arXiv:2602.06853v1 [math.FA] 6 Feb 2026

L^2-度量测度空间上的 Caffarelli–Kohn–Nirenberg 不等式

Zhe-Feng Xu[1,2],Ye Zhang[1]

Abstract. 受欧几里得空间上 L^2-Caffarelli–Kohn–Nirenberg 不等式（简称 L^2-CKN不等式）中最佳常数的启发，我们在统一框架下研究度量测度空间上的一系列 L^2-CKN不等式。在一般度量测度空间上，这一系列不等式蕴含一种 Günther 型反向体积比较。此外，对于满足测度收缩性质的一类空间，我们证明，这一系列 L^2-CKN不等式成立，当且仅当这些空间是体积锥。我们还给出了体积锥上这类不等式的稳定性结果。

关键词：Bernstein定理，Caffarelli–Kohn–Nirenberg 不等式，拉普拉斯变换，针分解
MSC2020：**44A10**，28A50，35A23

1. Introduction

1.1.背景。 本文主要受到如下尖锐的 L^2-Caffarelli–Kohn– Nirenberg（简称 L^2-CKN）不等式的启发：

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2b}}\,\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^{2a}}\,\mathrm{d}x \ \geq C^2(N,a,b)\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^{a+b+1}}\,\mathrm{d}x\right)^2, \qquad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}),$$

该不等式由 Catrina 和 Wang [5] 在 $a = b + 1$ 情形下建立，由 Costa [11] 针对一段特定的参数范围建立，并由 Catrina 和 Costa [4]针对完整的参数范围建立。最近，Cazacu、Flynn 和 Lam [9] 提出了一种简洁直接的方法，得到了整个可容许参数范围内的最佳常数 $C(N,a,b)$，并刻画了所有极值函数。更一般的 Caffarelli–Kohn–Nirenberg（简称 CKN）不等式族最早于 $[2,3]$, 中被引入并研究，部分动机来自某些纳维–斯托克斯方程适定性与正则性方面的问题。此外，CKN不等式的各种形式及其推广已在更广泛的背景下得到研究，包括黎曼流形 $[1,12,22,23,34]$, 芬斯勒流形 $[18,20,32]$, 李群 $[13,17,25,27,35]$, 以及一般的度量测度空间 $[16,19,20,30]$。

本文的主要目标是研究更一般的度量测度空间上特定参数类的 L^2-CKN不等式。首先，我们回顾

日期：2026年2月9日。[1]意大利的里雅斯特 34136，SISSA，zxu@sissa.it，yezhang@sissa.it[2]中国合肥 230026，中国科学技术大学数学科学学院，xzf1998@mail.ustc.edu.cn

欧几里得版本 [4] 对于这些参数：设 $k \geq 0$和 $N \geq 1$。那么，对于任意 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$，

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{2k} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x\right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{2k+2} |u|^2 \, \mathrm{d}x\right) \geq \left(\frac{N}{2} + k\right)^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{2k} |u|^2 \, \mathrm{d}x\right)^2 \tag{1.1}$$

成立。这些不等式是尖锐的，且对任意 $c \in \mathbb{R}$和 $\lambda > 0$，等号在 $u(x) = ce^{-\lambda|x|^2}$ 处取得。

1.2. 主要结果。 本文中，(X,d) 是一个波兰空间（即完备可分度量空间），且 $\mathfrak{m}$ 是 X 上的拉东测度，满足 $0 < \mathfrak{m}(U) < +\infty$，对任意非空有界开集 $U \subset X$（即 $\operatorname{supp} \mathfrak{m} = X$）均成立。三元组 $(X,\mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 称为度量测度空间。

对于任意固定参数 $k \in \mathbb{N}$，若存在常数 $C(k) > 0$，使得对所有.....成立，则称度量测度空间 $(X,\mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 满足带参数 k 的L^2-CKN不等式。

$$u \in \mathrm{Lip}_b(X,\mathrm{d}) := \{v : \ v \text{ is Lipschitz with bounded support}\},$$

不等式

$$\left(\int_X \mathrm{d}_{x_0}^{2k} |\mathrm{lip}\, u|^2 \, \mathrm{d}\mathfrak{m}\right) \left(\int_X \mathrm{d}_{x_0}^{2k+2} |u|^2 \, \mathrm{d}\mathfrak{m}\right) \geq C(k) \left(\int_X \mathrm{d}_{x_0}^{2k} |u|^2 \, \mathrm{d}\mathfrak{m}\right)^2 \tag{CKN}'_{x_0,k}$$

成立，其中 $\mathrm{d}_{x_0}(x) := \mathrm{d}(x_0, x)$ 表示到固定点 $x_0 \in X$ 的距离，并且

$$\mathrm{lip}\, u(x) := \limsup_{y \to x} \frac{|u(y) - u(x)|}{\mathrm{d}(y,x)}, \qquad x \in X$$

表示 u的局部利普希茨常数。

然而，$(\mathrm{CKN})'_{x_0,\,k}$ 单个 k 并非本文的主要关注点。相反，受 (1.1) 中尖锐常数的启发，我们研究以下对应形式，其中常数以一致的方式依赖于 k。更确切地说，我们关注存在一个与 k 无关的常数 $C > 0$，使得对所有 $u \in \mathrm{Lip}_b(X, \mathrm{d})$，

$$\left(\int_X \mathrm{d}_{x_0}^{2k} |\mathrm{lip}\, u|^2 \, \mathrm{d}\mathfrak{m}\right) \left(\int_X \mathrm{d}_{x_0}^{2k+2} |u|^2 \, \mathrm{d}\mathfrak{m}\right) \geq (C+k)^2 \left(\int_X \mathrm{d}_{x_0}^{2k} |u|^2 \, \mathrm{d}\mathfrak{m}\right)^2. \tag{CKN}_{C,x_0,k}$$

我们的第一个主要定理表述如下。

定理 1.1 (另见定理 3.1)。设 $(X,\mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 为一个度量测度空间，并固定$x_0 \in X$。假设对任意 $\lambda > 0$，

$$\int_X e^{-2\lambda \mathrm{d}_{x_0}^2} \, \mathrm{d}\mathfrak{m} < +\infty,$$

并且存在一个与 k 无关的常数 $C > 0$，使得对于任意 $k \in \mathbb{N}$ 和任意 $u \in \mathrm{Lip}_b(X、\mathrm{d})$，不等式 $(\mathrm{CKN})_{C、\,x_0、\,k}$ 成立。那么，对于任意 $\ell \in \mathbb{N}$，函数

$$\rho \longmapsto \frac{\mathfrak{m}^\ell(B_\rho(x_0))}{\rho^{2(C+\ell)}}$$

在$(0, +\infty)$上非递减。这里 $B_\rho(x) := \{y \in X : \mathrm{d}(y,x) < \rho\}$，测度 $\mathfrak{m}^\ell$ 定义为$\mathrm{d}\mathfrak{m}^\ell = \mathrm{d}_{x_0}^{2\ell}\mathrm{d}\mathfrak{m}$。

动机如下。(1.1) 的极值函数恰好是高斯函数。粗略地说，若我们用高斯类中的函数检验 $(\mathrm{CKN})_{C,\ x_0,\ k}$

$$E_{G,x_0} := \{ce^{-\lambda \mathrm{d}_{x_0}^2} : c \in \mathbb{R}, \lambda > 0\}, \tag{1.2}$$

于是，根据层蛋糕表示（或 Fubini 定理）并结合变量替换，我们发现，与度量球体积相关的某个函数的拉普拉斯变换非负。然而，这并不能直接推出该函数本身非负。为了得出这一结论，我们需要使用 Bernstein 定理，其假设恰好是 $(\mathrm{CKN})_{C,\ x_0,\ k}$ 对每个 $k \in \mathbb{N}$ 均成立，且常数 $C > 0$与 k无关。更多细节请参见定理 1.1 的证明。

注 1.2。事实证明，要得出定理 *1.1* 的结论，确实需要对所有 $k \in \mathbb{N}$都满足 $(\mathrm{CKN})_{C,\ x_0,\ k}$。事实上，在第 *3.5* 小节中，我们将给出一个反例，其中 $(\mathrm{CKN})_{C,\ x_0,\ k}$ 对所有 $k \geq 1$ 均成立，且常数$C > 0$ 与 k无关， $k = 0$时却不成立；在这种情况下，函数 $\rho \longmapsto \mathfrak{m}(B_\rho(x_0))/\rho^{2C}$ 不是单调不减的。

