关于无穷维空间中强投影测度的计算

Miklos Ferenczi

布达佩斯科技与经济大学，数学系

摘要

本文研究有限维集合及其在无穷维幂测度空间中的测度。研究从一个已知的代数公式出发，该公式将有限维集合 a 的 y-投影表示为无穷维幂空间中 a 的若干有限几何变换的布尔上确界。这种布尔上确界在经典测度论中颇为特殊，因为它通常不同于集合的通常并集。本文探讨无穷维测度空间中的幂测度是否关于上述布尔上确界连续。若连续，则可据此得到计算 a 的投影测度的简单公式。研究表明，对于离散测度，这种连续性成立；但对于勒贝格测度等情形则不成立。然而，证明还表明，若将 a 的 y-投影概念替换为所谓的 a 的强 y-投影，那么在此语境下勒贝格测度具有连续性，且相应实数上确界的值恰好等于上述强 y-投影的测度。本文将经典分析中的工具用于处理布尔代数上的测度。

关键词：可测投影、投影的测度、布尔代数上的测度 2020年数学学科分类：28A05、28A35

预印本已提交至《核物理B》 2025年4月5日

1. 引言

本文研究无限维幂测度空间中有限维集合的投影及其测度。这些投影已得到广泛研究，但本文采用的方法在某些方面较为特殊。我们从无限维空间中有限维投影的以下已知代数性质入手:

$$C_y a = \sup_{n\in\omega} \bigcup_{i=1}^{n} a(y/y_i) \tag{1}$$

其中，D 是一个以 T^α 为单位元的集合代数； $\alpha \geq !$；T 是一个无限集合，a 2 D，D 的元素是有限维的；D 对柱化 C_y （与适当的投影相对应）及代换 y/y_i 封闭；其中维数变量 y 在 a 中是自由的；sup 表示集合代数 D 中的布尔上确界，而 y_1；y_2；：：：y_i；：：： 是任意的、由互不相同的维数变量（序数）组成的 !-序列，且这些变量不在 a 中自由出现（见第 2.1, [10] 节）。例如，D 可以取为柱集的集合代数 H，其中柱集对应于 T^α 上一个固定的 σ-代数 A 的有限次幂，且该代数以 T 为单位元；此时 T 可数；或者取为集合代数 G，它由 T^α 上有限维矩形的有限并组成，其中 $T = [0, 1)$。

假设在 D 上给定了一个概率测度 μ。由此产生的问题是， μ 对式 (1) 中的上确界是否连续，即以下命题是否成立:

$$\mu(C_y a) = \sup_{n\in\omega} \mu(\bigcup_{i=1}^{n} a(y/y_i)) \tag{2}$$

如果测度 μ 连续，那么式 (2) 就是一个简单公式，可用于计算无fi穷维测度空间中 a 的 y-投影的测度。请注意，式 (2) 表示测度的一种特殊连续性，因为式 (1) 中的布尔上确界不能视为集合的无fi穷并，∞而这在经典测度论中很常见。集合 $C_y a$ 和 $S\, a(y/y_i)_{i=1}$通常并不相同（见第 2.1 节）。

在定理1中，证明了对于关系（2）是否成立这一问题，若测度 μ 由概率测度 p 的 fi次幂组成，则答案是肯定的；其中，p 定义在具有可数 T 的离散测度空间 hT;A, pi 上，而 μ 定义在

如上所述的代数 H 上。根据定理 2，若 μ 是定义在由 fi维矩形的 fi有限并构成的集合代数 G 上的 fi维有限勒贝格测度 λ，则（2）也成立。然而，正如第 3 节中的例子所示，若 a 是一个 n 维勒贝格可测集，且 μ 是勒贝格测度，则（2）可能不成立。众所周知， fi维有限勒贝格测度 λ 在经典意义下于 L^{cyl} 上连续；其中，L^{cyl}是[0中的 fi维有限勒贝格集的柱集所构成的集合代数；1)$^{\alpha}$([2])。然而，这种连续性与（1）中的布尔上确界无关。

f 在第 5 节中，引入了 a 的强投影 C$_y$a。强 y-投影意味着：当且仅当普通 y-投影为 r 的 a-点集合的 r-条件测度为正时，点 r 才属于集合 a 的强 y-投影（a $\subset$ T$^{\alpha}$），也就是说，该关于 r 的条件分布非零。这种投影取决于测度。它与 f 概率量词 9x b(x) 的概念密切相关；当且仅当集合 ft : b(t) 为真g 的概率为正，即非零时，后者为真。在离散情形中，经典投影与强投影重合。

作为定理 4 的推论，文中证明：如果 D 是 [0 中有限维勒贝格集的柱集的集合代数 L^{cyl} fi；1)$^{\alpha}$；那么 D 在强投影下封闭，并且满足以下关系：

$$\lambda(\widetilde{C_y}a) = \sup_{n\in\omega} \lambda(\bigcup_{i=1}^{n} a(y/y_i) \tag{3}$$

其中，式 (3) 是将式 (2) 中的投影 C$_y$ 替换为强投影 C$_y$ 后得到的，而 λ 是 D 上的 fi维勒贝格测度。因此，式 (3) 给出了利用 fi维勒贝格测度计算强投影测度的公式。

