arXiv:2602.06802v1 [math.LO] 6 Feb 2026

可行构造主义

Paul Gorbow 和 Øystein Linnebo

2026年1月21日稿

摘要

Dummett 关于直觉主义的论证广为人知。有人担心，这一论证证明得太多了，具体而言，它支持了严格有限主义这一极端且显然自相矛盾的立场。核心问题在于，如何阐明这样一种观念：在实践中可能构造一个算术项或验证一个陈述。严格有限主义的回答深受连锁悖论困扰。我们提出并发展了可行主义，认为这是一种更为合理的观点：以多项式时间问题类所刻画的计算可行性，为“实践中可能”提供了一种稳健而便于操作的阐释。在这种方法中，复杂度受输入规模的多项式函数限制，而非受常数限制（如严格有限主义所主张），从而解决了连锁悖论问题。我们表明，Sam Buss 提出的严格有界算术系统能够精确形式化可行主义观点，从而满足 Dummett 的要求。

1 引言

直觉主义常被视为对经典数学的一种令人痛苦的限制。例如，希尔伯特将直觉主义描述为“禁止 [.....] 拳击手使用双拳”（Hilbert，1927，第476页）。尽管这种看法广为流传，希尔伯特也曾尖刻地评论过直觉主义，我们仍提议探究是否存在更具限制性、但依然自洽且有趣的观点。

显然，我们有必要解释为何次直觉主义观点值得关注。剥夺拳击手使用双拳的权利，还不够糟吗？我们认为，有两个理由值得关注这类观点。

一个理由可以用 Feferman（1998）的观察来概括：“一点点就能发挥很大作用。”事实证明，凭借相对有限的资源，我们也能完成出人意料多的数学工作。此外，当我们从较弱的假设证明一个结果时，会了解到一些仅凭更强假设进行经典证明所无法让我们了解的东西。[1] 因此，探究在非常弱的假设下我们能证明什么，可能很有趣。重要的是要强调，即使我们愿意采用更强的假设，这个问题仍然可能很有趣。好奇于仅凭十分有限的资源能把日子过得多好，不能与希望一生都如此节俭地生活混为一谈。

对次直觉主义观点感兴趣的第二个理由——这也将是本文的主要关切——是一个众所周知的担忧：支持直觉主义的论证证明得过多。即便这些论证真能成立，它们似乎也会确立一种比直觉主义更为激进的观点。由于次直觉主义观点通常被认为存在深刻问题，这对直觉主义的支持者而言将是一个令人不安的结果。

至少在哲学家中，唯一广为人知的次直觉主义观点是严格有限主义。这种观点认为，数的数量是有限的，因此存在一个上限，限定了数能有多大

[1] 这一观察常被归于乔治·克赖塞尔，参见例如 Feferman (1996)。

。正如我们很快就会看到的，这种观点薄弱到了自相矛盾的地步。

我们的目标是阐明一种清晰、融贯且有趣得多的次直觉主义观点，称为可行主义，它以多项式时间可计算性为基础。就逻辑强度而言，我们有：

$$\text{严格有限主义} \quad < \quad \text{可行主义} \quad < \quad \text{直觉主义}$$

以下是我们的计划。首先，我们说明“证明得太多”这一担忧如何适用于 Dummett 的论证。[2] 然后，我们介绍可行主义，并解释这一观点如何应对这一担忧。最后，我们恰当地发展可行主义，并表明它满足 Dummett 的要求。

2 Dummett 的论证是否证明得太多?

Dummett 为直觉主义逻辑提出的论证，从一项意义理论约束出发，即理解一个陈述包含知道什么可以算作对该陈述的构造和证明，进而得出这样的结论：直觉主义推理是有正当性的，但诸如排中律之类的经典推理一般并无正当性，例如见 Dummett（1978）。不过，Dummett（1975）以典型的方式阐述了对这一支持直觉主义的论证的担忧。这一担忧具有如下结构：

（1）Dummett 支持直觉主义的论证同样支持严格有限主义。

（2）严格有限主义自相矛盾。

（3）因此，我们已经找到了拒绝 Dummett 这一论证的理由。

我们按顺序详细阐述前提（1）和（2）。

按照 Dummett 的说法，

> [建]构主义数学哲学坚持认为，所有出现在数学陈述中的术语，其含义[. ..] 都必须根据我们能够实施的构造以及我们识别此类构造能够为这些陈述提供证明的能力来界定（Dummett，1975，第301页，斜体为本文作者所加）

因此，邓梅特的建构主义核心在于要求以我们“能够实现”或识别的内容来给出意义的说明。他通过反思我们如何学习数学语言来为这一约束进行辩护：

> 我们学习它们的意义，也只能通过训练其使用来学习；这意味着训练自己进行数学构造，并在数学语言中记录它们。我们无法通过这样的训练获得任何超越它的事物，例如一种独立于我们识别其真值的手段之外的、关于数学陈述的真与假的观念。（斜体为原文所加）（Dummett，1975年，第301页）

假设我们接受邓梅特提出的意义的构造主义说明。正如他所指出的，这将对逻辑产生影响，因为

> [.....] 我们承认有效的推理原则，必须能够依据逻辑常项及其他表达式的既定含义加以证成。

[2]布劳威尔的论证大概也会引发类似的疑虑。我们不再探讨这一问题 .