推论 1.3. 设 β、$\gamma > 0$、 $D \geq 1$和 $(X,\ \mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 为一个度量测度空间，并固定$x_0 \in X$。假设存在一个与 k 无关的常数 $C > 0$，使得对于任意$k \in \mathbb{N}$ 以及任意 $u \in \mathrm{Lip}_b(X,\mathrm{d})$，不等式 $(\mathrm{CKN})_{C,x_0,k}$ 成立。此外，假设

$$\frac{\mathfrak{m}(B_R(x))}{R^\gamma} \leq D\,\frac{\mathfrak{m}(B_r(x))}{r^\gamma}, \qquad \forall\, 0 < r < R,\, x \in X, \tag{VD}_{D,\gamma}$$

$$\liminf_{r\to 0^+} \frac{\mathfrak{m}(B_r(x_0))}{r^\beta} = c_* \in (0, +\infty). \tag{AR}_{x_0,\beta,c_*}$$

那么 $2C \leq \beta \leq \gamma$，并且存在一个常数 $C_* > 0$，使得

$$\frac{\mathfrak{m}(B_r(x))}{r^\beta} \geq C_* \frac{1}{(1 + r + \mathrm{d}(x_0,x))^{\beta-2C}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\mathrm{d}(x_0,x)}{r}\right)^{\gamma-\beta}}, \qquad \forall\, r > 0,\, x \in X. \tag{1.3}$$

接下来，我们将 [16] 中的刚性结果推广到 L^2-CKN。

定理 1.4. 设 $N \in (1,\ +\infty)$。设 $(X,\ \mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 为一个满足 测度收缩性质$(0,\ N)$ 的本质非分支度量测度空间。则以下陈述等价:

(a) 存在 $x_0 \in X$ 和 $k \in \mathbb{N}$，使得 $(\mathrm{CKN})_{C,x_0,k}$ 以最佳常数$C = \frac{N}{2}$ 成立；**(b)** 存在 $x_0 \in X$，使得对于每个 $k \in \mathbb{N}$，$(\mathrm{CKN})_{C,x_0,k}$ 均以最佳常数 $C = \frac{N}{2}$ 成立；**(c)** $(X,\ \mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个 N-体积锥。

在定理 1.4 中，尖锐性是指，欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$ 上 $(X, \mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 的 $(\mathrm{CKN})'_{x_0,k}$ 中的尖锐常数为 $\left(\frac{N}{2} + k\right)^2$。

最后，受近期论文 [21], 的启发，我们研究一般度量测度空间上 $(\mathrm{CKN})_{C,\ x_0,\ k}$ 的稳定性。

命题 1.5. 设 $N \in (1, +\infty)$ 且 $k \in \mathbb{N}$。设 $(X, \mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 是满足 $\mathrm{MCP}(0, N)$ 的本质非分支度量测度空间，并假设它还是一个以 $x_0 \in X$ 为顶点的 N-体积锥。那么

$$\delta_k(u) \geq \mathbb{D}_k^2(u, E_{G,x_0}), \qquad \forall\, u \in S_{x_0}^r.$$

这里，

$$\delta_k(u) := \left(\int_X \mathrm{d}_{x_0}^{2k} |\mathrm{lip}\, u|^2 \,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X \mathrm{d}_{x_0}^{2k+2} |u|^2 \,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{N}{2} + k\right) \int_X \mathrm{d}_{x_0}^{2k} |u|^2 \,\mathrm{d}\mathfrak{m}$$

是亏量，并且

$$\mathbb{D}_k^2(u, E_{G,x_0}) := \inf_{v \in E_{G,x_0}} \left\{ \int_X |u - v|^2 \mathrm{d}_{x_0}^{2k} \,\mathrm{d}\mathfrak{m} \right\}, \quad S_{x_0}^r := \{u_0(\mathrm{d}_{x_0}) : u_0 \in C_0^\infty((0, +\infty))\}.$$

此外，$E_{G,\ x_0}$ 由 (1.2) 定义。

关于 CKN 不等式其他形式的更多稳定性结果，请参见 [10, 15, 31, 36]。

1.3. **一些推广**。 事实上，我们的论证也适用于 L^p 类比形式。

定理 1.6. 设$(X,\mathrm{d}\ \mathfrak{m})$是一个度量测度空间，且 $p \in (1, +\infty)$。固定 $x_0 \in X$，并将 p 的共轭指数记为 $p' := \frac{p}{p-1}$。假设，对任意 $\lambda > 0$，

$$\int_X e^{-p\lambda \mathrm{d}_{x_0}^{p'}} \,\mathrm{d}\mathfrak{m} < +\infty,$$

并且存在一个常数 $C > 0$，它与 k 无关，使得对任意 $k \in \mathbb{N}$ 和任意 $u \in \mathrm{Lip}_b(X,\mathrm{d})$，以下不等式成立：

$$\left(\int_X \mathrm{d}_{x_0}^{p'k} |\mathrm{lip}\, u|^p \,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right) \left(\int_X \mathrm{d}_{x_0}^{p'(k+1)} |u|^p \,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right)^{p-1} \geq \left(\frac{C+k}{p-1}\right)^p \left(\int_X \mathrm{d}_{x_0}^{p'k} |u|^p \,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right)^p. \tag{1.4}$$

那么，对任意 $\ell \in \mathbb{N}$，函数

$$\rho \longmapsto \frac{\mathfrak{m}^{\ell,p}(B_\rho(x_0))}{\rho^{p'(C+\ell)}}$$

非递减于 $(0, +\infty)$。这里，测度 $\mathfrak{m}^{\ell,p}$ 定义为 $\mathrm{d}\mathfrak{m}^{\ell,p} = \mathrm{d}_{x_0}^{p'\ell}\mathrm{d}\mathfrak{m}$。

注 1.7. 我们选择将(1.4)中的常数写作 $\left(\frac{C+k}{p-1}\right)^p$，而不是 $\left(C + \frac{k}{p-1}\right)^p$，以使证明与定理 *1.1* 的证明更加相容。

此外，对于 $p \in (1, +\infty)$，我们也可以得到推论 1.3（将 2 替换为 p'）和定理 1.4（具有最佳常数 $\frac{N}{p'}$）的类似结果，但这里省略具体陈述。

1.4. **论文结构**。 在第 2 节中，我们回顾 Bernstein 定理以及测度收缩性质的基本性质。在第 3.1 节中，我们利用 Bernstein 定理证明定理 1.1。在第 3.2 节中，我们证明推论 1.3。在第 3.3 节中，我们利用测度的针分解证明定理 1.4。在第 3.4 节中，我们建立命题 1.5 中的稳定性结果。最后，在第 3.5 节中，我们给出注 1.2 中提到的反例。

2. Preliminaries

2.1. Bernstein 定理。 我们证明定理 1.1 的主要工具之一是经典的 Bernstein 定理，该定理指出，任何定义在 $(0, +\infty)$ 上的完全单调函数都是某个非负测度的拉普拉斯变换。关于拉普拉斯变换及相关主题的详细介绍，请参阅书籍 [28, 33]。

定义 2.1 (完全单调性)。 光滑函数 f 在$(a, b) \subset \mathbb{R}$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$上完全单调，当且仅当它满足

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \ge 0, \qquad \forall\, x \in (a, b),\, k \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

接下来，我们陈述 Bernstein 定理，该定理可见于 [28, 定理 1.4]。

定理 2.2 (Bernstein 定理)。 光滑函数 f 在$(0, +\infty)$ 上完全单调，当且仅当它是某个唯一测度 μ （非负 *Borel* 测度）的拉普拉斯变换，即

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, \mathrm{d}\mu(t),$$

且该积分对每个 $x \in (0, +\infty)$都收敛。

2.2. **测度收缩性质（MCP）**。记

$$\mathrm{Geo}(X) := \Big\{ \gamma \in C([0,1], X) : \mathrm{d}(\gamma_s, \gamma_t) = |s-t| \mathrm{d}(\gamma_0, \gamma_1),\ \forall s, t \in [0,1] \Big\}$$

恒速测地线空间。在本小节中，我们假设 (X, d) 是一个测地空间，即对任意 $x, y \in X$，存在 $\gamma \in \mathrm{Geo}(X)$，使得 $\gamma_0 = x$ 且 $\gamma_1 = y$。

记 $\mathscr{P}(X)$ 为 X 上所有博雷尔概率测度构成的空间，记 $\mathscr{P}_2(X)$ 为具有有限二阶矩的概率测度构成的空间。 L^2-Kantorovich–Wasserstein 距离 W_2 定义如下：对任意 $\mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}_2(X)$，令

$$W_2^2(\mu_0, \mu_1) := \inf_{\pi} \int_{X \times X} \mathrm{d}^2(x, y)\, \mathrm{d}\pi(x, y), \tag{2.6}$$

