中 $a \in S$，这源于 $S_{01}^+ = R^\vee$ 而非 $S_{01}^+ = R$；**情形 3** $\tilde{\rho}_l = \rho_{l'}$，由简短计算即可得出，该计算使用了 $\rho_{k'}$ 关于 k'_1 和 k'_5 的显式表达式，见 [18, §1.5]。

为使用统一记号，我们用 $l^\wedge$ 表示满足 $\tilde{\rho}_l = \rho_{l^\wedge}$ 的根重数。

引理 4.4. 对于 $\lambda \in L_+$，以下条件等价：

$$\dim A_\lambda^{(\varepsilon)}(k) = 1 \iff \varepsilon(W_{0\lambda}) = \{1\} \iff \lambda \in \tilde{\rho}_l + L_+,$$

若这些条件成立，则 $A_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$ 由 $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$ 张成。

Proof. 注意到 $A_\lambda^{(\varepsilon)}(k) = U_\varepsilon(k)A_\lambda(k)$，因此由引理 4.2 可得 $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k) \in A_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$。由于 $\dim A_\lambda^{(\varepsilon)}(k) \le 1$ 由 [18, §5.7], 给出，只需证明

$$\left(U_\varepsilon(k)E_\mu(k) \neq 0 \qquad \text{for some } \mu \in W_0\lambda\right) \iff \varepsilon(W_{0\lambda}) = \{1\}.$$

从右到左的蕴含由 [18, (5.7.7)], 得出，该式指出 $U_\varepsilon(k)E_\lambda(k) \neq 0$。反过来，假设 $\varepsilon(W_{0\lambda}) \neq \{1\}$，则存在某个 $i \in I_0$ 使得$r_i \in W_{0\lambda}$ 且 $\varepsilon(r_i) = -1$。由此可知，对于所有 $\mu \in W_0\lambda$，根据 [18, (5.7.1,2)], 均有 $U_\varepsilon(k)E_\mu(k) = 0$。

我们通过构造一条等价链，证明 $\lambda-\tilde{\rho}_l \notin L_+$ 和 $\varepsilon(W_{0\lambda}) \neq \{1\}$ 等价，从而得出剩余的等价关系。注意到 $\lambda - \tilde{\rho}_l \notin L_+$ 等价于

$$(\lambda, \alpha_i') - (\tilde{\rho}_l, \alpha_i') \in \mathbb{Z}_{\leq -1} \qquad \text{for some } i \in I_0. \tag{4.1}$$

在每种情况下，都可以验证

$$(\tilde{\rho}_l, \alpha_i') = v_{\alpha_i}(\rho_{l'}, \alpha_i^\vee) = v_{\alpha_i} l'(\alpha_i^\vee) \in v_{\alpha_i}\mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{4.2}$$

利用 [18, (1.5.4)] 得到第二个等式。这里，当 $\frac{1}{2}\alpha \in S$ 时，$v_\alpha = 2$；否则为 $v_a = 1$。这在第三种情况下会起作用，此时 $\alpha_n = 2\epsilon_n$ 是 R的长根。注意到 $(\lambda, \alpha_i') \in v_{\alpha_i}\mathbb{Z}_{\geq 0}$，并利用 (4.2)，我们发现 (4.1) 等价于

$$(\lambda, \alpha_i') = 0, \qquad l'(\alpha_i^\vee) = 1 \qquad \text{for some } i \in I_0. \tag{4.3}$$

最后，对于某个 $i \in I_0$，(4.3) 等价于 $r_i \in W_{0\lambda}$ 和 $\varepsilon(r_i) = -1$，即 $\varepsilon(W_{0\lambda}) \neq \{1\}$。 □

由于多项式 $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$ 是 $A_\lambda(k)$ 的一个元素，因此它可以表示为基 $(E_\mu(k))_{\mu\in W_0\lambda}$ of $A_\lambda(k)$ 中元素的线性组合，参见引理 2.4。其系数用**c**-函数描述

$$\mathbf{c}_{k'}^{\pm}(w)(\cdot) = \prod_{a\in S_1'^{+}\cap w^{-1}S_1'^{\pm}} \mathbf{c}_{a',k'}(\cdot), \qquad w \in W_0,$$

其中，求值 $\mathbf{c}_{a',k'}(x)$ 由$\mathbf{c}_{a',k'}$ 得到，只需将 $e^{a'}$ 替换为 $q^{<a',x>}$。

假设 4.5。为避免对**c**-函数求值后出现除以零的情况，我们遵循 [18,p.100:(∗)]，并从此处起对重数k施加以下一般性条件：向量 $\rho_{k'}$ 不被 $W' = W_0 \ltimes t(L)$ 中除恒等元之外的任何元素固定，从而确保 $\lambda + \rho_{k'}$ 和 $r_{k'}(\lambda)$ 对所有 $\lambda \in L$ 都是正则的。

引理 4.6。设 $\lambda \in \tilde{\rho}_l + L_+$。则

$$P_\lambda^{(\varepsilon)}(k) = \sum_{\mu\in W_0\lambda} \varepsilon(\overline{v}(\mu))\tau^{-1}_{\overline{v}(\mu)w_{0\lambda},k}\tau_{w_0,k}\mathbf{c}^{+}_{-\varepsilon k'}(\overline{v}(\mu)w_{0\lambda})(\lambda+\rho_{k'})E_\mu(k).$$

Proof. 在 [18, (5.6.7),(5.7.8)],中证明了

$$P_\lambda^{(\varepsilon)}(k) = \varepsilon(w_0)\sum_{\mu\in W_0\lambda} \varepsilon(v(\mu))\tau_{v(\mu),k}\mathbf{c}^{-}_{-\varepsilon k'}(v(\mu))(r_{k'}(\mu))E_\mu(k).$$

