arXiv:2602.06814v1 [math.GT] 6 Feb 2026

双箭架票价与链环不变量

Sam Nelson* Stella Shah†

摘要

我们利用双拟群着色图中从路径映射到阿贝尔系数群的映射 *fares*，引入了一类新的不变量，用于研究定向经典结、虚结和链环。我们考察了 1-票价和 2-fare 的情形，并通过例子说明这些增强确实是严格增强。最后，我们提出了一些关于 $n > 2$ 的 n-fare 情形的开放问题。

KEYWORDS: 双叉群费用、双拟群、箭图、链环不变量
2020 MSC: 57K12

1 引言

双拟群是提供集合论杨-巴克斯特方程解以及定向结和链环不变量的代数结构。更具体地说，每个定向经典或虚结或链环都有一个基本双箭架，其同构类是强不变量，而映射到有限双拟群的同态集则提供了一个可计算不变量的无限族。这些同态集可以通过类似于模范畴中表示同态的矩阵的图表双群胚着色来表示（和计算）。

双箭架计数不变量是该同态集的基数。对双箭架计数不变量的增强是一种通常更强的不变量，它能够确定同态集的基数。在此前的大量研究中，增强是通过寻找由图表着色表示的同态集元素的不变量，并收集这些不变量在整个同态集上的取值来定义的；此类例子的无限族包括双箭架2-上闭链不变量 [1, 2]，双箭架括号不变量 [8, 5]，双箭架着色箭图增强 [4, 6] 以及许多其他例子 [9]。

在本文中，我们引入双群胚同态集不变量的一个新的无穷增强族，称为双箭架票价，其灵感来自箭图的路径代数（以及东京地铁系统）。阶为 n 的费用是一个从 X 的元素的 n元组到阿贝尔群 A的映射，这些元组表示在被解释为有向图的定向结或链环图的双群胚着色中长度为 n 的路径。将费用贡献在一组适当的路径上求和，得到 A中的一个值；票价公理则是确保该和在 X着色的Reidemeister 变换下保持不变所需的条件。在同态集上汇集总费用，便得到多重集形式的增强不变量，它可以以多种方式表示为多项式。

本文结构如下。在第2节中，我们回顾双拟群与同态集的基本知识。在第3节中，我们引入双叉群费用的思想，并用一些玩具例子加以说明。我们处理一阶 fare,二阶与三阶的情形，并讨论更高阶 fare 的情形。对于二阶 fare 及更高阶的情形，我们考虑三种基本类型的 fare：完全票价、through fare 和曲折票价。我们针对一些例子中所选取的双拟群、系数环和票价表，计算不变量的取值表。我们在第4节以一些供未来研究的问题作结。

本文包括所有文字、插图以及用于计算的 Python 代码，均由作者严格独立完成，未以任何形式使用生成式人工智能。

*电子邮箱：Sam.Nelson@cmc.edu。部分经费由西蒙斯基金会合作项目拨款 702597 资助。
†电子邮箱：sshah0159@scrippscollege.edu

2 双拟群与同态集

我们首先回顾一个标准定义（如需了解更多，请参见 [3] ）。

定义 1. 双拟群 是一个集合 X，带有两个二元运算 $\triangleright, \underline{\triangleright}: X \times X \to X$，满足

(i) 对所有 $x \in X$, $x \underline{\triangleright} x = x \overline{\triangleright} x$,

(ii) 对所有 $y \in X$，由 $\alpha_y, \beta_y: X \to X$ 定义的映射 $\alpha_y(x) = x \triangleright y$, $\beta_y(x) = x \triangleright y$ 以及由 $S: X \times X \to X \times X$ 定义的映射 $S(x, y) = (y \triangleright x, x \triangleright y)$ 均可逆，并且

(iii) 对所有 x, y, z，都满足交换律

$$\begin{array}{rcl} (x \underline{\triangleright} y) \underline{\triangleright} (z \underline{\triangleright} y) & = & (x \underline{\triangleright} z) \underline{\triangleright} (y \overline{\triangleright} z) \\ (x \underline{\triangleright} y) \overline{\triangleright} (z \underline{\triangleright} y) & = & (x \overline{\triangleright} z) \underline{\triangleright} (y \overline{\triangleright} z) \\ (x \overline{\triangleright} y) \overline{\triangleright} (z \overline{\triangleright} y) & = & (x \overline{\triangleright} z) \overline{\triangleright} (y \underline{\triangleright} z) \end{array} .$$

对于所有 x, y 均满足 $x \overline{\triangleright} y = x$ 的双拟群称为拟群。

例子 1. 双拟群的标准例子包括

- 任意群都具有如下双拟群结构：

$$x \underline{\triangleright} y = y^{-n} x y^n \quad \text{and} \quad x \overline{\triangleright} y = x$$