下确界取遍所有以 μ_0 和 μ_1 为边缘分布的 $\pi \in \mathscr{P}(X \times X)$。

对 $(\mathscr{P}_2(X)\ W_2)$ 中的任意测地线 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$，存在 $\nu \in \mathscr{P}(\mathrm{Geo}(X))$，使得对所有 $t \in [0,1]$，都有 $(e_t)_\sharp \nu = \mu_t$，其中 e_t 是求值映射

$$e_t : \mathrm{Geo}(X) \to X, \quad e_t(\gamma) := \gamma_t.$$

我们用 $\mathrm{OptGeo}(\mu_0, \mu_1)$ 表示所有满足（e_0，e_1）$_\sharp \nu$ 在（2.6）中达到最小值的 $\nu \in \mathscr{P}(\mathrm{Geo}(X))$ 所构成的空间；这样的 ν 称为动态最优计划。若（X，d）是测地的，则对于任意 μ_0，$\mu_1 \in \mathscr{P}_2(X)$，$\mathrm{OptGeo}(\mu_0, \mu_1)$ 非空。

回顾本质非分支 [26] 的以下概念。

定义 2.3 (非分支测地线)。 集合 $G \subset \mathrm{Geo}(X)$ 是由非分支测地线构成的集合，若对任意 γ^1、$\gamma^2 \in G$，以下条件成立：

$$\exists\, t \in (0,1)\ \ such\ that\ \forall\, s \in [0,t]\ \gamma_s^1 = \gamma_s^2 \Rightarrow \forall\, s \in [0,1]\ \gamma_s^1 = \gamma_s^2.$$

定义 2.4 （本质非分支空间）。 若度量测度空间（X，d $\mathfrak{m}$）满足：对于任意 $\mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}_2(X)$，其中 $\mu_0, \mu_1 \ll \mathfrak{m}$，*OptGeo*（$\mu_0, \mu_1$）中的每个元素都集中在一组非分支测地线上，则称其为本质非分支空间。

测度收缩性质 MCP(K, N) 由 Ohta 和 Sturm 分别在 [24] 和 [29] 中提出，作为里奇曲率下界的一种合成定义。一般而言，这两个定义略有不同，但在本质非分支空间上二者一致（例如，参见 [7] 中的附录 A 或 [6]中的命题 9.1）。我们采用 [24]中的定义。这里仅介绍 $K=0$的情形。

定义 2.5 (测度收缩性质)。 设 $N\in[1,+\infty)$。我们称度量测度空间 $(X,\mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 满足 $\mathrm{MCP}(0,N)$，若对任意形如下式的 $\mu_0\in\mathscr{P}_2(X)$

$$\mu_0=\frac{1}{\mathfrak{m}(A)}\mathfrak{m}\llcorner_A,\ A\subset X\ \textit{is Borel, and}\ \mathfrak{m}(A)\in(0,+\infty)$$

以及任意 $o\in X$，都存在 $\nu\in\mathrm{OptGeo}(\mu_0,\delta_o)$ 使得

$$\frac{1}{\mathfrak{m}(A)}\mathfrak{m}\geq(e_t)_\sharp\left((1-t)^N\nu(\mathrm{d}\gamma)\right)\quad\forall\, t\in[0,1].$$

由 [6], 可知，在本质非分支空间的情形下，定义 2.5 等价于以下条件：对所有满足 $\mu_0\ll\mathfrak{m}$ 的 $\mu_0,\mu_1\in\mathscr{P}_2(X)$，都存在唯一的$\nu\in\mathrm{OptGeo}(\mu_0,\mu_1)$，使得对所有 $t\in[0,1)$，$\mu_t=(e_t)_\sharp\nu\ll\mathfrak{m}$ 且

$$\rho_t^{-\frac{1}{N}}(\gamma_t)\geq(1-t)\rho_0^{-\frac{1}{N}}(\gamma_0),\quad\text{for }\nu\text{-}a.e.\,\gamma\in\mathrm{Geo}(X),\tag{2.7}$$

其中 $\mathrm{d}\mu_t=\rho_t\mathrm{d}\mathfrak{m}$。

为证明主要结果，我们需要强大的针分解定理的一个推论；此处我们只考虑最简单的 1-Lipschitz 函数 d_{x_0}。更一般的情形请参见 Cavalletti– Mondino [8, 定理 3.6]。

定理 2.6 （针分解定理）。 设$(X,\mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个本质非分支的$\mathrm{MCP}(0,N)$ 度量测度空间，其中 $N\in(1,+\infty)$。那么，对任意 $x_0\in X$和 $R>0$，存在一个 $\mathfrak{m}$-可测传输子集 $\mathcal{T}\subset B_R(x_0)$ 以及由 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in Q}$ 构成的 $B_R(x_0)$的子集族，使得

(1) 存在 $\mathfrak{m}$的一个解体

$$\mathfrak{m}\llcorner_{\mathcal{T}}=\int_Q\mathfrak{m}_\alpha\,\mathrm{d}\mathfrak{q}(\alpha),\qquad\mathfrak{q}(Q)=1;$$

(2) $\mathfrak{m}(B_R(x_0)\setminus\mathcal{T})=0$; *(3)* 对于 $\mathfrak{q}$-几乎处处的 $\alpha\in Q$，X_α 是一条具有极值点 x_0的闭测地线；*(4)* 对于 $\mathfrak{q}$-几乎处处的 $\alpha\in Q$，$\mathfrak{m}_\alpha$ 是支撑于 X_α 上的拉东测度，且满足 $\mathfrak{m}_\alpha=h_\alpha\mathcal{H}^1\llcorner_{X_\alpha}$ 和$h_\alpha\mathcal{H}^1\llcorner_{X_\alpha}\ll\mathcal{H}^1\llcorner_{X_\alpha}$；*(5)* 对于 $\mathfrak{q}$-几乎处处的 $\alpha\in Q$，度量测度空间 $(X_\alpha,\mathrm{d}\ \mathfrak{m}_\alpha)$ 满足$\mathrm{MCP}(0,N)$。

这里 $\mathcal{H}^1$ 表示一维豪斯多夫测度，$\{X_\alpha\}_{\alpha\in Q}$ 被称为传输射线，并且两个不同的传输射线只能在 x_0处相交。

值得回顾的是，如果 h_α 是 $I\subset\mathbb{R}$上的 MCP($0,N$)密度，那么对于所有 $x_0,x_1\in I$和 $t\in[0,1]$,

$$h_\alpha(tx_1+(1-t)x_0)\geq(1-t)^{N-1}h_\alpha(x_0).\tag{2.8}$$

在本部分末尾，我们回顾广义 Bishop–Gromov 体积增长不等式（参见 [29, 注 5.3]）以及体积锥的定义。

定理 2.7 （广义 Bishop–Gromov 不等式）。设 $N\in(1,\ +\infty)$，且 $(X,\ \mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 是满足测度收缩性质$(0,\ N)$ 的度量测度空间。那么，对于任意 $x\in X$，

$$\frac{\mathfrak{m}(B_R(x))}{R^N}\leq\frac{\mathfrak{m}(B_r(x))}{r^N},\quad\forall\,0<r<R. \tag{GBGI}$$

定义 2.8 (N-体积锥)。给定 $N\in[1,+\infty)$，若存在 $x_0\in X$ 使得，则称度量测度空间为一个 N-体积锥。

$$\frac{\mathfrak{m}(B_R(x_0))}{\mathfrak{m}(B_r(x_0))}=\left(\frac{R}{r}\right)^N,\quad\forall\,0<r<R.$$

在这种情况下，我们也称该度量测度空间是一个以 x_0 为顶点的 N-体积锥。

3. Proof of main results

3.1. 定理 1.1 的证明。 只需证明 $\ell=0$ 的情形，因为对于任意固定的 $\ell\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，我们仍有

$$\int_X e^{-2\lambda\mathrm{d}_{x_0}^2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}^\ell<+\infty,$$

并且，对任意 $k\in\mathbb{N}$，都有

$$\left(\int_X\mathrm{d}_{x_0}^{2k}\,|\mathrm{lip}\,u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}^\ell\right)\left(\int_X\mathrm{d}_{x_0}^{2k+2}|u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}^\ell\right)\geq(C+\ell+k)^2\left(\int_X\mathrm{d}_{x_0}^{2k}|u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}^\ell\right)^2. \tag{3.9}$$

因此，我们可以在 $(X,\ \mathrm{d}\ \mathfrak{m}^\ell)$ 上讨论，并将 $\ell=0$ 的结果应用于该空间。注意到常数 C 变为 $C+\ell$，可知 $\ell\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ 的情形可由 $\ell=0$ 的情形推出。因此，剩下只需证明 $\ell=0$ 的情形。

