数学不等式与应用 www.ele-math.com

arXiv:2602.06804v1 [math.PR] 6 Feb 2026

对数凹分布的均值附近的单侧集中

IOSIF PINELIS

投稿至《数学不等式与应用》

摘要。 对于所有实数 $\delta > 0$ 以及所有满足 $EX = 0$ 且 $EX^2 = 1$ 、具有对数凹概率密度函数的随机变量 X，均得到了概率 $P(0 < X < \delta)$ 的一个下界。

1. 摘要与讨论

令L 表示所有具有对数凹概率密度函数f_X 的实随机变量（r.v.）X 的集合，使得$EX = 0$ 且$EX^2 = 1$。Saumard和Wellner [5]对对数凹性作了全面综述。

T定理 1.1. 对所有 $X \in L$ 以及所有实数 $\delta > 0$,

$$P(0 < X < \delta) \geqslant p(\delta) := \frac{\delta}{72(1 + c\delta)}, \tag{1.1}$$

其中 $c := \frac{419}{100^6}$

在定理 1.1 中令 $\delta \downarrow 0$，即可立即得到

COROLLARY 1.2. *If $X \in L$, then $f_X(0) \geqslant \frac{1}{72}$.*

与这些结果有些相关的是 Barlow、Karlin 和 Proschan 得到的以下结论：若 X 是具有对数凹概率密度函数f_X 的非负 随机变量，且$EX = 1$，则

(i) $f_X(0) \leqslant 1$ （[1, 公式 (11)]）；

(ii) 对某个（未指定的）实数$f_X(x) \leqslant e^{-x}$ 成立，且对所有实数$x > x_0$ 均成立（[1, 定理 5]）。

后一个结果推出了不等式$P(0 < X < \delta) \geqslant 1 - e^{-\delta}$，其中 $\delta \geqslant x_0$为实数。

式（1.1）中$p(\delta)$对$P(0 < X < \delta)$的下界，以及推论1.2中$f_X(0)$的下界172，很可能都远非最优。事实上，正如匿名审稿人所指出的，[2, 命题B.2] 给出的$f_X(0)$下界优于推论1.2中的下界：$f_X(0) \geqslant \frac{1}{e\sqrt{3}}$。欢迎开展这一方向的进一步研究。

数学主题分类(2010)：60E15, 26D10, 26D15, 26A51。关键词与短语：对数凹分布；概率不等式；矩。

猜想1.3. 设Y是一个服从标准指数分布的随机变量，因此$Y-1\in L$。那么对于每个实数 $\delta>0$

$$\min_{X\in L} P(0<X<\delta)=P(0<Y-1<\delta)=e^{-1}(1-e^{-\delta}),$$

因此

$$\min_{X\in L} f_X(0)=e^{-1}.$$

目标量$P(0<X<\delta)$和$f_X(0)$，以及条件$X\in L$中的量EX和EX^2，都是概率密度函数$f:=f_X$的线性函数。然而，f为对数凹函数这一条件，可表述为由不可数多个不等式$f((1-t)x+ty)\geqslant f(x)^{1-t}f(y)^t$构成的系统，其中对所有实数$x,y$以及所有$t\in(0,1)$都成立，而这些不等式关于$f$是非线性的。因此，猜想 1.3 所提出的是一个非线性无限维优化问题，这可能相当棘手——例如参见 [3]。

2. 定理 1.1 的证明

引理 2.1. 对于所有 $X\in L$，均有 $E|X|\geqslant 1/2$。

证明。 任取$X\in L$。令m为X的中位数，则$P(X<m)=P(X>m)=1/2$。令$Z^{\pm}$为随机变量，其分布分别为在条件 $\pm(X-m)$给定 $\pm(X-m)>0$时的条件分布。则$Z^{\pm}$是具有对数凹密度的正随机变量。因此，根据一个众所周知的不等式（例如参见 [4, 公式 (0.3)]），