  对任意整数 n

- 任意群都具有如下双拟群结构：

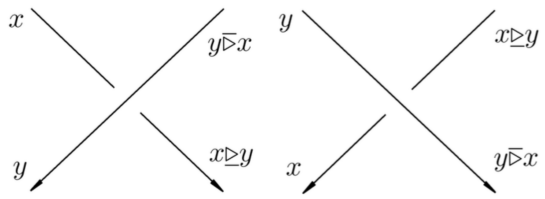
$$x \underline{\triangleright} y = y^{-1} x y^{-1} \quad \text{and} \quad x \overline{\triangleright} y = x^{-1}$$

- 交换含幺环 R 上的任意模都具有如下双拟群结构：

$$x \underline{\triangleright} y = tx + (s - t)y \quad \text{and} \quad x \overline{\triangleright} y = sx$$

  对单位元 t, $s \in R$。

双群胚公理的选取方式保证：对于每个 X着色的有向经典或虚拟结或链环图（即，为 D 的半弧指定 X 中的元素，并满足



每个交叉处的条件），在进行 Reidemeister 变换之前，变换后的图存在唯一的 X着色，且在变换邻域之外与原着色一致。

一个 X-着色唯一确定且仅由一个双群胚同态 $f: \mathcal{B}(L) \to X$ 从我们定向链环 L 的基本双箭架映射到 X，但需选定生成集；更多内容见 [3, 7] 。 L 图示的 X-着色集合称为双群胚同态集不变量$\mathrm{Hom}(\mathcal{B}(L), X)$; 其基数称为双箭架计数不变量，记作 $\Phi_X^{\mathbb{Z}}(L) = |\mathrm{Hom}(\mathcal{B}(L), X)|$。

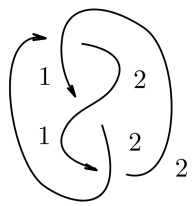
例子 2。设 X 为由以下运算表给出的双拟群

$\triangleright$	1	2	3
1	2	2	2
2	1	1	1
3	3	3	3

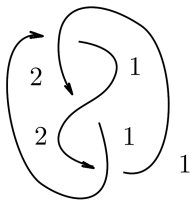
$\triangleright$	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

并考虑三叶结 3_1。有三个 X-着色，由同态集 3_1, 给出

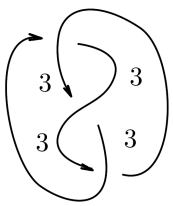
$$\mathrm{Hom}(3_1,\ X) = \left\{ \right.$$



,



,



$\left. \right\}$.

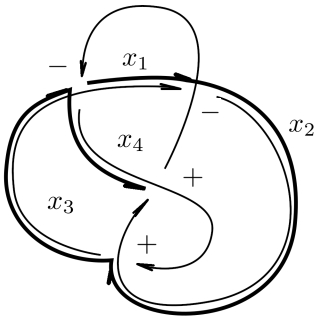
因此我们有 $\Phi_X^{\mathbb{Z}}(3_1) = 3$.

3 双箭架票价

我们先给出一个定义。

定义 2. 设 L 是一个定向经典或虚结或链环图。 L 中的一个路径，其阶为 n，是由 L 中的 n 条半弧组成的有序序列；对于每个 $k = 1,..,n-1$，第 k条边的终端交叉点是第 $(k+1)$ 条边的起始交叉点。如果我们将图 L 的底层图视为一个箭图，那么路径就是该箭图中的路径。

设 X 是一个有限双拟群， A 是一个阿贝尔群。系数取自 A、阶为 n 的双叉群费用是一个线性映射 ϕ: $\mathbb{Z}[X^n] \to A$，它满足由 X- 着色图表上的 Reidemeister 变换导出的公理，其中我们将一个 n 元组 $(x_1,$ ……， $x_n)$ 解释为双拟群着色中，图表 L的着色里阶为 n 的路线上的双叉群着色。更确切地说，对于每条阶为 n 的路线，我们收集一项费用贡献 $(-1)^k\phi(x_1,$ ……， $x_n) \in A$，其中 k 是该路线内部负交叉的数量。



$$+(-1)^2\phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

给定一个 X-着色图表，我们找出所有此类费用贡献组成的集合，并在 A 中将它们相加，作为该图表的总费用。随后选择票价公理，使得这些 ϕ值在 A 中的和在 X-着色的 Reidemeister 变换下保持不变，从而定义双群胚同态集不变量的一种增强。最简单的情形是阶为 $n = 1$的费用。

定义 3. 设 X 为一个有限双拟群， A 为一个阿贝尔群。则阶为 $n = 1$、系数在 A 中的 双叉群费用 是满足下列条件的函数 ϕ: $X \to A$

(i) 对所有 $x \in X$, $\phi(x \triangleright x) + \phi(x) = 0$, (ii) 对所有 $x, y \in X$, $\phi(x) + \phi(y) + \phi(x \triangleright y) + \phi(y \triangleright x) = 0$ 以及 (iii) 对所有 $x, y, z \in X$,