毕竟，邓梅特的构造主义意味着，任何形式为 $\exists x\varphi(x)$ 的定理，都必须有一种 显现作为支撑，也就是说，必须有效地构造出一个对象 a，并验证 $\varphi(a)$。此外，它还意味着，只有直觉主义推理才是合理的。就算术而言，(Dummett, 1977, p. 36) 认为，这一观点可由海廷算术（HA）形式化。这相当自然，因为 HA 具有众所周知的存在性性质。

到目前为止，一切顺利——Dummett 这样认为。现在谈谈他的担忧。Dummett 的论证关键在于“我们能够实施的构造”和“我们识别的能力”这两个概念。这些概念应当如何理解？直觉主义进行了激进的理想化，将这两个概念都理解为我们原则上能够做的事情。这种理想化是否合理？为什么不把范围限制在我们实际上能够做的事情上？也就是说，为什么不坚持认为

> 我们的术语的意义必须通过参照我们实际上能够实施的构造来给出，并且必须参照那些我们实际上准备依赖的正确证明标准（同上，斜体为本文所加）

这种对 Dummett 意义约束的解释要求一种比直觉主义更严格的观点。而这对 Dummett 来说是危险的。因为对这种更激进观点通常的阐释是严格有限主义。

如前所述，如果严格有限主义成立，那么数的大小存在一个上限。正如 Dummett（1975）所说，“‘自然数’必须理解为一个我们实际上能够表示的数”（第 303 页）。因此，严格有限主义者常常以我们事实上无法生成相应的标准数字表达式为理由，否认存在诸如 $10^{10^{10}}$，这样的数。显然，这是一种极为激进的观点——我们认为，它激进到已经成了问题。

自然数在通常的算术运算下是否具有封闭性，包括后继运算？严格有限主义者面临着两难。假设他们否认这种封闭性。这将使数学陷入瘫痪——其后果甚至比被剥夺使用拳头的能力还要糟糕。

或者，假设严格有限主义者承认后继函数的全域性。那么，他们就需要将这一承认与“只有较小的自然数存在”这一观点调和起来。正如 Dummett（1975）所指出的，这会导致连锁悖论的一个版本，他称之为王氏悖论：

- 0很小

如果 n 很小，那么 n' 很小

Dummett 的诊断是：“n很小”无论被解释为“n 粒沙太少，无法堆成一堆”，还是被解释为“实际上可以写出 n的阿拉伯数字”，都是模糊的。基于这种模糊性，Dummett（1975）详细论证了，严格有限主义的任何形式化都是不一致的。另一方面，Wright（1982）声称克服了这一障碍。无论如何，我们认为，严格有限主义已经存在一个严重的尴尬之处：它需要区分哪些数“很小”，哪些数“不小”。除了王氏悖论之外，什么算作小数，还将取决于有关我们是什么类型的生物以及所处环境类型的局部事实。

因此，无论面对两难困境的哪一端，严格有限主义似乎都存在严重问题。

3 可行主义：一种连贯而有趣的观点

然而，存在一种连贯而有趣的次直觉主义观点——与严格有限主义相比，它也是 Dummett 的论证更有说服力的落脚点。

我们提出的方案称为可行主义，它将实践中的可构造性和可验证性形式化为：相对于依赖变量的复杂度，可由多项式时间算法构造和验证。具体而言，对于原子式 φ, $\forall x\exists y\varphi(x,\ y)$，这意味着

当且仅当存在一台多项式时间图灵机，使得对每个输入项 s，它都会输出一个项 t 以及一个关于 $\varphi(s,\ t)$ 的直觉主义证明时，该式才算得到验证。将可行计算等同于多项式时间计算，已深深植根于计算机科学领域，成为一项方法论原则。这一原则称为科巴姆论题，由 Cobham 在 1965 年提出并加以论证。

我们认为，可行主义消除了 Dummett 的顾虑。因为我们似乎可以得出：

(1′) Dummett 为直觉主义提出的论证支持的是可行主义，而非严格有限主义 m.