如果将勒贝格测度空间替换为任何其他连续概率测度空间，这些结果仍然成立。

这里研究的测度在随机过程理论中发挥着重要作用（参见 Kolmogorov'一致性定理， [2]），因此这些结果也可以应用于该领域。

2. 概念

2.1. 基本运算与结构

设 F 是一个以 T^{α} 为单位元的集合代数；其中 α 是一个 fi定的无fi穷序数；T 是一个无fi穷集合，称为 F 的基集。对于 T，通常选取区间 $[0; 1)$；或者选取一个可数集合: 令 x；y；y_k；i；k；n 表示序数。序数 k 或 y_k 也常称为第 k 维度或第 k 个变量。

若 r 2 T^{α}，则令 r_k 表示 r 的第 k 个成员，其中 $k < \alpha$。令 r^k_u表示 T^{α} 中满足以下条件的元素：r_k 中的 r 由 u 替换，其中 u 2 T；$k < \alpha$。令 P(T^{α}) 表示 T^{α} 的幂集。

对集合 a 2 P(T^{α})，第 k 个柱化运算定义如下:

$$C_{y_k} a = \left\{ r : r \in T^{\alpha},\ r^k_u \in a \text{ for some } u \in T \right\} \tag{4}$$

从几何上看，这表示构造 a 的 y_k-柱集（平行于 y_k-维度）。a 的 y_k-柱集与 a 的 y_k- 投影相关联（平行于 y_k- 维度）。从逻辑的角度看，C_{y_k} 可与存在量词 $\exists y_k$ 相关联。若以 T^{α} 为单位元的集合代数 F 在运算 C_{y_k}' 下封闭，其中 $k < \alpha$，则称 F 为α维无对角线柱集代数（[1], [10]）。

集合 a 2 P(T^{α}) 的维度集由满足 $C_{y_k}a \neq a$ 的那些维数变量 $y_{k_1}; y_{k_2}; \ldots; y_{k_n}; \ldots$ 组成。它记作 4a。集合 a 有时记作 $a(y_{k_1}; y_{k_2}; \ldots; y_{k_n} \ldots)$；其中 $y_{k_1}; y_{k_2}; \ldots; y_{k_n}; \ldots$ 也称为 a 的自由变量；其他变量则是 a 的有界变量。若 a 是 fi 维的，且 $4a = \{y_{k_1}; y_{k_2}; \ldots; y_{k_n} : k_i < \alpha\}$，则 a 在 T^{α} 中的柱集是集合 $\{r : (r_{k_1}; r_{k_2}; \ldots; r_{k_n}) \in a;\ r \in T^{\alpha};\ \alpha \geq \omega\}$。不要混淆两个概念：a 的柱集与 a 的 y_k- 柱集 $C_{y_k}a$。

假定读者已了解 fi限幂 σ集合代数（基本集合代数）的概念。这里的基本集合代数是指一维博雷尔代数、勒贝格 σ代数，或一维离散 σ代数。

如果集合代数 F 中单位元为 T^{α}, $\alpha \geq \omega$ 的所有成员的维度集都是 fi有限的，那么 F 称为局部 *fi*有限维集合代数（简称局部*fi*有限集合代数）。令 B^{cyl} 和 L^{cyl} 分别表示 $[0; 1)^{\alpha}$ 中有限维 Borel 集或勒贝格集所生成的柱集的集合代数（见 [2]）。这些代数是局部 fi有限维代数，而不是 σ-代数。

运算 $C^{\partial}_{y_k}$ 可以用 C_{y_k} 定义为 $C^{\partial}_{y_k}a = -C_{y_k}(-a)$。从逻辑的角度来看，全称量化 $\forall y_k$ 可以与 $C^{\partial}_{y_k}$ 关联。

将 $\subset T^{\omega}$ 中的自由变量 y_m 替换为变量 y_n 的变换记为 $S^{y_m}_{y_n}a$。$S^{y_m}_{y_n}a$ 也称为将维度 y_m 变换为 y_n：$S^{y}_{z}a$ 也记为 $a(y/z)$：集合代数的 α-次幂在维度变换下封闭。若单位元为 T^{α}；$\alpha \geq \omega$ 的集合代数 F 在柱化运算 C_{y_k}'s、$k < \alpha$ 以及代换 $S^{y_m}_{y_n}$ 下封闭，则称 F 为无限维多元集合代数（参见 [4], [9], [5]）。

等式 (1) 对我们的结果有重要意义。设 D 是一个局部有限维的多元集合代数，其单位元为 T^{α}；$\alpha \geq \omega$:

命题 (1) 在 (1) 处的条件下成立。

(参见 [10] I.1.11)

证明。$C_y a$ 的定义表明，对于每个 $i \in \omega$，都有 $a(y/y_i) \subset C_y a$；也就是说，$C_y a$ 是集合 $a(y/y_i)$（$i \in \omega$）的一个上界。为证明 $C_y a$ 是最小上界，反设集合 $b \in D$ 是最小上界，即 b 是一个上界，且 $b \subset C_y a$ 严格成立。只需证明 $C_y a = \sup\{a(y/y_i)\}$；因为 $\sup\{a(y/y_i)\} = \sup_{i\in\omega} a(y/y_i)$。根据 $\bigcap_{i\in\omega}\bigcap_{i\in\omega}\bigcap_{i\in\omega}\bigcap_{i=1}$条件，对每个 $i \in \omega$，均有 $a(y/y_i) \subset b$。D 是局部有限的，因此在序列 $\langle y_i : i \in \omega\rangle$ 中存在一个 y_k，使得 $y_k \notin \Delta b \cup \Delta a$。对于这个 y_k，$a(y/y_k) \subset b$ 也成立。对这个包含关系应用 C_{y_k}，可得 $C_{y_k}a(y/y_k) \subset C_{y_k}b = b$。然而，$C_{y_k}a(y/y_k) = C_y a$，因为 $y_k \notin \Delta a$。因此 $C_y a \subset b$，这与 $b \subset C_y a$ 严格成立相矛盾；故 $b = C_y a$。

