arXiv:2602.06798v1 [math.CV] 6 Feb 2026

通过布拉施克乘积实现Beurling-Sobolev空间中的同时多项式逼近

STÉPHANE CHARPENTIER、NICOLAS ESPOULLIER 和 RACHID ZAROUF

摘要。假设当 $t \to 0$ 时， $\phi(t) = o(t^2)$，我们在 Orlicz–Beurling–Sobolev空间 ℓ^ϕ_a中建立了一个关于同时多项式逼近的引理。这些空间配备 Luxemburg范数 $\|\cdot\|_{\ell^\phi}$，推广了针对 $p > 2$的经典Beurling–Sobolev空间 ℓ^p_a。更具体地说，我们证明，对于每个 $\varepsilon > 0$、每个 $v \in \mathbb{N}$ 以及每个在 $\partial\mathbb{D}$上连续的函数 φ，都存在一个多项式 $P(z) = \sum_{k=v}^{d} a_k z^k$ 和一个紧集 $K \subset \partial\mathbb{D}$，满足 $m(K) > 1 - \varepsilon$，使得

$$\|P\|_{\ell^\phi} \le \varepsilon \quad \text{and} \quad \|P - \varphi\|_K \le \varepsilon.$$

证明依赖于一项具有独立意义的结果，该结果描述了非单项式有限Blaschke乘积 B 的幂的 Luxemburg范数 $\|B^k\|_{\ell^\phi}$ 的渐近行为。这种行为取决于 $\phi(t)$ 与 t^2 在 0 附近的比较：当 $\phi \asymp t^2$时，范数保持有界；当 $\phi = o(t^2)$时，范数趋于 0；而当 $\asymp t^2 = o(\phi(t))$时，范数则发散至 $+\infty$。证明中的一个关键环节是定性极限 $\sup_{j\ge 0} |B^k(j)| \to 0$，当 $k \to \infty$时成立。

作为同时逼近引理的一个应用，我们推导出 ℓ^ϕ_a 中具有普适性质的函数的存在性，其中包括泰勒部分和的门绍夫普适性，以及相对于径向边界极限的普适性。

1. 引言

设 $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是一个奥尔利奇函数，即一个满足$\phi(0) = 0$的递增凸函数。奥尔利奇空间 ℓ^ϕ_a 由单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 内满足下述条件的所有解析函数 f 组成：

$$\sum_k \phi\left(\frac{|\hat{f}(k)|}{\lambda}\right) < +\infty,$$

ˆ对某个 $\lambda > 0$成立，其中 $f(k)$表示 f的第 k个傅里叶系数。赋予 Luxemburg范数后，

$$\|f\|_{\ell^\phi} := \inf\left\{\lambda > 0 : \sum_k \phi\left(\frac{|\hat{f}(k)|}{\lambda}\right) \le 1\right\},$$

空间 ℓ^ϕ_a 是一个 Banach空间。当且仅当 ϕ满足 Δ_2 条件时，所有多项式组成的集合在 ℓ^ϕ_a 中稠密；也就是说，存在常数 $K > 0$ 和 $t_0 \in (0, 1)$，使得对于所有 $t \in (0, t_0)$，都有$\phi(2t) \le K\phi(t)$。关于 Orlicz序列空间的基本性质，请参阅 [18] 。典型例子是 Beurling-Sobolev空间 ℓ^p_a, $p \ge 1$，对应于选择 $\phi(t) = t^p$。在此情形下， ℓ^p_a 由定义在 $\mathbb{D}$ 上的所有解析函数 f 组成，且满足

$$\|f\|^p_{\ell^p} := \sum_k |\hat{f}(k)|^p < +\infty.$$

2020 数学主题分类。30J10、30E10、30B30。第一作者获得法国国家研究署 ANR（COMOP项目）资助，资助编号为 ANR-24-CE40-0892-01。Rachid Zarouf 的研究获得 Ampiric试点中心资助，该中心由法国2030投资计划资助，并由 Caisse des Dépôts 运营。