我们注意到 $S_1'^{+} \cap v(\mu)^{-1}S_1'^{-} = v(\mu)w_{0\lambda}(S_1'^{+} \cap (v(\mu)w_{0\lambda})^{-1}S_1'^{+})$，这是由等式$v(\mu) = w_0w_{0\lambda}v(\mu)^{-1}$得出的，利用这一点可得

$$\mathbf{c}^{-}_{-\varepsilon k'}(v(\mu))(r_{k'}(\mu)) = \mathbf{c}^{+}_{-\varepsilon k'}(\overline{v}(\mu)w_{0\lambda})(\lambda+\rho_{k'}).$$

这里我们还用到了 $r_{k'}(\mu) = v(\mu)w_{0\lambda}(\lambda+\rho_{k'})$。将 $\varepsilon(v(\mu))\varepsilon(w_0) = \varepsilon(v(\mu))$ 和 $\tau_{v(\mu),\ k} = \tau_v^{-1}{}_{(\mu)w_{0\lambda},\ k}\tau_{w_0,\ k}$ 代入即可得到所需表达式。□

c 函数还可用于联系 $U_\varepsilon(k)E_\mu(k)$ 与 $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$，从而得到引理 3.8 的对应结果。为此，我们先考察引理 3.5 的对应结果。

引理 4.7. 对于 $\lambda \in L_+$，我们有 $\mathbf{c}^{-}_{k'}(w_{0\lambda})(\lambda+\rho_{k'}) = \tau^{-1}_{w_{0\lambda},k'}W_{0\lambda}(\tau^2_{k'})$.

PROOF. 用 **c**-函数表示的恒等式 [18, (5.1.36)], , 应用于仿射根系 $S'_\lambda = \{a' \in S' \mid < a', \lambda >= 0\}$ 上的 [18, (5.1.3)], , 可写为

$$\sum_{w \in W_{0\lambda}} \prod_{a' \in (S'_\lambda)^+_{01}} \mathbf{c}_{w(a'),k'} = \tau^{-1}_{w_{0\lambda},k'} W_{0\lambda}(\tau^2_{k'}). \tag{4.4}$$

在 $\lambda + \rho_{k'}$ 处求值$\mathbf{c}_{w(a')\,k'}$，得到

$$\mathbf{c}_{w(a'),k'}(\lambda + \rho_{k'}) = \frac{(1 - q^{k'(a') + <w(a'),\rho_{k'}>})(1 + q^{k'(2a') + <w(a'),\rho_{k'}>})}{\tau_{a',k'}(1 - q^{2<w(a'),\rho_{k'}>})}.$$

对于 $w \in W_{0\lambda} \setminus \{e\}$，存在一个根 $a' \in (S'_\lambda)^+_{01}$，使得 $w(a') = -a'_i$，其中某个 $i \in I_0$。因此，

$$< w(a'), \rho_{k'} > = - < a'_i, \rho_{k'} > = -k'(a_i) = -k'(a'),$$

这意味着 $q^{k'(a') + <w(a')\rho_{k'}>} = 1$，表明$\mathbf{c}_{w(a')\,k'}(\lambda + \rho_{k'}) = 0$。由于这一消失，在 $\lambda + \rho_{k'}$ 处对 (4.4) 求值，得到

$$\prod_{a' \in (S'_\lambda)^+_{01}} \mathbf{c}_{a',k'} = \tau^{-1}_{w_{0\lambda},k'} W_{0\lambda}(\tau^2_{k'}).$$

该方程的左边恰好是$\mathbf{c}^-_{k'}(w_{0\lambda})(\lambda + \rho_{k'})$，因为 $S'^+_1 \cap w^{-1}_{0\lambda} S'^-_1 = (S'_\lambda)^+_{01}$，由此引理的证明得证。□

引理 4.8. 设 $\lambda \in \tilde{\rho}_l + L_+$ 和 $\mu \in W_0\lambda$。则

$$U_\varepsilon(k) E_\mu(k) = \varepsilon(\overline{v}(\mu)) \tau_{\overline{v}(\mu)w_{0\lambda},k} \tau^{-1}_{w_0,k} \mathbf{c}^-_{\varepsilon k'}(\overline{v}(\mu) w_{0\lambda})(\lambda + \rho_{k'}) P^{(\varepsilon)}_\lambda(k).$$

PROOF. 将 [28, 引理 4.5] 特化到我们的情形，可得

$$U_\varepsilon(k) E_\mu(k) = \varepsilon(\overline{v}(\mu)) \tau_{\overline{v}(\mu),k} \mathbf{c}^-_{\varepsilon k'}(\overline{v}(\mu))(r_{k'}(\lambda)) U_\varepsilon(k) E_\lambda(k).$$

等式 $\ell(v(\mu)w_{0\lambda}) = \ell(v(\mu)) + \ell(w_{0\lambda})$ 蕴含如下分解

$$S'^+_1 \cap (\overline{v}(\mu) w_{0\lambda})^{-1} S'^-_1 = w^{-1}_{0\lambda}(S'^+_1 \cap \overline{v}(\mu)^{-1} S'^-_1) \sqcup (S'^+_1 \cap w^{-1}_{0\lambda} S'^-_1)$$

由 [18, (2.2.4)],可知

$$\mathbf{c}^-_{\varepsilon k'}(\overline{v}(\mu) w_{0\lambda})(\lambda + \rho_{k'}) = \mathbf{c}^-_{k'}(\overline{v}(\mu))(r_{k'}(\lambda)) \mathbf{c}^-_{\varepsilon k'}(w_{0\lambda})(\lambda + \rho_{k'}). \tag{4.5}$$

注意，我们用 k'替换了 $\varepsilon k'$，这是成立的，因为 $\varepsilon k' \equiv k'$ 在 $S'^+_1 \cap w^{-1}_{0\lambda} S'^-_1 = (S'_\lambda)^+_{01}$上。将 [18, (5.1.41)] 应用于 $W_{0\lambda}$，得到 $W_{0\lambda}(\tau^2_{k'}) = W_{0\lambda}(\tau^2_k)$。结合等式 $\tau_{w_{0\lambda},k'} = \tau_{w_{0\lambda},k}$，可得

$$\tau^{-1}_{w_{0\lambda},k'} W_{0\lambda}(\tau^2_{k'}) = \tau^{-1}_{w_{0\lambda},k} W_{0\lambda}(\tau^2_k). \tag{4.6}$$