注意，即使 D 对圆柱化不封闭，(1) 仍然有效；特别是，$C_y a \in D$。

结合 (1)，注意到如果 a 是有限维的，那么一般而言，∞无限并 $f = \sum_{i\in\omega} a(y/y_i)$ 不属于 D（这里的并集$\bigcap_{i=1}$表示集合的并）：一方面，根据 (1)，$f = C_y a$；因此 f 是一个有限维元素；另一方面，f 作为无限并 $\sum_{i\in\omega} a(y/y_i)$，一般而言并非有限维。这就产生了矛盾。$\bigcap_{i=1}^{\infty}$因此，集合 $C_y a$ 和 $\sum_{i\in\omega} a(y/y_i)$ 并不相同。$\bigcap_{i=1}$

对于运算 $C^{\partial}_{y}a$，也存在 (1) 的类似版本。在余

项中，(1) 中的上确界称为柱面和。

2.2. 测度

设 F 是一个以 T$^{\alpha}$ 为单位元的集合代数；其中 T 是一个无限集，$\alpha \geq$ ！：我们称定义在 F 上的测度 μ defined 为通常的概率测度，即

(i) $0 \leq \mu$(h) ≤ 1 对每个 h 2 F 均成立 (ii) μ(;) $= 0$; μ(T$^{\alpha}$) $= 1$(iii) P μ(a$_i$) $= \mu$(a); 若 S a$_i$ $=$ a; ; a$_i$ \ a^j $=$;; a; a$_i$ $\in$ F: i2! i2!

因此，μ 是 σ-可加的，而 F 不一定是 σ-代数。

若 4a \ 4b $=$；则测度 μ 具有乘积性质，即 μ(a \ b) $= \mu$(a) $\cdot \mu$(b)。若当 b 由 a 经替换（通过维度变换）得到时，μ(a) $= \mu$(b)，则测度 μ 是对称的。

假定读者已了解定义在一维 σ-集合代数上的测度的 finite 次幂这一概念（[2], [8]）。已知幂测度具有乘积性和对称性。

定义在局部 finite 维多元集合代数 D 上的测度 μ defined，若满足 (2)，则关于 (1) 中的柱面和是连续的，即

$$\mu(C_y a) = \sup_{n\in\omega} \mu(\bigcup_{i=1}^{n} a(y/y_i))$$

对每个 a 2D 和 y 均成立；其中符号的含义与 (1) 中相同。

$_{\infty}$如前所述，C$_y$a $\neq$ S a(y/y$_i$)；因此，(2) 不能$_{i=1}$直接化约为测度的某种通常连续性：

C$_y^{\partial}$a 的类似于 (2) 的性质为：

$$\mu(C_y^{\partial} a) = \inf_{n\in\omega} \mu(\bigcap_{i=1}^{n} a(y/y_i)) \tag{5}$$

式 (2) 和 (5) 中的上确界和下确界分别称为柱面上确界和柱面下确界。我们可以讨论测度相对于式 (1) 中某个给定上确界的连续性。

2.3. 一个基本引理

设 D 是一个局部有限维柱集代数，a 2 D；C_y^{∂}a 2 D，并设 μ 是 D 上的一个测度。

引理 1. 下面的假设 a) 和 b) 对于等式 (5) 成立既是必要的，也是充分的

a)

$$\inf_{n\in\omega}\mu(\bigcap_{i=1}^{n} b\ (y/y_i)) = 0 \tag{6}$$

对任意不同变量的 !-序列 $y_1; y_2; : : : y_i; : : :$，其中变量不属于 4a；y 2 4a；这里 b 表示集合 a $-$ C_y^{∂}a:

b) C_y^{∂}e $=$;; e 2 D 蕴含

$$\inf_{n\in\omega}\mu(\bigcap_{i=1}^{n} e(y/y_i)) = 0 \tag{7}$$

对任意不同变量的 !-序列 $y_1; y_2; :: : y_i; :: :$，其中变量不属于 4e；y 2 4e:

证明。a) 必要性显而易见，因为 C_y^{∂}(a$-C_y^{\partial}$a) $= C_y^{\partial}$(a\$-C_y^{\partial}$a) $=$;:$_n$根据 (5), $0 = \mu(;) = \inf^{n\in\omega}{}^{\mu}$(T $_{i=1}$ b(y/y_i)):

充分性:

$(a - C_y^{\partial}a)(y/y_i) = (a \cap -C_y^{\partial}a)(y/y_i) = a(y/y_i) \cap -C_y^{\partial}a$ thus, $\bigcap_{i=1}^{n}(a \cap -C_y^{\partial}a)(y/y_i) = \bigcap_{i=1}^{n} a(y/y_i) \cap -C_y^{\partial}a$. By (6),

$$\inf_{n\in\omega}\mu[\bigcap_{i=1}^{n} a(y/y_i) \cap -C_y^{\partial}a] = 0 \tag{8}$$

n n根据fi定义，$C_y^{\partial}a \subset \bigcap_{i=1} a(y/y_i)$；因此 $\mu(\bigcap_{=1} a(y/y_i)) =$i