$$2(EZ^{\pm})^2\geqslant E(Z^{\pm})^2. \tag{45}$$

由于 $EZ^{\pm}=2E(X-m)_{\pm}$且 $E(Z^{\pm})^2=2E(X-m)_{\pm}^2$，其中 $u_{\pm}:=\max(0,\pm u)$，我们可以将 (45) 重写为 $4(E(X-m)_{\pm})^2\geqslant E(X-m)_{\pm}^2$。因此，由于 (i) m 是 $E|X-a|$ 在实数 a 中的最小值点，且 (ii) $EX=0$ 是 $E(X-a)^2$ 在实数 a 中的最小值点，我们得到

$$\begin{aligned}
4(E|X|)^2&\geqslant 4(E|X-m|)^2\\
&=4(E(X-m)_+ + E(X-m)_-)^2\\
&\geqslant 4(E(X-m)_+)^2+4(E(X-m)_-)^2\\
&\geqslant E(X-m)_+^2+E(X-m)_-^2\\
&=E(X-m)^2\geqslant EX^2=1.
\end{aligned}$$

因此，$2E|X|\geqslant 1$。 □

引理 2.2. 对于所有实数 $\delta>0$、$b\geqslant 0$ 和 $x\geqslant 0$,

$$\min(\delta,x)\geqslant r_{\delta,b}(x):=a(\delta,b)\Big(\frac{x^2}{2}-b\frac{x^3}{3}\Big), \tag{2.1}$$

其中

$$a(\delta,b) := \min\left(\frac{16b}{3}, 6b^2\delta\right) = \begin{cases} \dfrac{16b}{3} & \text{if } b \geqslant \dfrac{8}{9\delta}, \\ 6b^2\delta & \text{if } b \leqslant \dfrac{8}{9\delta}. \end{cases} \tag{2.2}$$

此外，对于每一对$(\delta, b) \in (0,\infty) \times [0,\infty)$，$a(b\ \delta)$是(2.1)中的最佳（即最大的）常数因子。

证明。首先，我们来验证 (2.1)。

当$b = 0$时，结论显然成立。因此，不失一般性（wlog），$b > 0$。于是，$x_2^2 - b\frac{x^3}{3}$在$x \geqslant 0$中的最大值为$1\ 6\bar{b}^2$，因此对所有$x \geqslant 0$，我们有

$$r_{\delta,b}(x) \leqslant a(\delta,b)\frac{1}{6b^2} \leqslant 6b^2\delta\frac{1}{6b^2} = \delta.$$

当$x = 0$时，结论显然成立。因此，不失一般性（wlog），$x > 0$。于是，$\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} - b\frac{x^3}{3}\right)$在$x > 0$中的最大值为$316_b$，因此

$$r_{\delta,b}(x) \leqslant a(\delta,b)\frac{3}{16b}x \leqslant \frac{16b}{3}\frac{3}{16b}x = x.$$

因此，对所有实数 $\delta > 0$、$b > 0$和$x > 0$，我们有$r_{\delta,b}(x) \leqslant \delta$且$r_{\delta,b}(x) \leqslant x$，故 (2.1) 得证。

关于常数因子$a(\delta, b)$的最优性，注意到当 (i) $b \leqslant \frac{8}{9\delta}$且$x = {}^1{}_b$，或 (ii) $b \geqslant \frac{8}{9\delta}$且$x = \frac{3}{4b}$时，(2.1) 取等号。 □

引理 2.3. 任取实数 $\delta > 0$，以及任意满足其概率密度函数f在 $[0,\infty)$ 上非增的 $X \in L$。则

$$P(0 < X < \delta) \geqslant p_1(\delta) := \begin{cases} \dfrac{\delta}{72} & \text{if } 0 < \delta \leqslant \dfrac{16}{3}, \\ \dfrac{32(9\delta - 32)}{243\delta^2} & \text{if } \dfrac{16}{3} \leqslant \delta \leqslant \dfrac{64}{9}, \\ \dfrac{1}{12} & \text{if } \delta \geqslant \dfrac{64}{9}. \end{cases}$$