关系 $\tau_{w,k'} = \tau_{w,k}$ 对所有 $w \in W_0$均成立，因此特别适用于 $w_{0\lambda}$。注意，该关系可直接由对所有 $a \in S_0$成立的等式 $\tau_{a',k'} = \tau_{a,k}$ 推出。结合 (4.5)、(4.6) 和引理 4.7，可得

$$\tau_{\overline{v}(\mu),k} \mathbf{c}^-_{\varepsilon k'}(\overline{v}(\mu))(r_{k'}(\lambda)) = \tau_{\overline{v}(\mu)w_{0\lambda},k} W_{0\lambda}(\tau^2_k)^{-1} \mathbf{c}^-_{\varepsilon k'}(\overline{v}(\mu) w_{0\lambda})(\lambda + \rho_{k'}). \tag{4.7}$$

回顾引理 4.2 可知 $P_{(\varepsilon)\lambda}(k) = \tau_{w_0,\,k} W_{0\lambda}(\tau^2_k)^{-1} U_\varepsilon(k) E_\lambda(k)$；将 (4.7) 代入 $U_\varepsilon(k) E_\mu(k)$ 的表达式，即可得到该引理。□

4.4. 对称 q-移位算子。 </style}对称的 q-移位算子将具有不同重数的对称 Macdonald–Koornwinder 多项式联系起来。我们重述 [18] 中的 ε-前向 q-移位算子的构造，以突出 q-模拟移位原理（命题 2.5）的用法。

为此，对于 $a \in S_1$，我们令

$$\delta_{a,k} = \begin{cases} (e^{a/2} - e^{-a/2})\mathbf{c}_{a,k} & \text{if } 2a \notin S; \\ (e^{a} - e^{-a})\mathbf{c}_{a,k} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

并定义

$$\delta_{\varepsilon,k} = \prod_{a \in S_{01}^{+},\, l(a)=1} \delta_{a,k}, \qquad \delta'_{\varepsilon,k'} = \prod_{a' \in S_{01}'^{+},\, l'(a')=1} \delta_{a',k'}.$$

命题 4.9 （q-移位原理）。 设 $\lambda \in \tilde{\rho}_l + L_+$。 则

$$P_{\lambda - \tilde{\rho}_l}(k + l^\wedge) = q^{-\frac{1}{2}k\cdot l}\delta_{\varepsilon,k}^{-1} P_\lambda^{(\varepsilon)}(k),$$

其中 $k \cdot l = \sum_{a \in S_0^+} k(a)l(a)$。

Proof. 这个引理本质上是对 $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$ 的不同归一化约定所作的修正，见 [18, (5.8.9)], ; 这会消去因子 $\varepsilon(w_0)$，并修正仅在第二种情形中出现的一处遗漏。此遗漏源于 [18, (5.8.4)], , 其中公式应为

$$\delta_{\varepsilon,k}\delta_{\varepsilon,k}^{*}\Delta_{S,k} = \nabla_{S,k+l^\wedge}/\Delta_{S,\varepsilon k}^{0}, \tag{4.8}$$

使用注 4.3 中的重数 $l^\wedge$。事实上，重数 $l^\wedge$ 的设计目的正是解决第二种情形中的这一问题。□

对称正向移位算子 $G_+^{(\varepsilon)}(k)$ 定义为

$$G_+^{(\varepsilon)}(k) = \delta_{\varepsilon,k}^{-1}\delta'_{\varepsilon,k'}(Y(k)^{-1}),$$

反向变体的定义类似，参见 [18,§5.9]。

我们重新审视 [18, (5.9.7)], 的证明，更明确地说明移位原理 q 的作用。修正后的证明也清楚地表明， [18, (5.8.4)], 中的遗漏（见 (4.8)）如何影响其陈述及证明。

定理 4.10. 算子 $G_+^{(\varepsilon)}(k)$ 将对称 Macdonald–Koorn- winder 多项式的重数平移 $l^\wedge$:

$$G_+^{(\varepsilon)}(k)P_\lambda(k) = h_+^{(\varepsilon)}(\lambda,k)P_{\lambda-\tilde{\rho}_l}(k+l^\wedge), \qquad \lambda \in L_+,$$

其中 $h_+^{(\varepsilon)}(\lambda,k) = q^{\frac{1}{2}k\cdot l}\delta'_{\varepsilon,-k'}(\lambda+\rho_{k'})$。

Proof. 根据 [18, (5.9.5)], , 我们有 $\delta'_{\varepsilon,k'}(Y(k)^{-1})U_{\mathrm{triv}}(k) = \varepsilon(w_0)U_\varepsilon(k)\delta'_{\varepsilon,k'}(Y(k))$，其中额外因子 $\varepsilon(w_0)$ 来自 $U_\varepsilon(k)$ 的定义。利用这一关系和引理 4.2，我们得到

$$\delta'_{\varepsilon,k'}(Y(k)^{-1})P_\lambda(k) = \varepsilon(w_0)\tau_{w_0,k}W_{0\lambda}(\tau_k^2)^{-1}U_\varepsilon(k)\delta'_{\varepsilon,k'}(Y(k))E_\lambda(k).$$

这表明 $G_+^{(\varepsilon)}(k)P_\lambda(k) = 0$ 当 $\lambda - \tilde{\rho}_l \notin L_+$ 时成立，因为此时 $U_\varepsilon(k)E_\lambda(k) = 0$，这与该定理一致，因为在这种情况下 $P_{\lambda-\tilde{\rho}_l}(k+l^\wedge) = 0$。否则，我们假设$\lambda \in \tilde{\rho}_l + L_+$。我们有

$$\delta'_{\varepsilon,k'}(Y(k))E_\lambda(k) = \delta'_{\varepsilon,k'}(-r_{k'}(\lambda))E_\lambda(k)$$