为方便起见，我们将定理 1.1 用 $\ell=0$ 重述如下。

定理 3.1. 设 $(X,\mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 为一个度量测度空间，并固定 $x_0\in X$。假设对于任意 $\lambda>0$,

$$\int_X e^{-2\lambda\mathrm{d}_{x_0}^2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}<+\infty,$$

并且存在一个与 k 无关的常数 $C>0$，使得对于任意 $k\in\mathbb{N}$ 以及任意$u\in\mathrm{Lip}_b(X,\mathrm{d})$,

$$\left(\int_X\mathrm{d}_{x_0}^{2k}\,|\mathrm{lip}\,u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right)\left(\int_X\mathrm{d}_{x_0}^{2k+2}|u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right)\geq(C+k)^2\left(\int_X\mathrm{d}_{x_0}^{2k}|u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right)^2 \tag{3.10}$$

成立。那么函数 $\rho\mapsto\frac{\mathfrak{m}(B_\rho(x_0))}{\rho^{2C}}$ 在$(0,+\infty)$上非递减。

证明. 我们定义辅助函数

$$P(\lambda):=\int_X e^{-2\lambda\mathrm{d}_{x_0}^2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

根据假设，P 在 $(0,\ +\infty)$ 上定义良好。下文中，我们记 $B_r(x):=\{y\in X:\mathrm{d}(y,\ x)\leq r\}$。于是，由切比雪夫不等式可得

$$e^{-2\lambda R^2}\,\mathfrak{m}(\overline{B}_R(x_0))\leq P(\lambda),\qquad\forall\,R>0.$$

因此，对于任意 $\delta > 0$，我们有

$$\mathfrak{m}(\overline{B}_R(x_0)) \le P(\delta)\, e^{2\delta R^2}, \qquad \forall\, R > 0. \tag{3.11}$$

然后，根据 Fubini 定理并作变量替换，我们得到

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \int_X \int_{\mathrm{d}_{x_0}}^{+\infty} 4\lambda\rho\, e^{-2\lambda\rho^2}\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\mathfrak{m} \\ &= 4\lambda \int_0^{+\infty} \mathfrak{m}(\overline{B}_\rho(x_0))\, \rho\, e^{-2\lambda\rho^2}\, \mathrm{d}\rho \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} \mathfrak{m}\Big(\overline{B}_{\sqrt{\frac{\tau}{2}}}(x_0)\Big)\, e^{-\lambda\tau}\, \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

注意到最后一个积分是拉普拉斯变换，我们得出 P 在 $(0, +\infty)$ 上光滑。定义

$$f_{x_0}(\tau) := \mathfrak{m}\left(\overline{B}_{\sqrt{\frac{\tau}{2}}}(x_0)\right), \qquad Q(\lambda) := \frac{P(\lambda)}{\lambda}, \qquad R(\lambda) := -\lambda Q'(\lambda) - (C+1)Q(\lambda).$$

利用 (3.11) 和 $\delta = \frac{\lambda}{2}$，我们有

$$\lim_{\tau \to +\infty} \tau e^{-\lambda\tau} f_{x_0}(\tau) = 0, \qquad \forall\, \lambda > 0.$$

然后，通过分部积分，我们得到

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= -\lambda Q'(\lambda) - (C+1)Q(\lambda) \\ &= -\int_0^{+\infty} f_{x_0}(\tau)\,(1 - \tau\lambda)\, e^{-\lambda\tau}\, \mathrm{d}\tau - C\int_0^{+\infty} f_{x_0}(\tau) e^{-\lambda\tau}\, \mathrm{d}\tau \\ &= -\int_0^{+\infty} f_{x_0}(\tau)\, \mathrm{d}(\tau e^{-\lambda\tau}) - C\int_0^{+\infty} f_{x_0}(\tau) e^{-\lambda\tau}\, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^{+\infty} \tau e^{-\lambda\tau}\, \mathrm{d} f_{x_0}(\tau) - C\int_0^{+\infty} f_{x_0}(\tau) e^{-\lambda\tau}\, \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

我们声称 R 是完全单调的，即对于任意 $k \in \mathbb{N}$，$(-1)^k R^{(k)} \ge 0$。一旦证明了这一点，Bernstein 定理（定理 2.2）便意味着存在一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的非负博雷尔测度 μ，使得

$$\tau\, \mathrm{d} f_{x_0}(\tau) - C f_{x_0}(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\mu(\tau).$$

由此可知，对于任意 $0 < v \le w$，

$$\begin{aligned} 0 \le \int_v^w \tau^{-C-1}\, \mathrm{d}\mu(\tau) &= \int_v^w \tau^{-C}\, \mathrm{d} f_{x_0}(\tau) - C\int_v^w \tau^{-C-1} f_{x_0}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \\ &= w^{-C} f_{x_0}(w) - v^{-C} f_{x_0}(v), \end{aligned}$$

其中，最后一个等式由分部积分得到。因此，我们得到

$$\frac{f_{x_0}(v)}{v^C} \le \frac{f_{x_0}(w)}{w^C}, \qquad \forall\, 0 < v \le w,$$

进而可推出

$$\frac{f_{x_0}(v^-)}{v^C} \le \frac{f_{x_0}(w^-)}{w^C}, \qquad \forall\, 0 < v \le w.$$

根据定义不难证明

$$f_{x_0}(v^-) := \lim_{u\to v^-} f_{x_0}(u) = \mathfrak{m}\Big(B_{\sqrt{\frac{v}{2}}}(x_0)\Big), \qquad \forall\, v \in (0,+\infty).$$

最后，对于任意 $0 < s \le t$，我们有

$$\frac{\mathfrak{m}(B_s(x_0))}{s^{2C}} \le \frac{\mathfrak{m}(B_t(x_0))}{t^{2C}},$$

这就是所需的结果。

接下来，我们已经可以证明该断言。为此，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，我们引入

$$S_k(\lambda) := (-1)^k P^{(k)}(\lambda) = \int_X (2\mathrm{d}_{x_0}^2)^k e^{-2\lambda \mathrm{d}_{x_0}^2}\, \mathrm{d}\mathfrak{m} \ge 0.$$

对于每个 $\lambda > 0$，考虑由下式定义的函数序列 $u_{\lambda,\, l}:\, X \to \mathbb{R},\, l \in \mathbb{N}$

$$u_{\lambda,l}(x) := \max\big\{0, \min\{0, l - \mathrm{d}_{x_0}(x)\} + 1\big\} e^{-\lambda \mathrm{d}_{x_0}^2(x)},$$

它属于 $\mathrm{Lip}_b(X,\mathrm{d})$。令

$$u_\lambda(x) := \lim_{l\to+\infty} u_{\lambda,l}(x) = e^{-\lambda \mathrm{d}_{x_0}^2(x)}.$$

利用逼近论证和控制收敛定理，我们容易看出 u_λ 仍然满足(3.10)。将函数 $u_\lambda = e^{-\lambda \mathrm{d}_{x_0}^2}$ 代入(3.10)，并注意到

$$|\mathrm{lip}\, u_\lambda| = \big|2\lambda \mathrm{d}_{x_0} e^{-\lambda \mathrm{d}_{x_0}^2}\, \mathrm{lip}\, \mathrm{d}_{x_0}\big| \le 2\lambda \mathrm{d}_{x_0} e^{-\lambda \mathrm{d}_{x_0}^2},$$

我们得到

$$\lambda S_{k+1}(\lambda) \ge (C+k) S_k(\lambda), \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

由 R的定义，我们有

$$R(\lambda) = -P'(\lambda) - C\frac{P(\lambda)}{\lambda},$$

直接计算可得

$$(-1)^k R^{(k)}(\lambda) = S_{k+1}(\lambda) - C\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}\frac{S_i(\lambda)}{\lambda^{k-i+1}}. \tag{3.13}$$

为证明$(-1)^k R^{(k)} \ge 0$，我们采用归纳法。对于 $k = 0$，(3.13)化为(3.12)，故结论成立。现假设它对 $k-1$ ($k \ge 1$)成立，即

$$S_k(\lambda) \ge C\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{i!}\frac{S_i(\lambda)}{\lambda^{k-i}}, \tag{3.14}$$

于是，对于 k，结合 (3.12) 和 (3.14)，我们得到

$$S_{k+1}(\lambda) \ge \frac{C}{\lambda}S_k(\lambda) + \frac{k}{\lambda}S_k(\lambda) \ge \frac{C}{\lambda}S_k(\lambda) + \frac{k}{\lambda}\,C\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(k-1)!}{i!}\frac{S_i(\lambda)}{\lambda^{k-i}} = C\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!}\frac{S_i(\lambda)}{\lambda^{k-i+1}}.$$

