arXiv:2602.06809v1 [math.AP] 6 Feb 2026

双稳态年龄结构种群模型的尖锐阈值动力学

QuentinGriette[1] 和 Franco Herrera*[1,2]

[1] LMAH，勒阿弗尔诺曼底大学，76600，法国勒阿弗尔；quentin.griette@univ-lehavre.fr；
franco.herrera-granda@etu.univ-lehavre.fr[2]数学研究所，塔尔卡大学，智利塔尔卡；
franco.herrera@utalca.cl

2026年2月9日

摘要

本文致力于研究具有双稳态出生函数的 Gurtin-MacCamy种群模型解的长期动力学。我们考虑种群初始分布的一个单参数单调族：当参数值较小时，相应的种群密度会随时间推移而灭绝；而当参数值较大时，解则表现出不同的行为。我们关注这些参数的中间取值，称之为阈值参数。我们证明，这两种渐近动力学之间存在尖锐转变；也就是说，当种群的年龄依赖出生率具有紧支撑时，利用单调动力系统理论，可以证明恰好存在一个阈值。当出生率具有非紧支撑时，问题会更加复杂，正如多项研究所指出的，即使非线性出生函数是单稳态的，情况亦是如此。尽管如此，本研究采用的方法仍可有效处理一种具有非紧支撑的特定出生率，具体做法是将年龄结构模型的动力学转化为积分-微分系统。

关键词。年龄结构模型，尖锐阈值转变，双稳态出生函数，时滞微分方程，单调动力系统。

2020数学主题分类：主要：35B40；次要：35B41、37N25、45D05、45M05。

1 引言

sec:intro

本文致力于研究以下年龄结构种群模型解的渐近行为，该模型在文献中通常称为 Gurtin-MacCamy模型 [20]:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,a) + \partial_a u(t,a) = -\mu(a)u(t,a), & t>0,\ a>0, \\ u(t,0) = f\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \beta(a)u(t,a)\mathrm{d}a\right), & t>0, \\ u(0,\cdot) = u_0 \in \mathrm{L}^1_+(0,+\infty). \end{cases} \tag{1.1}$$

GM-model

(1.1) 中出现的微分方程被称为 McKendrick-von Foerster方程，广泛应用于数学生物学的不同领域，例如人口学、细胞增殖和流行病学 [15, 17, 26, 28, 33, 40, 44]。在该模型中，函数 $u(t,\ a)$ 表示种群在时间 t 、年龄为 a 时的密度， μ 是年龄特异性死亡率， β 是年龄特异性生育率， f 是满足 $f(0) = 0$ 的非负出生函数，而 u_0 表示种群的初始分布。在模型中引入函数 f ，是为了考虑有效的 后代

*通讯作者

由个体产生，以研究种群规模可能对系统产生正面或负面影响的情形，例如考虑环境中的拥挤效应或饱和现象。该名称是为了纪念开创性工作而命名的， [20] 该工作提出了非线性年龄结构模型，用于描述理论种群随时间的演化。

关于这一模型的各个方面已有大量研究，主要聚焦于稳态的存在性与稳定性。这些研究的目标主要是建立一般条件，以确保存在唯一的非平凡稳态，并为其局部或全局稳定性提供判据。泛函分析工具 [26, 50] 结合半群、积分半群 [36], 以及泛函微分方程理论 [9] 的发展，为研究这类年龄依赖模型提供了有效的框架。

Magal 和 Ma [34], 研究了具有 Ricker 型非线性 $f(x) = \alpha x e^{-x}$、且 $\alpha > 0$ 的方程 (1.1), 并证明当 $\alpha \in (1, e^2)$ 时，唯一的非平凡平衡态全局渐近稳定；此外，他们还证明在 $\alpha = \alpha^\star > e^2$ 处可能发生 Hopf分岔。Herrera 和 Trofimchuk [22] 研究了由该模型自然导出的一个积分方程（见第 2 节），并证明当非线性 f 具有相当一般的单稳态形状，即为单峰形状时，唯一的非平凡平衡态全局渐近稳定。还可以通过加入扩散项，将空间结构纳入模型。Ruiz-Herrera 和 Touaoula [44] 考虑了这种情形，并联系年龄结构模型与由 f 生成的一维动力系统；由此，可以根据出生函数的性质推导出稳态全局吸引等性质。另一方面，Kang 和 Ruan [28] 研究了非局部扩散年龄结构模型在 f 仅为恒等函数时的主谱理论。他们给出了一些条件，以保证主特征值的存在，并确保由方程的解生成的半群呈现异步指数增长。后来，Ducrot 等人 [12, 13] 在两篇系列论文中研究了出生函数具有单调非线性且包含非局部扩散项的同一模型。他们给出了主特征值存在的判据，并通过某个线性化算子谱界的符号研究其对模型全局动力学的影响。另见 [27], 其中研究了空间周期介质中的情形。

上述各项研究最终都针对单稳态情形，旨在描述模型的全局动力学。换言之，关于方程 (1.1) 的非零解渐近行为的结果，都是在存在唯一平稳解的条件下给出的。单稳态情形的研究通常借助主特征值、广义主特征值和/或谱半径来定义所谓的基本再生数，并确定一个阈值。该阈值是一个分岔点，在此处平凡平衡态失去稳定性，并产生唯一的非平凡平衡态，该平衡态通常是局部稳定的。因此，研究者利用这一阈值来确定模型的解在何种参数取值范围内趋于平凡平衡态或唯一的非平凡平衡态，并据此获得局部或全局稳定性结果 [3, 21, 22, 33, 40, 45]。

本文将重点关注双稳态情形。也就是说，当函数 f 恰有三个不动点——一个平凡不动点和两个非平凡不动点，且中间的不动点不稳定时（见图1），我们关注解的动力学；因此，Gurtin-MacCamy模型恰有三个稳态，即

$$\overline{\varphi}_0 = 0, \quad \overline{\varphi}_1(a) = \kappa_1 e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}, \quad \text{and} \quad \overline{\varphi}_2(a) = \kappa_2 e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}.$$

在这些条件下，该模型呈现出若干生物种群和结构化模型中所观察到的阿利效应的特征 [6, 17, 23, 38]。也就是说，存在一个临界值，使得当初种群低于该值时，种群无法随时间持续存在。为了对这一情形给出生物学解释，我们可以分别识别个体的后代与有效新生个体。例如，蠵龟（*Carettacaretta*）是一种将卵产在沙中的物种，卵一旦孵化，蠵龟幼体就必须抵达海洋。在这段脆弱的旅程中，大量捕食者伺机捕食新生个体。已观察到，若每次出巢的幼体数量较少，则存活概率降低；而在相反情形下，由于捕食者饱和效应，存活机会增加 [16]。因此，关于 f 具有双稳态的假设具有有趣的生物学意义。

假设 f 具有如上所述的双稳态结构，则我们可以预期解具有两种典型的渐近行为，即收敛到其中一个稳定平衡态。对于具有此类反应项的反应扩散方程，这一问题此前已针对若干类初始数据进行了研究；见 [10, 41, 52]。实质上，这些工作中的结果关注单调族解的行为中的尖锐转变。为了在我们的背景下建立这些想法，考虑一族非负初始分布$\{u_\lambda\}_{\lambda\geq 0}$，满足 $u_0 \equiv 0$，且映射 $\lambda \mapsto u_\lambda$ 在L^1范数下递增且连续。我们用 u^λ 表示方程(1.1)的解。由于平凡平衡态的渐近稳定性，显然当 λ取值较小时，该解满足：当$t \to \infty$ 时，$u^\lambda(t,\cdot) \to 0$ 在$L^1(0,+\infty)$中成立。同样地，若当 λ 取值较大时，u_λ 变得足够大以保持在非平凡稳定平衡态之上（见推论 2.9），则 $u^\lambda(t,\cdot) \to \varphi_{2^\circ}$ 因此，人们可能对所谓的阈值解感兴趣，即不表现出上述任何一种行为的解，并确定它们是一个也没有、恰好有一个，还是构成一个连续统。从应用的角度看，恰好存在一个阈值将表明灭绝与稳定化之间存在尖锐转变，而任何中间行为都将极为罕见。另一方面，从数学的角度看，对阈值解的刻画同样是一个引人入胜的问题，而且通常要困难得多。主要原因在于，中间平衡态的不稳定性可能产生正反馈循环，从而引发振荡行为。

为了理解年龄结构模型的阈值解如何演变，我们可以将其与时滞微分方程理论联系起来。设生育率为阶跃函数，$\beta(a) = \beta \mathbb{1}_{a\geq\tau}$ with $\beta > 0$ and $\tau > 0$；为简单起见，令$\mu(a) \equiv \mu > 0$ 为常数。对 (1.1) 中的微分方程关于 a 积分，可得

$$\partial_t \int_0^{+\infty} u(t,a)\mathrm{d}a = f\left(\beta \int_\tau^{+\infty} u(t,a)\mathrm{d}a\right) - \mu \int_0^{+\infty} u(t,a)\mathrm{d}a.$$

或者，在区间 $[t-\tau, t]$上沿特征线对同一方程积分，可得当 $t \geq \tau$时，

$$u(t,a) = \begin{cases} e^{-\mu\tau} u(t-\tau, a-\tau), & \text{if } a \geq \tau, \\ e^{-\mu a} f\left(\beta \int_\tau^{+\infty} u(t-a,\sigma)\mathrm{d}\sigma\right), & \text{if } a \leq \tau, \end{cases}$$

因此，通过变量替换，我们得到

$$\int_\tau^{+\infty} u(t,a)\mathrm{d}a = e^{-\mu\tau} \int_0^{+\infty} u(t-\tau,a)\mathrm{d}a.$$

因此，令 $U(t) \coloneqq \int_0^{+\infty} u(t,\ a)\mathrm{d}a$，可得系统 (1.1) 可以改写为关于 U的时滞微分方程

$$U'(t) = f(\beta e^{-\mu\tau} U(t-\tau)) - \mu U(t), \quad t > \tau, \tag{1.2}$$ eq:delay

该方程配有初始数据 $U(t) = U_0(t)$，其中 $t \in [0,\tau]$。方程 (1.2) 在文献中也称为Mackey-Glass型方程，而对 f 施加的结构使该方程满足正反馈条件。这里我们想提及一篇重要参考文献 [30]，作者在其中对该方程的动力学作了相当一般的描述；事实上，该方程在神经网络理论中有广泛的应用 [51]。在这篇参考文献中，作者与 [29], 共同证明，系统的全局吸引子可以表示为一个三维实心纺锤体，其尖端为稳定平衡态；一个不变圆盘将其分割为分别趋向这两个尖端的吸引域。这些研究为本文中的诸多思路提供了启发。

1.1 假设与主要结果

在全文中，我们将使用以下记号表示非负实数集合：$\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$。此外，若 X 表示一个巴拿赫空间，且 X_+ 是 X的正锥，我们将

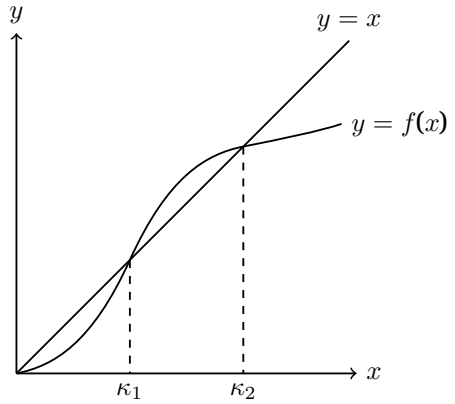


fig-1 图1：非线性函数 f 的图像：$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$。

使用以下记号表示由 X_+ 在 X的元素上诱导的不同序关系。令 $x, y \in X$，并在 X 上定义如下偏序关系

$$\begin{aligned} x \le y &\iff y - x \in X_+, \\ x < y &\iff x \le y \text{ and } x \neq y, \\ x \ll y &\iff y - x \in \operatorname{int} X_+, \end{aligned}$$

其中，$\operatorname{int} X_+$ 表示 X_+的内部。$x \ge y$、$x > y$ 和 $x \gg y$的定义类似。特别地，紧区间上的连续函数空间赋予由正连续函数锥所给出的序。

本研究致力于研究式 (1.1) 中非线性函数 f 的双稳态情形。总体而言，我们假设下列陈述在全文中均成立。

as-1 **假设 1.1**。式 (1.1) 中的参数满足以下条件：

(i) $\beta, \mu \in \mathrm{L}^\infty_+(0, +\infty)$，并按以下方式归一化

$$\int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} \mathrm{d}a = 1. \tag{1.3}$$ eq:norm

(ii) 存在 $\mu > 0$，使得对几乎所有 $a \ge 0$，$\mu(a) \ge \mu$。

(iii) $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是一个具有有界导数的 C^1函数，且对每个 $x \in \mathbb{R}_+$，$f'(x) > 0$。它恰有三个平衡点，即方程 $f(x) = x$ 的解集为$\{0, \kappa_1, \kappa_2\}$。此外，关系 $f'(0)\ f'(\kappa_2) < 1$和 $f'(\kappa_1) > 1$成立。参见图1。

(iv) 此外，f 满足

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} < 1. \tag{1.4}$$ diag_cond

下文令 β 为某个正数，使得对几乎所有 $a \ge 0$，$\beta(a) \le \beta$。在此假设下，我们对模型 (1.1) 的稳态有如下描述。

命题 1.1. *Gurtin-MacCamy*模型恰有三个平衡点，即 0、φ_1 和φ_2，其中后两个由下式给出

$$\overline{\varphi}_1(a) = \kappa_1 e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} \quad and \quad \overline{\varphi}_2(a) = \kappa_2 e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}. \tag{1.5}$$ def:equib

证明。令 $\overline{\varphi}(a)$为Gurtin-MacCamy模型的一个稳态。因此，(1.1)中的微分方程变为 $\overline{\varphi}'(a) = -\mu(a)\overline{\varphi}(a)$，由此可得 $\overline{\varphi}(a) = \overline{\varphi}(0) e^{-\int_0^a \mu_{(l)\mathrm{d}l}}$。利用边界条件和刚得到的公式，可得 $\overline{\varphi}(0) = f\left(\overline{\varphi}(0) \int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu_{(l)\mathrm{d}l}} \mathrm{d}a\right)$。因此，

根据假设 1.1中的归一化假设，我们推得 $\varphi(0) \in \{0, \kappa_1, \kappa_2\}$，证明完毕。 □

种群的最大繁殖年龄是一个值得考虑的重要量。从数学上讲，它可以定义为

$$a^* := \sup\left\{a \geq 0 \colon \int_a^{+\infty} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}\mathrm{d}a > 0\right\} \in (0, +\infty]. \tag{1.6}$$ def:a*

注意，这一定义意味着 $\beta(a) = 0$ 在 $(a^*, +\infty)$ 上几乎处处成立，并且

$$\int_\sigma^{a^*} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}\mathrm{d}a > 0, \quad \forall \sigma \in [0, a^*).$$

情形 $a^* = +\infty$ 由于定义域无界，处理起来更为复杂，而且对生育率还需要一些额外的假设；参见 [12, 13]。

为了陈述主要结果，我们还考虑一族初始数据 $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq 0} \subseteq \mathrm{L}^1_+(0, +\infty)$，并作出以下假设。

as-2 **假设 1.2.** 以下关于这族$\{u_\lambda\}_{\lambda\geq 0}$ 的条件成立：

(i) 映射 $\lambda \to u_\lambda$ 是从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathrm{L}^1(0, +\infty)$ 的连续映射，其中 $u_0 \equiv 0$。

(ii) 族 $\{u_\lambda\}_{\lambda\geq 0}$ 是单调递增的，意即若 $\lambda < \eta$，则 $u_\lambda \leq u_\eta$ 几乎处处成立，且该不等式在 $(0, a^*)$ 的某个正测度子集上严格成立。