并且 $\delta'_{\varepsilon,\,k'}(-r_{k'}(\lambda)) = \varepsilon(w_0)\delta'_{\varepsilon,\,-k'}(\lambda+\rho_{k'})$，这由 $r_{k'}(\lambda) = w_{0\lambda}(\lambda+\rho_{k'})$ 得出，并且注意到 $w_{0\lambda}$ 会置换所有满足 $l'(a') = 1$ 的根 $a' \in S'^{+}_{01}$，这是由于 $\varepsilon(W_{0\lambda}) = \{1\}$。因此，

$$\begin{aligned} G^{(\varepsilon)}_{+}(k)P_\lambda(k) &= \delta'_{\varepsilon,-k'}(\lambda+\rho_{k'})\delta^{-1}_{\varepsilon,k}P^{(\varepsilon)}_\lambda(k) \\ &= q^{\frac{1}{2}k\cdot l}\delta'_{\varepsilon,-k'}(\lambda+\rho_{k'})P_{\lambda-\tilde{\rho}_l}(k+l^\wedge), \end{aligned}$$

在第二个等式中使用 q-移位原理（命题 4.9）。 □

$G^{(\varepsilon)}_{+}(k)$ 的变换性质是定理 4.10 的直接推论，参见推论 2.7 的证明。

推论 4.11。 算子 $G^{(\varepsilon)}_{+}(k)$ 满足变换性质

$$G^{(\varepsilon)}_{+}(k)Y^{f'}(k) = Y^{f'}(k+l^\wedge)G^{(\varepsilon)}_{+}(k), \qquad f' \in A'_0,$$

视为从 $A_0(k)$ 到 $A_0(k+l^\wedge)$ 的算子。

4.5. **非对称 q移位算子**。 按照 Heckman–Opdam 框架中非对称移位算子的构造，有必要引入一个三角函数类比，它对应于引理 3.1 中可在 Cherednik 算子上求值的多项式。

引理 4.12。 记 $\varpi' = \prod_{a'\in S'^{+}_{01}}\delta_{a',\,0}$，存在一个三角多项式 $\mathfrak{q} \in A' \otimes A'$，使得

$$\mathfrak{q}(x, wx) = \varpi'(x)\delta_{e,w}, \qquad w \in W_0, \tag{4.9}$$

对所有正则的 $x \in E$。

Proof. 根据引理 3.1 的证明，我们寻求一个适当的子空间 $H' \subset A' = K[L']$，它与 $K[W_0]$ 作为向量空间同构，并且对于正则的 $x \in E$，线性同构由下式给出

$$U(x) : H' \to K[W_0],\ h \mapsto \sum_{w\in W_0} h^w(x)\delta_w.$$

为了证明这样一个 H' 的存在性，我们利用这样一个事实： A' 是一个秩为 $|W_0|$ 的自由 A'_0-模，这是 Pittie–Steinberg 定理的一个推论，参见 [29, 定理 2.2.]。此外，该定理还给出了 A' 的一个显式基 $(\mathfrak{u}_w)_{w\in W_0}$，称为 Steinberg 基，我们用它来构造子空间 $H' = \mathrm{Span}_K\{\mathfrak{u}_w \mid w \in W_0\} \subset A'$。

我们来给出这个基的构造。注意到 L' 是根系 $S'_{02} = S'_0 \cap S'_2$ 的权格。该根系的 Weyl 群为 W_0，单根基由 $b'_i = u_{a'_i}a'_i$ 给出，其中 $i \in I_0$。我们将 L' 的基本权记为 $(\lambda_i)_{i\in I_0}$，它们与单根 $(b'_i)_{i\in I_0}$ 对偶。对于每个 $w \in W_0$，基元素 $\mathfrak{u}_w$ 定义为

$$\mathfrak{u}_w = e^{w^{-1}\lambda_w}, \qquad \lambda_w = \sum_{i\in I_0\,:\,w^{-1}b'_i\in S'^{-}_{02}} \lambda_i.$$

$\hat{}$ 我们用矩阵 $U(x) = (\mathfrak{u}^v_w(x))_{w,v\in W_0}$ 表示线性同构 $U(x)$，其所依据的是指定的基。注意，ϖ' 与 S'_{02}的 Weyl 分母相同，即 $\varpi' = \prod_{b'\in S'^{+}_{02}}(e^{b'/2} - e^{-b'/2})$。如 [29, 第175][3], 页所示， $U(x)$的行列式等于 $\varpi'(x)^{d/2}$，其中 $d = |W_0|$。同样的论证表明，$\hat{}U(x)$的子式可被 $\varpi'(x)^{d/2-1}$整除。因此，$\varpi'(x)\,\hat{}U(x)^{-1}$ 的各项都属于 A'。

[3]采用 [29], 的记号，我们注意到，第 175 页上 D_1 的表达式应为 $\prod(a^{1/2} - a^{-1/2})^{n_a}(a \in \Sigma^+)$；并且我们观察到，在我们的情形下，即当 W' 平凡时，由 w_a 互换的行数 n_a 等于 $|W|/2$。

与引理 3.1 的证明中一样，满足 (4.9) 的所需三角多项式 $\mathfrak{q}$定义为 $\mathfrak{q}(x,\cdot) = \varpi'(x)U(x)^{-1}(\delta_e) \in H'$。具体而言，

$$\mathfrak{q} = \sum_{w\in W_0} \mathfrak{q}_w \otimes \mathfrak{u}_w, \tag{4.10}$$