(2′) 可行主义是自洽的。

(3′) 因此，我们尚未找出拒绝 Dummett 论证的理由。

我们是否应该接受 Dummett 的论证，当然是另一个问题。顺便说明：我们对此持怀疑态度。不过，这一点不会对本文产生任何影响。

让我们为这一论证的两个前提辩护。我们先从可行主义的自洽性（2′）谈起，因为这是最直接的。可行主义显然避开了严格有限主义的问题。它承认后继函数的整体性。由此，它也避开了连锁悖论。为了进一步证明其自洽性及其重大的理论价值，我们将在下一节更恰当地阐述这一观点。

转向第一个前提（1′），关键在于如何阐明“我们能够完成的”。恰当的理想化程度是什么？以下是三种主要选项，以及它们所导向的观点。

- 无：绝对资源受限计算机 $\rightsquigarrow$ 严格有限主义
- 相对资源受限计算机 $\rightsquigarrow$可行主义
- 资源无界计算机 $\rightsquigarrow$直觉主义

我们认为，Dummett 关于通过训练其用法来习得意义的论证，恰好支持了我们所提出的可行主义观点。自然，训练过程的复杂度取决于所要习得其意义的术语的复杂度。可行主义按照可行性的标准复杂性类——即多项式时间——将这种依赖关系形式化，因此这一观点在理论上稳健，并消解了模糊性与任意截断之间的不协调。

如前所述，Dummett 对建构主义的刻画取决于“我们能够完成的构造”这一表述，关键问题在于如何阐明这种能力。一种选择是以尽可能严格的方式理解“能够”，将其等同于某个固定的、绝对受限的计算主体所拥有的资源。这便导向严格有限主义：只有符合不可逾越的资源上限的构造才有意义。但正如 Dummett 本人所强调的，这种做法不可避免地会在形式层面重新引入王氏悖论的模糊性。此外，任何此类严格的资源上限都必须独立于正在考察的数学任务来设定。因此，它并未追踪数学实践或推理的任何一般结构特征，而只是反映特定主体或情境的局限。从科学视角看，这存在问题：科学通常追求具有普遍解释力和预测力的原则，而不是效力取决于某个特定有限系统偶然能力的理论。

另一极端则是一种解读：相关主体不受资源限制。在这种解读下，理想化的、非有限主义计算能力所允许的一切构造都变得正当——这正是直觉主义算术（HA）所体现的立场。尽管这消解了有限主义者的顾虑，却可以说远远超出了 Dummett 更严格的语义要求。对训练和识别的强调表明，我们需要的是一种更为温和、可操作且切实可行的方案。

可行主义占据了有原则的中间立场。如果将“能够实现”理解为相对于一种资源受限但可无限扩展的计算模型而言，那么多项式时间计算便自然成为对这一概念的阐释。它既避免了严格有限主义的武断，又尊重了 Dummett 强调的语义约束。重要的是，这一立足实际的中间路线保留了 Dummett 语义约束的精神与字面含义：构造必须切实可行，但“切实可行”的标准会以规则支配、非武断的方式，随着输入的复杂度而变化。这种对实践可能性的相对解读，使这一概念不再依赖于针对特定主体设定的任何特殊资源约束。由此，我们得到了一种稳健的概念，在方法论上适合以普遍解释力为目标的科学目标。下一节中，我们将通过提供一个形式框架，充分阐释可行主义这一稳健的科学观点；该框架既有力地满足 Dummett 的要求，也对其作出了精确阐述。

4 阐释并应用可行主义

如前所述，可行主义避开了王氏悖论，这是确立其融贯性的第一步。但还有更多工作要做。我们需要沿着这一动机思想，精确阐释可行主义：只有多项式时间可计算的事物才是可行的。我们还需要证明，可行主义满足 Dummett 关于意义理论的约束，从而使这一进路能够用作一种激进形式的建构主义。我们在很大程度上依赖 Buss（1986）对多项式时间复杂度所作的系统逻辑刻画，并将在本节中默认以此为参照。[3]

首先，我们精确阐述可行主义观点，并公理化一个关于可行算术的一阶理论 FA（§4.1），旨在刻画这一观点。其次，我们说明该系统如何自然地刻画多项式时间可计算性——这是我们对可行性的核心形式化（§4.2）。第三，我们在 FA 中为可行主义给出一种可实现性语义（§4.3），由此展示 FA 满足 Dummett 的语义约束的确切且强有力的意义。尤其是，相关语义标准——“我们有能力实施的构造”以及“我们识别此类构造能够提供证明的能力”——以及“我们认可为有效的推理原则……必须能够根据意义得到论证”这一要求，均依据科巴姆论题在 FA 中得到了精确界定。