我们用 u^λ 表示初始分布为 u_λ时方程 (1.1) 的解。根据 a^* 的定义，最后一个条件可以解释如下：随着参数增大，处于繁殖年龄的个体数量也随之增加，因此初始种群的每个初始分布u_η 都会比先前的分布 u_λ 产生更多的额外质量，其中 $\lambda < \eta$。我们的主要结果如下：

th:main **定理 1.2.** 假设 *1.1* 和 *1.2* 成立，且 $a^* < +\infty$ 成立。我们有如下二择一结论：

- *Either for every* $\lambda \geq 0$, $u^\lambda(t, \cdot) \to 0$ *in* $\mathrm{L}^1(0, +\infty)$,
- 或者存在唯一的 $\lambda^* > 0$，使得

$$\lim_{t\to\infty} u^\lambda(t, \cdot) = \begin{cases} 0, & \text{if } \lambda < \lambda^*, \\ \overline{\varphi}_2, & \text{if } \lambda > \lambda^*, \end{cases}$$

在 $\mathrm{L}^1(0, +\infty)$ 中。在这种情况下，存在 $\delta > 0$，满足

$$\liminf_{t\to\infty} \|u^{\lambda^*}(t, \cdot)\|_{\mathrm{L}^1} \geq \delta \quad \text{and} \quad \liminf_{t\to\infty} \|u^{\lambda^*}(t, \cdot) - \overline{\varphi}_2\|_{\mathrm{L}^1} \geq \delta.$$

据我们所知，这是首次对年龄结构模型的尖锐阈值动力学进行严格证明。该结果的证明利用了这样一个事实：单调非线性会使状态空间中的系统 [46] 成为单调动力系统。尽管围绕这类动力系统的理论已相当成熟，但仅凭单调性还不足以确定系统的完全动力学。还必须进一步要求半流具有强单调性或强保序性质；后者是一个更灵活的概念，因为它允许生成序关系的锥具有空内部。

对于系统 (1.1)，当允许 β 具有非紧支撑时，主要困难便随之出现；也就是说，$a^* = +\infty$。这意味着初始数据 u_0 对解的影响会持续所有 $t \geq 0$，因此，该模型所生成的半流是否具有强序保持性质并不完全明确。尽管如此，仍可用这种方法研究一种特定的非紧支撑情形。具体而言，假设 β 和 μ 最终为常数；也就是说，存在$a_0 > 0$ 以及正的常数 β_∞ 和 μ_∞，使得对于几乎处处的$a > a_0$，$\beta(a) = \beta_\infty$ 且 $\mu(a) = \mu_\infty$。于是，可以通过一个耦合积分微分方程系统来研究Gurtin-MacCamy模型的动力学，该系统构成一个强单调动力系统；参见第5节。接下来，我们将正式陈述这一结论。

as:4 **假设 1.3**。 存在 $a_0 \geq 0$、 $\beta_\infty > 0$ 和 $\mu_\infty > 0$，使得对于几乎处处的 $a > a_0$， $\beta(a) = \beta_\infty$ 且 $\mu(a) = \mu_\infty$。

th:main_2 **定理 1.3.** 设假设 *1.1*、*1.2* 和 *1.3* 成立。我们有如下二择一：

- 或者对每一个 $\lambda \geq 0$， $u(t,\cdot) \to 0$ 属于$\mathrm{L}^1(0,+\infty)$。
- 或者存在唯一的 $\lambda^* > 0$，满足

$$\lim_{t\to\infty} u^\lambda(t,\cdot) = \begin{cases} 0, & \text{if } \lambda < \lambda^*, \\ \overline{\varphi}_2, & \text{if } \lambda > \lambda^*, \end{cases}$$

属于$\mathrm{L}^1(0,+\infty)$。此外，存在 $\delta > 0$，满足

$$\liminf_{t\to\infty} \|u^{\lambda^*}(t,\cdot)\|_{\mathrm{L}^1} \geq \delta \quad \text{and} \quad \liminf_{t\to\infty} \|u^{\lambda^*}(t,\cdot) - \overline{\varphi}_2\|_{\mathrm{L}^1} \geq \delta.$$

本文结构如下。在第 2 节中，我们用两种不同方法讨论年龄结构模型的适定性问题。首先，我们利用积分半群求解该模型相应的抽象表述，从而证明在 L^1_+ 上存在一个连续半流，它给出Gurtin-MacCamy模型的解。稳态的局部稳定性和不稳定性也借助线性化稳定性原理得到证明。第二种方法利用特征线法，借助非线性沃尔泰拉积分方程的解得到该解的表示。我们还陈述该解的若干性质，如其有界性，以及由对 f所作的单调性假设推出的比较原理。这一表述是后文进一步发展的基础。在第 3 节中，我们处理 β 具有紧支撑的情形，从而可将问题表述为定义在某个紧区间上的连续函数空间的一个闭子集上的半流。在本节中，我们描述称为分界集的集合，它包含所有在中间平衡态附近产生振荡解的初始数据。分界集原来是一个全不可比集，这意味着尖锐阈值性质，从而我们的主要结果随之成立，其证明见第 4 节。在第5节中，我们说明这一技巧也可用于研究 β 不具有紧支撑的一个特殊情形，即 β 与 μ最终为常数的情形。最后，附录说明当出生率不具有紧支撑时，强保序性质如何失效。

2 预备知识

sec:prelim

2.1 问题的抽象设定

本小节旨在为该问题建立一个抽象框架，以便以标准方式确立其适定性。积分半群理论已被广泛用于研究算子非稠密定义的半线性抽象柯西问题；有关这一主题的完整介绍及进一步阅读资料，请参见 [36]及其中的参考文献。

对于 Gurtin-MacCamy模型，我们将初始分布 u_0 所在的空间取为勒贝格可积函数空间 $\mathrm{L}^1(0,+\infty)$，这是因为其范数可解释为初始时刻种群的总个体数。因此，令

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{R} \times \mathrm{L}^1(0,+\infty), \\ X_0 &= \{0\} \times \mathrm{L}^1(0,+\infty), \\ D(A) &= \{0\} \times \mathrm{W}^{1,1}(0,+\infty), \end{aligned}$$

其中，这些空间赋有通常的乘积范数，并注意到 $D(A) = X_0$。此外，将 $X^+ = \mathbb{R}_+ \times \mathrm{L}^1_+(0,+\infty)$ 设为 X 的非负元素组成的通常锥，并类似地设 $X_0^+ = \{0\} \times \mathrm{L}^1_+(0,+\infty)$。考虑线性算子 A: $D(A) \subseteq X \to X$，其定义如下：

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi(0) \\ -\varphi' - \mu\varphi \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$ def-A

由于索博列夫嵌入 $W^{1,1}(0,+\infty) \to C(\mathbb{R}_+)$，这里的 $\varphi(0)$ 定义良好。此外，注意该算子不是稠密定义的，因为 $D(A) = X_0$。

定义 $F\colon X_0 \to X$ 为

$$F\begin{pmatrix}0\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\left(\int_0^{+\infty}\beta(a)\varphi(a)\mathrm{d}a\right)\\ 0\end{pmatrix}. \tag{2.2}$$ def-F

然后，将年龄结构模型的解 $u(t,\ a)$ 与 $v(t) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ u_t(\cdot, & \cdot)\end{pmatrix} \in D(A)$ 对应起来，就可以将问题 (1.1) 改写为抽象半线性柯西问题

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = Av(t) + F(v(t)), \quad t > 0, \quad v(0) = v_0 \in X_0^+. \tag{2.3}$$ abs-prob

为了推导出该问题的极大解的存在性和唯一性，我们将应用积分半群理论。事实上，这些性质在 [37,第 8 节3],中已经提及，但为完整起见，现将在此陈述并证明它们。

引理 2.1。算子 A 是一个希勒–吉田算子；也就是说，存在 $\omega \in \mathbb{R}$ 使得 $(\omega,\ +\infty) \subset \rho(A)$ 并且

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\| \le \frac{1}{(\lambda-\omega)^n}, \quad \forall \lambda > \omega,\ \forall n \ge 1.$$

事实上，可以取 $\omega =$ 本质上确界 $(-\mu) < 0$。

证明。令 $\omega :=$ 本质上确界$(-\mu)$。对于 $\lambda > \omega$ 以及一个元素 $\begin{pmatrix}\alpha\\ \psi\end{pmatrix} \in X$，方程

$$(\lambda I - A)\begin{pmatrix}0\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \psi\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\varphi(0) = \alpha,\\ \lambda\varphi + \varphi' + \mu\varphi = \psi,\end{cases}$$

可以唯一地在 $D(A)$ 中求解为

$$\varphi(a) = \alpha e^{-\int_0^a \lambda+\mu(l)\mathrm{d}l} + \int_0^a e^{-\int_s^a \lambda+\mu(l)\mathrm{d}l}\psi(s)\mathrm{d}s.$$

此外，我们可以估计其范数为

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}|\varphi(a)|\mathrm{d}a &\le |\alpha|\int_0^{+\infty} e^{-\int_0^a \lambda+\mu(l)\mathrm{d}l}\mathrm{d}a + \int_0^{+\infty}\int_0^a e^{-\int_s^a \lambda+\mu(l)\mathrm{d}l}|\psi(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}a\\ &\le |\alpha|\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-\omega)a}\mathrm{d}a + \int_0^{+\infty}\int_s^{+\infty} e^{-(\lambda-\omega)(a-s)}|\psi(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}a\\ &= \frac{|\alpha|}{\lambda-\omega} + \frac{\|\psi\|}{\lambda-\omega} = \frac{1}{\lambda-\omega}\left\|\begin{pmatrix}\alpha\\ \psi\end{pmatrix}\right\|,\end{aligned}$$

并且由于 $\|(\lambda I - A)^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \psi\end{pmatrix}\| = \|\varphi\|$，我们推得

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \le \frac{1}{\lambda-\omega}$$

这意味着 $(\omega, +\infty) \subseteq \rho(A)$，且 A 是一个希勒–吉田算子。 □

考虑 A_0，即 A 在 $X_0 = D(A)$ 上的部分算子。该结果表明 A_0 是一个稠密定义的希勒–吉田算子，因此它生成一个作用于 X_0 上的 C_0-半群$\{T_{A_0}(t)\}_{t\ge 0}$（参见 [36, 引理 3.4.2]），满足

$$\|T_{A_0}(t)\| \le e^{\omega t},$$

with ω 如上面的引理所示。此外，由 A_0 生成的半群为 th e formula

$$T_{A_0}(t)\begin{pmatrix}0\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \hat{T}_{A_0}(t)\varphi\end{pmatrix}, \quad \hat{T}_{A_0}(t)(\varphi)(a) = \begin{cases}e^{-\int_{a-t}^a \mu(l)\mathrm{d}l}\varphi(a-t), & \text{for } a \ge t,\\ 0, & \text{for } a \le t,\end{cases}$$

其中 $\begin{pmatrix}0\\ \varphi\end{pmatrix}\in X_0$。事实上，注意到若给定 $\begin{pmatrix}0\\ \psi\end{pmatrix}\in X_0$、 $\lambda>\omega$ 和 $a>0$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}\hat{T}_{A_0}(s)(\psi)(a)\mathrm{d}s &= \int_0^a e^{-\lambda s}e^{-\int_{a-s}^a \mu(l)\mathrm{d}l}\psi(a-s)\mathrm{d}s\\ &= \int_0^a e^{-\int_s^a \lambda+\mu(l)\mathrm{d}l}\psi(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由此计算可知

$$(\lambda I-A_0)^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \psi\end{pmatrix}=\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}T_{A_0}(s)\begin{pmatrix}0\\ \psi\end{pmatrix}\mathrm{d}s,$$

因此，根据 Arendt 对无穷小生成元的拉普拉斯变换刻画可得该结论（参见 [1] 或 [36, 定理 2.3。9]）。

此外， A 生成一个积分半群$\{S_A(t)\}_{t\geq 0}$ （参见 [36, 命题 3.4.3]），其表达式为

$$S_A(t)=(\lambda I-A_0)\int_0^t T_{A_0}(s)\mathrm{d}s(\lambda I-A)^{-1},$$

对任意 $\lambda>\omega$均成立。事实上，将该积分半群限制在空间 X_0 上时，可由以下表示式轻松求得

$$S_A(t)x=\int_0^t T_{A_0}(s)x\mathrm{d}s,\quad \forall t\geq 0,\ \forall x\in X_0.$$

因此，该积分半群定义为

$$S_A(t)\begin{pmatrix}\alpha\\ \varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ L(t)\alpha+\int_0^t \hat{T}_{A_0}(s)\varphi\mathrm{d}s\end{pmatrix},$$

其中

$$L(t)(\alpha)(a)=\begin{cases}0, & \text{for } a\geq t,\\ \alpha e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}, & \text{for } a\leq t.\end{cases}$$

另一方面，由于假设函数 f 连续可微且导数有界，因此 F 是一个正的 Fréchet可微 Lipschitz映射。此外，在元素 $\left(\begin{smallmatrix}0\\ \varphi\end{smallmatrix}\right)\in X_0$ 处的导数是线性算子 $DF\left(\begin{smallmatrix}0\\ \varphi\end{smallmatrix}\right): X_0\to X$，其定义如下

$$DF\begin{pmatrix}0\\ \varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f'\left(\int_0^{+\infty}\beta(a)\varphi(a)\mathrm{d}a\right)\int_0^{+\infty}\beta(a)\psi(a)\mathrm{d}a\\ 0\end{pmatrix}.$$

鉴于这些观察结果，且算子 A 预解正，以下结果可由应用于半线性柯西问题的积分半群理论得出，参见例如 [36, 第 5] 节。

命题2.2。 设假设 *1.1* 成立。则存在一个定义在 X_0^+ 上的连续半流 $\{U(t)\}_{t\geq 0}$，使得对每个 $u_0\in X_0^+$，映射 $t\mapsto U(t)u_0$ 都是抽象半线性柯西问题 (2.3) 的唯一积分解：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=Av(t)+F(v(t)), & t\geq 0,\\ v(0)=u_0,\end{cases}$$

也就是说，

$$U(t)u_0=u_0+A\int_0^t U(s)u_0\mathrm{d}s+\int_0^t F(U(s)u_0)\mathrm{d}s.$$

2.2 稳态的存在性与局部稳定性

我们先回顾一下具有非稠密定义生成元的演化方程 (2.3) 的线性化稳定性原理；参见 [7, 49]。这里，若 B 表示一个 C^0-半群$\{T_B(t)\}_{t\geq 0}$的生成元，则定义

$$\omega_0(B) := \lim_{t\to+\infty} \frac{\log \|T_B(t)\|}{t} \quad \text{and} \quad \omega_1(B) := \lim_{t\to+\infty} \frac{\log \|T_B(t)\|_{\text{ess}}}{t}$$

分别为$\{T_B(t)\}_{t\geq 0}$的增长界和本质增长界，其中 $\|T_B(t)\|_{\text{ess}}$表示算子 $T_B(t)$ 的本质半范数。

命题 2.3. 设 F 在 X_0 上连续 *Fréchet*可微，且 u^* 为稳态。记$(A+DF(v^*))_0$为 $A+DF(v^*)$ 在 X_0 中的部分。若 $\omega_0((A+DF(v^*))_0) < 0$，则对任意$\omega > \omega_0((A+DF(v^*))_0)$，存在 M、$\delta > 0$ 使得

$$\|U(t)u - u^*\| \leq Me^{\omega t}\|u-u^*\|, \quad \forall t \geq 0,$$

对所有满足 $\|u-u^*\| \leq \delta$的 $u \in X_0$ 均成立。

推论 2.4. 设 F 在 X_0 上连续 *Fréchet*可微，且 u^* 为稳态。假设 $\omega_1((A+DF(v^*))_0) < 0$。若 $A+DF(v^*)$ 的所有特征值的实部均严格为负，则存在 $\omega < 0$、 M、$\delta > 0$ 使得

$$\|U(t)u - u^*\| \leq Me^{\omega t}\|u-u^*\|, \quad \forall t \geq 0,$$

对所有满足 $\|u-u^*\| \leq \delta$ 的 $u \in X_0$ 均成立。另一方面，如果 $A+DF(u^*)$ 至少有一个特征值的实部严格为正，那么 u^* 是不稳定稳态。