其中，$(\mathfrak{q}_w(x))_{w\in W_0}$ 是 $\pi(x)\,\hat{}\,U(x)^{-1}$的第一列。 □

接下来，对于每个 $\mu \in L$，我们定义算子 $Q_\mu(k) = \mathfrak{q}(r_{k'}(\mu)\ Y(k))$，其中 $\mathfrak{q}$ 是引理 4.12 中的三角多项式，即

$$Q_\mu(k) = \sum_{w\in W_0} \mathfrak{q}_w(r_{k'}(\mu))Y^{\mathfrak{u}_w}(k)$$

用 $\mathfrak{q}$的展开式 (4.10) 表示。

与推论 3.7 中一样，我们关注的是计算算子 $Q_\mu(k)$对多项式 $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$的作用。

引理 4.13. 设 $\lambda \in L_+$ 和 $\mu \in W_0\lambda$。算子 $Q_\mu(k)$定义了一个从 $A_\lambda(k)$到 $A_\lambda^\mu(k)$的映射。此外，若 $\lambda \in \tilde{\rho}_l + L_+$，则

$$Q_\mu(k)P_\lambda^{(\varepsilon)}(k) = \varepsilon(\overline{v}(\mu))\varepsilon(\overline{v}(\mu))\tau^{-1}_{\overline{v}(\mu)w_{0\lambda},k}\tau_{w_0,k}\varpi'(r_{k'}(\mu))\mathbf{c}^+_{-\varepsilon k'}(\overline{v}(\mu)w_{0\lambda})(\lambda+\rho_{k'})E_\mu(k).$$

Proof. 与引理 3.2 的证明类似，我们发现对于所有$\nu \in W_0\mu$，都有 $Q_\mu(k)E_\nu(k) = \delta_{\mu,\ \nu}\varpi'(r_{k'}(\mu))$。因此，可以根据引理 4.6 中的系数，求得 $Q_\mu(k)$对 $P_\lambda^{(\varepsilon)}(k)$的作用。□

例 4.14。

(i) 对于类型为 A_1 的根系 $R = \{\pm\alpha_1\}$ 的权格 L'，三角多项式 $\mathfrak{q}$ 等于 $e^{\alpha_1}\otimes 1 - 1\otimes e^{-\alpha_1}$，因此 $Q_\mu(k) = \left(q^{<r_{k'(\mu)}\alpha_1^\vee>} - Y^{-\alpha_1}(k)\right)$。(ii) 设 L' 为类型为 A_2 的根系 $R = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i,j = 1,2,3,\ i\neq j\}$ 的权格。记对应于单根 $\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2$ 和 $\alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3$ 的基本权为 ϖ_1 和 ϖ_2，则 Steinberg 基由下式给出

$$\mathfrak{u}_1 = 1, \quad \mathfrak{u}_2 = e^{-\varpi_1}, \quad \mathfrak{u}_3 = e^{-\varpi_2};$$
$$\mathfrak{u}_4 = e^{-\varpi_1+\varpi_2}, \quad \mathfrak{u}_5 = e^{\varpi_1-\varpi_2}, \quad \mathfrak{u}_6 = e^{-\varpi_1-\varpi_2}.$$

用这个基表示时，三角多项式具有如下形式:

$$\mathfrak{q} = \sum_{j=1}^{3} \mathfrak{u}^*_{7-j}\otimes\mathfrak{u}_j - \sum_{j=4}^{6}\mathfrak{u}^*_{7-j}\otimes\mathfrak{u}_j.$$

这里，$*$ 表示由 $(e^\lambda)^* = e^{-\lambda}$ 对 $\lambda \in L'$ 定义的对合。

为了采用统一记号，有必要将 q-移位原理（命题4.9）改述如下:

推论 4.15. 设 $\lambda \in L_+$。若 $\lambda \mp \tilde{\rho}_l \in L_+$，则

$$\Delta^{\mp}_{\varepsilon,k}P_\lambda^{(\varepsilon_\pm)}(k) = q^{n^\pm_{\varepsilon,k}}P^{(\varepsilon_\mp)}_{\lambda\mp\tilde{\rho}_l}(k\pm l^\wedge),$$

其中 $\Delta^-_{\varepsilon,\ k} = \delta^{-1}_{\varepsilon k,}$, $\Delta^+_{\varepsilon,\ k} = \delta_{\varepsilon,\ k-l^\wedge}$, $n^+_{\varepsilon,\ k} = -\frac{1}{2}k\cdot l$, 且 $n^-_{\varepsilon,\ k} = -\frac{1}{2}(k-l^\wedge)\cdot l$。

此时，我们可以为固定权重 $\lambda \in L_+$ 和 $\mu \in W_0\lambda$定义 ε-向前/向后非对称 q-移位算子:

$$\mathcal{G}^{(\varepsilon)}_\pm(\mu,k) = Q_{\mu_{\varepsilon,\pm}}(k\pm l^\wedge)\circ\Delta^\mp_{\varepsilon,k}\circ U_{\varepsilon_\pm}(k) : A^\mu_\lambda(k) \to A^{\mu_{\varepsilon,\pm}}_{\lambda\mp\tilde{\rho}_l}(k\pm l^\wedge), \tag{4.11}$$

其中 $\mu_{\varepsilon,\pm} = v(\mu)w_{0\lambda}(\lambda\mp\tilde{\rho}_l)$。

接下来，我们计算算子 $\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(\mu,k)$ 的移位因子。为此，我们先证明消失引理 1 的类似结论（引理 3.9）。

引理 4.16 (q-消失引理 1). 令 $\lambda\in L_+$ 和 $\mu\in W_0\lambda$。若 $\lambda-\tilde{\rho}_l\notin L_+$，则

$$\mathbf{c}^-_{\varepsilon k'}(\overline{v}(\mu)w_{0\lambda})(\lambda+\rho_{k'})=0.$$