4.1 可行算术系统

我们将可行主义 视为这样一种观点：一个算术构造有效，当且仅当它能够按其输入规模在多项式时间 内完成。具体而言，给定项 $t(\vec{x})$，相对于特定自变量 $\vec{a}$ 计算 t 的值时，其运行时间必须受限于 $\vec{a}$的总二进制长度 $|\vec{a}|$ 的某个多项式。更一般地，为了回应Dummett的要求，我们将这一概念从单纯的项求值扩展到为算术陈述构造实现子 。因此，对于公式 $\varphi(\vec{x})$，可行主义要求：对每一个输入 $\vec{a}$， $\varphi(\vec{a})$成立，当且仅当存在一个针对 $\varphi(\vec{a})$的实现子 r ，且该实现子可在 $|\vec{a}|$的多项式时间内计算出来；并且同样存在一个多项式时间过程，用以判定这样的 r 是否确实是 $\varphi(\vec{a})$的实现子。简言之，数学意义的构造与正确性的识别都被视为可行，且恰好

[3]自 Buss 的开创性研究以来，人们在用逻辑术语刻画计算复杂度类方面取得了显著进展，尤其是多项式时间类。不过，出于哲学考量，Buss 的刻画仍最为突出，因为它是人们熟悉的皮亚诺算术（PA）中一个相对简单的经典一阶片段。随后，Leivant（1991）提出了一个二阶刻画。近期研究着重于在 *linear logic* 中刻画多项式时间复杂度；这是一种限制重复使用假设能力的次直觉逻辑。从复杂性理论的角度看，这很自然，因为复制会消耗实际的计算资源。这一研究方向的代表性成果包括 Crossley 和 Seely（1994）、Brunel 和 Terui（2010），以及 Dal Lago 和 Hofmann（2011）。

当它们可在多项式时间复杂度内实现时。此外，可行主义要求，任何有效的推理都必须保持这些关于意义与识别的条件。

我们认为，Buss 的一阶经典系统 S_2^1 恰好具备满足这些要求所需的力量，因此建议将其命名为 FA，即“可行算术”（Feasible Arithmetic）。FA 的语言和公理经过设计，使该系统能够表达恰好足以在逻辑上划定某些相关复杂性类的有界量词。此外，它还采用了一种受限的归纳模式，其强度恰好足以证明多项式时间递归的递归定理。以此为基础，Buss 得以对多项式时间可计算函数类给出一种自然的证明论刻画。由于多项式时间可计算函数这一概念属于复杂性理论，无法直接用一阶逻辑的语言表达，Buss 的逻辑刻画便具有了重要的深度。复杂性理论与逻辑之间的这座桥梁，正是我们构建可行算术系统所需要的。

FA 的一阶语言包含所有标准逻辑符号 $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\supset$, $\exists$, $\forall$ 以及括号，还有非逻辑符号

$$S,\ 0,\ +,\ \cdot,\ |x|,\ \left\lfloor \tfrac{x}{2} \right\rfloor,\ \#,\ \text{and}\ \ \leq .$$

这些非逻辑符号在自然数上进行解释。这里， S 表示后继函数，0 表示零常量， $+$和 $\cdot$ 分别表示通常的加法和乘法，而 $\leq$ 表示标准的序关系。项 $|x|$ 表示 x的二进制表示的长度，也就是说，

$$|x| = \lfloor \log_2(x+1) \rfloor.$$

项 $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ 表示小于或等于 $x/2$的最大整数。该运算将 x的二进制表示向右移位。例如，数 10011 会映射为 1001，而 1010 会映射为 101。最后，项 $x\#y$，读作“x smash y”，表示

$$x\#y = 2^{|x|\cdot|y|}.$$

事实证明，这种运算在方法论上很实用，因为它允许我们表达一个量词的界由 $2^{p(|x|)}$给定，其中 p 是一个多项式。在复杂度理论的对应关系中，这将量化变量 y 的大小 $|y|$ 限制为输入 x的大小$|x|$ 的多项式，从而确保可以在关于 $|x|$的多项式时间内读取 y 的二进制表示。

令 $\Delta_0^b = \Sigma_0^b = \Pi_0^b$ 表示尖锐有界公式类，即量词均为 $(\forall x \leq |t|)\ \varphi$ 或 $(\exists x \leq |t|)\ \varphi$ 形式的公式。通过增加一次有界量词交替，可得到接下来的层级 Σ_1^b 和 Π_1^b。

定义 1 1. Σ_1^b 是满足以下条件的最小公式集：

(a) $\Sigma_1^b \supseteq \Delta_0^b$; (b) 若 $\varphi \in \Sigma_1^b$，则 $(\exists x \leq t)\ \varphi$ 和 $(\forall x \leq |t|)$ φ 属于 Σ_1^b; (c) 若 φ, $\psi \in \Sigma_1^b$，则 $\varphi \wedge \psi$ 和 $\varphi \vee \psi$ 属于 Σ_1^b; (d) 若 $\varphi \in \Sigma_1^b$ 和 $\psi \in \Pi_1^b$，则 $\neg\psi$ 和 $\psi \supset \varphi$ 属于 Σ_1^b。