容易验证，抽象问题 (2.3) 恰有三个平衡点

$$\overline{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\varphi}_1 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \overline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\varphi}_2 \end{pmatrix},$$

其中 $\overline{\varphi}_i(a) = \kappa_i e^{-\int_0^a \mu_{(l)}\mathrm{d}l}$, $i \in \{1,2\}$。关于这些稳态的局部渐近稳定性，我们有如下结果。

命题 2.5. 稳态 u_0 和 u_2 是局部渐近稳定的，而中间平衡点 u_1 不稳定。

证明。 我们先分析零平衡态 u_0 的稳定性。由于由 A_0 生成的半群满足

$$\|T_{A_0}(t)\| \leq e^{\omega t},$$

其中 $\omega = \text{ess sup}(-\mu) \leq -\underline{\mu} < 0$，且 μ 如假设 1.1-(ii) 所述，因此可得 $\omega_1(A_0) \leq \omega_0(A_0) \leq \omega$。由于 $DF(u_0)$ 是有界紧线性算子，由 [14] 中的定理 1.2 可得 $\omega_1((A+DF(u_0))_0) \leq -\underline{\mu}$。因此，接下来只需研究半平面 $\{\lambda: \text{Re}(\lambda) > -\underline{\mu}\}$ 内 $(A+DF(u_0))_0$ 的点谱。

方程 (2.3) 在平凡平衡态 u_0 附近的线性化方程为

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = Av(t) + DF(\overline{u}_0)v(t),$$

这对应于以下偏微分方程表述

$$\begin{cases} \partial_t u(t,a) + \partial_a u(t,a) = -\mu(a)u(t,a), & t>0,\ a>0, \\ u(t,0) = f'(0)\displaystyle\int_0^{+\infty} \beta(a)u(t,a)\mathrm{d}a, & t>0, \\ u(0,\cdot) = u_0 \in \mathrm{L}^1(0,+\infty). \end{cases} \tag{2.4}$$

eq:linear-model

接下来，我们寻求指数解 $u(t,a) = e^{\lambda t}u(a)$，以推导特征方程。由此得到以下系统

$$\begin{cases} u'(a) = -(\lambda + \mu(a))u(a), & a > 0, \\ u(0) = f'(0)\displaystyle\int_0^{+\infty} \beta(a)u(a)\mathrm{d}a, \end{cases}$$

解出微分方程，并将该解代入边界条件后，我们得到特征方程

$$f'(0)\int_0^{+\infty} \beta(a)e^{-\lambda a}e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}\mathrm{d}a = 1. \tag{2.5}$$ char-eq

如果 $f'(0) = 0$特征值集合为空，则假设 $f'(0) > 0$。设 λ 是该方程的一个根，且实部为正。由于 $f'(0) < 1$，可得

$$1 < \frac{1}{|f'(0)|} \le \int_0^{+\infty} \beta(a)e^{-\mathrm{Re}(\lambda)a}e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}\mathrm{d}a < \int_0^{+\infty} \beta(a)e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}\mathrm{d}a = 1,$$

这是荒谬的。另一方面，如果 $\lambda = i\xi, \xi \in \mathbb{R}$, 是方程 (2.5) 的一个解，那么将其实部和虚部分开，可得

$$f'(0)\int_0^{+\infty} \beta(a)e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}\cos(\xi a)\mathrm{d}a = 1,$$

这和之前一样导出了矛盾。

以 u_1 和 u_2 为中心对方程 (2.3) 进行线性化，得到的线性化方程同样对应于 (2.4) 中的偏微分方程表述，只需将 $f'(0)$ 替换为 $f'(\kappa_i)$，并分别对应 $i \in \{1,2\}$。因此，关于 u_2 的特征方程为

$$f'(\kappa_2)\int_0^{+\infty} \beta(a)e^{-\lambda a}e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}\mathrm{d}a = 1,$$

a而且，由于 $f'(\kappa_2) < 1$， u_2 的稳定性可通过与零平衡态相同的论证得出。另一方面， u_1 的特征方程为

$$f'(\kappa_1)\int_0^{+\infty} \beta(a)e^{-\lambda a}e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}\mathrm{d}a = 1.$$

注意，该方程的左端定义了一个连续递减函数 $G\colon (-\mu, +\infty) \to \mathbb{R}$，满足 $G(0) = f'(\kappa_1) > 1$ 且 $G(+\infty) = 0$。因此，特征方程有唯一的正实根，这意味着 u_1不稳定。 □

2.3 Volterra表述

除了前几节介绍的表述外，还可以给出 Gurtin-MacCamy系统的解的近乎显式表示。事实上，通过特征线法求解 (1.1) 的一阶偏微分方程，我们得到如下解的公式:

$$u(t,a) = \begin{cases} e^{-\int_{a-t}^a \mu(l)\mathrm{d}l}u_0(a-t), & \text{for } a \ge t, \\ e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}b(t-a), & \text{for } a \le t, \end{cases} \tag{2.6}$$ charac-1

其中 $b\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 是非线性沃尔泰拉方程的唯一连续解

$$b(t) = f\left(\int_t^{+\infty} \beta(a)e^{-\int_{a-t}^a \mu(l)\mathrm{d}l}u_0(a-t)\mathrm{d}a + \int_0^t \beta(a)e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}b(t-a)\mathrm{d}a\right). \tag{2.7}$$ eq:int_1

这一表示等价于

$$u(t,a)=\begin{cases}e^{-\int_{a-t}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}u_0(a-t), & \text{for } a\geq t,\\ e^{-\int_{0}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}f(B(t-a)), & \text{for } a\leq t,\end{cases} \tag{2.8}$$

charac-2

where B: $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 是非线性沃尔泰拉积分方程的唯一连续解

$$B(t)=\int_t^{+\infty}\beta(a)e^{-\int_{a-t}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}u_0(a-t)\mathrm{d}a+\int_0^t\beta(a)e^{-\int_{0}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}f(B(t-a))\mathrm{d}a, \tag{2.9}$$

eq:int_2

其关系式为

$$\begin{aligned}b(t)&=f(B(t)),\\ B(t)&=\int_t^{+\infty}\beta(a)e^{-\int_{a-t}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}u_0(a-t)\mathrm{d}a+\int_0^t\beta(a)e^{-\int_{0}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}b(t-a)\mathrm{d}a.\end{aligned}$$

因此，为了理解该问题的长期动力学，我们需要研究刚才给出的两种积分方程中的任意一种。形式如（2.7）的方程及其积分微分形式，反复出现在种群动力学和流行病学的不同情境中，例如 [4, 5, 8, 19] 中的一些例子。Londen 和 Levin 分别在一系列研究中关注该方程解的长期行为（参见 [31, 32]及其中的参考文献），证明了在核满足单调性条件、其余参数满足较弱条件时，所有有界解都趋于函数 f的平衡点集合。最近，Herrera 和 Trofimchuk [22] 研究了单稳态情形下的这一积分方程，并得出了使解绝对收敛到非平凡平衡态的条件（这里，绝对收敛是指收敛与核的选择无关）。本文关注双稳态情形，但其中一些结果仍然适用。

下面的命题给出了方程 (2.7) 的解的一些基本性质。

prop:basics

命题 2.6. 设假设 *1.1* 成立。则方程(2.7)存在唯一的连续解 b: $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$，且该解可通过逐次逼近法得到；也就是说，给定任意 $b_0\in C(\mathbb{R}_+)$，解 b 是迭代方案 $b_{n+1}=\mathcal{A}(b_n)$ 的极限，其中 $\mathcal{A}$: $C(\mathbb{R}_+)\to C(\mathbb{R}_+)$ 是由(2.7)右端定义的算子；即，

$$\mathcal{A}(b)(t)=f\left(\int_t^{+\infty}\beta(a)e^{-\int_{a-t}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}u_0(a-t)\mathrm{d}a+\int_0^t\beta(a)e^{-\int_{0}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}b(t-a)\mathrm{d}a\right).$$

此外，解 b 在 $\mathbb{R}_+$ 上一致连续。

此外，初始数据的连续依赖性具有如下形式：给定 $\varepsilon>0$,$u_0\in \mathrm{L}^1_+(0,+\infty)$ 和 $T>0$，则存在 $\delta>0$，使得对任意满足$\|u_0-v_0\|<\delta$的 $v_0\in \mathrm{L}^1_+(0,+\infty)$，对应的(2.7) 解 b^u,b^v 满足 $|b^v(t)-b^u(t)|<\varepsilon$，对每个$t\in[0,T]$均成立。

证明。 解的存在性可通过在适当的连续函数加权空间中考察算子 $\mathcal{A}$，直接应用压缩映射原理得出；例如参见 [22, 44]或 [11]中的第 2 章。由卷积运算的正则化性质以及连续依赖性，并直接应用格朗沃尔不等式，可得一致连续性。

□

此外，假设 1.1 中给出的次对角条件保证了解的一致有界性（参见 [2]）。

th:bound

定理 2.7. 设假设 *1.1* 成立。该方程的解一致最终有界；也就是说，存在 $M>0$，使得对于任意函数 $u_0\in \mathrm{L}^1_+(0,+\infty)$，方程 (2.7) 的相应解 $b=b(\cdot;u_0)$ 满足

$$\limsup_{t\to\infty}b(t)\leq M.$$

更准确地说，令 $b^* = \text{上极限}_{t\to\infty} b(t)$，且 $b_* = \liminf_{t\to\infty} b(t)$，则

$$b^* \in \{0\} \cup [\kappa_1, \kappa_2] \quad and \quad b_* \in [0, \kappa_1] \cup \{\kappa_2\}.$$

此外，存在只依赖于 f 和 β 的常数 C_1、$C_2 > 0$，使得

$$B(t) \le C_1 + C_2\|u_0\|, \quad t \ge 0.$$

证明。为简便起见，我们将对方程 (2.9) 证明该结果。首先，取满足下式的 $\rho \in \in(0,1)$:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \le \rho,$$

那么存在 $M > 0$，使得对于每个 $x \ge M$， $f(x) \le \rho x$。现在，我们先证明 (2.9) 的每个解都有界。为此，取任意正数 $T > 0$，并令 B 为 (2.9) 的任意一个解。定义集合 $K = \{t \ge 0\colon B(t) > M\}$，注意对于 $t \in [0,T]$，有

$$\begin{aligned} B(t) &\le \overline{\beta} e^{-\underline{\mu} t}\|u_0\|_{\mathrm{L}^1} + \left(\int_{[0,t]\cap K^c} + \int_{[0,t]\cap K}\right) \beta(t-a) e^{-\int_0^{t-a}\mu(l)\mathrm{d}l} f(B(a))\mathrm{d}a \\ &\le \overline{\beta}\|u_0\|_{\mathrm{L}^1} + \left[f(M) + \rho \max_{t\in[0,T]} B(t)\right] \int_0^t \beta(t-a) e^{-\int_0^{t-a}\mu(l)\mathrm{d}l}\mathrm{d}a. \end{aligned}$$

由于根据归一化假设 (1.3)，最后一个积分不超过 1，且这对每个 $t \in [0,T]$ 都成立，因此我们推得

$$\max_{t\in[0,T]} B(t) \le \overline{\beta}\|u_0\|_{\mathrm{L}^1} + f(M) + \rho \max_{t\in[0,T]} B(t),$$

或者等价地

$$\max_{t\in[0,T]} B(t) \le \frac{\overline{\beta}\|u_0\|_{\mathrm{L}^1} + f(M)}{1-\rho}.$$

由于最后一个表达式的右端与 T 无关，因此解的有界性得证。

现在，令 $B^* = \text{上极限}_{t\to\infty} B(t)$， $\varepsilon > 0$ 并考虑 $T_\varepsilon > 0$，使得 $B(t) \le B^* + \varepsilon$ 对每个$t \ge T_\varepsilon$成立。此外，取 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 一个实数序列，使得 $t_n \to \infty$ 且 $B(t_n) \to B^*$。于是，对任意充分大的 n，我们有

$$\begin{aligned} B(t_n) &\le \overline{\beta} e^{-\underline{\mu} t_n}\|u_0\|_{\mathrm{L}^1} + \left(\int_0^{t_n - T_\varepsilon} + \int_{t_n - T_\varepsilon}^{t_n}\right) \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} f(B(t_n - a))\mathrm{d}a \\ &\le \overline{\beta} e^{-\underline{\mu} t_n}\|u_0\|_{\mathrm{L}^1} + f(B^* + \varepsilon) \int_0^{t_n - T_\varepsilon} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}\mathrm{d}a + K \int_{t_n - T_\varepsilon}^{t_n} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}\mathrm{d}a \\ &\le \overline{\beta} e^{-\underline{\mu} t_n}\|u_0\|_{\mathrm{L}^1} + f(B^* + \varepsilon) \int_0^{t_n - T_\varepsilon} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}\mathrm{d}a + K\overline{\beta} \int_{t_n - T_\varepsilon}^{t_n} e^{-\underline{\mu} a}\mathrm{d}a, \end{aligned}$$

其中 K是 $f(B(t))$ 的某个界。然后，取 $n \to \infty$，我们推出 $B^* \le f(B^* + \varepsilon)$，因此，由于 ε 是任意的，可得 $B^* \le f(B^*)$。由函数f的几何形状以及最后一个不等式，我们推断 $B^* \in \{0\} \cup [\kappa_1, \kappa_2]$，如所述。

对于涉及下极限的结果，令 $B_* = \text{下极限}_{t\to\infty} B(t)$， $\varepsilon > 0$ 给定，且$T_\varepsilon > 0$ 使得 $B(t) \ge B_* - \varepsilon$ 对每个 $t \ge T_\varepsilon$成立。取一个时刻序列 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得$B(t_n)$ 趋于 B_*，则与前面一样，我们得到

$$B(t_n) = \int_{t_n}^{+\infty} \beta(a) e^{-\int_{a-t}^a \mu(l)\mathrm{d}l} u_0(a-t)\mathrm{d}a + \left(\int_0^{t_n - T_\varepsilon} + \int_{t_n - T_\varepsilon}^{t_n}\right) \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} f(B(t_n - a))\mathrm{d}a.$$

最后一个表达式中的第一项和第三项按照之前相同的方式趋于 0，当 $n \to \infty$ 时，而第二项的下界为 $f(B_* - \varepsilon) \int_0^{t_n - T_\varepsilon} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu_{(l)\mathrm{d}l}}\mathrm{d}a$。因此，取极限后，我们得到 $B_* \ge f(B_*)$，结论由函数 f 的几何形状得出。

□

2.4 比较原理

关于 Gurtin-MacCamy模型中的比较原理已有一些研究结果；例如参见 [37, 44]。为满足本文的需要，我们建立一个更简单版本的比较原理，其证明可直接由构造积分方程解的逐次逼近法得到。具体而言：