证明至此完成。 □

注 3.2. 在上述证明中，$\mathrm{d}f_{x_0}$ 表示由右连续函数 f_{x_0} （延拓为整个 $\mathbb{R}$上的0）诱导的测度。这就是我们选择闭球而非开球的原因。详情请参阅 *[14,*第 *1* 节。*5]* 此外，关于证明中用到的分部积分，请参阅 *[14,* 定理 *3*。*36]*。

注 3.3。 若$(\mathrm{CKN})_{C,\ x_0,\ k}$ 仅对单个 $k \in \mathbb{N}$成立，那么代入$\mathrm{d}_{x_0}^{\beta} e^{-\lambda \mathrm{d}_{x_0}^2}$ 形式的函数（经标准的截断近似后）可得一些估计，但这些估计不足以推出定理 *1.1* 的结论。

在本小节的最后，我们也简要概述定理 1.6 的证明。

定理 *1.6* 的证明概述。 证明过程与定理 1.1 的证明几乎完全相同。我们同样可以将问题归结为 $\ell = 0$ 的情形。为处理 $\ell = 0$ 的情形，我们定义新的辅助函数

$$P(\lambda) := \int_X e^{-p\lambda \mathrm{d}_{x_0}^{p'}} \,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \lambda \int_0^{+\infty} \mathfrak{m}\left(\overline{B}_{\left(\frac{\tau}{p}\right)^{1/p'}}(x_0)\right) e^{-\lambda\tau} \,\mathrm{d}\tau$$

以及函数

$$f_{x_0}(\tau) := \mathfrak{m}\left(\overline{B}_{\left(\frac{\tau}{p}\right)^{1/p'}}(x_0)\right),$$

以取代定理 1.1 证明中的原始 P和 f_{x_0}。利用对 P和 f_{x_0}的这一选择，相应地修改函数 Q、R和 S_k。与前面一样，剩下要证明的是 R 完全单调。为此，我们将函数（经标准的截断近似后） $u_\lambda := e^{-\lambda \mathrm{d}_{x_0}^{p'}}$ 代入 (1.4)；所得估计恰好就是 (3.12)。接下来的论证与上文相同。□

3.2. **推论 1.3 的证明**。

证明。 固定 $x_0 \in X$ 和 $r_0 > 0$。由 $(\text{加倍条件})_{D,\ \gamma}$ 可知

$$\mathfrak{m}(B_R(x_0)) \le DR^{\gamma} \frac{\mathfrak{m}(B_{r_0}(x_0))}{r_0^{\gamma}}, \qquad \forall\, r_0 < R.$$

于是，由层蛋糕表示和变量替换可得

$$\begin{aligned}
\int_X e^{-2\lambda \mathrm{d}_{x_0}^2} \,\mathrm{d}\mathfrak{m} &= \int_0^{\infty} \mathfrak{m}\left(\left\{x \in X : e^{-2\lambda \mathrm{d}_{x_0}^2} > t\right\}\right) \mathrm{d}t \\
&= 4\lambda \int_0^{\infty} \mathfrak{m}\left(B_\rho(x_0)\right) \rho e^{-2\lambda\rho^2} \,\mathrm{d}\rho \\
&\le 4\lambda \int_0^{r_0} \mathfrak{m}\left(B_\rho(x_0)\right) \rho e^{-2\lambda\rho^2} \,\mathrm{d}\rho + 4\lambda \int_{r_0}^{\infty} D\frac{\mathfrak{m}(B_{r_0}(x_0))}{r_0^{\gamma}} \rho^{\gamma+1} e^{-2\lambda\rho^2} \,\mathrm{d}\rho < +\infty.
\end{aligned}$$

因此，由定理 1.1 可得

$$\frac{\mathfrak{m}(B_r(x_0))}{r^{2C}} \le \frac{\mathfrak{m}(B_R(x_0))}{R^{2C}}, \qquad \forall\, 0 < r < R. \tag{3.15}$$

现在我们证明推论 1.3 的第一个断言。由 $(\text{AR})_{x_0,\ \beta,\ c_*}$ 可知，我们可以找到一个序列 $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}}$，使得 $r_j \to 0^+$ 并且

$$\frac{1}{2} c_* r_j^{\beta} \le \mathfrak{m}(B_{r_j}(x_0)) \le 2c_* r_j^{\beta}, \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

注意，(VD)$_{D,\ \gamma}$ 和 (3.15) 蕴含

$$D^{-1}r^{\gamma}\mathfrak{m}(B_1(x_0)) \le \mathfrak{m}(B_r(x_0)) \le r^{2C}\mathfrak{m}(B_1(x_0)), \qquad \forall\, r<1.$$

取 $r=r_j$ 并结合（3.16），可得 $2C \le \beta \le \gamma$。

现在我们可以证明（1.3）了。我们将证明分为两种情形。首先，考虑$x=x_0$。由（AR）$_{x_0,\ \beta,\ c_*}$，存在 $\delta_0>0$ 使得，

$$\frac{\mathfrak{m}(B_r(x_0))}{r^{\beta}} \ge \frac{c_*}{2}, \qquad \forall\, r\in(0,\delta_0].$$

若 $r>\delta_0$，则由（3.15）可得

$$\frac{\mathfrak{m}(B_r(x_0))}{r^{\beta}} = \frac{\mathfrak{m}(B_r(x_0))}{r^{2C}}\, r^{2C-\beta} \ge \frac{\mathfrak{m}(B_{\delta_0}(x_0))}{\delta_0^{2C}}\, r^{2C-\beta}.$$

因此，存在常数 $c(\delta_0,\ c_*)$使得

$$\frac{\mathfrak{m}(B_r(x_0))}{r^{\beta}} \ge c(\delta_0,c_*)\frac{1}{(1+r)^{\beta-2C}}, \qquad \forall\, r>0, \tag{3.17}$$

这正是在 $x=x_0$情形下的（1.3）。

现在转向 $x\neq x_0$ 的情形。固定 $r>0$，并令 $\rho>\max\{r,\mathrm{d}(x_0,x)\}$ 为一个稍后确定其取值的数。于是，由 (VD)$_{D,\gamma}$ 可得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{m}(B_r(x))}{r^{\beta}} &= \frac{\mathfrak{m}(B_r(x))}{r^{\gamma}} r^{\gamma-\beta} \ge D^{-1}\frac{\mathfrak{m}(B_{\rho}(x))}{\rho^{\gamma}} r^{\gamma-\beta} \\
&\ge D^{-1}\frac{\mathfrak{m}(B_{\rho-\mathrm{d}(x_0,x)}(x_0))}{\rho^{\gamma}} r^{\gamma-\beta} \\
&= D^{-1}\frac{\mathfrak{m}(B_{\rho-\mathrm{d}(x_0,x)}(x_0))}{(\rho-\mathrm{d}(x_0,x))^{\beta}} \cdot \frac{(\rho-\mathrm{d}(x_0,x))^{\beta}}{\rho^{\gamma}} r^{\gamma-\beta} \\
&\ge D^{-1}c(\delta_0,c_*)\frac{1}{(1+\rho-\mathrm{d}(x_0,x))^{\beta-2C}} \cdot \frac{(\rho-\mathrm{d}(x_0,x))^{\beta}}{\rho^{\gamma}} r^{\gamma-\beta},
\end{aligned}$$

其中，在第二个不等式中，我们使用了包含关系 $B_{\rho-\mathrm{d}(x_0,x)}(x_0)\subset B_{\rho}(x)$；在最后一个不等式中，我们使用了 (3.17)。最后，取 $\rho=2\mathrm{d}(x_0,x)+r$，即可得到 (1.3)。□

注3.4。我们的 ρ 选择是最优的（就 $\mathrm{d}(x_0,x)$ 和 r 的阶而言），其含义是存在一个与 x 和 r 无关的常数 C_{**}，使得

$$\sup_{\rho>\max\{r,\mathrm{d}(x_0,x)\}} \frac{1}{(1+\rho-\mathrm{d}(x_0,x))^{\beta-2C}} \cdot \frac{(\rho-\mathrm{d}(x_0,x))^{\beta}}{\rho^{\gamma}} r^{\gamma-\beta}$$

可由……从上方界定

$$C_{**}\frac{1}{(1+r+\mathrm{d}(x_0,x))^{\beta-2C}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{\mathrm{d}(x_0,x)}{r}\right)^{\gamma-\beta}}.$$