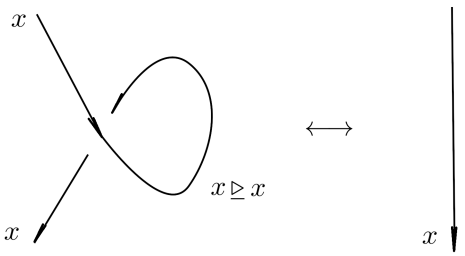
$$\phi(y) + \phi(x \trianglerighteq y) + \phi(x \overline{\triangleright} y) = \phi(z \overline{\triangleright} x) + \phi(x \trianglerighteq z) + \phi((y \overline{\triangleright} x) \trianglerighteq (z \overline{\triangleright} x))$$

要计算一个 X着色图的费用，只需将每条边上的双叉群着色 x 替换为其在 A 中的值 $\phi(x)$并求和。要看出上述条件给出 Reidemeister 变换下的不变性，只需检验定向 Reidemeister 移动的一个生成集中的每一个移动。在 [10]中已识别出若干这样的集合；我们将使用由全部四种 I 型移动、全部四种 II 型移动以及全正的 III 型移动组成的（非极小）集合。

定义 4. 设 X 为一个有限双拟群， D 为一个表示定向结或链环 L的定向结或链环图， A 为一个阿贝尔群， ϕ 为一个双叉群费用。双叉群同态集 $\mathrm{Hom}(\mathcal{B}(L), X)$ 上所有适当 fare 值的多重集即为双叉群费用多重集，记作 $\Phi^{\phi}_{X}{}^{M}(L)$。

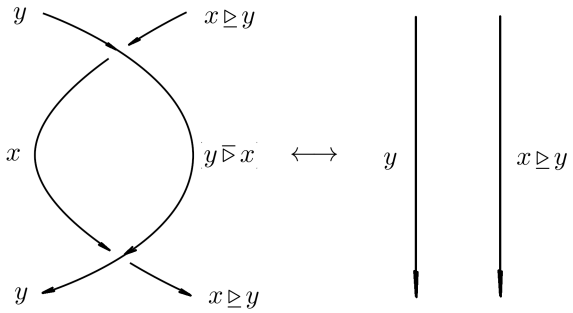
定理 1. 设 X 为一个双拟群， L 为一个定向的经典结或虚结、链环多结弧， A 为一个阿贝尔群，且 $\phi : X \to A$ 为一个双叉群1-费用。则双叉群同态集上的 ***fare*** 值多重集在 ***Reidemeister*** 变换下是不变量。

证明。 考虑 Reidemeister I，我们看到需要 $\phi(x) + \phi(x) + \phi(x \triangleright x) = \phi(x)$，或者更简单地 $\phi(x) + \phi(x \triangleright x) = 0$:



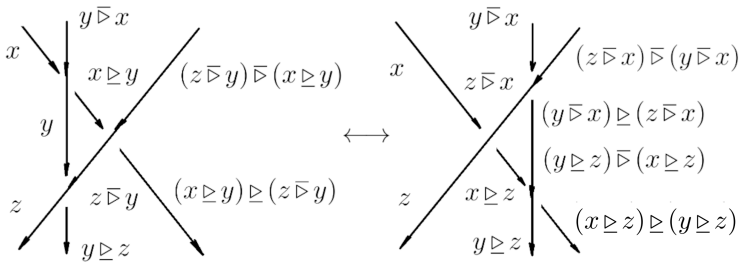
读者可以验证，另外三种 I 型移动给出相同的条件。对于 Reidemeister II，我们需要

$$\phi(x \trianglerighteq y) + \phi(y) + \phi(x \trianglerighteq y) + \phi(y \overline{\triangleright} x) + \phi(x) + \phi(y) = \phi(x \trianglerighteq y) + \phi(y)$$



这等价于 $\phi(x) + \phi(y) + \phi(x \triangleright y) + \phi(y \triangleright x) = 0$。与 I 型情形一样，读者可以验证，四种 II 型移动都会得到相同的条件。

最后，在 III 型 Reidemeister 移动中，我们注意到，根据双群胚公理，移动邻域外部的着色在移动两侧产生的总和相同，因此在 1-fare 情形下，我们只需考虑内部三角形贡献。



.

□

我们可以将 双拟群 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 的 1-票价表示为一个有序的 n 元组 $\phi = (\phi(x_1) \ldots, \phi(x_n))$.

例 3. 令 X 为由以下运算表定义的双拟群

$\trianglerighteq$	1	2	3
1	2	2	1
2	1	1	2
3	3	3	3

$\triangleright$	1	2	3
1	2	2	2
2	1	1	1
3	3	3	3

.