命题 2.8. （比较原理）设假设 *1.1* 成立。若 $u_0, v_0 \in \mathrm{L}^1_+(0,+\infty)$满足 $u_0 \le v_0$ *a.e.*，则积分方程 $b^u = b(\cdot; u_0)$ 和$b^v = b(\cdot; v_0)$ 的相应解满足

$$b_u(t) \le b_v(t), \quad \forall t \ge 0.$$

证明. 给定 $u_0, v_0 \in \mathrm{L}^1_+(0,+\infty)$，且满足 $u_0 \le v_0$ a.e。记 b^u 和 b^v 为分别对应于 u_0 和 v_0的方程 (2.7) 的解。因此，由关于 f 的单调性假设可知，对每个 $t \ge 0$

$$\begin{aligned} b^u(t) &= \mathcal{A}_u(b^u)(t) \\ &= f\left(\int_t^{+\infty} \beta(a) e^{-\int_{a-t}^a \mu(l)\mathrm{d}l} u_0(a-t) + \int_0^t \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} b^u(t-a)\mathrm{d}a\right) \\ &\le f\left(\int_t^{+\infty} \beta(a) e^{-\int_{a-t}^a \mu(l)\mathrm{d}l} v_0(a-t) + \int_0^t \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} b^u(t-a)\mathrm{d}a\right) = \mathcal{A}_v(b^u)(t). \end{aligned}$$

这里，我们在算子 $\mathcal{A}$ 中使用下标来表示其对初始分布 u_0 和 v_0的依赖。利用上一个不等式，通过归纳可得，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $b^u \le \mathcal{A}_v^n(b^u)$，因此结论由命题 2.6 得出。 □

这一原理可用于确定积分方程某些特定解的渐近行为。特别是，由于映射 f 的单调性和一维动力学，人们预期，从不稳定平衡点下方或上方出发的解，将分别收敛到平凡平衡态或稳定的非平凡平衡。事实上，这一观察可由比较原理证明。

cor:conv

推论 2.9. 设假设 *1.1* 成立。此外，假设 $u_0 \in \mathrm{L}^1_+(0,+\infty)$ 满足

$$u_0(a) \ge (\le) \kappa_1 e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}, \quad a.e.\ for\ a \ge 0,$$

并且满足 支撑 $u_0 \cap [0, a^*] \ne \emptyset$。那么，系统 (1.1) 的相应解满足$u(t,\cdot) \to \varphi_2$ (0) 属于 $\mathrm{L}^1(0,+\infty)$。

证明。 将与给定初始函数 u_0 对应的方程 (2.7) 的解记为 b。通过变量代换 $\xi(t) = b(t) - \kappa_1$, $g(x) = f(x+\kappa_1) - \kappa_1$，以及 $\eta_0(a) = u_0(a) - \kappa_1 e^{-\int_0^a \mu_{(l)}\mathrm{d}l}$，我们观察到 ξ 是下列方程的连续解

$$\xi(t) = g\left(\int_t^{+\infty} \beta(a) e^{-\int_{a-t}^a \mu(l)\mathrm{d}l} \eta_0(a-t)\mathrm{d}a + \int_0^t \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} \xi(t-a)\mathrm{d}a\right).$$

此外， g 具有单稳态结构，并且根据比较原理， ξ 是一个非零解。于是，定理的结论可由 [22]的一致持久性结果（见其中的定理 1）和定理 2.7 得出。另一种情况类似。 □

3 阈值集

sec:threshold

注意，积分方程 (2.7) 可改写为

$$b(t) = f\left(\int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} b(t-a)\mathrm{d}a\right),$$

其中，我们定义

$$b(t) = e^{\int_0^{-t} \mu(l)\mathrm{d}l} u_0(-t), \quad \text{for } t < 0.$$

下文中，给定 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\varphi\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 我们用 φ_t 表示函数 φ 的历史，该函数由 $\varphi_t(s) = \varphi(t+s),\ s<0$定义；参数的取值范围将根据上下文明确。

现在，由于当 β 大于 a^* 时其值为零（见（1.6）），前面的方程可化简为

$$b(t) = f\left(\int_0^{a^*} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} b(t-a)\mathrm{d}a\right), \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

eq:int_3

因此，需要在（$-a^*$，0）上指定 b 的初始值。假设 $a^* < +\infty$，并令 $C_+^0 := C_+^0([-a^*, 0])$为非负连续函数的集合。给定函数 $\varphi \in C_+^0$，并将 b 视为相应方程的解，我们已知 b 是 $\mathbb{R}_+$上的连续函数，但请注意

$$b(0) = f\left(\int_0^{a^*} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} \varphi(-a)\mathrm{d}a\right) \neq \varphi(0),$$

因此，由下式定义的函数 b^φ:（$-a^*$，$+\infty$）$\to \mathbb{R}_+$

$$b(t) = \begin{cases} b(t), & t \geq 0, \\ \varphi(t), & t \in (-a^*, 0), \end{cases}$$

may 在零点处不连续，因此无法在整个 le
spac $C([-a^*, 0])$上定义半流。尽管如此，取以下闭子集 $X \subseteq C_+^0$ 为

$$X = \left\{\varphi \in C_+^0 \colon f\left(\int_0^{a^*} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} \varphi(-a)\mathrm{d}a\right) = \varphi(0)\right\}, \tag{3.2}$$

def:X

那么，每个初始函数 $\varphi \in X$ 都会产生（3.1）的连续解，因此我们可以考虑由 $\Phi(t,\ \varphi) = b_t^\varphi$ 定义的连续半流 Φ: $\mathbb{R}_+ \times X \to X$，其中 b^φ 表示具有初始数据 φ的积分方程的解。根据上一节的比较原理，这构成一个单调半流；显然，该半流的平衡点是由 f的不动点给出的常函数。完备度量空间 X 赋有由 C_+^0的锥所确定的序关系。下文将陈述该半流的一些基本性质。

compact_semifl

命题 3.1. 假设假设 *1.1* 中的条件成立。那么，半流 Φ 最终强单调且最终紧。也就是说，以下性质成立

(i) 若 $\varphi < \psi$ 是 X 中的两个元素，则存在某个 $t_0 > 0$ 使得 $\Phi(t_0, \varphi) \ll \Phi(t_0, \psi)$。事实上，对于所有 $t \geq t_0$，都有 $\Phi(t, \varphi) \ll \Phi(t, \psi)$。

(ii) 对于每个有界子集 $B \subseteq X$，任意 $t \geq a^*$ 下，$\Phi(t, B)$ 都有紧闭包。

证明。对于第一部分，取 $\varphi, \psi \in X$，使得 $\varphi < \psi$，并令 $\gamma(a) = \beta(a)e^{-\int_0^a \mu_{(l)}\mathrm{d}l}$。由于解 b^φ 和 b^ψ 有界，可以取足够大的 $K > 0$，使得对于所有 $t \geq 0$，无论是 φ 还是 ψ，(3.1) 中的积分项都属于 $[0, K]$。然后，根据假设 1.1-(iii)，我们可以选取 $\delta > 0$，使得对于所有 $x \in [0, K]$，$f'(x) \geq \delta$。因此，令 $\xi(t) = b^\psi(t) - b^\varphi(t)$，可得对于 $t \geq 0$，有

$$\begin{aligned} \xi(t) &\geq \delta \int_0^{a^*} \gamma(a)\xi(t-a)\mathrm{d}a \\ &= \delta\sigma(t) + \delta \int_0^t \gamma(a)\xi(t-a)\mathrm{d}a, \end{aligned}$$

其中

$$\sigma(t) = \begin{cases} \int_t^{a^*} \gamma(a)[\psi(t-a) - \varphi(t-a)]\mathrm{d}a, & t \in [0, a^*], \\ 0, & t > a^*. \end{cases}$$

由于关于 ψ 和 φ之间序关系的假设，我们可以看出 $\sigma \neq 0$。事实上，存在一个区间（α，α）$\subseteq$（$-a^*$，0），使得对所有 $s \in$（α，α），都有 $\overline{\psi}(s) - \underline{\varphi}(s) > 0$。因此，取 $t = \alpha + a^*$，并根据 a^* 的定义，可得

$$\sigma(t) = \int_{\underline{\alpha}+a^*}^{a^*} \gamma(a)[\psi(\underline{\alpha} + a^* - a) - \varphi(\underline{\alpha} + a^*)]\mathrm{d}a \neq 0.$$

因此，由 [48] 中的推论 B.6 可知，存在某个 $t_0 > 0$ 使得 $\xi(t) > 0$ 对所有 $t > t_0$均成立，这意味着 $b_t^{\varphi} \ll b_t^{\psi}$ 对所有 $t > t_0 + a^*$均成立。

对于下一个断言，由于半流性质，只需证明 $\Phi(a^*,\cdot)$ 将有界集映射到相对紧集。取$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 X 中的一个有界序列，并由 b_n 注意到相应解。此外，设 $t \in [0, a^*)$，且 $h > 0$ 使得 $t + h \leq a^*$。接着，令 L 为 f 的一个 Lipschitz 常数，并注意到

$$\begin{aligned}
|b_n(t+h) - b_n(t)| &\leq L\left|\int_{t+h-a^*}^{t+h} \gamma(t+h-a)b_n(a)\mathrm{d}a - \int_{t-a^*}^{t} \gamma(t-a)b_n(a)\mathrm{d}a\right| \\
&\leq L\Big[\int_{t}^{t+h} \gamma(t+h-a)b_n(a)\mathrm{d}a + \int_{t+h-a^*}^{t} |\gamma(t+h-a) - \gamma(a)|b_n(a)\mathrm{d}a \\
&\quad + \int_{t-a^*}^{t+h-a^*} \gamma(t-a)b_n(a)\mathrm{d}a\Big].
\end{aligned}$$

现在，定理 2.7 和序列$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的有界性表明，解 b_n 在 $\mathbb{R}_+$ 上一致有界。结合 L^1，中平移算子的连续性，这一事实使得函数族$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 作为定义在 $[0, a^*]$ 上的函数具有等度连续性。因此，由 Arzelá-Ascoli 定理可得该断言。

□

attractor **推论 3.2.** 在与前一个命题相同的假设下，半流 $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \times X \to X$ 是渐近光滑的。此外，半流 Φ存在一个由有界集构成的紧吸引子 $A \subset X$ 。

证明。 第一个结论直接由上一结果得出，并结合上一节给出的有界性结果，可知由有界集构成的紧吸引子存在（见 [48] 中的定理 2.33）。

□

3.1 分界集

由推论 2.9 可知，方程 (3.1) 中尚不明确的动力学行为源于那些产生围绕不稳定平衡振荡解的初始函数 κ_2。在研究神经网络理论中产生的时滞微分方程时，也曾遇到这种情况，例如，在对单个神经元进行建模以及研究这些网络中的同步活动时 [30, 51]。

因此，我们考虑以下集合

$$S = \{\varphi \in X\colon (b^{\varphi})^{-1}(\kappa_1) \text{ is unbounded from above}\},$$

其元素是这样的初始数据：由其产生的解会在任意大的时刻与中间平衡态 κ_1 相交，参见 [29, 30]。显然，$S \neq \varnothing$，因为它包含取平衡态值 κ_1的常值函数；此外，S 是一个闭集。事实上，若 $\varphi \in X \setminus S$，则不失一般性地，我们可以假设相应解 b^{φ} 在某个足够大的$t > 0$ 时刻满足 $b_t^{\varphi} \ll \kappa_1$ 。因此，根据对初始数据的连续依赖性（见命题 2.6），存在一个包含于 $X \setminus S$中的 φ 的开邻域。特别地，由于推论 2.9，任何初始函数取自该邻域的函数所对应的积分方程的解都会趋于 0，当 $t \to \infty$ 时。

集合 S 充当该半流的分界集，即它将状态空间 X中的初始函数划分为两类：其相应解最终将严格保持在不稳定平衡之上（之下），

并因此收敛于非平凡稳定平衡点（平凡稳定平衡点）。因此，如果我们定义集合

$$X_0 = \{\varphi \in X : b_t^\varphi \ll \kappa_1 \text{ for some } t > 0\},$$
$$X_{\kappa_2} = \{\varphi \in X : b_t^\varphi \gg \kappa_1 \text{ for some } t > 0\},$$

于是，状态空间有如下分解： $X = X_0 \sqcup S \sqcup X_{\kappa_2}$。

unord_S **命题 3.3.** 集合 S 是全序不可比的；也就是说，若 φ、$\psi \in S$ 和 $\varphi \leq \psi$，则 $\varphi = \psi$.

证明。我们用反证法。设 φ、$\psi \in S$ 满足 $\varphi < \psi$。半流的最终强单调性意味着存在某个 $t_0 > 0$，使得 $b_{t_0}^\varphi \ll b_{t_0}^\psi$。由于强保序半流中的准收敛是泛型性质（参见 [46]中的第1章定理4.3；另见[47]），我们可以找到两个元素 $\tilde{\varphi}$、$\tilde{\psi} \in X$，使得 $b_{t_0}^\varphi \ll \tilde{\varphi} \ll \tilde{\psi} \ll b_{t_0}^\psi$，且它们的 ω-极限集满足 $\omega(\tilde{\varphi}) \omega(\psi) \subseteq \{0, \kappa_1, \kappa_2\}$。由于 ω-极限集是连通的，这些元素会产生该方程的一个收敛解。特别要注意的是，由于 b^φ 和 b^ψ的振荡行为，它们都不可能收敛到 0 或 κ_2。

因此， b^φ 和 $b^{\tilde{\psi}}$ 收敛到 κ_1。令 $\xi(t) = b^{\tilde{\varphi}}(t) - b^{\tilde{\psi}}(t)$，并且与之前一样， $\gamma(a) = \beta(a)e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}$，注意到

$$\xi(t) = g(t) \int_0^{a^*} \gamma(a)\xi(t-a)\mathrm{d}a,$$

其中

$$g(t) = \int_0^1 f'\left(s\int_0^{a^*} \gamma(a)b^{\tilde{\psi}}(t-a)\mathrm{d}a + (1-s)\int_0^{a^*} \gamma(a)b^{\tilde{\varphi}}(t-a)\mathrm{d}a\right)\mathrm{d}s.$$

这些解的收敛意味着，当 $t \to \infty$时， $g(t) \to f'(\kappa_1) > 1$，因此，我们可以取足够大的 $\rho \in (1, f'(\kappa_1))$和 $T > 0$，使得对所有 $t \geq T$都有 $g(t) \geq \rho$。于是，我们得到

$$\xi(t) \geq \rho \int_0^{a^*} \gamma(a)\xi(t-a)\mathrm{d}a,$$

但这与假设矛盾。事实上，由于对所有 $t \geq 0$ 都有 $\xi(t) > 0$，且它在无穷远处趋于零，我们可以选取一个序列$(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $t_n \to \infty$ 且 $\xi(t_n) = \min_{s\in[0,t_n]} \xi(s)$。因此，由上述不等式可得，对所有足够大的 n 都有 $\xi(t_n) \geq \rho\xi(t_n)$，这不可能，因为 $\rho > 1$。矛盾由此证明了该结论。 □

3.2 锐阈值性质

接下来，我们关注由一族初始函数 $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\geq 0}$ in X构成的单调族的长期行为。更具体地说，我们采用以下假设。

as-3 **假设 3.1.** 初始函数族 $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\geq 0}$ in X 满足映射 $\lambda \mapsto \varphi_\lambda$ 连续且严格单调，即将 $\mathbb{R}_+$ 映入 $L^1(0, +\infty)$ 的映射；也就是说，若 $\lambda < \eta$，则 $\varphi_\lambda < \varphi_\eta$。此外， $\varphi_0 \equiv 0$。

对于每个 $\lambda \geq 0$，我们将方程 (3.1) 中以初始函数 u_λ为初值的相应解记为 b^λ。对于这样一个属于 X的族，我们可以利用以下子集划分指标集

$$M_0 = \{\lambda \in \mathbb{R}_+ : b^\lambda(t) \to 0 \text{ as } t \to \infty\},$$
$$M_{\kappa_2} = \{\lambda \in \mathbb{R}_+ : b^\lambda(t) \to \kappa_2, \text{ as } t \to \infty\},$$
$$M_\sigma = \mathbb{R}_+ \setminus (M_0 \cup M_{\kappa_2}).$$