定义在 $\mathbb{D}$ 上的所有解析函数 f 构成的空间，其中傅里叶系数有界，并配备范数

$$\|f\|_{\ell^\infty} := \sup_k |\hat{f}(k)| < +\infty,$$

记作 ℓ^∞_a。

本文旨在在 ℓ^ϕ_a中建立一个同时多项式逼近结果，并附加以下假设

$$\phi(t) = o(t^2) \quad \text{as } t \to 0,$$

利用布拉施克乘积。给定一个紧集 $K \subset \partial\mathbb{D}$ 以及定义在 K上的连续函数 h ，记

$$\|h\|_K := \sup_{z\in K} |h(z)|.$$

引理 1.1 （在 ℓ^ϕ_a中的同时逼近）。 设 ϕ 是一个奥尔利奇函数，满足ϕ（t）$= o$（t^2）当 $t \to 0$时。对于任意 $\varepsilon > 0$、任意 $v \in \mathbb{N}$ 以及定义在 $\partial\mathbb{D}$上的任意连续函数 φ ，存在一个多项式 $P = \sum_{k=v}^d a_k z^k$ 和一个紧集 $K \subset \partial\mathbb{D}$，使得 m（K）$> 1 - \varepsilon$，并且

$$\|P\|_{\ell^\phi} \le \varepsilon \quad and \quad \|P - \varphi\|_K \le \varepsilon.$$

除细微差异外，卡汉和内斯托里迪斯已在[11]中表述了这一结果。他们的证明主要基于另一项逼近结果，该结果在 [12]中通过概率方法得到。我们的证明旨在阐明这样一个一般原理：借助适当的内函数，可以在各种情形下获得此类逼近结果。这一观点近期在 [17]中得到发展，并在 [8]中进一步强调。

同时多项式逼近已在广泛的解析函数弗雷歇空间或巴拿赫空间中得到研究，包括由所有在 $\mathbb{D}$ 中解析的函数构成的弗雷歇空间 $H(\mathbb{D})$（此时结果简化为梅尔格良定理的一个简单变体）、增长空间 [13], 、Bergman、Hardy 和狄利克雷空间 [3, 19], 、加权 ℓ^1_a 空间 [7], 以及布洛赫空间 [17]。关于多个复变量的相应结果可见 [1, 8]。

更确切地说，引理 1.1 将作为下述结果的推论得出，该结果本身也具有独立意义。回顾一下，给定一个有限集 $\sigma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \subset \mathbb{D}$，与之对应的次数为 m 的有限Blaschke乘积 B 定义为

$$B(z) = \prod_{j=1}^m b_{\lambda_j},$$

其中 $b_{\lambda_j} := \frac{\lambda_j}{|\lambda_j|}\frac{\lambda_j - z}{1 - \overline{\lambda_j} z}$ 表示与 λ_j 对应的布拉施克因子。若 f 和 g 是两个正函数，我们记 $f \asymp g$ 为 $t \to 0$，当且仅当存在常数 c、$C > 0$ 和 $t_0 \in$，满足 (0, 1) 且对所有 $t \in$ 属于 (0, t_0)，均有 $cf(t) \le g(t) \le Cf(t)$。

定理 1.2. 设 B 是一个不等于 z 的幂的有限*Blaschke*乘积。

(1) 若 $\phi \asymp t^2$ 当 $t \to 0$ 时，则 $\|B^k\|_{\ell^\phi} \asymp 1$，其中常数与 $k \in \mathbb{N}$ 无关（且当 $\phi(t) = t^2$ 时取等号）；*(2)* 若 $\phi(t) = o(t^2)$ 当 $t \to 0$ 时，则 $\|B^k\|_{\ell^\phi} \to 0$ 当 $k \to \infty$ 时；*(3)* 若 $t^2 = o(\phi(t))$ 当 $t \to 0$ 时，则 $\|B^k\|_{\ell^\phi} \to \infty$ 当 $k \to \infty$ 时。