证明。不失一般性，假设概率密度函数f左连续。令 ν 为定义在区间 $[0,\infty)$ 上的（非负）勒贝格–斯蒂尔切斯测度，其定义公式为

$$\nu([x,\infty)) = f(x)$$

对于实数 $x \geqslant 0$。于是

$$\begin{aligned} P(0<X<\delta) &= \int_0^{\delta} dx f(x) \\ &= \int_0^{\delta} dx \int_{[x,\infty)} \nu(dy) \\ &= \int_{[0,\infty)} \nu(dy) \int_0^{\min(\delta,y)} dx \\ &= \int_{[0,\infty)} \nu(dy) \min(\delta,y), \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} EX_+ &= \int_0^{\infty} dx x f(x) \\ &= \int_0^{\infty} dx x \int_{[x,\infty)} \nu(dy) \\ &= \int_{[0,\infty)} \nu(dy) \int_0^{y} dx x \\ &= \int_{[0,\infty)} \nu(dy) \frac{y^2}{2}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} EX_+^2 &= \int_0^{\infty} dx x^2 f(x) \\ &= \int_0^{\infty} dx x^2 \int_{[x,\infty)} \nu(dy) \\ &= \int_{[0,\infty)} \nu(dy) \int_0^{y} dx x^2 \\ &= \int_{[0,\infty)} \nu(dy) \frac{y^3}{3}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

由 (2.3)、(2.4)、(2.5) 和引理 2.2 可得

$$P(0<X<\delta) \geqslant a(\delta,b)(EX_+ - bEX_+^2). \tag{2.6}$$

由引理 2.1 和条件 $EX = 0$,

$$1/2 \leqslant E|X| = EX_+ + EX_- = 2EX_+,$$

由此得到 $EX_+ \geqslant 1/4$。此外，$EX_+^2 \leqslant EX^2 = 1$。因此，鉴于（2.6），对于所有实数 $\delta \geqslant 0$以及$b \geqslant 0$,

$$P(0<X<\delta) \geqslant p_2(\delta,b) := a(\delta,b)\Big(\frac{1}{4} - b\Big) = \begin{cases} \dfrac{16}{3} b\Big(\dfrac{1}{4} - b\Big) & \text{if } b \geqslant \dfrac{8}{9\delta} \\ 6\Big(\dfrac{1}{4} - b\Big) b^2 \delta & \text{if } b \leqslant \dfrac{8}{9\delta}. \end{cases} \tag{2.7}$$

因此，$p_2(\delta,\ b)$关于b是分段多项式，其中两个多项式分支的次数分别为 2 和 3。因此，最大化$p_2(\delta,\ b)$关于$b\ \geqslant 0$的值是直接但有些繁琐的计算，可得

$$\max_{b\geqslant 0} p_2(\delta,b) = p_1(\delta).$$

然而，要完成引理 2.3 的证明，只需注意到

$$p_1(\delta) = p_2(\delta, b_\delta),$$

其中

$$b_\delta := \begin{cases} \dfrac{1}{6} & \text{if } \delta \leqslant \dfrac{16}{3} \\ \dfrac{8}{9\delta} & \text{if } \dfrac{16}{3} \leqslant \delta \leqslant \dfrac{64}{9}, \\ \dfrac{1}{8} & \text{if } \delta \geqslant \dfrac{64}{9}; \end{cases}$$

关于 (2.7) 中$p_2(\delta,\ b)$ 的分段表达式，还需注意，当$b_\delta \leqslant \frac{8}{9\delta}if\delta \leqslant \frac{16}{3}$时，以及当$b_\delta \geqslant \frac{8}{9\delta}$ if $\delta \geqslant \frac{64}{9}$时。 — □

根据$x \leftrightarrow -x$反射，由引理 2.3 可得

推论 2.4. 任取实数 $\delta > 0$ 以及任意 $X \in L$，使得 X 的概率密度函数 f 在$(-\infty, 0]$上非减。那么

$$P(-\delta < X < 0) \geqslant p_1(\delta).$$

现在我们可以完成定理 1.1 的证明。

定理 1.1 的证明。 注意，对于所有实数 $\delta > 0$

$$r_1(\delta) := \frac{p_1(\delta)}{p(\delta)} = \begin{cases} 1 + c\delta & \text{if } \delta \leqslant \dfrac{16}{3}, \\ \dfrac{256(9\delta - 32)(1 + c\delta)}{27\delta^3} & \text{if } \dfrac{16}{3} \leqslant \delta \leqslant \dfrac{64}{9}, \\ 6(c + 1/\delta) & \text{if } \delta \geqslant \dfrac{64}{9}. \end{cases}$$