半流的单调性、最终强单调性以及对初始数据的连续依赖性容易表明，集合 M_0 和 M_{κ_2} 是开区间，前者具有形式 $[0, \lambda_*)$，其中 $\lambda_* \in (0, +\infty]$，而后者要么为空，要么具有形式$(\lambda^*, +\infty)$，其中 $\lambda^* \in (\lambda_*, +\infty)$。由上一小节可知，若 $\lambda \in M_\sigma$ 则 $\varphi_\lambda \in S$，因此由于 S的不可序性，有 $\lambda_* = \lambda^*$。我们将这一等式称为尖锐阈值性质。

th:threshold

定理 3.4. 设假设 *3.1* 成立。集合 M_σ 要么为空，要么为单点；也就是说，要么每个解 b^λ 在无穷远处消失，要么存在唯一的 $\lambda^* > 0$ 使得

- 对所有 $\lambda < \lambda^*$, $b^\lambda(t) \to 0$，当 $t \to \infty$ 时。
- 对所有 $\lambda > \lambda^*$, $b^\lambda(t) \to \kappa_2$，当 $t \to \infty$ 时。

此外，在后一种情况下，存在 $\delta > 0$，使得

$$\delta \le \liminf_{t\to\infty} b^{\lambda^*}(t) \le \limsup_{t\to\infty} b^{\lambda^*}(t) \le \kappa_2 - \delta.$$

证明。 证明的第一部分由上述讨论可得。对于最后一个结论，注意到$\varphi_{\lambda^*} \in S$，并且由于 S 是一个闭的正向不变集，因此 $\omega(\varphi_{\lambda^*}) \subseteq A \cap S$，其中 A 是 Φ的紧吸引子。因此，注意到 $A \cap S$ 是紧的且 $\{0, \kappa_2\} \cap (A \cap S) = \varnothing$，即可得到定理的结论。 □

sec:main_th

4 主要结果的证明

本节旨在证明定理 1.2。回顾一下，由 Gurtin-MacCamy模型定义的半流 $U(t) : \mathrm{L}^1_+(0,+\infty) \to \mathrm{L}^1_+(0,+\infty)$ 可用特征线法给出的解公式表示；即， $U(t)u_0 = u(t,\cdot)$，其中

$$u(t,a) = \begin{cases} e^{-\int_{a-t}^{a} \mu(l)\mathrm{d}l} u_0(a-t), & a \ge t, \\ e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} b(t-a), & a \le t, \end{cases}$$

w这里， b: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是积分方程的唯一连续解（见第 3 节）

$$b(t) = f\left(\int_0^{a^*} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} b(t-a)\mathrm{d}a \right), \quad t \ge 0, \tag{4.1}$$

eq:int-proof

具有特定的初始值

$$b(t) = e^{\int_0^{-t} \mu(l)\mathrm{d}l} u_0(-t), \quad t \in (-a^*, +\infty).$$

现在，假设 $a^* < +\infty$。那么，解 b 完全由区间 $(0, a^*)$ 上的初始数据 u_0 决定。因此，L^1 上半流 $\{U(t)\}_{t\ge0}$ 的动力学取决于定义在 X上的半流 $\{\Phi(t,\cdot)\}_{t\ge0}$ 的动力学，见 (3.2)。因此，我们可以使用关于强单调半流的结果，因为连续函数空间赋有由实心锥定义的序，而该锥具有非空内部。参见例如[24, 46, 47]。上述研究的作者证明，对于强单调且连续的半流（或更一般地，对于强保序且连续的半流），大多数轨道的长期行为相当简单；具体而言，大多数点的 ω-极限集由平衡点构成。需要指出的是，这里假设半流是连续的，因为离散半流的动力学可能更难描述，泛型行为性质甚至可能失效；参见 [42, 43] 及其中的参考文献。此外，主 Floquet 丛和主 Lyapunov 指数也是成功用于描述离散动力系统、抛物型自治与非自治方程，以及由抛物型方程和时滞方程产生的随机动力系统之动力学的工具。这些概念自然地扩展了抛物型问题中主特征值的性质，因此可作为 Krein-Rutman 定理的一种推广；参见 [25, 39, 41, 45]。

定理 *1.2* 的证明。 设 $\{u_\lambda\}_{\lambda\ge0}$ 是定理中所述的 $\mathrm{L}^1_+(0,+\infty)$ 中的一个初始分布族，并假设并非所有解都为零。令 $\{b^\lambda\}_{\lambda\ge0}$ 表示与积分方程 (4.1) 相对应的解族。令 $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\ge0}$ 为 $C^0_+ = C^0_+([-a^*, 0])$ 中定义的族，即

$$\varphi_\lambda(t) = b^\lambda(t + a^*), \quad t \in [-a^*, 0].$$

显然，每个函数 φ_λ 都属于 X （见 (3.2)），因为 b^λ 在右半轴上满足该积分方程。此外，由于假设 1.2，该族满足假设 3.1。事实上，映射 $\lambda \mapsto \varphi_\lambda$ 的连续性源于初始数据的连续依赖性（命题 2.6），而单调性条件则由比较原理推出。剩下只需证明，如果 $\lambda < \eta$，那么 $\varphi_\lambda < \varphi_\eta$。为此，注意到当 $t \in [0, a^*]$ 时，我们可以将 b^λ 的方程 (4.1) 重写为

$$b^\lambda(t) = f\left(\int_t^{a^*} \beta(a) e^{-\int_{a-t}^a \mu(l)\mathrm{d}l} u_\lambda(a-t)\mathrm{d}a + \int_0^t \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} b^\lambda(t-a)\mathrm{d}a\right),$$

因此，只需证明

$$\int_t^{a^*} \beta(a) e^{-\int_{a-t}^a \mu(l)\mathrm{d}l} [u_\eta(a-t) - u_\lambda(a-t)]\mathrm{d}a > 0,$$

这等价于

$$\int_0^{a^*} \beta(a+t) e^{-\int_a^{a+t} \mu(l)\mathrm{d}l} [u_\eta(a) - u_\lambda(a)]\mathrm{d}a > 0, \tag{4.2}$$ eq:positive

对某个 $t \in [0, a^*]$。

为证明这一点，回顾假设 1.2 可知，差值 $u_\eta - u_\lambda$ 在某个具有正测度的集合上为正；因此，定义 $P = \{a \in (0, a^*) : u_\eta(a) - u_\lambda(a) > 0\}$ 以及 $M = \{a \in (0, a^*) : \beta(a) > 0\}$。这两个集合的测度都为正。根据 a^* 的定义，对于每个 $t \in (0, a^*)$，我们还知道 $M \cap (t, a^*)$ 具有正测度。定义函数 $h(t) = \mathcal{L}(P \cap (M - t))$，其中 $\mathcal{L}$ 表示勒贝格测度。随后，我们得到

$$\begin{aligned}
\int_0^{a^*} h(t)\mathrm{d}t &= \int_0^{a^*} \int_0^{a^*} \mathbb{1}_{P\cap(M-t)}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{a^*} \int_0^{a^*} \mathbb{1}_P(s)\mathbb{1}_M(s+t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{a^*} \mathbb{1}_P(s) \int_0^{a^*} \mathbb{1}_M(s+t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{a^*} \mathbb{1}_P(s)\mathcal{L}(M \cap (s, a^*))\mathrm{d}s > 0,
\end{aligned}$$

这意味着 h 必定在 a^* 的某个具有正测度的子集上为正，由此可得 (4.2)。此外，由于积分方程的解具有唯一性，显然 $\Phi(t, \varphi_\lambda) = b^\lambda_{t+a^*}$。然后，根据定理 3.4，我们得到存在唯一的 $\lambda^* > 0$，使得

$$\lim_{t\to\infty} b^\lambda(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } \lambda < \lambda^*, \\ \kappa_2, & \text{if } \lambda > \lambda^*. \end{cases}$$

现在，注意到根据半流的公式 U 我们得到

$$\begin{aligned}
\|U(t)u_\lambda\| &= \int_0^{+\infty} u(t,a)\mathrm{d}a \\
&= \int_t^{+\infty} e^{-\int_{a-t}^a \mu(l)\mathrm{d}l} u_0(a-t)\mathrm{d}a + \int_0^t e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} b(t-a)\mathrm{d}a \\
&\le e^{-\underline{\mu}t}\|u_0\| + e^{-\underline{\mu}t}\int_0^t e^{\underline{\mu}a} b(a)\mathrm{d}a,
\end{aligned}$$

并且 右端在 $t \to \infty$ 若 $\lambda < \lambda^*$ 时趋于 0。这表明 $U(t)u_\lambda \to 0$ 在 $t \to \infty$ 若 $\lambda < \lambda^*$ 一个类似的论证表明，当 $\lambda > \lambda^*$ 时，收敛至 φ_2。

另一方面，若给定 $\lambda = \lambda^*$ 和 $\varepsilon > 0$，根据定理 3.4 的最后一个结论，存在 $\delta > 0$ 和 $T_\varepsilon > 0$，使得对每个 $t \geq T_\varepsilon$，都有 $b^{\lambda^*}(t) \leq \kappa_2 - \delta + \varepsilon$。于是，

$$\|U(t)u_{\lambda^*} - \overline{\varphi}_2\| = \int_0^{+\infty} \left| e^{-\int_a^{a+t} \mu(l)\mathrm{d}l} u_0(a) - \kappa_2 e^{-\int_0^{a+t} \mu(l)\mathrm{d}l} \right| \mathrm{d}a + \int_0^t e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} |b(t-a) - \kappa_2| \mathrm{d}a,$$

其中，右端的第一项在 $t \to \infty$ 时趋于 0，而第二项可通过将积分拆分到集合 $[0, t - T_\varepsilon]$ 和 $[t - T_\varepsilon, t]$ 上来分析，由此可得

$$\liminf_{t\to\infty} \|U(t)u_{\lambda^*} - \overline{\varphi}_2\| \geq \kappa_2 - \delta.$$

另一关系可类似地得到。至此，定理得证。 □

相关研究的一项重要发现 [10, 41, 52] 是，除了揭示解收敛至平凡或非平凡稳定平衡态的尖锐转变之外，它们还描述了所研究模型中阈值解的渐近行为。这类描述并未包含在我们的主要结果中，目前仍是一个开放问题。尽管如此，已有研究表明，当非平凡平衡态失去稳定性时，所考虑的年龄结构模型可能会产生振荡和周期行为；例如，参见 [18, 29, 34, 35]。特别是在 [30]中，作者证明，该系统的全局吸引子可以形象地表示为一个实心纺锤体，其被一个边界为周期轨道的圆盘分隔。中心流形定理在这一描述中发挥了关键作用。因此，我们希望 Ducrot、Magal 和 Ruan 所发展的工具能够帮助有效证明该系统的周期行为，例如，参见 [15, 35]。

5 非紧支撑情形

sec:non_compact

本节致力于研究一个特殊情形，其中出生率 β 具有非紧支集，这意味着 $a^* = +\infty$。更确切地说，本节始终假设假设 1.3 成立。情形 $a^* = +\infty$ 的主要难点在于，初始种群产生的影响会随着时间推移始终延续下去；参见 (2.7) 右端的第一项。与前文讨论的情形不同，由问题的 Volterra 表述所给出的积分方程的解，无法完全由紧区间上的已有信息确定。这一变化使得分析更加复杂，而且强保序性质实际上并不成立，参见附录。尽管如此，假设 1.3 中所述的出生率和死亡率最终为常数这一性质，使我们能够将年龄结构模型 (1.1) 所生成的半流问题，转化为定义在紧区间上连续函数空间的某个子集上的半流问题。为此，我们引入一个新变量，用以追踪随时间推移由年龄足够大的个体所产生的数量。

先简要说明一个由新假设得出的结论。根据假设 1.3，关于 β 和 μ 所作的归一化假设为

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} \mathrm{d}a \\
&= \int_0^{a_0} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} \mathrm{d}a + \beta_\infty \int_{a_0}^{+\infty} e^{-\int_0^{a_0} \mu(l)\mathrm{d}l} e^{-\int_{a_0}^a \mu(l)\mathrm{d}l} \mathrm{d}a \\
&= \int_0^{a_0} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} \mathrm{d}a + \beta_\infty e^{-\int_0^{a_0} \mu(l)\mathrm{d}l} \int_{a_0}^{+\infty} e^{-\mu_\infty(a-a_0)} \mathrm{d}a \\
&= \int_0^{a_0} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} \mathrm{d}a + \frac{\beta_\infty}{\mu_\infty} e^{-\int_0^{a_0} \mu(l)\mathrm{d}l}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

eq:norm_2

现在，沿特征线积分后，我们得到 Gurtin-MacCamy 模型的解 u的如下表示

$$u(t,a) = \begin{cases} e^{-\int_{a-t}^a \mu(l)\mathrm{d}l} u_0(a-t), & a \geq t, \\ e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}la} b(t-a), & a \leq t, \end{cases}$$

其中 b: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 是下列方程的唯一连续解

$$b(t) = f\left(\int_t^{+\infty} \beta(a) e^{-\int_{a-t}^{a} \mu(l)\mathrm{d}l} u_0(a-t)\mathrm{d}a + \int_0^t \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} b(t-a)\mathrm{d}a\right), \quad t \geq 0,$$

并注意到 $b(t) = f\left(\int_0^{+\infty} \beta(a)u(t,a)\mathrm{d}a\right)$。接下来，通过对 (1.1) 中的微分方程在 $[a_0, +\infty)$ 上积分，（至少在形式上）可得

$$\partial_t \int_{a_0}^{+\infty} u(t,a)\mathrm{d}a = u(t,a_0) - \mu_\infty \int_{a_0}^{+\infty} u(t,a)\mathrm{d}a. \tag{5.2}$$

eq:int_I

另一方面，若 $t \geq a_0$ 且 $a \geq a_0$，沿 $[t-a_0, t]$ 中的特征线积分，我们得到

$$u(t,a_0) = e^{-\int_0^{a_0} \mu(l)\mathrm{d}l} u(t-a_0, 0) = e^{-\int_0^{a_0} \mu(l)\mathrm{d}l} f\left(\int_0^{+\infty} \beta(\sigma) u(t-a_0, \sigma)\mathrm{d}\sigma\right).$$

因此，令 $I(t) = \int_{a_0}^{+\infty} u(t,a)\mathrm{d}a$，则 (5.2) 变为

$$I'(t) = e^{-\int_0^{a_0} \mu(l)\mathrm{d}l} b(t-a_0) - \mu_\infty I(t);$$

而关于 b 在 $t \geq a_0$ 时的积分方程可改写为

$$b(t) = f\left(\int_0^{a_0} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} b(t-a)\mathrm{d}a + \beta_\infty I(t)\right).$$

因此，在假设 1.3下，显然 Gurtin-MacCamy模型的动力学与如下将微分方程与非线性积分方程耦合的系统之间存在密切关系：

$$\begin{cases} I'(t) = -\mu_\infty I(t) + e^{-\int_0^{a_0} \mu(l)\mathrm{d}l} b(t-a_0), & t \geq 0, \\ b(t) = f\left(\int_0^{a_0} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} b(t-a)\mathrm{d}a + \beta_\infty I(t)\right), & t \geq 0, \end{cases} \tag{5.3}$$

delay_sys

并配以某个初始条件 $(I(0), b_0) = (\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times C_+^0([-a_0, 0])$，其中我们对 $t \geq 0$ 和 $\theta \in [-a_0, 0]$ 使用了记号 $b_t(\theta) = b(t+\theta)$。下文中，对于元素 $\varphi \in C_+^0([-a_0, 0])$，我们用 $\|\varphi\|$ 表示该元素通常的上确界范数。系统 5.3 恰好有三个平衡点 (I, b)（见 (5.1)），由下式给出

$$(0,0), \quad \left(\frac{c_0}{\mu_\infty}\kappa_1, \kappa_1\right), \quad \text{and} \quad \left(\frac{c_0}{\mu_\infty}\kappa_2, \kappa_2\right).$$