Proof. 由于 $S'_{01}=R^\vee$ 且 W_0 是其 Weyl 群，因此存在一个 $i\in I_0$，使得余根$\alpha_i^\vee\in R^{\vee+}\cap(v(\mu)w_{0\lambda})^{-1}R^{\vee-}$ 满足 $\alpha_i^\vee\in R_\lambda^\vee$ 和 $\varepsilon(r_i)=-1$，这由引理 4.16 的证明可得。等价地，我们有 $a'_i=\alpha_i^\vee\in S'^+_1\cap(v(\mu)w_{0\lambda})^{-1}S'^-_1$。我们注意到

$$(1-\tau_{a'_i,\varepsilon k'}\tilde{\tau}_{a'_i,\varepsilon k'}q^{<a'_i,\lambda+\rho_{k'}>})=1-q^{<a'_i,\lambda+\rho_{k'}>+\varepsilon(r_i)k'(a'_i)}=0,$$

由于$<a'_i,\lambda+\rho_{k'}>+\varepsilon(r_i)k'(a'_i)=<a'_i,\rho_{k'}>-k'(a'_i)=0$。因此，$\mathbf{c}^-_{\varepsilon k'}(v(\mu)w_{0\lambda})(\lambda+\rho_{k'})=0$，因为其某个因子为零。□

命题 4.17. 设 $\lambda\in L_+$ 和 $\mu\in W_0\lambda$。则

$$\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(\mu,k)E_\mu(k)=H_{\pm}^{(\varepsilon)}(\mu,k)E_{\mu_{\varepsilon,\pm}}(k\pm l^\wedge),$$

with

$$H_{\pm}^{(\varepsilon)}(\mu,k)=\varepsilon_\pm(\overline{v}(\mu))\varepsilon_\mp(\overline{v}(\mu_{\varepsilon,\pm}))\tau_{\overline{v}(\mu)w_{0\lambda},k}\tau^{-1}_{\overline{v}(\mu_{\varepsilon,\pm})w_{0(\lambda\mp\tilde{\rho}_l)},k\pm l^\wedge}\tau^{\pm}_{w_0,l^\wedge}q^{n^{\pm}_{\varepsilon,k}}\varpi'(r_{k'\pm l^{\wedge\prime}}(\mu_{\varepsilon,\pm}))$$
$$\times\,\mathbf{c}^-_{\varepsilon_\pm k'}(\overline{v}(\mu)w_{0\lambda})(\lambda+\rho_{k'})\mathbf{c}^+_{-\varepsilon_\mp(k'\pm l^{\wedge\prime})}(\overline{v}(\mu_{\varepsilon,\pm})w_{0(\lambda\mp\tilde{\rho}_l)})(\lambda+\rho_{k'}).$$

Proof. 仿照命题 3.10 的证明，在 $\lambda\in\tilde{\rho}_l+L_+$的情形下，根据引理 4.8、引理 4.13 和推论 4.15 追踪各映射，即可计算出移位因子。对于 $\lambda-\tilde{\rho}_l\notin L_+$，有 $\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(\mu,k)E_\mu(k)=0$，因为此时 $U_\varepsilon(k)E_\mu(k)=0$。由引理 4.16 可知 $H_{+}^{(\varepsilon)}(\mu,k)=0$，因此在这种情况下命题成立。

□

与前面一样，为消去对 μ的依赖，我们改写 $\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(\mu,k)$的表达式 (4.11)，并将$Q_{\mu_{\varepsilon,\pm}}(k\pm l^\wedge)$替换为与 μ无关的算子 $\mathcal{Q}_{\pm}^{(\varepsilon)}(w,k)$。更具体地说，对每个线性特征 ε，我们定义 ε-前向/后向非对称 q-移位算子

$$\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)=\sum_{w\in W_0}\varepsilon_\pm(w)\mathcal{Q}_{\pm}^{(\varepsilon)}(w,k)\Delta^\mp_{\varepsilon,k}w,$$

其中

$$\mathcal{Q}_{\pm}^{(\varepsilon)}(w,k)=\sum_{w\in W_0}Y^{\mathfrak{u}_w}(k\pm l^\wedge)C_{\Delta^\mp_{\varepsilon,k}w}(Y^{\mathfrak{q}_w}(k)).$$

命题 4.18。算子 $\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)$ 定义了一个从 $A(k)$ 到 $A(k\pm l^\wedge)$ 的映射，其在 $A^\mu_\lambda(k)$ 上的限制（其中 $\lambda\in L_+$ 和 $\mu\in W_0\lambda$）由下式给出

$$\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(k)\big|_{A^\mu_\lambda(k)}=\begin{cases}\mathcal{G}_{\pm}^{(\varepsilon)}(\mu,k)\big|_{A^\mu_\lambda(k)} & \text{if } v(\mu)=v(\mu_{\varepsilon,\pm});\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Proof. 该命题是引理 3.11 与命题 3.12 结合后的类似结果，其证明也可作相应调整后照搬。□

为联系命题 4.17 中的移位因子，我们建立消失引理 2（引理 3.13）的类似结果。

引理 4.19 (q-消失引理 2). 设 $\lambda\in L_+$ 和 $\mu\in W_0\lambda$。若 $v(\mu)\neq v(\mu_{\varepsilon,\pm})$，则

$$\mathbf{c}^+_{-\varepsilon_\mp(k'\pm l^{\wedge\prime})}(\overline{v}(\mu)w_{0\lambda})(\lambda+\rho_{k'})=0.$$

PROOF. 引理 3.13 的证明稍作调整，也可用于此引理，参见引理 4.16 的证明。□

下面的推论显然成立。

推论 4.20. 设 $\lambda \in L_+$ 和 $\mu \in W_0\lambda$。记

$$\mathcal{H}_\pm^{(\varepsilon)}(\mu,k) = \varepsilon(\overline{v}(\mu))\tau^{\mp}_{\overline{v}(\mu),l^\wedge}\tau^{\pm}_{w_0,l^\wedge}q^{n^{\pm}_{\varepsilon,k}}\varpi'(r_{k'}(\mu))\mathbf{c}^{-}_{\varepsilon_\pm k'}(\overline{v}(\mu)w_{0\lambda})(\lambda+\rho_{k'})$$
$$\times\, \mathbf{c}^{+}_{-\varepsilon_\mp(k'\pm l^{\wedge\prime})}(\overline{v}(\mu)w_{0\lambda})(\lambda+\rho_{k'}),$$