2. Π_1^b 对偶地定义为满足以下条件的最小公式集：

(a) $\Pi_1^b \supseteq \Delta_0^b$; (b) 如果 $\varphi \in \Pi_1^b$，那么（$\forall x \leq t$）φ 和（$\exists x \leq |t|$）φ 属于 Π_1^b; (c) 如果 φ, $\psi \in \Pi_1^b$，那么 $\varphi \wedge \psi$ 和 $\varphi \vee \psi$ 属于 Π_1^b; (d) 如果 $\varphi \in \Pi_1^b$ 和 $\psi \in \Sigma_1^b$，那么 $\neg\psi$ 和 $\psi \supset \varphi$ 属于 Π_1^b。

这可以扩展为一个完整的层级，对所有 $n \in \mathbb{N}$定义 Σ_n^b 和 Π_n^b。整个层级的并集等价于由仅含有界量词的 Δ_0 公式构成的类，该类构成了著名的算术层级的基础。因此，我们这里处理的是一个受限得多的层级，其中严格有界量词和有界量词分别扮演着算术层级中有界量词和无界量词的类似角色。有趣的是， Δ_0^b 包含于多项式时间可判定谓词类中，而 Σ_1^b 恰好是非确定性多项式时间可判定谓词类。[4]

我们用 Δ_1^b 表示在 FA 中（按下文公理化）等价于一个 Σ_1^b 公式且等价于一个 Π_1^b公式的公式。

令 FA（可行主义算术）为 Buss 在 §2.2 中介绍的一阶理论 S_2^1 。其公理化由形式化函数符号的自然归纳方程，以及归纳公理模式 Σ_1^b-PIND 构成：

$$(\Sigma_1^b\text{-PIND}) \qquad (\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(\lfloor x/2 \rfloor) \to \varphi(x))) \to \forall x\, \varphi(x), \text{ for all } \varphi \in \Sigma_1^b.$$

我们可以将这一公理模式视为对自然数二进制表示进行树归纳。它指出，对于任意 Σ_1^b公式 $\varphi(x)$，若

- 0 满足 φ，并且
- 对于任意数 x，若其二进制表示为 $b_1 \cdots b_n$，且其右移序列 $b_1 \cdots b_{n-1}$所表示的数满足 φ，则 x 满足 φ,

那么所有数都满足 φ。

这在两个方面弱化了 PA 的归纳模式：第一，它受到严格限制，只适用于狭窄的 Σ_1^b 公式类。第二，树归纳的表述弱于以通常的后继函数为基础的表述。事实上，证明条件命题 $\forall x(\varphi(\lfloor x/2 \rfloor) \to \varphi(x))$ 通常比证明条件命题 $\forall x(\varphi(x) \to \varphi(S(x)))$ 更难。

正如 Buss 的第 2.4–5 节所示，FA 足以表示许多有用的关系和函数。尤其是，它定义了元组和一个投影函数 β，使得 FA 可以证明“$\beta(i, r) = r$ 编码的元组的第 i 个分量”；这在第 4.3 节中被明确用于定义可实现性。

FA 是一个用于推理 Σ_1^b 公式的系统。事实上，归纳模式仅适用于这类公式，而关于 FA 所证明的结果也仅涉及这一片段。因此，FA 证明的任何复杂度更高的定理，例如排中律的实例，就我们的可行算术形式化而言，都被视为超出范围。

现在，我们已经来到这样一个阶段：可行算术 已经得到了完整而清晰的形式化表述。这里介绍的系统体现了其预期的可行主义动机：其语言恰好将用于刻画多项式时间计算的严格有界量词和有界量词区分出来，而唯一的归纳模式 Σ_1^b-PIND 则与多项式时间递归的组合结构相吻合。所有函数符号都由初等定义方程给出，而归纳原理则以一种在哲学上自然的方式，表达了针对相关计算结构（即二叉树表示）的资源有界归纳。它是 PA 的一个具体片段，经过精确校准，适用于多项式时间推理。

此外，FA以一种技术上精确的方式包含于直觉主义系统海廷算术（HA）之中。令 $\mathrm{FA}^{\mathrm{int}}$ 表示 FA 的直觉主义版本——也就是说，语言和公理相同，但以直觉主义逻辑表述。这样一来，在可行内容层面，经典逻辑与直觉主义逻辑之间的差距便完全消失了。根据 Avigad 的一个结果（Avigad（2000）中的定理 3.17

[4]后者是一个非平凡的结果。形式细节请参见 Buss 的 §1，尤其是其中的定理 8。非确定性多项式时间可判定谓词类大致可以定义为：对任意选定的多项式 p，将多项式时间可判定谓词类在量词 $\exists y \leq 2^{p(|\vec{x}|)}$ 下闭包所得到的类。此外，判定 $\exists y \leq 2^{p(|\vec{x}|)}\, R(y, \vec{x})$ 的问题，可以刻画为：给定 b 时，验证 $R(b, \vec{x})$ 的问题。因此，直观而言，非确定性多项式时间可判定谓词类就是多项式时间可验证谓词类。