布拉施克因子幂的 ℓ^p-范数 $p \in [1, +\infty]$的估计，由于其众多应用（例如群代数[10], 晶体测度 [20], 复合算子 [4, 16, 15]以及函数论 [5]），已被研究了相当长的时间。$\|b^k_\lambda\|_{\ell^p}$、$p \in [1, +\infty]$的精确渐近在 [21]中得到。在 [6], 中，研究了 $\|B^k\|_{\ell^\infty}$ 对于有限布拉施克乘积 B 的渐近行为，并将其应用于问题

在与Schäffer关于逆的范数问题相关的矩阵分析中。从这个角度看， ℓ_a^ϕ 中的同时多项式逼近可视为该理论的一项新应用。

如 [11], 所示，应用一个类似于引理 1.1 的结果可知， ℓ_a^p 中几乎所有函数都是门绍夫普适的。更确切地说：

定理 1.3 ([11])。 设 $p > 2$。存在一个稠密的 G_δ-子集 $\mathcal{U}_p$ ，它包含于 ℓ_a^p ，且其中每个函数 $f = \sum_i a_i z^i$ 都属于 $\mathcal{U}_p$ ，并且是门绍夫普适的；也就是说，对于 $\partial\mathbb{D}$上的任意可测函数φ ，都存在一个递增整数序列$(d_n)_n$ ，使得

$$\sum_{i=0}^{d_n} a_i z^i \to \varphi \quad as\ n \to \infty,\ a.e.\ on\ \partial\mathbb{D}.$$

一种适用于算子序列普适性理论的一般方法表明，要在一个由 $\mathbb{D}$中解析函数构成的巴拿赫空间或弗雷歇空间 X 中，证明各种类型的一般普适性结果（例如上文所述的泰勒部分和普适性，或如 [8]中的边界径向极限普适性），其中多项式集是稠密的，只需证明一个关于 X的同时逼近引理，例如引理 1.1。这套方法如今已是经典理论，并在 [2]中有详尽阐述；近期简明的介绍也可参见 [8] 的第 3 节。另一个经典结论是，即使去掉 X中多项式集稠密这一假设，同时逼近论证仍然可以构造出 X中的普适函数；然而，这样做可能会失去关于此类函数集合在贝尔纲定理意义下有多大的信息。因此，我们可以将引理 1.1 的推论直接表述为 ℓ_a^ϕ 中的以下普适性结果，而不再赘述。

定理 1.4. 设 ϕ 为一个奥尔利奇函数，使得当 $t \to 0$时， $\phi(t) = o(t^2)$ 。存在一个属于ℓ_a^ϕ 的函数 $f = \sum_i a_i z^i$ ，满足以下两个性质：

(1) 设$(r_n)_n$ 为$(0,1)$ 中收敛于1的实数序列。对 $\partial\mathbb{D}$上的任意可测函数 φ ，存在递增序列$(n_l)_l$ ，使得对任意 $w \in \mathbb{D}$ 以及几乎处处的 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$,

$$f(r_{n_l}(\zeta - w) + w) \to \varphi(\zeta) \quad as\ l \to \infty;$$

(2) 对 $\partial\mathbb{D}$上的任意可测函数 φ ，存在递增序列$(d_n)_n$，使得对几乎处处的 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$,

$$\sum_{i=0}^{d_n} a_i \zeta^i \to \varphi(\zeta) \quad as\ n \to \infty.$$

如果我们假设 ϕ 满足 Δ_2 条件，则此类函数的集合在 ℓ_a^ϕ中稠密且G_δ 。

注意，该定理展现了某种形式的最优性，因为众所周知， ℓ_a^2 中的任意函数都具有径向边界极限，并且在 $\partial\mathbb{D}$上具有几乎处处收敛的傅里叶级数。关于此类结果在各种情形下的若干例子，我们参阅[1, 2, 3, 7, 8, 14, 17, 19]。