我们有

$$\mathcal{H}_\pm^{(\varepsilon)}(\mu,k) = \begin{cases} H_\pm^{(\varepsilon)}(\mu,k) & \text{if } v(\mu)=v(\mu_{\varepsilon,\pm});\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

接下来证明算子 $\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k)$ 的变换性质。

定理 4.21. 算子 $\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k): A(k) \to A(k\pm l^\wedge)$ 是一个非对称 q-移位算子，移位量为 $\pm l^\wedge$，即它满足变换性质

$$\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k)Y^{f'}(k) = Y^{f'}(k\pm l^\wedge)\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k), \qquad f'\in A'.$$

此外，$\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k)$ 将非对称 Macdonald–Koornwinder 多项式的重数提升 $\pm l^\wedge$:

$$\mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k)E_\mu(k) = \mathcal{H}_\pm^{(\varepsilon)}(\mu,k)E_{\mu_{\varepsilon,\pm}}(k\pm l^\wedge), \qquad \mu\in L.$$

PROOF. 利用命题 4.18 和推论 4.20 改编定理 3.15 的证明 . □

注 4.22. 对于秩一中的第三种情形，即当 $S = S'$ 属于类型 $(C_1^\vee, C_1)$，且符号特征为 ε 时，ε正向/反向非对称 q移位算子的移位为 $\pm(1,1,0,0)$。在这种情况下，（非）对称 Macdonald–Koornwinder 多项式可与（非）对称 Askey–Wilson 多项式对应，差别仅在于归一化。在 [1], Askey 和 Wilson 为他们的多项式找到了具有移位 $\pm\frac{1}{2}(1,1,1,1)$ 的正向/反向 q移位算子，见 [18, §6.4–6]，或者参见 [20] 关于仿射 Hecke 代数的方法。此外，Kalnins 和 Miller [12] 发现了相邻型 q移位算子，其移位由 1 2$(1,1,-1,-1)$ 的六种排列给出。这些移位算子的非对称类比在 [11], 中得到了研究，而我们的 ε正向/反向非对称 q移位算子很可能分解为移位为 $\pm\frac{1}{2}(1,1,1,1)$ 和 $\pm\frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$ 的非对称 q移位算子。

最后，我们讨论命题 3.20 的类似结果。为了准确表述它，当特征不同于符号特征时，需要调整移位因子。这引出了以下猜想的表述，参见猜想3.19。

猜想 4.23。对于任意线性特征 $\varepsilon$of W_0，存在一个非对称 q-移位算子$\tilde{\mathcal{G}}_\pm^{(\varepsilon)}(k)$，其移位为 $\pm l$，使得

$$\tilde{\mathcal{G}}_\pm^{(\varepsilon)}(k)E_\mu(k) = \tilde{\mathcal{H}}_\pm^{(\varepsilon)}(\mu,k)E_{\mu_{\varepsilon,\pm}}(k\pm l^\wedge), \qquad \mu\in L,$$

with

$$\tilde{\mathcal{H}}_\pm^{(\varepsilon)}(\mu,k) = \varepsilon(\overline{v}(\mu))\tau^{\mp}_{\overline{v}(\mu),l^\wedge}\tau^{\pm}_{w_0,l^\wedge}q^{n^{\pm}_{\varepsilon,k}}\delta'_\varepsilon(r_{k'}(\mu))\mathbf{c}^{-}_{\varepsilon_\pm k'}(\overline{v}(\mu)w_{0\lambda})(\lambda+\rho_{k'})$$
$$\times\, \mathbf{c}^{+}_{-\varepsilon_\mp(k'\pm l^{\wedge\prime})}(\overline{v}(\mu)w_{0\lambda})(\lambda+\rho_{k'}).$$

移位因子 $\tilde{\mathcal{H}}_\pm^{(\varepsilon)}(\mu,k)$ 可由 $\mathcal{H}_\pm^{(\varepsilon)}(\mu,k)$ 通过将 ϖ' 替换为 $\delta'_\varepsilon = \delta'_{\varepsilon,0}$ 得到。

对于符号特征 ε，猜想 4.23 成立，因为此时我们只需取 $\tilde{\mathcal{G}}_\pm^{(\varepsilon)}(k) = \mathcal{G}_\pm^{(\varepsilon)}(k)$。

命题 4.24. 假设猜想 4.23 成立，并注意到它对符号特征成立，则算子 $\tilde{\mathcal{G}}_+^{(\varepsilon)}(k)$ 限制为 $A_0(k)$ 上的差分算子。该差分算子与定理 4.10 中的 $G_+^{(\varepsilon)}(k)$ 一致，因此

$$\tilde{\mathcal{G}}_+^{(\varepsilon)}(k)P_\lambda(k) = h_+^{(\varepsilon)}(\lambda,k)P_{\lambda-\tilde{\rho}_l}(k+l^\wedge), \qquad \lambda \in L_+.$$

PROOF. 展开**c**函数的定义，并注意到 $\delta'_\varepsilon(r_{k'}(\mu))$会消去分母，我们得到

$$\tilde{\mathcal{H}}_+^{(\varepsilon)}(\mu,k) = \tau^{-1}_{\overline{v}(\mu),l^\wedge}\tau_{w_0,l^\wedge}q^{\frac{1}{2}k\cdot l}\delta'_{\varepsilon,-(k'+m(\overline{v}(\mu)w_{0\lambda})l^{\wedge\prime})}(\lambda+\rho_{k'}) \tag{4.12}$$

对所有 $\lambda \in L_+$ 和 $\mu \in W_0\lambda$均成立，参见引理 3.18。命题 3.20 的证明同样适用，因为根据引理 4.6，$P_\lambda(k)$可以表示为多项式 $E_\mu(k)$（其中 $\mu \in W_0\lambda$ ）的线性组合。因此，只需证明系数与移位因子之间关系 (3.9) 的对应形式。在此情形下，我们有