注意，5.3 中的第一个方程可以直接对 I 求解为

$$I(t) = e^{-\mu_\infty t} I(0) + c_0 \int_0^t e^{-\mu_\infty (t-s)} b(s-a_0)\mathrm{d}a,$$

其中 $c_0 := e^{-\int_0^{a_0} \mu_{(l)}\mathrm{d}l}$。因此，对于给定的初始数据 $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times C_+^0([-a_0, 0])$，我们可以确定解 $I(t)$ 在区间 $[0, a_0]$ 上的值。然后，应用标准的压缩论证，即可得到 5.3 中第二个方程在区间 $[0, a_0]$ 上解的存在性。随后，重复这一过程可得到该系统唯一全局连续解的存在性。我们还可以通过对形如 $[0, na_0]$、$n \in \mathbb{N}$ 的区间进行归纳论证，并采用与前述情形相同的技巧，得到解对初始数据 (α, φ) 的连续依赖性；参见命题 2.6。下面我们将这些性质总结如下。

命题*5.1.* 对于每个初始数据 $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times C_+^0([-a_0, 0])$，系统（*5.3*）存在唯一的全局连续非负解 $(I(t)\ b(t))$，使得 $(I(0)\ b_0) = (\alpha, \varphi)$。此外，初始数据具有如下意义下的连续依赖性：给定 $\varepsilon > 0$、$(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times C_+^0([-a_0, 0])$ 和 $T > 0$，则存在 $\delta > 0$，使得对于每个 $(\tilde{\alpha}, \tilde{\varphi}) \in \mathbb{R}_+ \times C_+^0([-a_0, 0])$，若 $|\alpha - \tilde{\alpha}| + \|\varphi - \tilde{\varphi}\| < \delta$，则对所有 $t \in [0, T]$，均有 $|I(t) - \tilde{I}(t)| + |b(t) - \tilde{b}(t)| < \varepsilon$。

关于有界性性质，我们有如下陈述（参见定理 2.7）。

conv_delay **定理 5.2.** 系统(5.3) 的解是一致最终有界的。事实上，设

$$(I^*, b^*) = \left(\limsup_{t\to\infty} I(t), \limsup_{t\to\infty} b(t)\right), \quad \textit{and} \quad (I_*, b_*) = \left(\liminf_{t\to\infty} I(t), \liminf_{t\to\infty} b(t)\right),$$

then

$$b^* \in \{0\} \cup [\kappa_1, \kappa_2], \quad b_* \in [0, \kappa_1] \cup \{\kappa_2\}, \quad \textit{and} \quad [I_*, I^*] \subseteq \left[\frac{c_0}{\mu_\infty} b_*, \frac{c_0}{\mu_\infty} b^*\right],$$

其中 $c_0 := e^{-\int_0^{a_0} \mu_{(l)\mathrm{d}l}}$。此外，存在仅依赖于 f、β 和 μ 的常数 C_1、$C_2 > 0$，使得。

$$b(t) \le f(C_1 + C_2\|(\alpha, \varphi)\|),$$

其中 $\|(\alpha, \varphi)\|$ 表示 $\mathbb{R}_+ \times C_+^0([-a_0, 0])$ 中通常的乘积范数。

证明. 设 $(I(t)\ b(t))$ 为对应于初始数据 (α, φ) 的 (5.3) 的解。设

$$\begin{aligned} B(t) &:= \int_0^{a_0} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} b(t-a)\mathrm{d}a + \beta_\infty I(t) \\ &= \int_0^t \tilde{\beta}(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} b(t-a)\mathrm{d}a + \sigma(t) + \beta_\infty I(t), \end{aligned}$$

对 $t \ge 0$，其中

$$\tilde{\beta}(a) = \begin{cases} \beta(a), & a \in (a, a_0), \\ 0, & a > a_0, \end{cases} \quad \text{and} \quad \sigma(t) = \begin{cases} \int_t^{a_0} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} \varphi(t-a)\mathrm{d}a, & t \in [0, a_0], \\ 0, & t > a_0. \end{cases} \tag{5.4}$$

eq:new_par

该定义使得对 $t \ge 0$ 有 $b(t) = f(B(t))$，并且 B 满足如下方程

$$B(t) = \int_0^t \tilde{\beta}(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} f(B(t-a))\mathrm{d}a + \sigma(t) + \beta_\infty I(t), \quad t \ge 0. \tag{5.5}$$

eq:B_1

或者， I 的方程可以显式求解为

$$I(t) = \alpha e^{-\mu_\infty t} + c_0 \int_0^t e^{-\mu_\infty (t-s)} b(s-a_0)\mathrm{d}s, \tag{5.6}$$

eq:sol_I

其中 $c_0 = e^{-\int_0^{a_0} \mu_{(l)\mathrm{d}l}}$ 与定理陈述中的相同。因此，根据 B 的定义及 (5.6)，对于 $t \ge a_0$，我们有

$$\begin{aligned} B(t) &= \int_0^{a_0} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} f(B(t-a))\mathrm{d}a + \beta_\infty \left[\alpha e^{-\mu_\infty t} + c_0 \int_0^t e^{-\mu_\infty (t-s)} b(s-a_0)\mathrm{d}s\right] \\ &= \int_0^{a_0} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} f(B(t-a))\mathrm{d}a + \beta_\infty \left[\alpha e^{-\mu_\infty t} + c_0 \int_{a_0}^{t+a_0} e^{-\mu_\infty (s-a_0)} b(t-s)\mathrm{d}s\right] \\ &= \int_0^{a_0} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} f(B(t-a))\mathrm{d}a + \beta_\infty \left[\alpha e^{-\mu_\infty t} + c_0 \int_{a_0}^{t+a_0} e^{-\int_{a_0}^s \mu(l)\mathrm{d}l} b(t-s)\mathrm{d}s\right] \\ &= \int_0^{a_0} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} f(B(t-a))\mathrm{d}a + \alpha\beta_\infty e^{-\mu_\infty t} + \int_{a_0}^{t+a_0} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} b(t-a)\mathrm{d}a \\ &= \int_0^t \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} f(B(t-a))\mathrm{d}a + \alpha\beta_\infty e^{-\mu_\infty t} + \int_t^{t+a_0} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} \varphi(t-a)\mathrm{d}a. \end{aligned} \tag{5.7}$$

eq:B_2

令 $\rho \in (0,1)$、 $M > 0$ 和 K 与定理 2.7 的证明中的相同。另设 $T \geq a_0$ 已给定。由 (5.5) 和 (5.6)，对于 $t \in [0, a_0]$，可得以下估计

$$\begin{aligned} B(t) &\leq \int_0^t \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} f(B(t-a))\mathrm{d}a + \overline{\beta}\|\varphi\| \int_t^{a_0} e^{-\underline{\mu}a}\mathrm{d}a + \beta_\infty \left[\alpha e^{-\mu_\infty t} + c_0\|\varphi\| e^{-\mu_\infty t}\int_0^t e^{\mu_\infty s}\mathrm{d}s\right] \\ &\leq \overline{\beta}\|\varphi\| a_0 + \alpha\beta_\infty + c_0\beta_\infty\|\varphi\| t + \left(\int_{[0,t]\cap K^c} + \int_{[0,t]\cap K}\right)\beta(t-a)e^{-\int_0^{t-a}\mu(l)\mathrm{d}l} f(B(a))\mathrm{d}a \\ &\leq a_0\overline{\beta}\|\varphi\| + \alpha\beta_\infty + a_0 c_0\beta_\infty\|\varphi\| + \left(f(M) + \rho \max_{s\in[0,T]} B(s)\right)\int_0^t \beta(t-a)e^{-\int_0^{t-a}\mu(l)\mathrm{d}l}\mathrm{d}a \\ &\leq a_0\overline{\beta}\|\varphi\| + \alpha\beta_\infty + a_0 c_0\beta_\infty\|\varphi\| + f(M) + \rho \max_{s\in[0,T]} B(s). \end{aligned}$$

同样地，由（5.7）可得，对于 $t \in [a_0, T]$，有以下估计

$$\begin{aligned} B(t) &\leq \alpha\beta_\infty e^{-\mu_\infty t} + \overline{\beta}\|\varphi\| \int_t^{t+a_0} e^{-\underline{\mu}a}\mathrm{d}a + \int_0^t \beta(a)e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} f(B(t-a))\mathrm{d}a \\ &\leq \alpha\beta_\infty + a_0\overline{\beta}\|\varphi\| + f(M) + \rho \max_{s\in[0,T]} B(s), \end{aligned}$$

因此我们推得

$$\max_{t\in[0,T]} B(t) \leq \frac{f(M) + \alpha\beta_\infty + (a_0\overline{\beta} + a_0 c_0\beta_\infty)\|\varphi\|}{1-\rho},$$

这表明 B 的有界性，因为右端与 T 无关。因此， b 和 I 也有界，而 b 的界可由 B 的界得到。

此外，利用（5.7）以及定理 2.7 证明中的相同论证，我们可推出

$$\limsup_{t\to\infty} B(t) \in \{0\} \cup [\kappa_1, \kappa_2], \quad \text{and} \quad \liminf_{t\to\infty} B(t) \in [0, \kappa_1] \cup \{\kappa_2\},$$

此外，由于对 f 所作的假设，对 b 也可得出相同的结论。关于 I 的渐近行为，设 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个实数序列，使得 $t_n \to \infty$ 且 $I(t_n) \to I^*$。再设 $\varepsilon > 0$ 已给定，且 $T_\varepsilon > 0$ 使得对于 $t \geq T_\varepsilon$， $b(t) \leq b^* + \varepsilon$。于是，从其关于 b（5.6）给出的表示式出发，当 n 足够大时，我们得到

$$\begin{aligned} I(t_n) &\leq \alpha e^{-\mu_\infty t_n} + c_0\left(\int_0^{T_\varepsilon + a_0} e^{-\mu_\infty(t_n - s)} b(s-a_0)\mathrm{d}s + (b^*+\varepsilon)\int_{T_\varepsilon+a_0}^{t_n} e^{-\mu_\infty(t_n-s)}\mathrm{d}s\right) \\ &= \alpha e^{-\mu_\infty t_n} + c_0\left(\int_0^{T_\varepsilon+a_0} e^{-\mu_\infty(t_n-s)} b(s-a_0)\mathrm{d}s + (b^*+\varepsilon)\int_0^{t_n - T_\varepsilon - a_0} e^{-\mu_\infty s}\mathrm{d}s\right). \end{aligned}$$

因此，取 $n \to \infty$ 可得 $I^* \leq \frac{c_0}{\mu_\infty}(b^* + \varepsilon)$。由于 ε 是任意的，我们推知 $I^* \leq \frac{c_0}{\mu_\infty} b^*$。关于 I_* 的估计也可用同样的方法证明（参见定理 2.7）。 □

上述定理的证明表明，可以将关于 b 的方程改写为 Volterra 方程，主要是

$$b(t) = f\left(\int_0^t \tilde{\beta}(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} b(t-a)\mathrm{d}a + \sigma(t) + \beta_\infty I(t)\right), \tag{5.8}$$

eq:alter_b

，其中 β 和 σ 如（5.4）所示。利用方程的这种形式，并且由于系统（5.3）的解是通过压缩映射论证得到的，因此可以推广第 2 节最后一段中的结果。我们将这些结果概述如下。

comparison

命题 5.3. 若给定 (α, φ)、$(\tilde{\alpha}, \tilde{\varphi}) \in \mathbb{R}_+ \times C_+^0([-a_0, 0])$，且 $(\alpha, \varphi) \leq (\tilde{\alpha}, \tilde{\varphi})$（其中序关系按分量理解），则系统（5.3）˜ ˜的相应解，记为 $(I(t)\ b(t))$ 与 $(I(t)\ b(t))$，满足

$$(I(t), b(t)) \leq (\tilde{I}(t), \tilde{b}(t)), \quad t \geq 0.$$

此外，设$(\alpha,\varphi)\in\mathbb{R}_+\times C_+^0([-a_0,0])$给定，使得$(\alpha,\varphi)\geq(\leq)\left(\frac{c_0}{\mu_\infty}\kappa_1,\kappa_1\right)$，但$(\alpha,\varphi)\neq\left(\frac{c_0}{\mu_\infty}\kappa_1,\kappa_1\right)$。则相应解$(I(t)\ b(t))$满足

$$\lim_{t\to\infty}(I(t),b(t))=\left(\frac{c_0}{\mu_\infty}\kappa_2,\kappa_2\right)((0,0)).$$

证明。设给定$(\alpha,\varphi),(\tilde{\alpha},\tilde{\varphi})\in\mathbb{R}_+\times C_+^0([-a_0,0])$，其中$(\alpha,\varphi)\leq(\tilde{\alpha},\tilde{\varphi})$，并令$(I(t)\ b(t))$和$(\tilde{I}(t)\ \tilde{b}(t))$为相应解。此外，考虑算子$\mathcal{A}_\varphi\colon C_+^0([0,a_0])\to C_+^0([0,a_0])$，其定义为

$$\mathcal{A}_\varphi(\psi)(t)=f\left(\int_0^t\beta(a)e^{-\int_0^a\mu(l)\mathrm{d}l}\psi(t-a)\mathrm{d}a+\sigma(t)+\beta_\infty I(t)\right),$$

其中σ如(5.4)中所示。类似地定义$\mathcal{A}_{\tilde{\varphi}}\colon C_+^0([0,a_0])\to C_+^0([0,a_0])$。注意，解$b$和$\tilde{b}$分别是算子$\mathcal{A}_\varphi$和$\mathcal{A}_{\tilde{\varphi}}$的不动点。于是，由$I$和$\tilde{I}$在$[0,a_0]$上的显式表示，可得

$$\begin{aligned}I(t)&=\alpha e^{-\mu_\infty t}+c_0\int_0^t e^{-\mu_\infty(t-s)}\varphi(s-a_0)\mathrm{d}s\\&\leq\tilde{\alpha}e^{-\mu_\infty t}+c_0\int_0^t e^{-\mu_\infty(t-s)}\tilde{\varphi}(s-a_0)\mathrm{d}s=\tilde{I}(t),\end{aligned}$$

对于$t\in[0,a_0]$。因此，由于f的单调性，可知

$$b(t)=\mathcal{A}_\varphi(b)(t)\leq\mathcal{A}_{\tilde{\varphi}}(b)(t),$$

它与归纳论证共同蕴含$b\leq\mathcal{A}_{\tilde{\varphi}}(b)$。由于$b$是通过压缩映射定理构造的，这意味着$b\leq\tilde{b}$在$[0,a_0]$上成立。对所有$t\geq0$的结果可通过归纳得到。

定理中的最后一个结论可仿照推论2.9的证明得出，这得益于刚刚陈述的比较原理。

□

5.1 动力系统表述

与第3.4节一样，对于给定的初始数据$(\alpha,\varphi)\in\mathbb{R}_+\times C_+^0([-a_0,0])$，方程(5.3)中第二个方程的相应解在$t=0$处可能不连续，前提是

$$\varphi(0)\neq f\left(\int_0^{a_0}\beta(a)e^{-\int_0^a\mu(l)\mathrm{d}l}\varphi(-a)\mathrm{d}a+\alpha\beta_\infty\right),$$

而解I在$[-a_0,+\infty$上是连续函数。因此，为了在动力系统框架下建立问题，我们考虑以下闭子集$Y\subseteq\mathbb{R}_+\times C_+^0([-a_0,0])$

$$Y:=\left\{(\alpha,\varphi)\in\mathbb{R}_+\times C_+^0([-a_0,0])\colon f\left(\int_0^{a_0}\beta(a)e^{-\int_0^a\mu(l)\mathrm{d}l}\varphi(-a)\mathrm{d}a+\alpha\beta_\infty\right)=\varphi(0)\right\},\quad(5.9)\quad\boxed{\texttt{def:Y}}$$