于是我们计算得到， X 在 $\mathbb{Z}_2$ 上的 1-票价如下表所示

x	$\phi_1(x)$	$\phi_2(x)$	$\phi_3(x)$	$\phi_4(x)$
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	0	1

.

我们将 1-fare 多重集不变量记作 $\Phi^{\phi}{}_{X}{}^{M}(L)$. 我们还可以选择用几种“多项式”形式之一表示该多重集（之所以加引号，是因为根据阿贝尔群 A 的选择，这些表达式不一定是通常意义上的多项式）：

定义 5. 设 X 是一个双拟群， L 是一个有向经典结或虚结，或链环， A 是一个阿贝尔群，ϕ : $\mathbb{Z}[X^n] \to A$ 是一个双拟群 n-费用，而 $\Phi^{\phi}{}_{X}{}^{M}(L)$ 是 n-费用多重集不变量。那么，相对于 (X, A, ϕ) 的 L 的加法 n-费用多项式 为

$$\Phi_X^{\phi,+}(L) = \sum_{f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B}(L), X)} x^{\phi(f)}$$

以及关于 $(X,\ A,\ \phi)$ 的 L 的乘法 n费用多项式为

$$\Phi_X^{\phi,\times}(L) = \prod_{f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B}(L), X)} (x - \phi(f)).$$

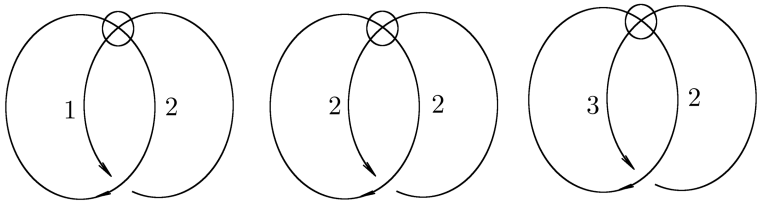
这两种多项式形式在大多数环上是等价的。对于加法形式，在 $x = 1$处求值可得到计数不变量的值，而单项式的系数表示 fare 值等于该单项式指数的着色数量；对于乘法形式，计数不变量是多项式的次数，而 fare 是它的根。

例子 4. 设 X 是由以下运算表定义的双拟群

$\underline{\triangleright}$	1	2	3
1	3	1	3
2	2	2	2
3	1	3	1

$\overline{\triangleright}$	1	2	3
1	3	3	3
2	2	2	2
3	1	1	1

并令 $A = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ 为克莱因四元群。那么我们计算得出， X 在 A 上有 1-票价，包括 ϕ =((1，0)，(0，1)，(1，0))。那么虚霍普夫链环 L 有三个 X-着色



收集此同态集上的 1-票价，得到 1-fare 多重集不变量的值 $\Phi^{\phi}{}_{X}{}^{M}(L) = \{2 \times (1，1)\ 1 \times (0，0)\}$。我们注意到，这能区分虚霍普夫链环与平凡链环 U ，因为没有交叉的图示路线集为空，因此其多重集 $\Phi^{\phi}{}_{X}{}^{M}(U)$只能包含零。

对于 $n > 1$，有几种可能的情况；我们将讨论其中三种。对于完全 ***fare*** ，我们收集所有长度为 n的可能路线所产生的贡献。对于贯穿票价，我们收集长度为 n的路线所产生的贡献，这些路线沿着结在每个交叉处从上方或下方继续前进。对于弯曲 ***fare*** ，我们只收集长度为 n 的路线所产生的贡献，这些路线在每个顶点处转弯，绝不穿过交叉继续前进。

定义 6. 设 X 是一个有限双拟群， A 是一个阿贝尔群。那么，系数取自 A 、阶为$n = 2$ 的完全双元组票价 是一个函数 ϕ: $X^2 \to A$ ，满足以下条件

(i) 对所有的 $x \in X$,

$$\phi(x,x) + \phi(x, x \underline{\triangleright} x) + \phi(x \underline{\triangleright} x, x) + \phi(x \underline{\triangleright} x, x \underline{\triangleright} x) = 0,$$

(ii) 对所有的 $x,\ y \in X$,

$$\phi(x,\ y) + \phi(x, x \triangleright y) + \overline{\phi}(y \triangleright x,\ y) \mp \phi(y \underline{\triangleright} x,\ x \triangleright y) - \phi(y,\ \underline{x}) - \phi(x \triangleright y,\ \overline{x}) - \phi(y,\ y \triangleright x) - \phi(x \triangleright y,\ y \triangleright x) = 0$$