3.3. **定理 1.4 的证明。**

证明。 证明与 [16, 定理 1.1], 类似，因此我们采用其证明中的相同记号，并省略一些细节。首先，蕴含关系 **(b)** ⇒**(a)** 显然成立。

现在我们证明（**c**） ⇒ （**b**）。假设 N-体积锥的顶点是 x_0。通过一个与 [16],中的步骤 **1** 类似的针分解论证，我们有

$$\mathfrak{m}=\int_Q \mathfrak{m}_\alpha \,\mathrm{d}\mathfrak{q}(\alpha), \qquad (X_\alpha,\mathrm{d},\mathfrak{m}_\alpha)\cong([0,+\infty),|\cdot|,c_\alpha x^{N-1}\mathrm{d}x), \tag{3.18}$$

˜其中，对于 $\mathfrak{q}$-几乎处处的 $\alpha\in Q$， X_α 以 x_0 为极值点。固定 $\alpha\in Q$，并用 Δ_α 表示加权拉普拉斯算子

$$\tilde{\Delta}_\alpha:=\Delta-\langle\nabla V_\alpha,\nabla\cdot\rangle,$$

其中 V_α（x）由 $e^{-V_\alpha(x)}=c_\alpha x^{N-1}$ 给出。固定 $u\in \mathrm{Lip}_b(X,\mathrm{d})\setminus\{0\}$ 和 $k\in\mathbb{N}$。对于 $\mathrm{d}_0(x):=\mathrm{d}_{x_0}(x)=x$，我们有

$$\tilde{\Delta}_\alpha(\mathrm{d}_0^{2k+2})=(2k+2)(N+2k)\mathrm{d}_0^{2k},$$

因此，由柯西-施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}
&(2k+2)^2(N+2k)^2\left(\int_{X_\alpha}\mathrm{d}_0^{2k}|u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_\alpha\right)^2\\
&=\left(\int_{X_\alpha}\tilde{\Delta}_\alpha(\mathrm{d}_0^{2k+2})|u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_\alpha\right)^2\\
&=\left(-\int_{X_\alpha}\left\langle\nabla(|u|^2),\nabla(\mathrm{d}_0^{2k+2})\right\rangle\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_\alpha\right)^2\\
&\le 4(2k+2)^2\left(\int_{X_\alpha}\mathrm{d}_0^{2k}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_\alpha\right)\left(\int_{X_\alpha}\mathrm{d}_0^{2k+2}|u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_\alpha\right),
\end{aligned}$$

这意味着

$$\left(\int_{X_\alpha}\mathrm{d}_0^{2k}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_\alpha\right)\left(\int_{X_\alpha}\mathrm{d}_0^{2k+2}|u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_\alpha\right)\ge\left(\frac{N}{2}+k\right)^2\left(\int_{X_\alpha}\mathrm{d}_0^{2k}|u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_\alpha\right)^2.$$

与 [16], 中的步骤 **3** 类似，我们可以调整分解并得到

$$\left(\int_X \mathrm{d}_{x_0}^{2k}|\mathrm{lip}\,u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right)\left(\int_X \mathrm{d}_{x_0}^{2k+2}|u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right)\ge\left(\frac{N}{2}+k\right)^2\left(\int_X \mathrm{d}_{x_0}^{2k}|u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right)^2, \tag{3.19}$$

这就是 **(CKN)**$_{C,\,x_0,\,k}$，其顶点为 x_0，且 $C=\frac{N}{2}$。

为证明 $\left(\frac{N}{2}+k\right)^2$ 的尖锐性，对每个 $\lambda>0$，考虑函数序列 $u_{\lambda,\,l}:X\to\mathbb{R}$, $l\in\mathbb{N}$，定义如下:

$$u_{\lambda,l}(x):=\max\left\{0,\min\{0,l-\mathrm{d}_{x_0}(x)\}+1\right\}e^{-\lambda\mathrm{d}_{x_0}^2(x)},$$

它属于 $\mathrm{Lip}_b(X,\mathrm{d})$。令

$$u_\lambda(x):=\lim_{l\to+\infty}u_{\lambda,l}(x)=e^{-\lambda\mathrm{d}_{x_0}^2(x)},$$

并且，采用与 [16], 中步骤 **4** 类似的逼近论证，我们完成证明。

剩下需要证明蕴含关系（a） ⇒（c）。由定理 2.7 可知， $\rho \mapsto \mathfrak{m}(B_\rho(x_0))\,\rho^N$在 $(0,+\infty)$ 上单调不增。不失一般性，我们假设

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\mathfrak{m}(B_\rho(x_0))}{\omega_N \rho^N} = A, \quad A>0 \text{ is a finite constant}, \tag{3.20}$$

其中 $\omega_N := \pi^{\frac{N}{2}}/\Gamma(\frac{N}{2}+1)$。于是我们有

$$\mathfrak{m}(B_\rho(x_0)) \le A\omega_N \rho^N, \qquad \forall \rho>0. \tag{3.21}$$

现在我们回顾，测度 $\mathfrak{m}^k$ 由公式 $\mathrm{d}\mathfrak{m}^k := \mathrm{d}_{x_0}^{2k}\mathrm{d}\mathfrak{m}$ 给出。我们断言，对于测度 $\mathfrak{m}^k$，我们也有类似的极限

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\mathfrak{m}^k(B_\rho(x_0))}{\omega_N \rho^{N+2k}} = \frac{AN}{N+2k} \tag{3.22}$$

以及类似的上界

$$\mathfrak{m}^k(B_\rho(x_0)) \le \frac{AN}{N+2k}\omega_N \rho^{N+2k}, \qquad \forall \rho>0. \tag{3.23}$$

首先，我们证明 (3.23)。不失一般性，我们可以假设 $k\ge 1$。我们将使用由 Fubini 定理得到的如下公式:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}^k(B_\rho(x_0)) &= \int_{B_\rho(x_0)} \mathrm{d}_{x_0}^{2k}\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = 2k\int_{B_\rho(x_0)}\int_0^{\mathrm{d}_{x_0}(x)} t^{2k-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\\ &= 2k\int_0^\rho \big[\mathfrak{m}(B_\rho(x_0)) - \mathfrak{m}(B_t(x_0))\big] t^{2k-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.24}$$

因此，结合定理 2.7 与 (3.21)，我们得到

$$\mathfrak{m}^k(B_\rho(x_0)) \le 2k\mathfrak{m}(B_\rho(x_0))\int_0^\rho \left(1-\frac{t^N}{\rho^N}\right) t^{2k-1}\,\mathrm{d}t \le \frac{AN}{N+2k}\omega_N\rho^{N+2k}, \tag{3.25}$$

这恰好就是 (3.23)。另一方面，由 (3.20) 和 (3.21) 可知，对于任意$\varepsilon>0$，都存在 $\rho_\varepsilon>0$，使得

$$(A-\varepsilon)\omega_N\rho^N \le \mathfrak{m}(B_\rho(x_0)) \le A\omega_N\rho^N, \qquad \forall\, \rho\in(0,\rho_\varepsilon].$$

于是，对于 $\rho\in(0,\ \rho_\varepsilon]$，由 (3.24) 可得

$$\mathfrak{m}^k(B_\rho(x_0)) \ge 2k\int_0^\rho \big[(A-\varepsilon)\omega_N\rho^N - A\omega_N t^N\big] t^{2k-1}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{AN}{N+2k}-\varepsilon\right)\omega_N\rho^{N+2k}.$$

将其与 (3.25) 结合，我们得到 (3.22)。有了 (3.22) 和 (3.23)，运用类似于 [16], 步骤 5 中的论证，我们可以证明 $(X, \mathrm{d}\ \mathfrak{m}^k)$ 是一个 $(N+2k)$-体积锥。更确切地说，我们有

$$\mathfrak{m}^k(B_\rho(x_0)) = \frac{AN}{N+2k}\omega_N\rho^{N+2k}, \qquad \forall\rho>0.$$

To 为了证明 $(X, \mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个 N-体积锥，我们再次使用 Fubini 定理 n:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(B_\rho(x_0)) &= \int_{B_\rho(x_0)} \mathrm{d}_{x_0}^{-2k}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}^k \\ &= 2k\int_{B_\rho(x_0)}\int_{\mathrm{d}_{x_0}(x)}^{+\infty} t^{-2k-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mathfrak{m}^k \\ &= 2k\int_0^{+\infty} \mathfrak{m}^k(B_{\min\{t,\rho\}}(x_0))t^{-2k-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2kAN}{N+2k}\omega_N\left(\int_0^\rho t^{N-1}\,\mathrm{d}t + \int_\rho^{+\infty}\rho^{N+2k}t^{-2k-1}\,\mathrm{d}t\right) = A\omega_N\rho^N.\end{aligned}$$