其中包含所有能够产生连续解的初始条件b（适用于$[-a_0,+\infty)$。因此，我们可以考虑由系统（5.3）在Y上生成的连续半流，记为$\Psi\colon\mathbb{R}_+\times Y\to Y$，并由$\Psi(t,(\alpha,\varphi))=(I(t)\ b_t)$给出，其中$I$和$b$是该系统的相应解。该半流的平衡点是（5.3）的常值解，即$(0,0)$，$\left(\frac{c_0}{\mu_\infty}\kappa_1,\kappa_1\right)$以及$\left(\frac{c_0}{\mu_\infty}\kappa_2,\kappa_2\right)$。由于上一段中建立的比较原理，半流$\Psi$是单调的，而且正如我们将要看到的，它最终强单调且最终紧。事实上，下一命题的证明与命题3.1的证明思路相同，利用比较原理和b(5.8)的替代方程即可。

compac_delay

命题 5.4。 半流 Ψ 最终强单调且最终紧。也就是说，它满足以下陈述。

(i) 设 $(\alpha,\varphi) \le (\tilde{\alpha},\tilde{\varphi})$ 是 Y中的两个元素，且给定 $(\alpha,\varphi) \neq (\tilde{\alpha},\tilde{\varphi})$。那么存在某个 $t_0>0$，使得 $\Psi(t_0,(\alpha,\varphi)) \ll \Psi(t_0,(\tilde{\alpha},\tilde{\varphi}))$。事实上，对所有 $t \ge t_0$，都有 $\Psi(t,(\alpha,\varphi)) \ll \Psi(t,(\tilde{\alpha},\tilde{\varphi}))$。

(ii) 对于每个有界子集 $B \subseteq Y$, $\Psi(t,B)$，当 $t \ge a_0$ 时，其紧闭包存在。

此外，半流 Ψ 存在一个有界集的紧吸引子 $A \subset Y$。

证明。对于第一部分，设 $(\alpha,\varphi) \le (\tilde{\alpha},\tilde{\varphi})$ 是 Y中的两个元素，且给定 $(\alpha,\varphi) \neq (\tilde{\alpha},\tilde{\varphi})$；并设网 $(I(t)\ b(t))$ 和 $(\tilde{I}(t)\ \tilde{b}(t))$ 为相应解。首先假设 $\alpha < \tilde{\alpha}$。那么，根据 I 和 $\tilde{I}$ 的显式公式，结合命题 5.3 中陈述的比较原理，我们可以直接看出，对所有 $t \ge 0$，都有 $I(t) < \tilde{I}(t)$。因此，由于 f 严格单调，我们根据系统（5.3）的第二个方程推得，对所有 $t \ge 0$，都有 $b(t) < \tilde{b}(t)$。因此，对所有 $t \ge a_0$，都有 $\Psi(t,(\alpha,\varphi)) \ll \Psi(t,(\tilde{\alpha},\tilde{\varphi}))$。

另一方面，假设 $\varphi = \tilde{\varphi}$。由于计算数值 $I(t)$ 和 $\tilde{I}(t)$ 需要用到 $b(t)$ 在整个过去历史，这一点可从这些解的表示中看出，那么对所有 $t \ge a_0$，$I(t) < \tilde{I}(t)$。接着，与上一段中的论证相同，可得对所有 $t \ge a_0$，$b(t) < \tilde{b}(t)$，由此命题的第一部分得证。

命题中的以下结论可用与命题 3.1 和推论 3.2 相同的方法证明。

□

回顾一下，在紧支撑情形中，我们根据积分方程的解围绕中间平衡态的振荡来定义分界集，更准确地说，是根据解与其的交点来定义。对于非紧支撑情形，则无法以类似方式刻画分界集。主要原因是，函数 I 跟踪了 b在区间$[-a_0,t-a_0]$上的所有过去取值，因此，关于 b 最终行为的信息（即其在较大时间时位于不稳定平衡点上方还是下方）并不能提供关于 I 在点 $\frac{c_0}{\mu_\infty}\kappa_1\ \kappa_1/\mu$附近位置的更多信息。因此，为了描述分界集，我们将利用系统恰有三个平衡点这一事实，且中间的平衡点不稳定。为此，令 A_0和 A_{κ_2}分别为平衡点 $(0,\ 0)$ 和 $(\kappa_2/\mu,\ \kappa_2)$ 的吸引域，即

$$A_0 = \{(\alpha,\varphi) \in Y\colon \Psi(t,(\alpha,\varphi)) \to (0,0) \text{ as } t\to\infty\},$$
$$A_{\kappa_2} = \left\{(\alpha,\varphi) \in Y\colon \Psi(t,(\alpha,\varphi)) \to \left(\frac{c_0}{\mu_\infty}\kappa_2,\kappa_2\right) \text{ as } t\to\infty\right\}.$$

由于半流的连续性以及命题 5.3 给出的平衡点的局部稳定性，这些集合是开集。

命题 5.5。 集合 $Y\backslash(A_0\cup A_{\kappa_2})$ 全序不可比。

证明。证明沿用命题 3.3 中给出的相同论证。设 $(\alpha,\varphi) \le (\tilde{\alpha},\tilde{\varphi})$ 是 $Y\backslash(A_0\cup A_{\kappa_2})$ 中两个不同的元素。由于 Ψ 是最终强单调半流，存在充分大的 $t_0>0$，使得对每个 $t\ge t_0$，都有 $\Psi(t,(\alpha,\varphi)) \ll \Psi(t,(\tilde{\alpha},\tilde{\varphi}))$。接着，由于准收敛是泛型的（见 [46] 中的定理 4.3），我们可以取 Y 中两个元素 $(\eta,\rho) \ll (\tilde{\eta},\tilde{\rho})$，使得 $\omega((\eta,\rho))\ \omega((\tilde{\eta},\tilde{\rho})) \subseteq \left\{(0,0)\ \left(\frac{c_0}{\mu_\infty}\kappa_1,\kappa_1\right),\left(\frac{c_0}{\mu_\infty}\kappa_2,\kappa_2\right)\right\}$，且 $\Psi(t_0,(\alpha,\varphi)) \ll (\eta,\rho) \ll \tilde{(\tilde{\eta},\tilde{\rho})} \ll \Psi(t_0,(\tilde{\varphi},\psi))$。由于初始函数 (α,φ) 和 $(\tilde{\alpha},\tilde{\varphi})$ 不收敛到任何稳定平衡态，我们推得

$$\Psi(t,(\eta,\rho)) \to \left(\frac{c_0}{\mu_\infty}\kappa_1,\kappa_1\right) \quad \text{and} \quad \Psi(t,(\tilde{\eta},\tilde{\rho})) \to \left(\frac{c_0}{\mu_\infty}\kappa_1,\kappa_1\right), \tag{5.10}$$

eq:conv_psi

当 $t\to\infty$。令 $(I(t)\ b(t))$ 和 $(\tilde{I}(t)\ \tilde{b}(t))$ 分别为方程 (5.3) 在初始数据 (η,ρ) 和 $(\tilde{\eta},\tilde{\rho})$ 下的解，并令 $\xi(t) = b(t) - \tilde{b}(t)$。此外，设

$$B(t) = \int_0^{a_0} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} b(t-a)\mathrm{d}a + \beta_\infty I(t), \quad t\ge 0,$$

~ ~并对 B作类似定义。于是， b和 b 所满足的方程可改写为 $b(t) = f(B(t))$ 和 $b(t) = f(B(t))$。因此， $\xi(t) = g(t)(B(t) - B(t))$，其中

$$g(t) = \int_0^1 f'(s\tilde{B}(t) + (1-s)B(t))\mathrm{d}s,$$

并且由 (5.10) 可知，当 $t \to \infty$ 时， $g(t) \to f'(\kappa_1)$。

令 $\delta \in (1, f'(\kappa_1))$，并注意到存在 $T > 0$，使得对于所有 $t \geq T$，都有 $g(t) \geq \delta$。此外，仿照定理 5.2 的证明（见 (5.7)），我们可推得

$$\begin{aligned}
\tilde{B}(t) - B(t) &= \int_0^{a_0} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} \xi(t-a)\mathrm{d}a + \beta_\infty(\tilde{I}(t) - I(t)) \\
&= \int_0^{a_0} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} \xi(t-a)\mathrm{d}a + \beta_\infty \left[(\tilde{\eta} - \eta) e^{-\mu_\infty t} + c_0 \int_0^t e^{-\mu_\infty (t-s)} \xi(s-a_0)\mathrm{d}s \right] \\
&= \int_0^t \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} \xi(t-a)\mathrm{d}a + \beta_\infty(\tilde{\eta} - \eta) e^{-\mu_\infty t} \\
&\quad + \int_t^{t+a_0} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} (\tilde{\varphi}(t-a) - \varphi(t-a))\mathrm{d}a \\
&\geq \int_0^t \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} \xi(t-a)\mathrm{d}a
\end{aligned}$$

于是，由于对于所有 $t \geq 0$ 都有 $\xi(t) > 0$ （见命题 5.4 的证明），且它在无穷远处趋于零，我们可以取 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一个正实数序列，使得 $t_n \to \infty$，并且对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\xi(t_n) = \min_{t\in[0,t_n]} \xi(t)$。利用这些性质，对于足够大的 n，我们得到

$$\xi(t_n) \geq \delta \xi(t_n) \int_0^{t_n} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l} \mathrm{d}a,$$

这就导致矛盾：由于归一化假设 (5.1)，当 $n \to \infty$ 趋于极限时， $\delta \leq 1$ 。至此，定理的证明完成。

□

后一个结果表明，对于我们正在考虑的情形，使得解不收敛于任何稳定平衡态的初始数据集合是一个处处稀疏集。我们强调，证明主要依赖于半流恰好具有三个平衡点这一结构。然而，可以预期的是，当平衡点的数量增加时，我们可以考虑其解不收敛于任何稳定平衡态的初始数据集合，并由此推断该集合也是全序不可比的。

由这一结果可以推导出系统（5.3）的尖锐阈值性质，正如第 3 节最后一段所做的那样。我们在下面的论断中总结这一结果。

th:threshold_2

定理 *5.6.* 设 $\{(\alpha_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\geq 0}$ 是 Y 中的一个初始函数族，使得映射 $\lambda \to (\alpha_\lambda, \varphi_\lambda)$ 从 $\mathbb{R}_+$ 到 Y 连续且严格单调，即，如果 $\lambda < \eta$，则 $(\alpha_\lambda, \varphi_\lambda) < (\alpha_\eta, \varphi_\eta)$。进一步假设 $(\alpha, \varphi_0) = (0, 0)$，并用 $(I^\lambda(t)\ b^\lambda(t))$ 表示系统（5.3）的相应解。那么，每个解 I^λ 和 b^λ 在无穷远处消失，或者存在唯一的 $\lambda^* > 0$ 使得

- 对于所有 $\lambda < \lambda^*$， $(I^\lambda(t)\ \ b^\lambda(t)) \to (0, 0)$ 均满足 $t \to \infty$。
- *and for all* $\lambda > \lambda^*$, $(I^\lambda(t), b^\lambda(t)) \to \left(\frac{c_0}{\mu_\infty}\kappa_2, \kappa_2\right)$ *as* $t \to \infty$ *is valid.*

此外，在后一种情况下，存在 $\delta > 0$ ，使得

$$\delta \leq \frac{\mu_\infty}{c_0} \liminf_{t\to\infty} I^{\lambda^*}(t) \leq \frac{\mu_\infty}{c_0} \limsup_{t\to\infty} I^{\lambda^*}(t) \leq \kappa_2 - \delta,$$

and

$$\delta \leq \liminf_{t\to\infty} b^{\lambda^*}(t) \leq \limsup_{t\to\infty} b^{\lambda^*}(t) \leq \kappa_2 - \delta.$$

5.2 回到年龄结构模型

在最后这一段中，我们明确说明年龄结构模型（1.1）与系统（5.3）之间的关系。后者的推导是通过在 Gurtin-MacCamy模型中进行一些形式计算得出的，例如在积分号下求导，甚至假设由特征线法得到的模型解是经典解，也就是说，该解关于两个变量确实可微。尽管如此，这两种表述之间的关系很容易说明，只需从给出的解及相关函数的表示公式出发即可。回想一下，由特征线法得到的年龄结构模型的解为

$$u(t,a)=\begin{cases} e^{-\int_{a-t}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}u_0(a-t), & a\geq t,\\ e^{-\int_{0}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}b(t-a), & t\geq a, \end{cases}$$

其中 $b\colon\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 是下列积分方程的解

$$b(t)=f\left(\int_t^{+\infty}\beta(a)e^{-\int_{a-t}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}u_0(a-t)\mathrm{d}a+\int_0^t\beta(a)e^{-\int_{0}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}b(t-a)\mathrm{d}a\right).$$

令 $I(t)=\int_{a_0}^{+\infty}u(t,a)\mathrm{d}a$。则对 $t\geq a_0$ 我们得到

$$\begin{aligned} I(t)&=\int_t^{+\infty}e^{-\int_{a-t}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}u_0(a-t)\mathrm{d}a+\int_{a_0}^{t}e^{-\int_{0}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}b(t-a)\mathrm{d}a \\ &=\int_0^{+\infty}e^{-\int_{a}^{a+t}\mu(l)\mathrm{d}l}u_0(a)\mathrm{d}a+e^{-\int_{0}^{a_0}\mu(l)\mathrm{d}l}\int_{a_0}^{t}e^{-\mu_\infty(a-a_0)}b(t-a)\mathrm{d}a \\ &=\int_0^{a_0}e^{-\int_{a}^{a_0}\mu(l)\mathrm{d}l}e^{-\mu_\infty(t+a-a_0)}u_0(a)\mathrm{d}a+e^{-\mu_\infty t}\int_{a_0}^{+\infty}u_0(a)\mathrm{d}a \\ &\quad+c_0\int_0^{t-a_0}e^{-\mu_\infty(t-a-a_0)}b(a)\mathrm{d}a, \end{aligned}\tag{5.11}$$

expr_I

由此可得

$$e^{\mu_\infty t}I(t)=\int_0^{a_0}e^{-\int_{a}^{2a_0-a}\mu(l)\mathrm{d}l}u_0(a)\mathrm{d}a+\int_{a_0}^{+\infty}u_0(a)\mathrm{d}a+c_0\int_0^{t-a_0}e^{\mu_\infty(a+a_0)}b(a)\mathrm{d}a.$$

上述表达式表明 I 是该微分方程的一个解

$$I'(t)=-\mu_\infty I(t)+e^{-\int_0^{a_0}\mu(l)\mathrm{d}l}b(t-a_0),\quad t\geq a_0,$$

其中 $I(a_0)=\int_0^{a_0}e^{-\int_{a}^{2a_0-a}\mu(l)\mathrm{d}l}u_0(a)\mathrm{d}a+\int_{a_0}^{+\infty}u_0(a)\mathrm{d}a$。此外，利用 (5.11)，我们对 $t\geq a_0$同样可推得

$$\begin{aligned} b(t)&=f\Bigg(\int_0^{a_0}\beta(a)e^{-\int_{0}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}b(t-a)\mathrm{d}a+\beta_\infty\int_{a_0}^{t}e^{-\int_{0}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}b(t-a)\mathrm{d}a \\ &\qquad+\beta_\infty\int_t^{+\infty}e^{-\int_{a-t}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}u_0(a-t)\mathrm{d}a\Bigg) \\ &=f\left(\int_0^{a_0}\beta(a)e^{-\int_{0}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}b(t-a)\mathrm{d}a+\beta_\infty I(t)\right). \end{aligned}$$

因此，我们证明了年龄结构模型的每个解都会为 $t\geq a_0$ 生成系统（5.3）的一个解，因此，Gurtin-MacCamy模型的动力学取决于时滞系统的动力学。由此可见，定理 1.3 的证明与借助定理 5.6 证明定理 1.2 的思路相同。