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathcal{H}}_+^{(\varepsilon)}(\mu,k)\tau^{-1}_{\overline{v}(\mu)w_{0\lambda},k}\tau_{w_0,k}c^+_{-k'}(\overline{v}(\mu)w_{0\lambda})(\lambda+\rho_{k'})\\ &\quad = h_+^{(\varepsilon)}(\lambda,k)\tau^{-1}_{\overline{v}(\mu_{\varepsilon,+})w_{0(\lambda-\tilde{\rho}_l)},k+l^\wedge}\tau_{w_0,k+l^\wedge}c^+_{-(k'+l^{\wedge\prime})}(\overline{v}(\mu_{\varepsilon,+})w_{0(\lambda-\tilde{\rho}_l)})(\lambda+\rho_{k'})\end{aligned}$$

对所有 $\mu \in W_0\lambda$均成立；当 $\lambda \in \tilde{\rho}_l + L_+$ 且 $v(\mu) = v(\mu_{\varepsilon,\pm})$时，这由 (4.12) 得出。如果 $\lambda \notin \tilde{\rho}_l + L_+$ 或 $v(\mu) \neq v(\mu_{\varepsilon,\pm})$，该关系仍然成立；这一点可以利用命题 3.20 证明中的消失论证来说明。□

致谢。M.v.H. 的研究得到了弗兰德斯研究基金会（FWO）项目 1139226N 的资助。

REFERENCES

[1] R. Askey、J. Wilson，《一些推广 Jacobi 多项式的基本超几何正交多项式》，《美国数学会回忆录》54(319) (1985), iv+55页。[2] I. Cherednik，《通过仿射 Hecke 代数统一 Knizhnik–Zamolodchikov 方程与 Dunkl 算子》，《数学发明》106 (1991), 411–431。[3] I. Cherednik，《通过仿射 Knizhnik–Zamolodchikov 方程求解量子多体问题》，《数学进展》106 (1994), 65–95。[4] I. Cherednik，《双仿射 Hecke 代数与 Macdonald 猜想》，《数学年刊》141 (1995), 191–216。[5] G. Felder、A. Veselov，《通过 Knizhnik–Zamolod- chikov 方程求解量子 Calogero–Sutherland 问题的移位算子》，《数学物理通讯》160 (1994), 259–273。[6] G. Heckman，《Opdam 超几何移位算子的初等方法》，《数学发明》103 (1991), 341–350。[7] G. Heckman，《Dunkl 算子》，Ast´erisque 245 (1997), 223–246。[8] G. Heckman、E. Opdam，《根系与超几何函数 I》，《组合数学》64(3) (1987), 329–352。[9] G. Heckman、H. Schlichtkrull，《对称空间上的调和分析与特殊函数》，载于：Perspect. Math. 16，Academic press，圣迭戈，1994，xii+225页。[10] M. van Horssen、M. van Pruijssen，《向量值多项式形式的 BC_1 型非对称雅可比多项式，第二部分：移位算子》，arXiv:2412.05417 (2024), 42页。[11] M. van Horssen、P. Schl¨osser，《非对称 Askey–Wilson 移位算子》，Stud. Appl. Math. 155(3) (2025), 57页。[12] E. Kalnins、W. Miller，《 q-级数的对称性技巧：Askey–Wilson 多项式》，Rocky Mt. J. Math. 19(1) (1989), 223–230。[13] T. Koornwinder，《 BC 型根系的 Askey–Wilson 多项式》，Contemp. Math. 138 (1992), 189–204。[14] G. Letzter，《量子 zonal 球函数与 Macdonald 多项式》，《数学进展》189(1) (2004), 88–147。[15] I. Macdonald，《关于根系的一些猜想》，SIAM J. Math. Anal. 13(6) (1982), 988–1007。[16] I. Macdonald，《与根系相关的正交多项式》，预印本 (1987)；S´em. Lothar. Combin. 45 (2000), Art. B45a, 40页。[17] I. Macdonald，《仿射 Hecke 代数与正交多项式》，Ast´erisque 237 (1996), 189–207。

[18] I. Macdonald, 《仿射 Hecke 代数与正交多项式》, 载于: 剑桥数学论丛 157, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2003, x+175页。[19] A. Matsuo, 《与 zonal 球函数相关的可积联络》, 《数学发明》110 (1992), 95–121。[20] M. Noumi、J. Stokman, 《Askey–Wilson 多项式: 一种仿射 Hecke 代数方法》, 载于: 《拉雷多正交多项式与特殊函数讲座》, 正交多项式特殊函数理论进展, Nova Science 出版社, 霍波格, 2004, 111–144。[21] E. Opdam, 《根系与超几何函数 III》, 《组合数学》67(1) (1988), 21–49。[22] E. Opdam, 《根系与超几何函数 IV》, 《组合数学》67(2) (1988), 191–209。[23] E. Opdam, 《超几何移位算子的一些应用》, 《数学发明》98 (1989), 1–18。[24] E. Opdam, 《分次 Hecke 代数某些表示的调和分析》, 《数学学报》175 (1995), 75–121。[25] E. Opdam, 《实反射群与复反射群的 Dunkl 算子讲义》, 载于: 日本数学会回忆录 8, 日本数学会, 东京, 2000, viii+90页。[26] E. Opdam、V. Toledano Laredo, 《论 Harish–Chandra 同构》, arXiv:2412.17525 (2024), 45页。[27] S. Sahi, 《非对称 Koornwinder 多项式与对偶性》, 《数学年刊》150 (1999), 267–282。[28] P. Schl¨osser, 《中间 Macdonald 多项式及其向量版本》, arXiv:2310.17362 (2023), 38页。[29] R. Steinberg, 《论 Pittie 的一个定理》, 《拓扑学》14 (1975), 173–177。[30] V. Varadarajan, 《李群、李代数及其表示》, 载于: 数学研究生教材 102, Springer–Verlag, 纽约, 1984, xiii+430页。