本文结构如下。在第2节中，我们证明定理 1.2。第3节专门用于证明引理 1.1。

2. ℓ^ϕ_a范数的有限Blaschke乘积幂的渐近性 S

我们将通过利用一个并非单项式的有限Blaschke乘积 B 之幂的 ℓ^∞-范数的渐近性来证明定理 1.2。Borichev–Fouchet–Zarouf在 [6, 定理 1] 中得到了 $\|B^k\|_{\ell^\infty}$在 $k \to \infty$ 时的精确定量渐近性（见下文注记2.3）。在本注记中，更具体地说，为了证明定理 1.2的断言2和断言3，我们只需要定性极限

$$\|B^k\|_{\ell^\infty} \to 0 \quad \text{as } k \to \infty.$$

为方便读者，我们因此给出这一事实的直接证明，仅依赖标准的范德科普特估计；该估计已在 [6] 中定理1的证明里发挥核心作用。

引理2.1 （范德科普特，例如， [9]; 特殊情形 $G \equiv 1$ 的引理5，见[6]）。设 F 是区间 $[a,b]$ 上的实值 C^2 函数，并满足以下条件之一：对所有 $x \in [a,b]$，均有 $F''(x) \geq m > 0$；或者对所有 $x \in [a,b]$，均有 $F''(x) \leq -m < 0$。那么

$$\left| \int_a^b e^{iF(x)}\, dx \right| \leq \frac{8}{\sqrt{m}}.$$

为了应用引理2.1，我们引入以下记号。令 $\psi_B(\theta)$ 表示 $B(e^{i\theta})$ 的连续辐角（模 2π 确定），于是

$$B(e^{\mathrm{i}\theta}) = \exp\left(\mathrm{i}\psi_B(\theta)\right).$$

设 $(\xi_\ell)_{\ell=1}^s$ 是 ψ_B'' 在 $[0,2\pi)$ 上的连续零点序列，其对应的重数为 $(N_\ell - 2)_{\ell=1}^s$, $N_\ell \geq 3$。因此 $0 \leq \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_s < 2\pi$，并且对每个 $\ell = 1$，有 $\ldots, s$,

$$\psi_B''(\xi_\ell) = \ldots = \psi_B^{(N_\ell - 1)}(\xi_\ell) = 0, \qquad \psi_B^{(N_\ell)}(\xi_\ell) \neq 0.$$

注意，零点集合 $(\xi_l)_{l=1}^s$ 有限，等价于 B 不是 z 的某个幂的常数倍。

命题 2.2。设 B 是一个有限*Blaschke*乘积，且不是 z 的幂。则当 $k \to \infty$ 时，$\|B^k\|_{\ell^\infty} \to 0$ 。

证明。对于 $j \geq 0$，利用 $B(e^{i\theta}) = e^{i\psi_B(\theta)}$，我们写出

$$\widehat{B^k}(j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\big(i(k\psi_B(\theta) - j\theta)\big)\, d\theta.$$

设 $\xi_1 < \cdots < \xi_s$ 是上文引入的 ψ_B'' 在 $[0,2\pi)$ 上的（有限）零点序列，并令 $\xi_0 = 0$, $\xi_{s+1} = 2\pi$。固定 $\varepsilon > 0$，将积分拆分为在区间 $[\xi_\ell, \xi_{\ell+1}]$,$\ell = 0, \ldots, s$ 上的和。在每个这样的区间上，将

$$\int_{\xi_\ell}^{\xi_{\ell+1}} e^{i(k\psi_B(\theta) - j\theta)}\, d\theta = \int_{\xi_\ell}^{\xi_\ell + \varepsilon} e^{i(k\psi_B(\theta) - j\theta)}\, d\theta + \int_{\xi_\ell + \varepsilon}^{\xi_{\ell+1} - \varepsilon} e^{i(k\psi_B(\theta) - j\theta)}\, d\theta + \int_{\xi_{\ell+1} - \varepsilon}^{\xi_{\ell+1}} e^{i(k\psi_B(\theta) - j\theta)}\, d\theta.$$