致谢

F.H.谨此感谢 ANID-人力资本副局/国家博士项目/2024年- 21240616 提供的支持，以及诺曼底大区通过 RIN50项目“DAMES”提供的支持。我们谨向 S. Trofimchuk 表示感谢，感谢他进行的宝贵讨论，并提醒作者关注这项工作 [29]。

数据可用性 本研究未生成或分析任何数据集。

声明

利益冲突 作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] W. Arendt. 预解正算子。伦敦数学学会会刊 *(3)*，54(2):321–349，1987年。[2] F. Brauer. 关于一个用于种群增长问题的非线性积分方程。*SIAM*数学分析杂志，6:312–317，1975年。[3] S. Busenberg、K. Cooke 和 M. Iannelli. 一类年龄结构化流行病的地方病阈值与稳定性。*SIAM*应用数学杂志，48(6):1379–1395，1988年。[4] K. L. Cooke 和 J. L. Kaplan. 流行病与种群增长的周期性阈值定理。数学生物科学，31(1-2):87–104，1976年。[5] K. L. Cooke 和 J. A. Yorke. 描述增长过程和淋病流行的若干方程。数学生物科学，16:75–101，1973年。[6] J. M. Cushing. 阿利效应下年龄结构种群模型中的振荡。第52卷，第71–80页。1994年。《非线性系统中的振荡：应用与数值方法》。[7] W. Desch 和 W. Schappacher. 非线性半群的线性化稳定性。载于巴拿赫空间中的微分方程（博洛尼亚，*1985*年），数学讲义第1223卷，第61–73页。施普林格，柏林，1986年。[8] O. Diekmann 和 R. Montijn. 流行病模型中的Hopf分岔前奏：与非线性沃尔泰拉积分方程相关的特征方程分析。数学生物学杂志，14(1):117–127，1982年。[9] O. Diekmann、S. A. van Gils、S. M. Verduyn Lunel 和 H.-O. Walther. 时滞方程，应用数学科学第110卷。施普林格出版社，纽约，1995年。泛函、复分析与非线性分析。[10] Y. Du 和 H. Matano. 非线性扩散问题中传播的收敛性与尖锐阈值。欧洲数学学会杂志（*JEMS*），12(2):279–312，2010年。[11] A. Ducrot、Q. Griette、Z. Liu 和 P. Magal. 微分方程与种群动力学 *I*：入门方法。生命科学数学建模讲义。施普林格，Cham，[2022] ©2022年。Jacques Demongeot 和 Glenn Webb 作序。[12] A. Ducrot、H. Kang 和 S. Ruan. 狄利克雷型非局部扩散年龄结构模型。I：主谱理论与极限性质。数学分析杂志，155(1):327–390，2025年。[13] A. Ducrot、H. Kang 和 S. Ruan. 狄利克雷型非局部扩散年龄结构模型。II：全局动力学。以色列数学杂志，266(1):219–257，2025年。

[14] A. Ducrot、Z. Liu 和 P. Magal. 非稠密定义的柯西问题中有界线性扰动的本质增长率。《数学分析及其应用杂志》，341(1):501–518，2008年。[15] A. Ducrot 和 P. Magal. 实数轴上二阶半线性微分方程的中心流形及其在Gurtin-McCamy方程波列存在性问题中的应用。《美国数学会会刊》，372(5):3487–3537，2019年。[16] V. Erb 和 J. Wyneken. 佛罗里达州东海岸蠵龟（Caretta caretta）幼龟从巢穴到海滩阶段的死亡率。《海洋科学前沿》，6:271，2019年。[17] J. Z. Farkas. 体型结构种群：迁入、（双）稳定性与净增长率。《应用数学与计算》，35(1-2):617–633，2011年。[18] Q. Griette 和 F. Herrera. 具有非对称反馈的非线性沃尔泰拉方程中的缓慢振荡周期解。《微分方程杂志》，460:114071，2026年。[19] G. Gripenberg、S.-O. Londen 和 O. Staffans. 沃尔泰拉积分方程与泛函方程，《数学及其应用百科全书》第34卷。剑桥大学出版社，剑桥，1990年。[20] M. E. Gurtin 和 R. C. MacCamy. 非线性年龄依赖种群动力学。《理性力学与分析文档》，54:281–300，1974年。[21] K. Hasík、J. Kopfová、P. Nábělková 和 S. Trofimchuk. 单峰生育率与单调增长率森林模型的全局稳定性。《自然现象数学建模》，20：论文第18号，共18页，2025年。[22] F. Herrera 和 S. Trofimchuk. 一维映射的动力学与Gurtin-McCamy种群模型。第一部分：渐近常值解。《乌克兰数学杂志》，75(12):1850–1868，2024年。重印自《乌克兰数学杂志》75（2023），第12期，1635–1651页。[23] F. Herrera 和 S. Trofimchuk. 具有单调正反馈和记忆的森林模型的全局动力学。载于《2023年MATRIX年刊》，MATRIX丛书第6卷，第423–432页。施普林格，Cham，[2025]©2025年。[24] M. W. Hirsch. 强单调动力系统中的稳定性与收敛性。《纯粹与应用数学杂志》，383:1–53，1988年。[25] J. Húska 和 P. Poláčik. $\mathbb{R}^N$上的线性抛物方程的指数分离与主 Floquet 丛。《离散与连续动力系统》，20(1):81–113，2008年。[26] H. Inaba. 人口学与流行病学中的年龄结构种群动力学。施普林格，新加坡，2017年。[27] H. Kang 和 S. Liu. 空间周期介质中扩散型年龄结构模型的全局动力学与渐近扩张。《数学年刊》，393(2):2631–2682，2025年。[28] H. Kang 和 S. Ruan. 诺伊曼型非局部扩散年龄结构模型的主谱理论与异步指数增长。《数学年刊》，384(1-2):575–623，2022年。[29] T. Krisztin 和 H.-O. Walther. 时滞正反馈的唯一周期轨道与全局吸引子。《动力系统与微分方程杂志》，13(1):1–57，2001年。[30] T. Krisztin、H.-O. Walther 和 J. Wu. 时滞单调正反馈吸引集的形状、光滑性与不变分层，菲尔兹研究所专著第11卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999年。[31] J. J. Levin. 关于非线性沃尔泰拉方程。《数学分析及其应用杂志》，39:458–476，1972年。[32] S.-O. Londen. 关于非线性沃尔泰拉方程有界解的渐近行为。SIAM数学分析杂志，5:849–875，1974年。

[33] Z. Luo、Z. Liu、Y. Tan、J. Yang 和 H. Qiu. 年龄结构肿瘤免疫模型的阈值行为. 《自然现象数学建模》, 18:论文编号 6，共 26 页，2023年.[34] Z. Ma 和 P. Magal. Gurtin-MacCamy种群动力学模型的全局渐近稳定性. Proc. Amer. Math. Soc., 152(2):765–780, 2024年.[35] P. Magal 和 S. Ruan. 非稠密定义域半线性方程的中心流形及其在年龄结构模型Hopf分岔中的应用. Mem. Amer. Math. Soc., 202(951):vi+71, 2009年.[36] P. Magal 和 S. Ruan. 抽象半线性柯西问题理论及其应用，第201卷《应用数学科学》. 施普林格，Cham，2018年. Glenn Webb 作序.[37] P. Magal、O. Seydi 和 F.-B. Wang. 应用于年龄结构种群动力学模型的单调抽象非稠密定义柯西问题. 《数学分析及其应用杂志》, 479(1):450–481, 2019年.[38] M. Martcheva 和 B. M. Bolker. 阿利效应对扩散和斑块占据年龄如何影响集合种群动力学. Bull. Math. Biol., 69(1):135–156, 2007年.[39] J. Mierczyński 和 W. Shen. 正随机动力系统的主Lyapunov指数和主Floquet空间. III. 抛物型方程与时滞系统. 《动力系统与微分方程杂志》, 28(3-4):1039–1079, 2016年.[40] Norhayati 和 G. C. Wake. 非线性年龄结构化种群模型的解与稳定性. ANZIAM J., 45(2):153–165, 2003年.[41] P. Poláčik. $\mathbb{R}^N$上的非自治抛物型方程的阈值解与尖锐转变. 《理性力学与分析文档》, 199(1):69–97, 2011年.[42] P. Poláčik 和 I. Tereščák. 光滑强单调离散时间动力系统中，收敛到周期轨道是一种典型的渐近行为. 《理性力学与分析文档》, 116(4):339–360, 1992年.[43] P. Poláčik 和 I. Tereščák. 有序巴拿赫空间映射的指数分离与不变丛及其在抛物型方程中的应用. 《动力系统与微分方程杂志》, 5(2):279–303, 1993年.[44] A. Ruiz-Herrera 和 T. M. Touaoula. 带扩散的年龄结构种群模型的全局吸引：降维. J. Dyn. Diff. Equat., 2025年.[45] W. Shen、Z. Shen、S. Xue 和 D. Zhou. 气候变化下的种群动力学：持久性判据与波动的影响. 数学生物学杂志, 84(4): 论文编号 30，共 42 页，2022 年 .[46] H. L. Smith. 单调动力系统，第 41 卷《数学调查与专著》. 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1995年. 竞争与合作系统理论导论.[47] H. L. Smith 和 H. R. Thieme. 强保序半流的收敛性. SIAM数学分析杂志, 22(4):1081–1101, 1991年.[48] H. L. Smith 和 H. R. Thieme. 动力系统与种群持久性，第118卷《数学研究生教材》. 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2011年.[49] H. R. Thieme. 非稠密定义算子的Lipschitz扰动所生成的半流. Differential Integral Equations, 3(6):1035–1066, 1990年.[50] G. F. Webb. 非线性年龄依赖种群动力学理论，第89卷《纯数学与应用数学专著及教材》. Marcel Dekker, Inc.，纽约，1985年.

[51] J.Wu. 神经动力学与信号传输时滞导论，第6卷，丛书 德格鲁伊特非线性分析与应用丛书. Walter de Gruyter & Co.，柏林，2001年。

[52] A. Zlatoš. 反应灭绝与传播之间的尖锐转变。《美国数学会杂志》，19(1):251–263, 2006.

A 强保序性质

考虑由 Gurtin-MacCamy模型 (1.1) 生成的半流，$U(t): L^1_+(0,+\infty) \to L^1_+(0,+\infty)$，它由特征线法给出；即，$U(t)u_0 = u(t,\cdot)$，其中

$$u(t,a) = \begin{cases} e^{-\int_{a-t}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}u_0(a-t), & a \geq t, \\ e^{-\int_{0}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}b(t-a), & a \leq t, \end{cases}$$

其中 b: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是积分方程的唯一连续解

$$b(t) = f\left(\int_t^{+\infty}\beta(a)e^{-\int_{a-t}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}u_0(a-t)\mathrm{d}a + \int_0^t \beta(a)e^{-\int_0^a \mu(l)\mathrm{d}l}b(t-a)\mathrm{d}a\right).$$

定理 1.2 的证明依赖于由 b 的积分方程解生成的半流的尖锐阈值性质，也就是说，对于在 $C^0_+([-a^*,0])$ 的子集上的半流，其中 $(t,\varphi) \mapsto b_t^\varphi$，$b_t$ 表示 b 的历史。反过来，这一性质可直接由分界集的不可比较性推出，而这又源于强单调动力系统的一般渐近行为 [24]。这种对长期动力学的描述也可以推广到定义在有序巴拿赫空间上的半流，其中序由非实锥给出，即内部为空的锥，并使用强保序半流[46, 47]的概念。若半流 Φ 是单调的，且对于任意 $x < y$，都存在开集 U、$V \subseteq X$和 $t_0 > 0$，使得 $x \in U$、$y \in V$且 $\Phi(t_0,U) \leq \Phi(t_0,V)$，则称其为强保序半流。

因此，命题 3.1 表明，当 $a^* < +\infty$时，半流 $(t,\varphi) \mapsto b_t^\varphi$ 最终强单调，因而具有强保序性。相比之下，由 $L^1_+(0,+\infty)$ 中的 Gurtin-MacCamy模型生成的半流永远不具有强保序性。事实上，考虑任意两个初始分布 $u_0, v_0 \in L^1_+(0,+\infty) \cap L^\infty_+(0,+\infty)$，使得 $u_0 < v_0$，并将年龄结构模型的相应解分别记为 $\tilde{u}$ 和 v。此外，令 $U, V \subseteq L^1_+(0,+\infty)$ 分别为 u_0 和 v_0 的两个开邻域。现在，取 $\eta, \tilde{u}_0 \in L^1_+(0,+\infty)$，定义为 $\eta = \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{1}_{(0,\varepsilon^2)}$ 和 $\tilde{u}_0 = u_0 + \eta$，其中 $\varepsilon > 0$。将 ε 取得足够小，可确保 $\tilde{u}_0 \in U$ 和 $\tilde{u}_0(a) > v_0(a)$ 在 $(0,\varepsilon^2)$ 上几乎处处成立。于是，对每个 $t \geq 0$，可得

$$\tilde{u}(t,a) = e^{-\int_{a-t}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}\tilde{u}_0(a-t) > e^{-\int_{a-t}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}v_0(a-t) = v(t,a), \quad \text{a.e. } a \in (t, t+\varepsilon^2),$$

and

$$\tilde{u}(t,a) = e^{-\int_{a-t}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}u_0(a-t) \leq e^{-\int_{a-t}^{a}\mu(l)\mathrm{d}l}v_0(a-t) = v(t,a), \quad \text{a.e. } a \in (t+\varepsilon^2, +\infty).$$

这意味着，对于所有 $t \geq 0$，$\Phi(t,\ \tilde{u}_0) = \tilde{u}(t,\ \cdot) \not\leq v(t,\ \cdot) = \Phi(t,\ v_0)$，因此该结论的证明至此完成。

另一方面，当 $a^* = +\infty$时，沃尔泰拉方程的解并不能完全由紧区间上的历史所确定，这自然引导我们考虑左半轴上有界且一致连续函数的空间$BUC^0_+((-\infty,0])$。然而，定义在 $BUC^0_+((-\infty,0])$ 的某个子空间 Y 上的半流 $(t,\varphi) \mapsto b_t^\varphi$，主要是为了避免零点处的不连续问题，却并非强保序的。事实上，考虑两个初始数据 $\varphi, \psi \in Y$，使得对某个 $\theta_0 < 0$，在 $(-\infty,\theta_0]$ 上有 $\varphi < \psi$ 且 $\varphi \equiv \psi$。设 $U, V \subseteq Y$ 分别为 φ 和 ψ 的两个开邻域。考虑一个光滑函数 η: $(-\infty,0] \to \mathbb{R}$，使得 $0 \leq \eta \leq \varepsilon$ 且

$$\eta(\theta) = \begin{cases} \varepsilon, & \theta \leq \theta_0 - 1, \\ 0, & \theta \in [\theta_0, 0], \end{cases}$$

满足 $\varepsilon > 0$，并定义 $\tilde{\varphi} = \varphi + \eta$。然后，取足够小的 ε，我们可保证 $\tilde{\varphi} \in U$，并且显然有 $\tilde{\varphi} \not\leq \psi$。由于该半流是根据整个左半轴上解的历史来定义的，关系 $b_t^{\tilde{\varphi}} \not\leq b_t^{\psi}$ 对所有 $t \geq 0$ 都成立，这表明该半流并非强保序的。因此，无法利用问题的这一特定表述来应用单调动力系统理论。

第5节通过解耦积分-微分系统中的动力学来处理这一问题：其中一个变量存储种群在较大年龄时的信息，因此该系统在定义于紧区间上的连续函数空间上确定了一个半流。由此生成的半流被证明具有强保序性质，因此其轨道的典型行为是已知的。