且

(iii) 对所有的 $x,\ y,\ z \in X$,

$$\begin{aligned}\phi(x,y) + \phi(\underline{x}, x \triangleright y) + \overline{\phi}(y \triangleright x, y) + \overline{\phi}(y \triangleright \underline{x}, x \triangleright y)\, \phi(x,z) + \phi(x, x \triangleright z) + \phi(z \triangleright x, z) + \phi(z \triangleright x, x \triangleright z) + \phi(y,z) + \phi(y,\\ y \triangleright z) + \phi(z \triangleright y, z) \mp \phi(z \triangleright y, y \triangleright z) + \phi(y \triangleright x, z \triangleright x) + \phi(y \triangleright x, (y \underline{\triangleright} x) \underline{\triangleright} (z \underline{\triangleright} x)) + \underline{\phi}(x \triangleright y, z \triangleright y) + \underline{\phi}(x \underline{\triangleright} y, (x \triangleright \underline{y}) \triangleright (z \triangleright \underline{y}))\\ = +\phi((z \triangleright \overline{x}) \triangleright (y \triangleright x),\ z \triangleright x) + \phi((z \triangleright \overline{x}) \triangleright (\underline{y} \triangleright x), (y \triangleright x) \triangleright (z \triangleright x)) + \phi((z \triangleright y) \triangleright (x \triangleright y),\ z \triangleright y) + \phi(x \triangleright z, y \triangleright z) \mp \phi(\\ x \triangleright z, (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)) + \phi((z \triangleright \underline{y}) \triangleright (x \triangleright \underline{y}), (x \triangleright \underline{y}) \triangleright (z \triangleright y)) + \phi((y \underline{\triangleright} z) \triangleright (x \underline{\triangleright} z),\ y \underline{\triangleright} z) + \overline{\phi}((y \underline{\triangleright} z) \triangleright (x \underline{\triangleright} z), (x \underline{\triangleright} z) \underline{\triangleright} (y \underline{\triangleright} z))\end{aligned}$$

例5。 令 X 为由以下运算表给出的双拟群

$\underline{\triangleright}$	1	2
1	2	2
2	1	1

$\overline{\triangleright}$	1	2
1	2	2
2	1	1

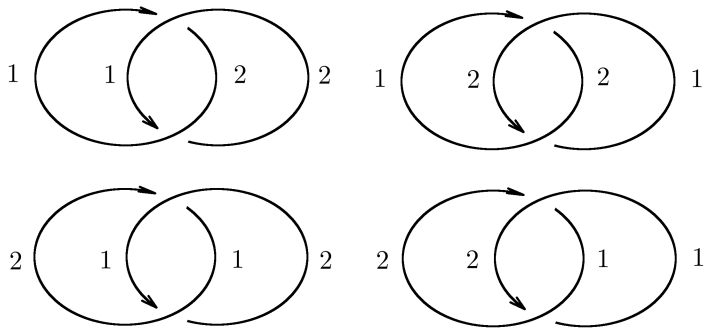
.

那么， X 在 $A = \mathbb{Z}_5$ 上具有完全2-fare，其中包括

ϕ	1	2
1	0	4
2	4	2

.

霍普夫链环 $L2a1$ 有四种 X着色



and 每种着色共有八条2阶路径，形成一个包含四种费用的多重集 s:

$$\begin{aligned}\Phi_X^{\phi,M} &= \{\phi(1,1)+\phi(1,2)+\phi(2,1)+\phi(2,2)+\phi(1,1)+\phi(1,2)+\phi(2,1)+\phi(2,2),\\ &\quad \phi(1,2)+\phi(1,2)+\phi(1,2)+\phi(1,2)+\phi(2,1)+\phi(2,1)+\phi(2,1)+\phi(2,1),\\ &\quad \phi(2,1)+\phi(2,1)+\phi(2,1)+\phi(2,1)+\phi(1,2)+\phi(1,2)+\phi(1,2)+\phi(1,2),\\ &\quad \phi(1,1)+\phi(1,2)+\phi(2,1)+\phi(2,2)+\phi(1,1)+\phi(1,2)+\phi(2,1)+\phi(2,2),\}\\ &= \{0+4+4+2+0+4+4+2,\ 4+4+4+4+4+4+4+4,\\ &\quad 4+4+4+4+4+4+4+4,\ 0+4+4+2+0+4+4+2\}\\ &= \{0,2,2,0\}\end{aligned}$$

其多项式版本为 $\Phi^{\phi,}{}_X{}^{+}(L2a1) = 2+x^2$ 和 $\Phi^{\phi,}{}_X{}^{\times}(L2a1) = x^2(x-2)^2$。

例子 6. 设 X 是由以下运算表给出的双拟群

$\trianglerighteq$	1	2	3
1	2	2	1
2	1	1	2
3	3	3	3

$\overline{\triangleright}$	1	2	3
1	2	2	2
2	1	1	1
3	3	3	3

.