第一项和第三项的绝对值至多为 ε。对于中间项，令 $F(\theta) = k\psi_B(\theta) - j\theta$，从而 $F''(\theta) = k\psi_B''(\theta)$。由于 ψ_B''在$(\xi_\ell, \xi_{\ell+1})$上没有零点，其符号在该区间内保持不变。此外

$$m_{\ell,\varepsilon} := \min_{\theta \in [\xi_\ell + \varepsilon, \xi_{\ell+1} - \varepsilon]} |\psi_B''(\theta)| > 0.$$

在 $[\xi_\ell+\varepsilon,\xi_{\ell+1}-\varepsilon]$ 上应用引理2.1可得

$$\left|\int_{\xi_\ell+\varepsilon}^{\xi_{\ell+1}-\varepsilon} e^{iF(\theta)}\,d\theta\right| \le \frac{8}{\sqrt{k\,m_{\ell,\varepsilon}}}.$$

对 $\ell=0,\dots,s$ 求和并除以 2π，我们得到

$$\left|\widehat{B^k}(j)\right| \le \frac{1}{2\pi}\left(2(s+1)\varepsilon+\frac{8(s+1)}{\sqrt{k\,M_\varepsilon}}\right), \qquad M_\varepsilon := \min_{0\le\ell\le s} m_{\ell,\varepsilon} > 0.$$

右端与 j 无关，因此先对 $j\ge 0$ 取上确界，再令 $k\to\infty$，即得 $\limsup_{k\to\infty}\|B^k\|_{\ell^\infty} \le \frac{s+1}{\pi}\varepsilon$。由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，这就证明了$\|B^k\|_{\ell^\infty}\to 0$。□

注记2.3. 命题 2.2 提供了本注记所需的定性输入。为提供背景，并突出尖锐结果 [6, 定理 1], ，我们在下文回顾关于 M_k 的一个渐近尖锐估计。该估计构成对命题 2.2 的定量改进；后文将不再使用它。其证明是对前述证明在技术上更为复杂的精细化。

给定正实数的两个序列 $(a_k)_k$ 与 $(b_k)_k$，若存在两个常数 c、$C>0$，使得对所有充分大的 k 都有 $ca_k\le b_k\le Ca_k$，则我们记 $a_k\asymp b_k$ 为 $k\to\infty$。

定理2.4 （ [6]中的定理1）。设 B 是一个非 z 的幂的有限*Blaschke*乘积，并令 ψ_B、$(\xi_\ell)_{\ell=1}^{s}$、$(N_\ell)_{\ell=1}^{s}$ 如上定义。则有

$$\|B^k\|_{\ell^\infty}\asymp k^{-1/N} \quad as\ k\to\infty,$$

其中 $N=N_B=$ 最大值$_{1\le\ell\le s}N_\ell$。

现在，我们从命题 2.2 推导定理 1.2。

定理 *1.2* 的证明。令 $L^2(\partial\mathbb{D})$ 为通常的希尔伯特空间，由定义在 $\partial\mathbb{D}$ 上的所有可测 Lebesgue平方可积函数构成，并赋予标准内积

$$\langle f,g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \sum_{j\ge 0}\hat f(j)\overline{\hat g(j)}.$$

对于 $p=2$ 和任意 $k\ge 0$，显然有

$$\|B^k\|_{\ell^2}^2 = \left\langle B^k,B^k\right\rangle = 1,$$

由此，当 $\phi(t)=t^2$ 时，得到第一个断言。现在假设 $\phi\asymp t^2$ 随 $t\to 0$ 变化。显然，ℓ_a^ϕ 与 ℓ_a^2 一致。此外，我们将证明存在两个常数 k_ϕ、$K_\phi>0$，使得

$$k_\phi\|f\|_{\ell^2}\le \max\left(\|f\|_{\ell^\phi},\|f\|_{\ell^\infty}\right)\le K_\phi\|f\|_{\ell^2}, \quad f\in\ell_a^2(=\ell_a^\phi). \tag{2.1}$$