显然，$r_1(\delta) \geqslant 1$若 $\delta \leqslant \frac{16}{3}$或 $\delta \geqslant \frac{64}{9}$。在剩下的情形下，即 $\frac{16}{3} \leqslant \delta \leqslant \frac{64}{9}$时，有理表达式中 $r_1(\delta)$ 关于 δ的二阶导数为

$$\frac{512\left(3c\delta^2 + (9 - 32c)\delta - 64\right)}{9\delta^5} \leqslant 0.$$

因此，在区间$[\frac{16}{3}, \frac{64}{9}]$内，有理表达式 $r_1(\delta)$ 在 δ处的最小值于该区间的端点处取得。因此，对于所有实数 $\delta > 0$，$r_1(\delta) \geqslant 1$。

这就证明了概率密度函数f在$[0,\infty)$上非增时的定理 1.1。

还需考虑 f 在 $[0,\infty)$ 上不是非增的情形。此时，f 在 $(-\infty,0]$ 上非减。因此，由推论 2.4,

$$f(0)=\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{P(-\delta<X<0)}{\delta}\geqslant\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{p_1(\delta)}{\delta}=\frac{1}{72}.$$

此外，由于 f 在 $[0,\infty)$ 上不是非增的，因此存在某个实数 $u>0$，使得 f 在区间 $[0,u]$ 上非减，并在区间 $[u,\infty)$ 上非增。特别地，在区间 $[0,u]$ 上，$f\geqslant f(0)\geqslant\frac{1}{72}$。

因此，若 $u\geqslant\delta$，则在区间 $[0,\delta]$ 上 $f\geqslant f(0)\geqslant\frac{1}{72}$，从而

$$P(0<X<\delta)=\int_0^\delta dx\,f(x)\geqslant\frac{\delta}{72}\geqslant p(\delta).$$

因此，不失一般性

$$0<u<\delta. \tag{2.8}$$

注意，为了得到(2.6)，我们没有对随机变量 X 使用任何条件，唯一的条件是其概率密度函数 f_X 在 $[0,\infty)$ 上非增。此外，从(2.6)推出(2.7)时，我们只使用了条件 $EX_+\geqslant 1/4$ 和 $EX_+^2\leqslant 1$。因此，对于所有实数 $b\geqslant 0$，注意到随机变量 $X-u$ 的概率密度函数在 $[0,\infty)$ 上非增，且 $E(X-u)_+\geqslant EX_+-u\geqslant 1/4-u$，以及 $E(X-u)_+^2\leqslant EX_+^2\leqslant 1$，我们同样可以得到

$$\begin{aligned}P(u<X<\delta)&=P(0<X-u<\delta-u)\\&\geqslant p_{2;u}(\delta,b):=a(\delta-u,b)(1/4-u-b)\\&=\begin{cases}q_1(b)\text{ if }b\geqslant b_u,\\ q_2(b)\text{ if }b\leqslant b_u,\end{cases}\end{aligned}$$

其中

$$q_1(b):=\frac{16}{3}b\Big(\frac{1}{4}-u-b\Big),\quad q_2(b):=6b^2\Big(\frac{1}{4}-u-b\Big)(\delta-u),$$

$$b_u:=\frac{8}{9(\delta-u)}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}P(0<X<\delta)&=P(0<X<u)+P(u<X<\delta)\\&\geqslant\frac{u}{72}+p_{2;u}(\delta,b).\end{aligned}$$