$_n= \mu$(C$_y^{\partial}$a) $+ \mu$(T $_{i=1}$ a(y/y_i) \ $-$C$_y^{\partial}$a): 对后一个和应用下确界$_n$ $_n\inf^{n\in\omega}{}^{\mu}$(T $_{i=1}$ a(y/y_i)) $= \mu$(C$_y^{\partial}$a) + $\inf^{n\in\omega}{}^{\mu}$(T $_{i=1}$ a(y/y_i)\ $-$C$_y^{\partial}$a)；利用（8），我们得到$_n\inf^{n\in\omega}{}^{\mu}$(T $_{i=1}$ a(y/y_i) $= \mu$(C$_y^{\partial}$a)) 确实成立，正如我们需要证明的那样。

b) 必要性显然。充分性成立，因为该条件蕴含（6），取一个 $-\mathrm{C}_y^{\partial}\mathrm{a}$ 作为 e: ■

关于本节，也可参见参考文献 [6], [7], [3]。

3. 离散测度

设 T 是 R^1 的一个 fi定可数子集；即 $\mathrm{T} = \mathrm{fc}_i\mathrm{g}_{i\in\omega} \subset \mathrm{R}^1$ and$\alpha \geq$!: 设 p 是 T 上的一个 fi定离散测度。我们将 P(T) 视为一个σ-集合代数。对于 fi定的 n 2 !，考虑其 n 次幂 σ- 集合代数 $(\mathrm{P}(\mathrm{T}))^n$。n 次幂 p^n 是 $(\mathrm{P}(\mathrm{T}))^n$ 上的一个 σ-可加测度。若一个无fi穷序数 α 是 fi定的，则 P(T) 的所有可能的 fi限次幂的元素所构成的柱集组成一个集合代数 H，其单位元为 T^{α}；而 p 的所有可能的 fi限次幂定义了该代数上的一个 σ-可加测度 υ （[2]）。

定理 2. H 配备了柱化运算和代换 y/y_i in T^{α}，是一个多元集合代数。定义在 H 上的测度 υ de*fi*ned 是连续的，即满足性质 (2)。

证明. a 2 H 的柱化结果也属于 H，这是因为 σ-代数的有限次幂的定义。因此 H 在柱化运算下封闭。显然，H 在代换 y/y_i 下封闭，因为 H 是由幂集代数定义的。因此，H 可以视为一个多元集合代数。

H 是局部有限的，因此 (1) 在 H 中成立。我们使用引理 1 证明 (5) 而非 (2)，并证明 (7) 而非 (5)。设 e 为 a。

为简单起见，假设 a 的维度集大小为 2，例如 $4\mathrm{a} = \mathrm{fy; zg}$：假设 $\mathrm{C}_y^{\partial}\mathrm{a} =$;:

如果$n = 1$ 属于（7），那么 υ（a（y,z）） $= \sum \upsilon$（a（y,c_i）） 根据 σ-可加性 υ: $\mathrm{c}_i\in\mathrm{T}$

如果 $\mathrm{n} = 2$ 属于（7），那么υ(a(y; z) \ a(x; z)) = P υ(a(y; c_i) \ a(x; c_i))，根据 σ-可加性 υ；其中$c_i\in T$$\mathrm{y}_1 = \mathrm{y}$ 且 $\mathrm{y}_2 = \mathrm{x}$ 属于（7）。然而，4a(y; c_i) \ 4a(x; c_i) =;; 因此根据 υ 的乘积性质，υ(a(y; c_i) \ a(x; c_i)) = υ(a(y; c_i)) · υ (a(x; c_i))。

υ 的对称性意味着乘积中的各项相等；因此 υ(a(y; z) \ a(x; z)) = P

$c_i\in$ υ^2(a(y; c_i)):$_T$

将这一计算从 n $= 2$ 推广到 n，并推广到序列 $y_1; y_2; : : : y_n$，我们得到在 (7) 中

$$\upsilon(\bigcap_{i=1}^{n} a(y/y_i)) = \sum_{c_i \in T} \upsilon^n(a(y, c_i)) \tag{9}$$

假设 C_y^{∂}a(y; z) $=$；这意味着 υ(a(y; c_i)) < 1，因为 υ 是一个概率测度。因此，对于 fixed c_i，当 n ! 1 时，υ^n(a(y; c_i)) ! 0:
我们验证 (7) 中所讨论的 infimum 为 0；即 (9) 中和式里的 infimum 为 0。已证明，对每一个 " > 0 都存在 M，使得若 n >M，则 (7) 中的和式小于 ":

(9) 中的和式对任意 fixed 的 n 都存在。因此我们可以选取这样的 N，∞使得 P υ^n(a(y; c_i)) $<$ " 2。这里，左端的值在 n 增大时递减 i=N+1N。对于 fixed 的 N，当 n ! 1 时，P υ^n(a(y; c_i)) ! 0；因此，对于 " 2 i=1 N N 以及适当的 M，若 n $>$ M，则P υ^n(a(y; c_i)) $<$ " 2。因此，若 n $>$ M，则 P υ^n(a(y; c_i)) i =1 i=11+ P υ^n(a(y; c_i)) $<$ " 2 + " 2 = ": i=N+1

若 a 除 z 外还有 k 个自由变量；设这些变量为 z_2；z_3；: : : z_k，即 4a $=$ fy; z; z_2; z_3; : : : z_kg；则引入向量 z $=$ fz; z_2; z_3; : : : z_kg 后，可对集合 a($\bar{y}$; z) 重复上述证明:

1 n σ-可加性意味着 ν implies that υ(S a(y/y_i)) $=$ $\sup_{n\in\omega}$ υ(S a(y/y_i)): i =1 i=1n 但是，上述定理意味着 υ(C$_y$a) $=$ $\sup_{n\in\omega}$ υ(S a(y/y_i)): 因此，υ (C$_y$a) $=$ υ(S a(y/y_i)), 尽管 C$_y$a $\neq$ S a(y/y_i): i=1 i=1

4. 勒贝格测度

考虑一维勒贝格测度空间 h[0; 1); L_1, λ_1i 上的 α 次幂 h[0; 1)$^{\alpha}$; (L_1)$^{\alpha}$, (λ_1)$^{\alpha}$i ($\alpha \geq$!): 它也记作 h[0; 1)$^{\alpha}$; L, λi；其中，λ 是 L 上的勒贝格测度。

众所周知，$[0; 1)^{\alpha}$ 中有限维矩形的柱集的有限并构成一个集合代数 G，其中这些矩形的边是 [0;1) ([8], [2]) 的非退化子区间。

定理 3. 集合代数 G 配备柱化运算和代换 y/y_i in T^{α}，构成一个单位元为 $[0; 1)^{\alpha}$ 的多元集合代数。G 上的勒贝格测度 λ 是连续的，即满足性质 (2)。

证明。G 在任意柱化 C_y 下封闭，因为如果$_k$a 中的一个元素具有 S I_j 的形式，其中 I_j's 是有限维矩形，那么$_{j=1}{}_k$ $_kC_y$ S I_j = S C_yI_j ，而 C_yI_j 仍是有限维矩形。根据矩形的定义，G 在维度变换下封闭。因此，G 可视为一个局部有限多元集合代数 D。我们证明 λ 关于柱形和的连续性。我们将使用引理 1 中的下确界版本 (5) 和 (7)。令 e 为一个。

首先，假设 α 除 y 以外只有一个额外的自由变量 z，因此 α 具有 α (y; z) 的形式；也就是说，a 是二维的。稍后，这种情况可以推广到有限多个自由变量。众所周知，有限个有限维矩形的并可视为有限个两两不相交的有限维矩形之并。考虑这种形式的集合 a(y; z)。

假设 n = 1 in (7)。

将 a(y; z) 投影到 z 轴上：这是一维矩形的有限并。这个并可视为若干矩形 $I_1; I_2; : : : I_m$ 的不交并。于是，原来的二维不交并可写成 $_m$S $_{i(j)}$S ($I_j \times K^j{}_i$); 其中 $K^j{}_i$'s 是$_{j=1}{}_{i=1}$个一维不交区间。于是

$$\lambda(\alpha(y,z)) = \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{i=1}^{i(j)}(I_j \times K_i^j)\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{i(j)}\lambda(I_j)\times\lambda(K_i^j) =$$

$= {}_m$P λ(I$_j$)$\cdot\lambda$($_{i\,j}$S)K$^j{}_i$)，其中 λ 表示勒贝格测度。记 q$_j$ 为$_{j=1}$ $_{i=1}\lambda$($_{i(j)}$S K$^j{}_i$) 的值：$_{i=1}$

根据假设 (7)，$C_y^{\partial}\alpha$(y; z) =;。因此，对于任意 j 和 z 2 I_j，存在一点 (y_0; z) 不属于 α(y; z)，于是 λ($^{i(j)}$S K$^j{}_i$) < 1，即 $q_j < 1$:$_{i=1}$如果 n = 2 in (7)，我们取集合 $\alpha(y_1; z)\backslash\alpha(y_2; z)$：在空间 ($y_1$; y_2; z)

$$\lambda(\alpha(y_1,z)\cap\alpha(y_2,z))=\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{i=1}^{i(j)}\bigcup_{p=1}^{p(j)}(I_j\times K_i^j\times H_p^j)\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{i(j)}\sum_{p=1}^{p(j)}\lambda(I_j\times K_i^j\times H_p^j)=\sum_{j=1}^{m}\lambda(I_j)\cdot\lambda(\bigcup_{i=1}^{i(j)}K_i^j)\cdot\lambda(\bigcup_{p=1}^{p(j)}H_p^j)=$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\lambda(I_j)\cdot q_j^2,\text{ where } q_j<1,\ i(j)=p(j) \text{ and } \lambda(\bigcup_{i=1}^{i(j)}K_i^j)=\lambda(\bigcup_{p=1}^{p(j)}H_p^j),\text{ as a result of } C_y^{\partial}\alpha(y,z)=\emptyset,\text{ the product property and the symmetry of }\lambda.$$

More generally,

$$\lambda(\bigcap_{i=1}^{n}\alpha(y_i,z))=\sum_{j=1}^{m}\lambda(I_j)\cdot q_j^n$$

其中 $q_j<1$。这意味着当 $n\to\infty$ 时，右侧的极限为 0，因此 $\lambda(\bigcap_{i=1}^{n}\alpha(y_i,z))$ 的下确界也为 0，正如我们需要证明的那样。

如果 a 除了 y 之外还有两个额外的变量 z_1 和 z_2，也就是说 a 是三维的，那么 (2) 的证明类似。第一步是将 a 投影到平面 (z_1,z_2) 上；然后我们取该投影的不交并组合。a 可表示为 $\bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{i=1}^{i(j)}(R_j\times K^j{}_i)$ 的形式，其中 m 和 i(j) 为某些值；其中 R_j's 是平面 (z_1,z_2) 上的不交矩形，而 $K^j{}_i$'s 是一维不交区间。证明的后续部分与上文相同。n 维情形的证明与上述情形类似。