事实上，关于 ϕ 的假设使我们能够选取 $t_0\in(0,1)$ 以及常数 k、$K>0$，使得$kt^2\le\phi(t)\le Kt^2$ 对于 $t\in[0,t_0]$ 成立。固定 $f\in\ell_a^2$ 和 $\lambda\ge$ 最大值$(\|f\|_{\ell^\phi},\|f\|_{\ell^\infty})\,t_0$。于是

$$\frac{k}{\lambda^2}\|f\|_{\ell^2}^2\le\sum_{j\ge 0}\phi\left(\frac{|\widehat f(j)|}{\lambda}\right)\le 1.$$

因此 $\lambda\ge\sqrt{k}\|f\|_{\ell^2}$ 令$k_\phi=\sqrt{k}t_0$，即可得到 (2.1) 的第一个不等式。对于另一个不等式，固定 $f\in\ell_a^2$和 $\lambda\ge\frac{\sqrt{K}\|f\|_{\ell^2}}{t_0}$。不妨假设 $K\ge 1$。由于 $\|\cdot\|_{\ell^2}\ge\|\cdot\|_{\ell^\infty}$,

我们有 $\|f/\lambda\|_{\ell^\infty} \le t_0$，因此

$$\sum_{j\ge 0}\phi\left(\frac{|\widehat{f}(j)|}{\lambda}\right) \le K\frac{\|f\|_{\ell^2}}{\lambda^2} \le \|\frac{f}{\|f\|_{\ell^2}}t_0\|^2 \le 1.$$

由此可得 $\|f\|_{\ell^\phi} \le \frac{\sqrt{K}}{t_0}\|f\|_{\ell^2}$，从而得到第二个不等式，其中 $K_\phi = \frac{\sqrt{K}}{t_0}$。

现在，利用对任意 k 都有 $\|B^k\|_{\ell^2} = 1$，在 (2.1) 中用 B^k 替换 f，并应用命题 2.2，可得对所有充分大的 k，都有 $k_\phi \le \|B^k\|_{\ell^\phi} \le K_\phi$。调整常数以涵盖其余有限个 k 值，即得断言 1。

下面证明断言 2。设 ϕ 是一个奥尔利奇函数，满足当 $t\to 0$ 时，$\phi(t) = o(t^2)$，并固定 $\varepsilon > 0$。对于 $k \ge 1$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j\ge 0}\phi\left(\frac{|\widehat{B^k}(j)|}{\varepsilon}\right) &= \sum_{j\ge 0}\left(\frac{|\widehat{B^k}(j)|}{\varepsilon}\right)^2 \frac{\phi\left(\frac{|\widehat{B^k}(j)|}{\varepsilon}\right)}{\left(\frac{|\widehat{B^k}(j)|}{\varepsilon}\right)^2}\\ &\le \frac{\sup_{0<x\le \sup_j|\widehat{B^k}(j)|}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^2},\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $\psi(t) = \phi(t)/t^2$。根据假设，当 $t\to 0$ 时，$\psi(t)\to 0$，因此命题 2.2 表明，(2.2) 右端在 $k\to\infty$ 时趋于 0，故有 $\|B^k\|_{\ell_a^\phi} \le \varepsilon$。由于 ε 任意，这就证明了定理 1.2 的第二个断言。

断言 3 的证明非常类似。假设 ϕ 满足 $t^2 = o(\phi(t))$，其中 $t\to 0$，并固定 $\lambda > 0$。那么，令 $\psi(t) = \phi(t)/t^2$，并按照上述方法推导，可得

$$\sum_{j\ge 0}\phi\left(\frac{|\widehat{B^k}(j)|}{\lambda}\right) \ge \frac{\inf_{0<x\le\sup_j|\widehat{B^k}(j)|}\psi\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\lambda^2}. \tag{2.3}$$

现在，关于 ϕ 的假设等价于 $\psi(t)\to+\infty$，其中 $t\to 0$，因此由命题 2.2 可知，(2.3) 右端在 $k\to\infty$ 时趋于 ∞。由于 λ 是任意的，根据 Luxemburg 范数的定义即可得到结论。□