现在让我们在 $b\geqslant 0$ 中最大化 $p_{2;u}(\delta,b)$；此后默认假设 b 满足后一条件。根据(2.8)，当 $u\geqslant\frac{1}{4}$ 时，$q_1(b)\leqslant 0$ 且 $q_2(b)\leqslant 0$；而当 $b=0$ 时，$q_1(b)=q_2(b)=0$。因此，

$$\max_{b\geqslant 0}p_{2;u}(\delta,b)=0\quad\text{if }u\geqslant\frac{1}{4}.$$

剩下的工作是在$b \geqslant 0$中最大化$p^{2;u}(\delta,b)$，并假设 $0<u<\frac{1}{4}$。于是

$$\max_{b\geqslant 0} q_1(b) = q_1(b_{1;u}), \quad \text{where } b_{1;u} := \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4}-u\Big),$$

$$\max_{b\geqslant 0} q_2(b) = q_2(b_{2;u}), \quad \text{where } b_{2;u} := \frac{2}{3}\Big(\frac{1}{4}-u\Big),$$

$$b_{1;u} \geqslant b_u \iff h \geqslant r_1(u) := \frac{64}{9}\frac{1}{1-4u},$$

$$b_{2;u} \geqslant b_u \iff h \geqslant r_2(u) := \frac{16}{3}\frac{1}{1-4u},$$

其中

$$h := \delta - u > 0$$

（并且，若将 $\geqslant$ 中的每一项替换为 $\leqslant$，则后两个所展示的逻辑等价成立）。另请注意，$r_1 \geqslant r_2$。

综合以上各部分，我们看到

$$\begin{aligned}
&\max_{b\geqslant 0} p_{2;u}(\delta,b)\\
&= p_{1;u}(\delta)\\
&:= \begin{cases}
q_2(b_{2;u}) = \dfrac{1}{72}(1-4u)^3 h & \text{if } u<\dfrac{1}{4} \ \&\ h \leqslant r_2(u),\\
q_1(b_u) = q_2(b_u) = \dfrac{128}{27h}\Big(\dfrac{1}{4}-u-\dfrac{8}{9h}\Big) & \text{if } u<\dfrac{1}{4} \ \&\ r_2(u) \leqslant h \leqslant r_1(u),\\
q_1(b_{1;u}) = \dfrac{1}{12}(1-4u)^2 & \text{if } u<\dfrac{1}{4} \ \&\ h \geqslant r_1(u),\\
0 & \text{if } u \geqslant \dfrac{1}{4}.
\end{cases}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

So,

$$P(0<X<\delta) \geqslant p_u(\delta) := \frac{u}{72} + p_{1;u}(\delta). \tag{2.10}$$

尚需证明

$$p_u(\delta) \geqslant p(\delta) \tag{2.11}$$

若 $0<u<\delta<\infty$。

这可由下面的四个引理直接得出。

LEMMA 2.5. 若 $0<u<\frac{1}{4}$, $0<h\leqslant r_2(u)$，且 $\delta = u+h$，则（参见 (2.10)、(2.9) 中的第一行以及 (1.1)）

$$d_1 := \frac{u}{72} + \frac{1}{72}(1-4u)^3 h - \frac{\delta}{72(1+c\delta)} \geqslant 0.$$

引理 2.5 的证明。注意，

$$\begin{aligned} D_1(h) &:= 72(100+419(h+u))d_1 \\ &= 419(1-4u)^3h^2 - 2u(13408u^3 - 6856u^2 + 114u + 181)h + 419u^2 \end{aligned}$$

是关于h的严格凸多项式，其判别式

$$16u^2\left(16u^2-12u+3\right)\left(2808976u^4 - 765932u^3 - 318917u^2 + 131400u - 11900\right)$$

是 $\leqslant 0$，因此对于所有实数$D_1(h) \geqslant 0$，若h 满足$u \leqslant 24/100$，则结论成立。另一方面，若$u \geqslant 24/100$，则该多项式h 的临界值$D_1(h)$为

$$\frac{u\left(13408u^3 - 6856u^2 + 114u + 181\right)}{419(1-4u)^3} \leqslant 0,$$

因此$D_1(h) \geqslant D_1(0) = 419u^2 \geqslant 0$。所以，对于所有$u \in \in (0,\ 14)$以及所有实数$h > 0$，都有$D_1(h) \geqslant 0$，因此$d_1 \geqslant 0$。（证明中既不需要也未使用条件$h \leqslant r_2(u)$。）