然后我们通过 Python 计算得出， X 在 $\mathbb{Z}_5$ 上有完全2-fare，包括

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

（其中第 j 行、第 k 列的条目为 $\phi(j,\ k)$。）接下来，表中给出了最多有七个交叉的经典链环的乘法多项式fare值。

L	$\Phi_X^{\phi,\times}(L)$
$L2a1$	x^5
$L4a1$	$x^5(x-1)^4$
$L5a1$	x^9
$L6a1$	$x^5(x-1)^4$
$L6a2$	x^5
$L6a3$	x^5
$L6a4$	$x^9(x-1)^{18}$
$L6a5$	$x^9(x-1)^6$
$L6n1$	$x^9(x-1)^6$

L	$\Phi_X^{\phi,\times}(L)$
$L7a1$	x^9
$L7a2$	$x^5(x-1)^4$
$L7a3$	x^9
$L7a4$	x^9
$L7a5$	x^5
$L7a6$	x^5
$L7a7$	$x^{13}(x-1)^2$
$L7n1$	$x^5(x-4)^4$
$L7n2$	x^9

接下来，我们介绍另一种 2-fare。

定义 7. 设 X 为一个有限双拟群， A 为一个阿贝尔群。则阶为$n=2$、系数属于 A 的双拟群通行费 是满足下列条件的函数 $\phi\colon X^2\to A$

(i) 对于所有 $x\in X$,

$$\phi(x,x\trianglerighteq x)+\phi(x\trianglerighteq x,x)=0,$$

(ii) 对于所有 $x,y\in X$,

$$\phi(x,x\trianglerighteq y)+\phi(y\overline{\triangleright}x,y)-\phi(x\trianglerighteq y,x)-\phi(y,y\overline{\triangleright}x)=0$$

and

(iii) 对于所有 $x,y,z\in X$,

$$\begin{array}{rcl}\phi(x,x\trianglerighteq y)+\phi(y\overline{\triangleright}x,y) & & \phi(x,x\trianglerighteq z)+\phi(z\overline{\triangleright}x,z)\\ +\phi(y,y\trianglerighteq z)+\phi(z\overline{\triangleright}y,z) & = & +\phi(y\overline{\triangleright}x,(y\overline{\triangleright}x)\trianglerighteq(z\overline{\triangleright}x))+\phi((z\overline{\triangleright}x)\overline{\triangleright}(y\overline{\triangleright}x),z\overline{\triangleright}x)\\ +\phi(x\trianglerighteq y,(x\trianglerighteq y)\trianglerighteq(z\overline{\triangleright}y))+\phi((z\overline{\triangleright}y)\overline{\triangleright}(x\trianglerighteq y),z\overline{\triangleright}y) & & +\phi(x\trianglerighteq z,(x\trianglerighteq z)\trianglerighteq(y\trianglerighteq z))+\phi((y\trianglerighteq z)\overline{\triangleright}(x\trianglerighteq z),y\trianglerighteq z)\end{array}$$

例 7. 设 X 为由运算表定义的双拟群（实际上是拟群）

s

$\trianglerighteq$	1	2	3	4
1	1	3	4	2
2	4	2	1	3
3	2	4	3	1
4	3	1	2	4

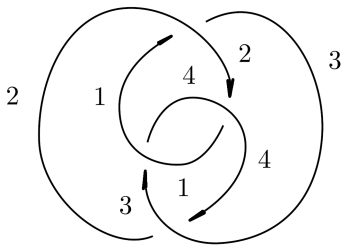
$\overline{\triangleright}$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4

我们的*Python* 计算表明，存在 125 个系数为 $\mathbb{Z}_5$ 的通行 2-fare，其中包括

ϕ	1	2	3	4
1	0	0	3	0
2	0	0	3	0
3	2	2	0	2
4	0	0	3	0

其中第 j 行、第 k 列的项为 $\phi(j,\ k)$。

八字结 4_1 有十六种 X-着色，其中包括



.

八条半弧中的每一条都起始一条长度为 2 的通行路径；将各项贡献相加，可得双拟群通行费总计为

$$\phi(2,\ 2)-\phi(2,\ 1)-\phi(1,\ 1)+\phi(1,\ 3)+\phi(3,\ 3)-\phi(3,\ 4)-\phi(4,\ 4)+\phi(4,\ 2)=0-0-0+3+0-2-0+0=1.$$

对其余 15 种着色重复上述过程，我们得到双架构 2-fare 多重集和多项式不变量值

$$\Phi_X^{\phi,M}(4_1)=\{4\times 0, 6\times 1, 6\times 4\},\ \Phi_X^{\phi,+}(4_1)=4+6x+6x^4 \text{ and } \Phi_X^{\phi,\times}=x^4(x-1)^6(x-4)^4.$$

这个例子表明，这些不变量是（双）拟群计数不变量的真正增强，因为三叶结 3_1 相对于 X 具有相同的计数不变量值 16，但增强不变量的值却是平凡的，

$$\Phi_X^{\phi,M}=\{16\times 0\},\ \Phi_X^{\phi,+}(0_1)=16 \text{ and } \Phi_X^{\phi,\times}(0_1)=x^{16}.$$

例 8. 令 X 为由以下运算表给出的双拟群

$\trianglerighteq$	1	2	3	4
1	1	3	4	2
2	2	4	3	1
3	3	1	2	4
4	4	2	1	3

$\trianglerighteq$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	4	4	4	4
3	2	2	2	3
4	3	3	3	3

.