），对于所有 Σ_1^b–公式，FA是其直觉主义对应理论的保守扩张。由于本文所依据的结果全都只针对 Σ_1^b–公式表述，因此它们对 $\mathsf{FA}^{\mathrm{int}}$ 也同样成立。此外，由于我们对可行算术的形式化只涉及 Σ_1^b–定理，因此从严格意义上说，它是 HA 的一个子系统。这一图景令人想起 Brouwer 的著名观点：经典逻辑是有限的逻辑（van Heijenoort，1967年，第336页）。更一般地说，一旦在有限有界域内进行研究（此处通过有界量词将其形式化），经典推理便不再超越构造性论证。

此时，读者可能会想知道，FA 中使用严格有界量词，究竟反映了对句法不可消除的依赖，还是仅仅是控制复杂度的一种自然方式。Tabatabai 和 Thapen 的近期研究（尚未发表成论文；我们所指的是他们篇幅较长的会议摘要：Tabatabai 和 Thapen（2024））表明，情况属于后者。他们提出了一种弱谓词集合论 PST，其中包含集合和类两种类型；该理论可由外延性、空集、配对、并集、集合的 Δ_0-分离以及类的 Σ_1-概括自然地公理化。PST 可以在二进制字符串上解释 FA；反过来，将 PST 的 Σ_1 片段限制在二进制字符串上，也可以在 FA 内部得到解释。因此，PST 在二进制字符串上可证明全定义的 Σ_1-可定义函数，恰好就是多项式时间可计算函数。这表明，可行计算可以通过集合论标准句法中的谓词分离和概括，以结构化的方式加以刻画。从可行主义的视角看，这一结果令人安心：它表明，在一阶算术框架中，FA 采用严格界限只是确保可行性的一种自然方式。其他形式系统也能以等价方式实现同样的约束，这进一步表明，可行算术在理论上具有稳健性，不受句法偶然因素的影响。

4.2 可行可计算函数和关系

任何旨在阐明可行主义的解释，都必须证明且仅证明那些实际上可由多项式时间计算的函数是全函数。这一条件确实得到了满足：

根据 Buss 的 §5.3 中的推论8，FA 中可证明为全函数的 Σ_1^b-可定义函数，恰好就是多项式时间可计算函数。形式地说，如果 $\varphi \in \Sigma_1^b$ 并且

$$\mathsf{FA} \vdash \forall x\, \exists! y\, \varphi(x, y),$$

那么存在一个多项式时间可计算函数 f，使得

$$\mathbb{N} \models \forall x\, \varphi(x, f(x)).$$

反过来，每个多项式时间函数都可以在 FA 中定义为 Σ_1^b。

这个定理表明，FA 将函数的可行主义观点形式化了。事实上，对于任意算术函数 $f(\vec{x})$，我们有：

$$\mathsf{FA} \vdash \text{“}f \text{ is } \Sigma_1^b\text{-definable and total”} \iff f(\vec{x}) \text{ is polynomial-time computable.}$$

最后，Buss 的 §5.3 中的定理 9 表明，可证性与可行性之间的对应关系可从函数扩展到关系。对于任意算术关系 $R(\vec{x})$，我们有：

$$\mathsf{FA} \vdash \text{“}R \text{ is } \Delta_1^b\text{-definable”} \iff R(\vec{x}) \text{ is polynomial-time decidable.}$$

这只不过是将 R 表示为到 $\{0,1\}$的函数时得到的结果。因此，FA 也恰好刻画了可在多项式时间内计算的关系类。

4.3 实现 Σ_1^b-真

按照 Buss 的第5.1节，对于每个 Σ_1^b-公式 φ，我们定义一个谓词 Rlz$_\varphi(r, \vec{x})$，表示对象 r 实现子 了 Σ_1^b-公式 $\varphi(\vec{x})$。[5] 直观而言， r 编码了一个验证 φ的构造。正如我们将看到的， $\varphi(\vec{a})$的实现子可在关于其大小 $|\vec{a}|$ 的多项式时间内计算出来，而谓词 Rlz$_\varphi(r, \vec{a})$ 同样可在关于 $|\vec{a}|$的多项式时间内判定。这两个事实明确地满足了 Dummett的语义约束所要求的可行主义条件，我们在此将其概括如下：

可行构造： 任何数学公式的含义都必须通过一种可行构造，以组合方式给出，并且要结合自由变量所取的输入。

可行验证： 对于给定输入，必须存在一种可行程序，用于识别任意此类构造是否是该陈述的证明。

在　　推理： 此外，推理规则必须以可行的方式保持上述条件　　.