3. 引理 1.1 的证明

我们对引理 1.1 的另一种证明将基于定理 1.2 的以下推论。

引理 3.1。设 ϕ 是一个奥尔利奇函数，使得 $\phi(t) = o(t^2)$，其中 $t\to 0$。对于任意 $\varepsilon > 0$、任意满足 $P(0) = 0$ 的复多项式 P，以及任意不是 z 的幂的有限*Blaschke*乘积 B，存在 $n_0\in\mathbb{N}$，使得对于任意 $n \ge n_0$，

$$\|P\circ B^n\|_{\ell^\phi} \le \varepsilon.$$

证明。设 ε、P 与 B 如陈述中所述。我们记 $P(z) = \sum_{k=1}^d a_k z^k$。我们有 $P\circ B^n = \sum_{k=1}^d a_k B^{nk}$，则

$$\|P\circ B^n\|_{\ell^\phi} \le \sum_{k=1}^d |a_k|\|B^{nk}\|_{\ell^\phi}.$$

By T定理 1.2 (2)，我们有 $\lim_{n\to\infty}\|B^{nk}\|_{\ell^\phi} = 0$ 对所有 $k = 1\dots d$. 特别地

$$\lim_{n\to\infty}\|P\circ B^n\|_{\ell^\phi} = 0.$$

□

现在我们转向引理 1.1 的证明。

引理 *1.1* 的证明。设 I 是 $\partial\mathbb{D}$ 中的一条弧，满足 $m(I) > 1-\varepsilon$。由梅尔格良定理，存在一个多项式 R，使得 $\|R-\varphi\|_I \le \varepsilon$。再设 Q 是一个多项式，满足 $\mathrm{val}(Q) \ge v$，且

$$\|Q-1\|_I \le \varepsilon.$$

设 B 是一个在 0 处为零且不是 z 的幂的有限Blaschke乘积，并令 $n_0 \in \mathbb{N}$ 为引理 3.1 在 ε、$\max(\|R\|_{\ell^1}, \|R\|_I)$、$Q$ 和 B 的条件下给出的函数。令 $B_0 = B^{n_0}$ 且 $g = R(Q\circ B_0)$，由三角不等式及平移不改变 ℓ^ϕ 范数可得 $\|g\|_{\ell^\phi} \le \|R\|_{\ell^1}\|Q\circ B_0\|_{\ell^\phi} \le \varepsilon$。此外，由于 $B_0(0) = 0$，0 是 g 的一个阶至少为 v 的零点。现在令 $K = B_0^{-1}(I)$。由于函数 B_0 是内函数且 $B_0(0) = 0$，它保持归一化勒贝格测度不变。特别地，$m(K) = m(I) > 1-\varepsilon$，因此 $m(K\cap I) \ge 1-2\varepsilon$。于是，对任意 $z \in K\cap I$，

$$\begin{aligned} |R(z)Q(B_0(z)) - \varphi(z)| &\le |R(z)-\varphi(z)| + |R(z)||Q(B_0(z))-1| \\ &\le 2\varepsilon. \end{aligned}$$

注意到 $m(K\cap I) \ge 1-2\varepsilon$。由于 ε 是任意的，只要验证 g 可以由多项式适当地逼近，结论就成立。

利用伸缩函数 $g_r := z \mapsto g(rz)$ 收敛于 g 的 g 中的 ℓ^ϕ_a，并且当 $r\to 1$ 时在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上一致收敛，可以找到足够接近于 1 的 r，使得在 $\overline{\mathbb{D}}$ 的邻域内解析的函数 g_r 满足引理的结论，唯一的例外是它不是多项式。最后，对于 $n\in\mathbb{N}$，令 S_n 表示从 $H(\mathbb{D})$ 到自身的算子，该算子将 $f = \sum_k a_k z^k$ 映射为其 n 阶泰勒部分和 $\sum_{k=0}^n a_k z^k$。于是 $\|S_n(g_r)\|_{\ell^\phi} \le \|g\|_{\ell^\phi}$，并且当 $n\to\infty$ 时，$S_n(g_r) \to g_r$ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上一致成立。因此，对于某个足够大的 n，我们可以令 $P = S_n(g_r)$。□