接着我们计算得出， X 具有以下贯穿票价，包括

ϕ	1	2	3	4
1	3	1	4	1
2	5	0	3	3
3	2	3	0	0
4	5	3	0	3

以及表中交叉数不超过八个的素经典结所对应的乘法多项式值。

$\Phi_X^{\phi,\times}(K)$	K
x^4	$5_1, 5_2, 6_1, 6_2, 6_3, 7_1, 7_4, 7_5, 7_6 7_7, 8_2, 8_3, 8_6, 8_7, 8_8, 8_9, 8_{12}, 8_{14}, 8_{16}, 8_{17}$
$x^4(x-2)^6(x-4)^6$	$4_1, 8_1, 8_{11}$
x^{16}	$3_1, 7_2, 7_3, 8_4, 8_5, 8_{10}, 8_{13}, 8_{15}, 8_{19}, 8_{20}, 8_{21}$
$x^4(x-2)^{30}(x-4)^{30}$	8_{18}

.

特别地，我们注意到，该不变量能够区分若干计数不变量值相同的素经典结，因此是一种真正的增强。

最后，我们定义第三种 2-fare。

定义 8. 设 X 是一个有限双拟群， A 是一个阿贝尔群。那么，系数取自 A 、阶为 $n=2$ 的弯曲双架构 ***fare*** 是一个函数 $\phi\colon X^2\to A$ ，满足以下条件

(i) 对所有 $x\in X$, $\phi(x, x\trianglerighteq x)+\phi(x\trianglerighteq x, x)=0$,

(ii) 对所有 $x, y\in X$,

$$\phi(x,y)+\phi(y\triangleright x, x\trianglerighteq y)-\phi(y,x)-\phi(x\trianglerighteq y, y\triangleright x)=0$$

and

(iii) 对所有 $x, y, z\in X$,

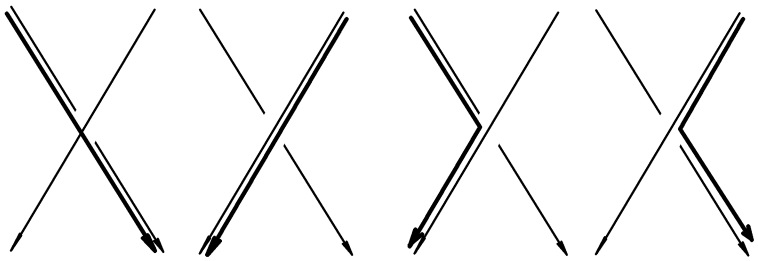
$$\begin{array}{rcl}\phi(x,y)+\phi(y\triangleright x, x\trianglerighteq y) & & \phi(x,z)+\phi(z\triangleright x, x\trianglerighteq z)\\ +\phi(y,z)+\phi(z\triangleright y, y\trianglerighteq z) & = & +\phi(y\triangleright x, z\triangleright x)+\phi((z\triangleright x)\triangleright(y\triangleright x),(y\triangleright x)\trianglerighteq(z\triangleright x))\\ +\phi(x\trianglerighteq y, z\triangleright y)+\phi((z\triangleright y)\triangleright(x\trianglerighteq y),(x\trianglerighteq y)\trianglerighteq(z\triangleright y)) & & +\phi(x\trianglerighteq z, y\trianglerighteq z)+\phi((y\trianglerighteq z)\triangleright(x\trianglerighteq z),(x\trianglerighteq z)\trianglerighteq(y\trianglerighteq z))\end{array}$$

与 $n=1$ 类型的费用一样，我们有：

定理 2。 设 X 为一个双拟群， L 为一个定向经典链环或虚拟链环， A 为一个阿贝尔群，且 ϕ： $X \to A$为一个完备、贯通或弯曲双拟群2-费用。则在双叉群同态集上的 *fare* 值多重集在 *Reidemeister* 变换下是不变量。

证明。 证明是检验其在 Reidemeister 变换下的不变性，与定理 1 的证明类似。 □

对于二阶 fare 的情形，选取一个贯穿票价 ϕ_1 和一个弯曲 fare ϕ_2 相加，可得到一个完全 fare $\phi_1 + \phi_2$。反过来一般并不成立——完全 fare 未必能分解为一个贯穿票价与一个弯曲 fare 之和。我们称一个完全 2-fare 在它是一个弯曲 fare 与一个贯穿票价之和时为可分解 ，否则为不可分解 。