■

1. 定理 3 的另一种可能证明，是将该定理归约为定理 2。这里的思路是，λ 是布尔集合代数 G 上的严格正测度，并满足布尔代数中的所谓可数链条件。

2. 让我们来考虑所谓的博雷尔矩形 $B_1\times B_2\times\cdots\times B_n$ 在 $[0,1)^{\alpha}$ 中的柱集，其中 n 遍历 !；而 $B_1, B_2, \ldots B_n$ 是任意的一维博雷尔集。

定理 3 第一部分的一个推广是：博雷尔矩形的柱集可能的有限并也构成一个多元集合代数，$\bigcup_{i=1}^{n}C_kF_i=C_k(\bigcup_{i=1}^{n}F_i)$ 因为 $C_kF_i=C_k$ 成立；其中 F_i's 是博雷尔矩形，而 $\bigcup_{i=1}^{n}C_kF_i=B_k$ 对于某个 k；如果 B_k 包含于 F_i；否则 $C_kF_i=[0,1)$：然而，

如下例所示，定理 3 的第二部分对于博雷尔矩形并不成立。

令 a(y; z) 为 F_1 与 F_2, 的并，其中 $F_1 = \left\{ {}^{2}_{3} \right\} \times [{}^{1}_{2}; 1)$ 和 F $_2 = \left\{ {}^{1}_{3} \right\} \times [0; 1 2)$: 则 C_ya(y; z) $= [0; 1)$; $\lambda(C_y a) = 1$，且 $\lambda(F_1 \cup F_2) = {}_n\lambda(a(y; z)) = 0$: 由 λ 的对称性可知，右侧的 λ(S a(y_i; z) of$_i$(2) 也为 0: 因此 (2) 对 λ 不成立:

一般而言，若 a 是一个博雷尔集，则 λ 关于柱面和或乘积的连续性并非必然成立。例如: 令 a(y; z) $=$ fhy; zi : y $=$ zg: 则 C_ya(y; z) $= [0; 1)$; 但 $\lambda(a(y; z) = 0$: $\lambda(C_y a) = 1$: 由$_n$ 的对称性可知, $\lambda(\ \mathrm{S}\ a(y_i; z)) = 0$: $_{i=1}$

接下来给出一个充分条件，以保证勒贝格测度 λ 关于柱面和的连续性。其背后的思路具有几何性质: a 可以包含在控制矩形集 $C_{z_1} C_{z_2} : : : C_{z_m}$a 中。

假设 a 2 B^{cyl}, 4a $=$ fz$_1$; z$_2$; : : : z$_m$; yg，且集合 a; C_{z_2}a; $C_{z_1} C_{z_2}$a; : : : $C_{z_1} C_{z_2} : : : C_{z_n}$a 都属于 L^{cyl}:

定理 4. $\lambda(C_{z_1} C_{z_2} : :: C_{z_m} a) < 1$ 蕴含 (2) 中的上确界性质。

证明。首先，假设 4a $=$ fy; zg; 因此，除了 y 之外，a 只有一个自由变量 z:

乘积性质适用于乘积 ^{n} T C_za(y/y$_i$); 因此$_{i=1}$

n nλ(T C_za(y/y$_i$)) $=$ Q $\lambda(C_z a(y/y_i))$: i$_{=1}$ i$_{=1}$但是，根据对称性, $\lambda(a(y/y_i) = \lambda(a(y/y_j)$; i $\neq$ j: 因此 nQ $\lambda(C_z a(y/y_i)) = [\lambda(C_z a(y; z))]^n$: i$_{=1}$n n n 已证明 inf λ(T (a(y/y$_i$)) $= 0$: T a(y/y$_i$) $\subset$T C_za(y/y$_i$); 因此 n i$_{=1}$ i$_{=1}$ i$_{=1}$n n nλ(T a(y/y$_i$)) $\leq$ λ(T C_za(y/y$_i$)): 但是, λ(T C_za(y/y$_i$)) $= [\lambda(C_z a(y; z))]^n$: i$_{=1}i_{=1}$ i$_{=1}$n 因此 $\lambda(C_z a) < 1$ 意味着 inf λ(T (a(y/y$_i$)) $= 0$; 确实如此。这也可由 n i$_{=1}$ in 推得，在这种情况下也是如此，尤其是当 C_y^{∂}a $=$;: 我们可以采用引理中的论证。因此，(7)意味着(5)成立。

如果 a 除了 y 之外恰好有 m 个自由变量 $z_1; z_2; :: : z_m$，那么我们可以将上述论证重复 m 次。 ■

请注意，定理中的条件只是充分条件，参见 $\lambda(a) = 1$ 的情形:

5. 强投影

众所周知，有限维博雷尔集或勒贝格可测集的投影不一定分别是博雷尔集或勒贝格可测集。因此，B^{cyl} 或 L^{cyl} 不能视为多元集合代数。博雷尔集的投影是勒贝格可测的（这是可测投影定理的推论，见 [12], [3]）；但是，正如第 4 节中的例子所示，对于 (2) 意义下的柱面和，勒贝格测度的连续性不一定成立。

本文引入强投影的概念。L^{cyl} 在这种类型的投影下封闭，并且勒贝格测度 λ 关于这些投影是连续的。此外，我们还给出了勒贝格测度关于通常投影和给定柱面和连续的充要条件，即满足 (2) 的条件。