注 1。多项式关于 $\mathbb{R}[x]$ 的符号模式可利用斯图姆定理确定——例如参见 [6, 第 244]页。特别是，当多项式的次数较低时，也可以利用微积分确定其凸性和单调性模式。原则上，所有这些都可以手工完成。不过，使用任意一种计算机代数系统会容易得多。

引理 2.6. 若 $0 < u < \frac{1}{4}$，$r_2(u) \leqslant h \leqslant r_1(u)$，且 $\delta = u + h$，则（参见(2.10)、(2.9)中的四行之第二行，以及(1.1)）

$$d_2 := \frac{u}{72} + \frac{128}{27h}\left(\frac{1}{4} - u - \frac{8}{9h}\right) - \frac{\delta}{72(1+c\delta)} \geqslant 0.$$

引理2.6的证明。注意

$$\begin{aligned} D_2 &:= 2169h^2(100+419(h+u))\,d_2 \\ &= 27h^3(419u-100) + 3771h^2\left(3u^2 - 1024u + 256\right) \\ &\quad - 256h\left(15084u^2 - 171u + 12508\right) - 8192(419u+100) \end{aligned}$$

是关于u、h的多项式。考虑D_2 关于u 和h的偏导数：

$$\begin{aligned} D_{21} &:= \partial_u D_2 \\ &= 11313h^3 + 22626h^2u - 3861504h^2 - 7723008hu + 43776h - 3432448, \\ D_{22} &:= \partial_h D_2 \\ &= 33939h^2u - 8100h^2 + 22626hu^2 - 7723008hu + 1930752h - 3861504u^2 \\ &\qquad + 43776u - 3202048. \end{aligned}$$

多项式D_{21} 和D_{22} 关于u、h 的关于u 和h 的结式为

$$\begin{aligned}R_1(h) :=& -383951907h^7 + 360127950804h^6 - 111582387392256h^5\\ &+ 113760130146785 28h^4 + 7495868032745472h^3 - 5874950492651520h^2\\ &+ 17672548909056h - 3016115013812224,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_2(u) :=& -1807585595653280832u^7 - 8477019886642870647 15u^6\\ &- 7852336577675358186 0762u^5 + 4489231092884329987 5696u^4\\ &+ 4325211112740317406 4608u^3 - 3539835732231050525 9136u^2\\ &+ 2916574513751811503 3088u - 5192266514139579318272.\end{aligned}$$

注意到 $r_2(u) > \frac{16}{3}$，因此引理 2.6 中的条件 $r_2(u) < h < r_1(u)$ 蕴含 $h > \frac{16}{3}$。

$R_1(h)$ 有三个实根，分别为 $> \frac{16}{3}$：

$$(h_1, h_2, h_3) \approx (255.934, 341.325, 341.342).$$

$R_2(u)$ 在区间 $(0, 14)$ 内只有一个根，即 $u_1 \approx 0.218271$。因此（例如参见第 104 页上方的 [6, ）$D_{21} = 0 = D_{22}$ 当且仅当 $(u,h) = (u_1, h_j)$，其中某个 $j = 1,2,3$。

另一方面，对所有 $j = 1,2,3$，

$$D_2|_{u=u_1,\, h=h_j} > 3 \times 10^9 > 0.$$

因此，$D_2 > 0$ 在 D_2 的所有临界点点 (u,h) 处，满足 $0 < u < \frac{1}{4}$ 且 $r_2(u) < h < r_1(u)$。

此外，当 $u \uparrow \frac{1}{4}$ 时，$r_1(u) > r_2(u) \to \infty$，因此

$$\lim_{u \uparrow \frac{1}{4}} \min_{h \in [r_2(u), r_1(u)]} \frac{D_2}{h^3} = 27(419 \times \tfrac{1}{4} - 100) > 0,$$

因此，当 $\uparrow \frac{1}{4}$ 时，$D_3 \to \infty > 0$ 关于 $h \in [r_2(u), r_1(u)]$ 一致收敛，这表明对于某个 $u_0 \in (0, 14)$，所有 $u \in (u_0, \frac{1}{4})$ 以及所有 $h \in [r_2(u), r_1(u)]$，都有 $D_2 > 0$。