现在我们继续定义 Buss 的可实现性语义。设 φ是一个 Σ_1^b-公式，其自由变量属于 $\vec{x}$，并设 t 是一个项。Rlz$_\varphi(r, \vec{x})$通过对 φ的逻辑复杂度进行如下递归来定义；该递归可以在 FA 中执行（回忆一下， $\beta(i, r)$ = “由 r编码的元组的第 i 个分量”）：

1. 如果 φ 是 Δ_0^b，那么

$$\mathsf{Rlz}_\varphi(r, \vec{x}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x}).$$

2. 如果 $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$，那么

$$\mathsf{Rlz}_\varphi(r, \vec{x}) \leftrightarrow \mathsf{Rlz}_{\psi_1}(\beta(1, r), \vec{x}) \wedge \mathsf{Rlz}_{\psi_2}(\beta(2, r), \vec{x}).$$

3. 如果 $\varphi \equiv \psi_1 \vee \psi_2$，那么

$$\mathsf{Rlz}_\varphi(r, \vec{x}) \leftrightarrow \mathsf{Rlz}_{\psi_1}(\beta(1, r), \vec{x}) \vee \mathsf{Rlz}_{\psi_2}(\beta(2, r), \vec{x}).$$

4. 如果 $\varphi \equiv (\forall y \le |t(\vec{x})|)\ \psi(\vec{x}, y)$，那么

$$\mathsf{Rlz}_\varphi(r, \vec{x}) \leftrightarrow \mathsf{Seq}(r) \wedge \mathsf{Len}(r) = |t(\vec{x})| + 1 \wedge \forall y \le |t(\vec{x})|\, \mathsf{Rlz}_\psi(\beta(y+1, r), \vec{x}, y),$$

其中 Seq(r) 和 Len(r) 表示 r 是一个适当长度的序列 $\langle r_0, \ldots, r_{|t|} \rangle$。

5. 如果 $\varphi \equiv (\exists y \le t(\vec{x}))\ \psi(\vec{x}, y)$，那么

$$\mathsf{Rlz}_\varphi(r, \vec{x}) \leftrightarrow \mathsf{Seq}(r) \wedge \mathsf{Len}(r) = 2 \wedge \beta(1, r) \le t(\vec{x}) \wedge \mathsf{Rlz}_\psi(\beta(2, r), \vec{x}, \beta(1, r)).$$

6. 若 $\varphi \equiv \neg\psi$，则Rlz$_\varphi$ 由对 ψ 进行通常的句法变换来定义，即将否定沿结构下推，从而得到由情形(1)–(5)处理的等价形式。例如， $\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$被变换为 $\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2$，并由情形(3)处理。[6]

[5]Buss 将这个对象称为见证，并将该谓词记作 $Witness_\varphi(w, \vec{x})$。[6]因此，否定显然采用了不同于普通可实现性的处理方式；在普通可实现性中，否定通常被视为蕴含的一种特殊情形，而蕴含则由一个函数来实现，该函数将前件的实现子映射为后件的实现子。然而，正如 Buss 在第5.2节中的 Buss 定理 5 所示，对于任何可证明的蕴含，他的可实现性语义都隐含地提供了这样一个函数；而且，该函数是多项式时间可计算的。

因此， r 编码了部分实证子及其验证的有限序列，对应于 φ的有界量词结构。

FA 的一个核心特征是， Σ_1^b陈述可被证明等价于存在可行实证子。Buss 在其第5.1节中的Buss命题3 表明，对于任意 Σ_1^b 公式 $\varphi(\vec{x})$

$$\varphi(x) \equiv (\exists y \leq t(\vec{x}))\, R(\vec{x}, y),$$

其中 $R \in \Delta_0^b$ 且 t 是一个项，我们有：

$$\mathsf{FA} \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \exists r\ \mathsf{Rlz}_\varphi(r, \vec{x}).$$

此外，存在一个多项式时间函数$g_\varphi(\vec{x})$（可在 FA 中定义），使得

$$\mathsf{FA} \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \mathsf{Rlz}_\varphi(g_\varphi(\vec{x}), \vec{x}).$$

因此，每个可证的 Σ_1^b真命题都有实现子；反过来，存在实现子就确保公式为真。请注意，我们现在已经满足了可行构造的约束，因为 φ 的含义已在 FA 中通过构造 r的必要且充分的组合条件（在 Rlz$\varphi(r, \vec{x})$ 的定义中表达）给出，而该构造是可行的。

此外，Buss 在其第5.1节中的 Buss命题4 满足了可行验证的要求；该命题断言，对于每个 Σ_1^b公式 φ，谓词 Rlz$\varphi(r, \vec{x})$ 本身是多项式时间可判定的。