这里，我们可以写成 $\mathrm{d}\mathfrak{m} = \mathrm{d}_{x_0}^{-2k}\mathrm{d}\mathfrak{m}^k$ ，因为 $\mathfrak{m}$ 是非原子的（由于 MCP 空间），从而$\mathfrak{m}(\{x_0\}) = 0$。因此，$(X, \mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个 N-体积锥，这就完成了定理 1.4 的证明。□

3.4. **命题 1.5 的证明。**

证明。 我们仍像定理 1.4 的证明中那样使用针分解方法，并得到

$$\mathfrak{m} = \int_Q \mathfrak{m}_\alpha\,\mathrm{d}\mathfrak{q}(\alpha), \qquad (X_\alpha, \mathrm{d}, \mathfrak{m}_\alpha) \cong ([0,+\infty), |\cdot|, c_\alpha x^{N-1}\mathrm{d}x),$$

其中，对 $\mathfrak{q}$-几乎处处的 $\alpha \in Q$， X_α 以 x_0 为极值点。

固定 $u := u_0(\mathrm{d}_{x_0}) \in S^r_{x_0}$。现在，利用 [21, 定理1.8] （亦见其证明），我们知道tha t

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^{+\infty}|u_0'|^2(x)x^{N+2k-1}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\left(\int_0^{+\infty}|u_0|^2(x)x^{N+2k+1}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12} \\ &\quad-\left(\frac{N}{2}+k\right)\int_0^{+\infty}|u_0|^2(x)x^{N+2k-1}\,\mathrm{d}x \geq \int_0^{+\infty}\left|u_0(x)-\eta\,e^{-\frac{x^2}{2\xi^2}}\right|^2 x^{N+2k-1}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\xi := \xi(u_0) &= \left(\frac{\int_0^{+\infty}|u_0|^2(x)x^{N+2k+1}\,\mathrm{d}x}{\int_0^{+\infty}|u_0'|^2(x)x^{N+2k-1}\,\mathrm{d}x}\right)^{\frac14}, \\ \eta := \eta(u_0) &= \frac{\int_0^{+\infty}u_0(x)x^{N+2k-1}e^{-\frac{x^2}{2\xi^2}}\,\mathrm{d}x}{\int_0^{+\infty}x^{N+2k-1}e^{-\frac{x^2}{\xi^2}}\,\mathrm{d}x},\end{aligned}$$

其中这两个常数均与 α 无关。将不等式两边乘以 c_α ，并将不等式改写为关于 X_α 的形式，可得对于 $\mathfrak{q}$-几乎处处的 $\alpha \in Q$,

$$\begin{aligned}&\left(\int_{X_\alpha}|u_0'|^2(\mathrm{d}_0)\mathrm{d}_0^{2k}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_\alpha\right)^{\frac12}\left(\int_{X_\alpha}|u_0|^2(\mathrm{d}_0)\mathrm{d}_0^{2k+2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_\alpha\right)^{\frac12} \\ &\quad-\left(\frac{N}{2}+k\right)\int_{X_\alpha}|u_0|^2(\mathrm{d}_0)\mathrm{d}_0^{2k}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_\alpha \geq \int_{X_\alpha}\left|u_0(\mathrm{d}_0)-\eta\,e^{-\frac{\mathrm{d}_0^2}{2\xi^2}}\right|^2\mathrm{d}_0^{2k}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_\alpha.\end{aligned}$$

最后，对 α 积分，应用柯西-施瓦茨不等式，并利用 $|u_0'|(\mathrm{d}_{x_0}) \le |\mathrm{lip}\, u|$ 这一事实，可得

$$\begin{aligned}
&\left(\int_X |\mathrm{lip}\, u|^2 \mathrm{d}_{x_0}^{2k}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right)^{\frac12}\left(\int_X |u|^2\mathrm{d}_{x_0}^{2k+2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right)^{\frac12} - \left(\frac{N}{2}+k\right)\int_X |u|^2\mathrm{d}_{x_0}^{2k}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\\
\ge &\left(\int_X |u_0'|^2(\mathrm{d}_{x_0})\mathrm{d}_{x_0}^{2k}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right)^{\frac12}\left(\int_X |u_0|^2(\mathrm{d}_{x_0})\mathrm{d}_{x_0}^{2k+2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right)^{\frac12} - \left(\frac{N}{2}+k\right)\int_X |u_0|^2(\mathrm{d}_{x_0})\mathrm{d}_{x_0}^{2k}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\\
\ge &\int_X \left|u_0(\mathrm{d}_{x_0}) - \eta\, e^{-\frac{\mathrm{d}_{x_0}^2}{2\xi^2}}\right|^2 \mathrm{d}_{x_0}^{2k}\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \ge \inf_{v\in E_{G,x_0}}\left\{\int_X |u-v|^2\mathrm{d}_{x_0}^{2k}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right\}.
\end{aligned}$$

由此，我们完成了命题 1.5 的证明。 □

3.5. **反例**。

例 3.5. 令 $n \ge 1$. 令

$$X = \mathbb{R}^n, \qquad \mathrm{d}(x,y) = |x-y|, \qquad x_0 = 0 \qquad (\text{i.e. } \mathrm{d}_0(x) = |x|)$$

并定义 X 上的一个拉东测度如下：

$$\mathfrak{m} := \mathcal{L}^n + M\delta_0, \qquad M > 0,$$

其中，$\mathcal{L}^n$ 表示 n 维 *Lebesgue*测度，δ_0 表示在0处的狄拉克质量。于是，对于常数 $C = \frac{n}{2}$ 的取值，$(\mathrm{CKN})_{C,\ x_0,\ k}$对任意 $k \ge 1$ 以及任意 $u \in \mathrm{Lip}_b(X,\mathrm{d})$均成立，但对 $k = 0$ 则不成立。此外，函数 $\rho \mapsto \frac{\mathfrak{m}(B_\rho(x_0))}{\rho^{2C}}$ 在$(0,+\infty)$上不可能是非递减的。

证明。 不难看出，(X,d) 是波兰空间，并且对于每个非空有界开集 $U \subset \mathbb{R}^n$，$0 < \mathfrak{m}(U) < +\infty$。首先，对于每个 $\lambda > 0$,

$$\int_X e^{-2\lambda \mathrm{d}_0^2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\lambda|x|^2}\,\mathrm{d}x + M < +\infty.$$

接下来，我们检验对于任意满足 $C = \frac{n}{2}$ 和 $x_0 = 0$ 的 $k \ge 1$，$(\mathrm{CKN})_{C,\ x_0,\ k}$ 成立。回顾一下，$(\mathrm{CKN})_{C,\ 0,\ k}$ 表述如下：对于任意 $u \in \mathrm{Lip}_b(X,\mathrm{d})$,

$$\Big(\int_X \mathrm{d}_0^{2k}\,|\mathrm{lip}\, u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\Big)\Big(\int_X \mathrm{d}_0^{2k+2}\,|u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\Big) \ge (C+k)^2\Big(\int_X \mathrm{d}_0^{2k}\,|u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\Big)^2. \tag{3.26}$$

固定 $k \ge 1$。由于 $\mathrm{d}_0^{2k}(0) = \mathrm{d}_0^{2k+2}(0) = 0$，狄拉克质量的贡献消失，因此 (3.26) 等价于以下命题：对于任意 $u \in \mathrm{Lip}_b(\mathbb{R}^n)$，有

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2k}\,|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2k+2}\,|u|^2\,\mathrm{d}x\Big) \ge \Big(\frac{n}{2}+k\Big)^2\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2k}\,|u|^2\,\mathrm{d}x\Big)^2,$$

这就是 L^2-CKN 不等式在 $\mathbb{R}^n$ 上的经典形式（见 (1.1)）；例如，通过用 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的函数进行逼近即可得到。

然而，对于 $k = 0$，(3.26) 变为

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2\,|u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\Big) \ge C^2\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\Big)^2, \qquad \forall\, u \in \mathrm{Lip}_b(\mathbb{R}^n). \tag{3.27}$$

我们断言，对于任意 $C>0$，(3.27) 都不成立。选取一个标准径向截断函数 $u_\varepsilon \in \mathrm{Lip}_b(\mathbb{R}^n)$，使得对于任意 $\varepsilon \in (0,1)$，

$$u_\varepsilon \equiv 1 \text{ on } B_\varepsilon(0), \qquad u_\varepsilon \equiv 0 \text{ on } \mathbb{R}^n \setminus B_{2\varepsilon}(0), \qquad |\nabla u_\varepsilon| \le \frac{2}{\varepsilon}.$$