因此，为完成引理 2.6 的证明，尚需证明在（无界）集合的边界上有 $D_2 \geqslant 0$

$$G := \{(u,h) : 0 < u < \tfrac{1}{4},\ r_2(u) \leqslant h \leqslant r_1(u)\}.$$

为此，首先注意到 $r_2(0) = \frac{16}{3}$、$r_1(0) = \frac{64}{9}$，并且

$$D_2|_{u=0} = 4(-675h^3 + 241344h^2 - 800512h - 204800) > 0$$

若$r_2(0) \leqslant h \leqslant r_1(0)$。还需指出，

$$D_2|_{h=r_1(u)} = -\frac{4096}{27(1-4u)^3}\left(1448064u^4 - 725364u^3 - 2565795u^2 + 1302526u - 159896\right) \geqslant 0,$$

$$D_2|_{h=r_2(u)} = -\frac{256}{3(1-4u)^3}\left(1287168u^4 - 643092u^3 - 1709051u^2 + 875488u - 107264\right) \geqslant 0$$

若 $0 < u < \frac{1}{4}$。 □

引理 2.7. 若 $0 < u < \frac{1}{4}$，$h \geqslant r_1(u)$，且 $\delta = u + h$，则（参见(2.10)、(2.9)中的四行之第三行，以及(1.1)）

$$d_3 := \frac{u}{72} + \frac{1}{12}(1-4u)^2 - \frac{\delta}{72(1+c\delta)} \geqslant 0.$$

引理 2.7 的证明。注意到

$$\begin{aligned} D_3(\delta) &:= 72(100+419\delta)d_3 \\ &= (40224u^2 - 19693u + 2414)\delta + 100\left(96u^2 - 47u + 6\right) \end{aligned}$$

这是一个关于 δ 的一次多项式，其系数对于所有实数u均为正。因此，对于所有 $\delta > 0$ 以及所有实数 u，我们有 $D_3(\delta) \geqslant 0$，从而 $d_3 \geqslant 0$。（在此证明中并未需要或使用条件 $0 < u < \frac{1}{4}$和$h \geqslant r_1(u)$。） □

引理 2.8. 若 $u \geqslant \frac{1}{4}$，则（参见(2.10)、(2.9)中的四行之第四行，以及(1.1)）

$$d_4 := \frac{u}{72} - \frac{\delta}{72(1+c\delta)} \geqslant 0.$$

引理的证明 2.8。注意，对于$u \geqslant \frac{1}{4}$和$\delta > 0$,

$$d_4 \geqslant \frac{1/4}{72} - \frac{\delta}{72(0+c\delta)} = \frac{1}{72\times 4} - \frac{1}{72c} \geqslant 0.$$

引理 2.8 得证。 □

定理 1.1 的证明至此完成。 □

参 考 文 献

[1] R. E. Barlow、S. Karlin 和 F. Proschan。P´olya 频率函数的矩不等式。《太平洋数学杂志》，11(3)：1023 – 1033，1961。[2] S. Bobkov 和 M. Ledoux。一维经验测度、顺序统计量和康托罗维奇输运距离。《美国数学学会回忆录》，261(1259)：v+126，2019。[3] H. O. Fattorini。《无限维优化与控制理论》。《数学及其应用百科全书》。剑桥大学出版社，1999。[4] J. Keilson。概率生成函数的对数凹性阈值及相关矩不等式。《数学统计年刊》，43(5)：1702 – 1708，1972。[5] A. Saumard 和 J. A. Wellner。对数凹性和强对数凹性：综述。《统计调查》，8 114，2014 45：–。[6] B. L. van der Waerden。《代数。第*1*卷》。Fred Blum 和 John R. Schulenberger 译。Frederick Ungar Publishing Co.，纽约，1970。

密歇根理工大学数学科学系 霍顿，
密歇根州 *49931*，美国 电子邮箱：
ipinelis@mtu.edu

通讯作者：IOSIF PINELIS