Through Crooked

例 9。 设 X 是由以下运算表给出的双拟群

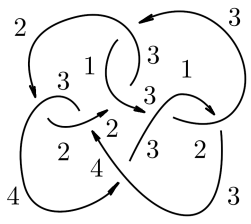
$\trianglerighteq$	1	2	3	4
1	1	3	4	2
2	2	4	1	3
3	1	3	2	4
4	4	2	3	1

$\overline{\triangleright}$	1	2	3	4
1	1	3	4	2
2	2	4	1	3
3	1	3	2	4
4	4	2	3	1

我们使用 Python 计算得出，在 $\mathbb{Z}_5$上有 3125 个弯曲双拟群 2-fare。其中一个例子是

ϕ	1	2	3	4
1	1	3	4	2
2	3	1	1	0
3	0	2	4	2
4	1	4	3	4

其中，如例 7 中， $\phi(j,k)$ 是第 j 行第 k 列的元素。链环 L7a7 共有 64 个 X-着色，包括以下:



.

共有 7 个交叉，因此每个 X-着色中有 14 条互不相同的弯曲2-路径。将这些 fare 求和，我们得到该着色的弯曲 fare 为:

$$\begin{aligned}\sum_{2-\text{routes}} \phi(x,y) &= \phi(2,4)+\phi(3,2)+\phi(3,1)+\phi(3,2)+\phi(2,3)+\phi(1,3)+\phi(4,2)\\ &\quad +\phi(2,3)-\phi(3,1)-\phi(3,2)-\phi(1,3)-\phi(2,3)-\phi(4,4)-\phi(3,3)\\ &= 4+1+4+1+2+0+0+2-4-1-0-2-4-4\\ &= 4.\end{aligned}$$

对其余 63 种着色重复上述过程，我们发现有 12 种的费用为 4，24 种的费用为 2，其余 36 种的费用为 0。因此，我们得到乘法多项式不变量的值

$$\Phi_X^{\phi,\times}(L7a7) = x^{36}(x-2)^{24}(x-4)^{12}.$$

4 问题

最后，我们提出一些问题以及未来研究的方向。

首先，有必要指出，我们在此计算的例子是作为小型且易于计算的玩具例子而选取的，不应被当作这一无限不变量族效力的代表。我们的例子采用小基数的双拟群以及小基数的有限环系数；更大的双拟群以及更大的有限与无限系数环有望给出更强的不变量。

我们只考虑了 1-票价与 2-fare 的情形；接下来应当处理的是 3-费用、4-fare 等情形。这些情形构成技术挑战，因为要找出所有可能情形，我们必须扩大每一步移动的邻域，使其包含更多交叉。尽管如此，对每一个自然数 n， n-fare 都是可定义的。

最后，我们注意到，弯曲2-费用与2-余循环非常相似；这引出了一个问题：对于给定的双拟群和系数环，某一特定类型（弯曲、完全、贯穿等）的所有 n-fare构成的集合具有什么代数结构？它是否像拟群／Yang-Baxter同调那样存在一种底层同调理论？它与双拟群括号之间是否存在某种关系？

参考文献

[1] J. S. Carter、D. Jelsovsky、S. Kamada、L. Langford 和 M. Saito。由拟群上同调构造的打结曲线与曲面的状态和不变量。*Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*，5:146–156（电子版），1999年。[2] J. Ceniceros、M. Elhamdadi、M. Green 和 S. Nelson。增广双架及其同调。*Internat.J. Math.*，25(9):1450087，19，2014年。[3] M. Elhamdadi 和 S. Nelson。拟群——结的代数导论，第74卷，*StudentMathematical Library*。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2015年。[4] P. C. Falkenburg 和 S. Nelson。双拟群括号箭图。*J. Knot Theory Ramifications*（即将出版），2023年。[5] N. G¨ug¨umc¨u、S. Nelson 和 N. Oyamaguchi。双拟群括号与结形。*J. Knot TheoryRamifications*，30(9):论文编号 2150064，17，2021年。[6] Y. Joung 和 S. Nelson。无向曲面链环的双拟群模不变量。*J. Knot Theory Ramifica-tions*，32(10):论文编号 2350065，14，2023年。

[7] S. Nelson。关于同态集和图表的一则简短札记。*J. Knot Theory Ramifications*（即将出版），2025。

[8] S. Nelson、M. E. Orrison 和 V. Rivera。量子增强与双拟群括号。*J. KnotTheory Ramifications*, 26(5):1750034，24，2017年。

[9] S. Nelson 和 E. Watterberg。双架动态余循环与同态不变量。《代数及其应用》，12(8):1350049，14，2013年。

[10] M. Polyak。Reidemeister 变换的最小生成集。《量子拓扑学》，1(4):399–411，2010年。

Department of Mathematical Sciences
Claremont McKenna College
850 Columbia Ave.Claremont, CA 91711