于是 $u_\varepsilon(0)=1$，因此

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}\mathfrak{m} \ge \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}(M\delta_0) = M \quad \Rightarrow \quad C^2\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}\mathfrak{m}\Big)^2 \ge C^2 M^2. \tag{3.28}$$

另一方面，由于 $\mathfrak{m} = \mathcal{L}^n + M\delta_0$ and supp $\nabla u_\varepsilon \subset B_{2\varepsilon}(0) \setminus B_\varepsilon(0)$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_{B_{2\varepsilon}(0)\setminus B_\varepsilon(0)} |\nabla u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x \le \frac{4}{\varepsilon^2}\,\mathcal{L}^n(B_{2\varepsilon}(0)) = c_1\,\varepsilon^{n-2}, \tag{3.29}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x \le \int_{B_{2\varepsilon}(0)} |x|^2 \,\mathrm{d}x = c_2\,\varepsilon^{n+2}, \tag{3.30}$$

对于某些仅依赖于 n 的常数 $c_1, c_2 > 0$。将 (3.29) 和 (3.30) 相乘，得到

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}\mathfrak{m}\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}\mathfrak{m}\Big) \le c_1 c_2\,\varepsilon^{(n-2)+(n+2)} = c_1 c_2\,\varepsilon^{2n} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \tag{3.31}$$

它与（3.28）矛盾。因此，对于所有 $C>0$ on $(\mathbb{R}^n, |\cdot|, , \mathrm{(CKN)}_{C,\,0,\,0}$ 均不成立 $\mathfrak{m})$.

Fi最后，我们证明单调性结论并不成立。事实上，f 对于任意 $\rho>0$,

$$\mathfrak{m}(B_\rho(0)) = \mathcal{L}^n(B_\rho(0)) + M\delta_0(B_\rho(0)) = \omega_n \rho^n + M.$$

取任意 $0 < C \le \frac{n}{2}$，我们得到

$$\frac{\mathfrak{m}(B_\rho(0))}{\rho^{2C}} = \frac{\omega_n\rho^n + M}{\rho^{2C}} = \omega_n \rho^{n-2C} + \frac{M}{\rho^{2C}}, \qquad \forall\, \rho > 0,$$

显然，它在（0，$+\infty$）上不是非递减的。 □

Acknowledgement

第一作者得到中国科学技术部青年科学家计划（2021YFA1000900、2021YFA1002200）、山东省自然科学基金（ZR2025QB05）以及国家留学基金管理委员会奖学金（编号：202406340143）的资助。第二作者得到欧盟“地平线2020”研究与创新计划下欧洲研究委员会（ERC）项目（资助协议 GEOSUB，编号：945655）以及日本学术振兴会青年科学家科研资助金（编号：24K16928）的资助。

References

[1] Y. Bozhkov. 黎曼流形上的 Caffarelli–Kohn–Nirenberg 型不等式。应用数学快报，23(10):1166–1169，2010。[2] L. Caffarelli、R. Kohn 和 L. Nirenberg。Navier-Stokes 方程适当弱解的部分正则性。纯粹与应用数学通讯，35(6):771–831，1982。[3] L. Caffarelli、R. Kohn 和 L. Nirenberg。带权的一阶插值不等式。组合数学，53(3):259–275，1984。

[4] F. Catrina 和 D. G. Costa。$\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$上紧支撑函数的锐利加权范数不等式。微分方程杂志，246(1):164–182，2009。[5] F. Catrina 和 Z.-Q. Wang。关于 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式：锐利常数、极值函数的存在性（及不存在性）与对称性。纯粹与应用数学通讯，54(2):229–258，2001。[6] F. Cavalletti 和 E. Milman。曲率-维数条件的整体化定理。数学发明，226(1):1–137，2021。[7] F. Cavalletti 和 A. Mondino。本质非分支空间中的最优映射。当代数学通讯，19(6):1750007，27，2017。[8] F. Cavalletti 和 A. Mondino。距离函数拉普拉斯算子的新公式及其应用。偏微分方程分析，13(7):2091–2147，2020。[9] C. Cazacu、J. Flynn 和 N. Lam。精细锐利 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式的简短证明。微分方程杂志，302:533–549，2021。[10] C. Cazacu、J. Flynn、N. Lam 和 G. Lu。Caffarelli–Kohn–Nirenberg 恒等式、不等式及其稳定性。纯粹与应用数学杂志，182:253–284，2024。[11] D. G. Costa。关于一类 Caffarelli–Kohn–Nirenberg 型不等式的一些新的简短证明。数学分析与应用杂志，337(1):311–317，2008。[12] M. P. Do Carmo 和 C. Xia。具有非负里奇曲率的完备流形与 Caffarelli–Kohn–Nirenberg 不等式。组合数学，140(3):818–826，2004。[13] J. Flynn。Carnot 群上的锐利 Caffarelli–Kohn–Nirenberg 型不等式。非线性研究进展，20(1):95–111，2020。[14] G. B. Folland。实分析。纯粹与应用数学（纽约）。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，第二版，1999。现代技术及其应用，Wiley-Interscience 出版物。[15] R. L. Frank 和 J. W. Peteranderl。沿 Felli–Schneider 曲线的 Caffarelli–Kohn–Nirenberg 不等式的退化稳定性。变分与偏微分方程，63(2):44，2024。[16] B.-X. Han 和 Z.-F. Xu。度量测度空间上的锐利不确定性原理。变分与偏微分方程，63(4):104，2024。[17] Y. Han。海森堡群上的加权 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 型不等式。印度纯粹与应用数学杂志，46(2):147–161，2015。[18] L. Huang、A. Krist´aly 和 W. Zhao。一般芬斯勒流形上的锐利不确定性原理。美国数学会汇刊，373(11):8127–8161，2020。[19] A. Krist´aly。体积增长与索伯列夫不等式。预印本 arXiv:2501.16199，2025。[20] A. Krist´aly 和 S.-i. Ohta。度量测度空间上的 Caffarelli–Kohn–Nirenberg 不等式及其应用。数学年刊，357(2):711–726，2013。[21] N. Lam、G. Lu 和 A. Russanov。单项式权下高斯庞加莱不等式与海森堡不确定性原理的稳定性。数学杂志，312(2):论文编号 42，2026。[22] J. Mao。Caffarelli–Kohn–Nirenberg 不等式与具有非负加权里奇曲率的流形。数学分析与应用杂志，428(2):866–881，2015。[23] V. H. Nguyen。黎曼流形上的锐利 Caffarelli–Kohn–Nirenberg 不等式：曲率的影响。爱丁堡皇家学会会刊 A 辑，152(1)，2022。[24] S.-i. Ohta。关于度量测度空间的测度收缩性质。海尔维提数学评论，82(4):805–828，2007。[25] T. Ozawa、M. Ruzhansky 和 D. Suragan。 L^p-Caffarelli–Kohn–Nirenberg 型不等式，定义在齐性群上。数学季刊，70(1):305–318，2019。[26] T. Rajala 和 K.-T. Sturm。强 $CD(K,\infty)$-空间中的非分支测地线与最优映射。变分与偏微分方程，50(3-4):831–846，2014。[27] M. Ruzhansky、D. Suragan 和 N. Yessirkegenov。分层李群上的 Caffarelli–Kohn–Nirenberg 型不等式与索伯列夫型不等式。非线性微分方程及其应用（NoDEA），24(5):56，2017。[28] R. L. Schilling、R. Song 和 Z. Vondracek。伯恩斯坦函数：理论与应用，第 37 卷。Walter de Gruyter，2012。[29] K.-T. Sturm。关于度量测度空间的几何。II。数学学报，196(1):133–177，2006。[30] W. Tokura、L. Adriano 和 C. Xia。度量测度空间上的 Caffarelli–Kohn–Nirenberg 不等式。数学手稿，165(1):35–59，2021。

[31]J. Wei 和 Y. Wu. 关于 Caffarelli–Kohn–Nirenberg 不等式的稳定性。数学年刊，384(3):1509–1546，2022年。[32] S. W. Wei 和 B. Y. Wu. 芬斯勒流形上的广义 Hardy 型不等式和 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 型不等式。国际数学杂志，31(13):2050109，27，2020年。[33] D. V. Widder。拉普拉斯变换，普林斯顿数学丛书第 6 卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1941年。[34] C. Xia. 完备流形上的 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式。数学研究快报，14(5):875– 885，2007年。[35] C. Yacoub. 多项式增长李群上的 Caffarelli–Kohn–Nirenberg 不等式。数学消息，291(1):204–214，2018年。[36] Y. Zhou 和 W. Zou. Caffarelli–Kohn–Nirenberg 不等式、Hardy 型不等式及其推广的稳定性。微分方程杂志，450:113738，2026年。