假设集合代数为 L^{cyl}；即有限维勒贝格可测集合的柱集所构成的集合代数，假设 $a \in L^{cyl}$，且测度为 L^{cyl} 上的勒贝格测度 λ：

首先，假设 $4a = \{y_k; z\}$；即 a 是二维的。与 C_{y_k}；相对应的运算 C_{y_k}; 的定义 g 如下:

$$\widetilde{C_{y_k}} a(y_k, z) = \{r : \lambda(a(y_k, z) \mid z = r_z) > 0, r \in [0, 1)^\alpha\} \tag{10}$$

g，及与 $C^{\partial}_{y_k}$；相对应的运算 $C^{\partial}_{y_k}$ 的定义 fi 如下 :

$$\widetilde{C^{\partial}_{y_k}} a(y_k, z) = \{r : \lambda(a(y_k, z) \mid z = r_z) = 1, r \in [0, 1)^\alpha\} \tag{11}$$

其中 $\lambda(\cdot \mid z = r_z)$ 表示关于条件 $z = r_z$ 的一维勒贝格条件分布。勒贝格测度是幂测度，因此条件 $\lambda(\cdot \mid z = r_z)$ 就是一维勒贝格测度，所以 $\lambda(a(y_k; z) \mid z = r_z) = \lambda(a(y_k; r_z)$；其中：$a(y_k; r_z)$ 是维度 y_k 中的一个一维集合。在（10）中，$\lambda(a(y_k; z) \mid z = r_z) > 0$ 等价于$\lambda(a(y_k; z) \mid z = r_z) \neq 0$；当然:

g g C_{y_k} 表示形成一种 y_k 柱集。集合 $C_{y_k}a$ 由 a 的强投影确定；该投影平行于 y_k。

如同 C_{y_k} 和 $C^{\partial}_{y_k}$，gC$_{y_k}$ 与 $\widetilde{C^{\partial}_{y_k}}$ 之间的联系是

$$\widetilde{C_{y_k}}a = -(\widetilde{C^{\partial}_{y_k}} - a) \tag{12}$$

若 4a $=$ fy_k; z$_{j_1}$; : : : z$_{j_m}$g；即 a 除 y_k 外还有 m 个自由变量；则定义与 (10) 和 (11) 完全类似，但需要用 λ(a(y_k; z) j z $=$r$_z$);

需要 λ(a(y_k; z$_{j_1}$; : : : z$_{j_m}$) j z$_{j_1}$ $=$ r$_{j_1}$; : : : z$_{j_m}$ $=$ r$_{j_m}$)。

利用这些运算 $\widetilde{C_{y_k}}$ 和 $C^{\partial}_{y_k}$，在逻辑中可以与某些特殊的概率量化器相关联（参见 [13]）。请注意，强投影取决于被投影集合的测度。

请注意，在离散测度的情形下（第 3 节）$\widetilde{C_{y_k}}$ andC_{y_k} 一致。因此，在勒贝格测度情形下，将测度赋予投影的强方法可视为离散情形的一种推广。

g g 引理 5. 上述运算 C_{y_k} 和 $C^{\partial}_{y_k}$ 的定义是有意义的；也就是说，若 a 是勒贝格可测的，则 C_{y_k}a 和 $C^{\partial}_{y_k}$a 也都是勒贝格可测的。因此，L^{cyl} 在运算 C_{y_k} 和 $C^{\partial}_{y_k}$ 下封闭:

证明。假设 4a $=$ fy_k; zg: 集合 a 是勒贝格可测的，因此其特征函数也勒贝格可测。根据 Fubini' 定理（参见 [2]），实函数λ(a(y_k; r$_z$); r$_z$) 关于 r$_z$（即 λ(r$_z$)）是勒贝格可测的。这意味着 (10) 和 (11) 中的条件概率存在，因为 λ(r$_z$) 的可测性意味着集合 g fr$_z$: λ(r$_z$) > 0g 和 fr$_z$: λ(r$_z$) $= 1$g 是勒贝格可测的，所以 C_{y_k}a 和 gC$^{\partial}_{y_k}$a 存在且均为勒贝格可测。若 4a 是任意 fi 有限集合，证明与上述情形完全类似。

■

g 该引理意味着，L^{cyl} 与 C_{y_k}a 可视为带算子的布尔代数:

定理 6. 设 a 2 B^{cyl}， λ 是其上的勒贝格测度。那么

$$\lambda(\widetilde{C^{\partial}_{y}}\ a) = \inf_{n\in\omega} \lambda(\bigcap_{i=1}^{n} a(y/y_i)) \tag{13}$$

对于任意由不同变量构成的 !-序列 $y_1; y_2; ::: ; y_i; ::: ; y_i \notin \triangle a; y\ 2\ 4a$:

证明。首先，假设 $4a = fy; zg$。根据前一个引理，如果 $a\ 2\ B^{cyl}; f\ f$，那么 C_y^{∂} a 是勒贝格可测的，因此 $\lambda(C_y^{\partial}\ a)$ 存在。令 λ_n 表示 n 维勒贝格测度。