因此，每个在 FA 中可证的 Σ_1^b-公式，不仅伴随着一个可行计算的构造 r，还伴随着一个可行的验证 程序，用以验证 r 确实是一个实现子：

$$\text{provability} \iff \text{feasible construction} + \text{feasible verification}.$$

最后，从 Buss 在第5.2节中的 Buss 定理 5 可知，FA 中的推理能够以可行方式保留这种可实现性语义中的构造和验证，因而满足有效推理的要求。更准确地说，该定理意味着：如果 $\varphi(\vec{x})$ 可由假设 $\psi(\vec{x})$ 在 FA 中推出，那么就存在一个多项式时间函数 $f(y, \vec{x})$ （可在 FA 中定义），使得对于 $\psi(\vec{a})$ 的任意实现子 r， $f(r, \vec{a})$ 都是 $\varphi(\vec{a})$ 的实现子。

因此，这一框架极好地符合 Dummett的语义约束。有意义的数学陈述被刻画为 Σ_1^b-陈述。此外，对于公式 φ，任何相关构造及其相应的识别，都分别由 FA 中的一个实现子和谓词 Rlzφ 精确表示；而 FA 中的推理由作用于此类实现子的多项式时间运算来追踪。至此，我们完成了这一论证：FA 为阐释可行主义这一与科巴姆论题相一致的构造主义观点，提供了一个自然、精确且极为便捷的体系。

参考文献

Avigad, J. “将经典理论解释为构造性理论”. 《符号逻辑杂志》，第65卷，第4期，第1785–1812页，2000年。

Benacerraf, P. 和 Putnam, H.（编）. 《数学哲学：精选读本》。第2版。剑桥：剑桥大学出版社，1983年。

布劳威尔，L. E. J.《论排中律在数学中的意义，尤其是在函数论中的意义》。译文重印于 J. van Heijenoort（编），从弗雷格到哥德尔 ¨哥德尔，第334–345页。马萨诸塞州剑桥：哈佛大学出版社，1967年。原发表于1923年。

Brunel, A. 和 Terui, K.《Church⇒Scott = Ptime：资源敏感可实现性的一种应用》。载于 P. Baillot（编），隐式计算复杂性发展研讨会论文集（*DICE 2010*），*EPTCS* 23，第31–46页，2010年。Buss, S. R.《有界算术》。博士论文，普林斯顿大学，1985年。修订版以《那不勒斯：Bibliopolis》为题出版，1986年。Cobham, A.《函数的内在计算难度》。载于*1964*年国际逻辑、方法论与科学哲学大会论文集，Y. Bar-Hillel 等编，阿姆斯特丹：North-Holland，第24–30页，1965。Crossley, J.、Mathai, G. 和 Seely, R.《多项式时间可实现性的逻辑演算》。计算机科学逻辑方法杂志，第3卷，第279–298页，1994年。Dal Lago, U. 和 Hofmann, M.《可实现性模型与隐式复杂性》。理论计算机科学，第412卷，第2029–2047页，2011年。Dummett, M.《王氏悖论》。*Synthese*，第30卷，第3–4期，第201–232页，1975年。Dummett, M.《直觉主义要素》。牛津：Clarendon出版社，1977年。Dummett, M.《直觉主义逻辑的哲学基础》。载于《真理与其他谜题》，第215–247页。马萨诸塞州剑桥：哈佛大学出版社，1978年。重印于 Benacerraf 和 Putnam（1983）。Feferman, S.《为何一点点便能发挥巨大作用：科学应用数学的逻辑基础》。科学哲学，第60卷，第442–455页，1993年。重印于 Feferman（1998）。Feferman, S.《Kreisel的“展开纲领”》。载于*Kreiseliana*：关于乔治·克赖塞尔及其相关研究，P. Odifreddi 编，A. K. Peters，马萨诸塞州韦尔斯利，第247–273页，1996。Feferman, S.《在逻辑之光下》。牛津：牛津大学出版社，1998年。van Heijenoort, J.（编）。从弗雷格到哥德尔 ¨哥德尔。马萨诸塞州剑桥：哈佛大学出版社，1967年。Hilbert, D.《数学基础》。译文重印于 J. van Heijenoort（编），从弗雷格到哥德尔 ¨哥德尔，第464–479页。马萨诸塞州剑桥：哈佛大学出版社，1967年。原发表于1927年。Leivant, D.《计算可行性的基础性界定》。第六届*IEEE*计算机科学逻辑年度研讨会（*LICS*）论文集，第2–11页，1991年。Tabatabai, A. A. 和 Thapen, N.《构成性集合论：可行数学的新基础》。受邀报告摘要，第七届证明论国际学校与研讨会，9月1–5日，比利时根特，2024年。Wright, C.《严格有限主义》。*Synthese*，第51卷，第203–282页，1982年。