参考文献

1. F. Bayart，全纯函数的通用径向极限，Glas. Math. J. **47** (2005)，第2期，261–267。2. F. Bayart、K.-G. Grosse-Erdmann、V. Nestoridis 和 C. Papadimitropoulos，通用级数的抽象理论及其应用，Proc. London Math. Soc. (**3**) **96** (2008)，417–463。3. H. P. Beise 和 J. Müller，哈代空间与伯格曼空间中泰勒级数的典型边界行为，Math. Z. **284** (2016)，1185–1197。4. M.Y. Blyudze 和 S.M. Shimorin，某些巴拿赫空间中函数幂的范数估计，J. Math. Sci.**80** (1996)，第4期，1880–1891。5. A. Borichev、K. Fouchet 和 R. Zarouf，布拉施克因子幂的傅里叶系数与强环状函数，Constr. Approx. **60** (2024)，第1期，33–86。6.，有限布拉施克乘积幂的傅里叶系数，Int. Math. Res. Not. IMRN (2024)，第20期，13255–13280。7. S. Charpentier，具有通用边界行为的全纯函数，J. Approx. Theory **254** (2020)，105391。8. S. Charpentier、N. Espoullier 和 R. Zarouf，具有剧烈边界行为的布洛赫函数，定义于 $\mathbb{C}^N$，Bull. Lond. Math. Soc. **57** (2025)，第6期，1691–1707。9. A. Ivic，黎曼ζ函数：理论与应用，Dover Publications，米尼奥拉，纽约州，2003年，重印1985年原版；John Wiley & Sons，纽约。10. J.-P. Kahane，关于某些绝对收敛的傅里叶级数类，J. Math. Pures Appl.**9** (1956)，249–259。11. J.-P. Kahane 和 V. Nestoridis，按门乔夫意义的通用泰勒级数与三角级数，J. Math. Pures Appl. **79** (2000)，855–862。12. J.P. Kahane 和 Y. Katznelson，关于解析函数的径向行为，C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **272** (1971)，A718–A719。13. S. V. Khrushchev，同时逼近问题与柯西型积分奇点消除问题，Trudy Mat. Inst. Steklov. **130** (1978)，124–195，223。14.，在给定的勒贝格测度为零的闭集上具有通用傅里叶级数的连续函数，J. Approx. Theory **252** (2020)，105361，6。

15. P. Lefèvre、D. Li、H. Queffélec 和 L. Rodríguez-Piazza，关于加权哈代空间上复合算子的若干问题，Pure and Applied Functional Analysis，即将发表；参见 arXiv:2311.01062。16. ，所有复合算子均有界的加权哈代空间的刻画，分析与偏微分方程 **18** (2025)，第8期，1921–1954。17. A. Limani，布洛赫空间中的渐近多项式逼近，预印本，arXiv:2403.08723。18. J. Lindenstrauss 和 L. Tzafriri，经典巴拿赫空间。*I*，数学及其边缘领域成果 [数学及其相关领域成果], 第92卷，施普林格出版社，柏林-纽约，1977年，序列空间。19. K. Maronikolakis，解析函数空间中的通用径向逼近，数学分析与应用杂志**512** (2022)，第1期，126102。20. Y. Meyer，晶体测度与平均周期函数，rans. R. Norw. Soc. Sci. Lett. **2** (2022)，5–30。21. O. Szehr 和 R. Zarouf，l_p布拉施克因子幂的傅里叶系数 范数，分析数学杂志**140** (2020)，第1期，1–30。

艾克斯-马赛大学、法国国家科学研究中心、I2M，法国马赛电子邮箱地址：stephane.charpentier.1@univ-amu.fr

艾克斯-马赛大学、法国国家科学研究中心、I2M，法国马赛电子邮箱地址：nicolas.espoullier@etu.univ-amu.fr

艾克斯-马赛大学、ADEF实验室、圣热罗姆大学校区，法国马赛诺曼底中队大道52号，F-13013

CPT、艾克斯-马赛大学、土伦大学，法国马赛电子邮箱地址：rachid.zarouf@univ-amu.fr