$_1\lambda_2(a(y; z)) = RR\ h(y; z)dydz = R\ \lambda_2(a(y; z)\ j\ z)\ dz$，根据 Fubini 定理[2]$_N$ $_0$6.3)，其中 $N = [0; 1) \times [0; 1)$; $h(y; z)$ 是 $a(y; z)$ 的特征函数；$\lambda_2(a(y; z)\ j\ z)$ 表示给定条件 z 下的勒贝格条件分布。但，$\lambda_2(a(y; z)\ j\ z) = \lambda_2(a(y; z)$，因为勒贝格测度是乘积测度。

Similarly, $\lambda_3(a(y_1, z) \cap a(y_2, z)) = \int_0^1 \lambda_2(a(y_1, z) \cap a(y_2, z) \mid z\ )dz =$

$= \int_0^1 \lambda_2(a(y_1, z) \cap a(y_2, z))dz =$

$= \int_0^1 \lambda_1(a(y, z))\ \cdot \lambda_1(a(y, z))dz = \int_0^1 [\lambda_1(a(y, z))]^2\ dz$, due to the product - and symmetry property of λ. In general

$$\lambda_{n+1}(\bigcap_{i=1}^{n} a(y/y_i)) = \int_0^1 [\lambda_1(a(y, z))]^n dz \tag{14}$$

让我们考虑集合 $C_y^{\partial}a(y; z)$，将其记为 A（$A \subset [0; 1)$），并将（14）中的积分分解为:

$$\int_0^1 [\lambda_1(a(y, z))]^n dz = \int_A [\lambda_1(a(y, z))]^n dz + \int_{\sim A} [\lambda_1(a(y, z))]^n dz$$

在第一项中，根据 $C_y^{\partial}a(y; z)$ 的定义，被积函数 $[\lambda_1(a(y; z))]^n$ 等于 1，而在第二项中，$[\lambda_1(a(y; z))]^n < 1$根据定义)(见 11）。因此,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 [\lambda_1(a(y, z))]^n dz = \lim_{n\to\infty} (\int_A [\lambda_1(a(y, z))]^n dz + \int_{\sim A} [\lambda_1(a(y, z))]^n dz) =$$

$$= \lambda_1(A)\ + \lim_{n\to\infty} \int_{\sim A} [\lambda_1(a(y, z) \mid z)]^n dz \tag{15}$$

然而，由于被积函数有界，$\lim_{n\to\infty} R_{\sim A}[\lambda_1(a(y; z))]^n dz = R_{\sim A} \lim_{n\to\infty} [\lambda_1(a(y; z))]^n dz = 0$。

用一般记号 λ 表示勒贝格测度，由 (11)、(14)$_n$ f 和 (15) 可得 $\inf_{n\in\omega} \lambda \mathsf{T}_{i=1}\mathsf{a}(\mathsf{y}/\mathsf{y}_i) = \lambda(\mathsf{C}_y^{\partial}\mathsf{a})$：如果 a 除 y 之外还有其他自由变量，证明类似。 ■

对应于 (13) 的 $\mathsf{C}_y\mathsf{a}$ 的等式为

$$\lambda(\widetilde{C_y}\ a) = \sup_{n\in\omega} \lambda(\bigcup_{i=1}^{n} a(y/y_i)) \tag{16}$$

由 (12) 得出。

(16) 的一个直接推论是：

推论7. 假设 a 和 $\mathsf{C}_y\mathsf{a}$ 属于 L^{cyl}：勒贝格测度 λ 关于 (2) 中柱面和的连续性的充要条件是

$$\lambda(C_y a) = \lambda(\widetilde{C_y}\ a) \tag{17}$$

(17) 的一个充分条件是 $\lambda\mathsf{a} = 1$；或 $\lambda(\mathsf{C}_y\mathsf{a}) = 0$；例如。

考虑到 (16)，以及在非离散情形下通常投影与强投影重合、而在离散情形下 (2) 成立这一事实（见定理 2），我们可以得出结论，该量

$$\sup_{n\in\omega} \lambda(\bigcup_{i=1}^{n} a(y/y_i))$$

是离散测度和勒贝格测度情形下强投影的测度。

本节的结果可以推广到任意连续幂测度空间，而不仅限于勒贝格测度空间。

参考文献

[1] H. AndrØka、M. Ferenczi、I. NØmeti，《类柱代数与代数逻辑》，施普林格，2013年[2] R. Ash，《实分析与概率》，学术出版社，2014年[3] R. Baker，R 上的勒贝格测度∞, 美国数学会会刊 113 (4) (1991), 1023-1029[4] M. Ferenczi，集合域布尔公理化的多元推广，《美国数学会汇刊》，364 (2) (2012)，867-886[5]M. Ferenczi，准多元代数及其对偶位置，《圣母大学形式逻辑杂志》63 (1) (2022) 121-136[6] S. Foucart、L. Skrzypek，关于最大相对投影常数，《数学分析及其应用杂志》447 (1) (2017)301-328[7] W. Glowczynski，布尔代数上的测度，《美国数学会会刊》，111 (3) (1991)，844-849[8] P.R. Halmos，《测度论》，施普林格；2014年[9] P.R. Halmos，《代数逻辑 II：齐次局部有限次的多元布尔代数》，《数学基础》43 (1956) 256-325[10] L. Henkin、J.D. Monk、A. Tarski，《柱代数 I–II》，North Holland，1985年[11] A. Horn、A. Tarski，布尔代数上的测度，《美国数学会汇刊》，64 (1948) 467-497[12] A.S. Kechris，《经典描述集合论》，施普林格，1995年[13] H.J. Keisler，概率量词，（载于《逻辑展望丛书》），（1985），507-556[14] R. Sikorski，《布尔代数》，学术出版社，1964年