arXiv:2602.06865v1 [math.NT] 6 Feb 2026

自守上同调与代数循环的局限

Amir Mostaed

摘要。我们证明了一个无条件障碍定理，针对的是在与正交群相关的志村簇上构造代数循环的问题。对于 SO(2，26) 的一个志村簇的 Baily–Borel 紧化，存在一个明确的有理霍奇类 $\Omega_E \in IH^{26}(X^{\mathrm{BB}}, \mathbb{Q})$，它并非来自任何目前已知的代数循环构造：特殊循环（Kudla–Millson 型）、来自较小志村簇的 θ 提升、内窥志村子簇，或边界推前。类 Ω_E 是通过自守方法从一个稳定剩余表示构造而来，该表示附属于 $\Gamma_0(11)$ 的权 2 新形式的伴随表示；它属于完整的交叉上同调但不属于内部上同调，这正是它避开几何构造的原因。该结果是无条件的（不依赖任何未经证明的猜想）、明确的，而且不与霍奇猜想矛盾——它揭示了自守上同调与已知几何循环构造像之间存在差距。

目录

1. 引言 2
1.1. 霍奇猜想与代数循环 2
1.2. 从存在性到可构造性 2
1.3. 志村簇上已知的循环构造 2
1.4. 稳定剩余谱：尚未探索的领域 3
1.5. 主要结果 4
1.6. 本结果的内容与非内容 4
1.7. 四步构造 4
1.8. 关键二分：内部与非内部 5
1.9. 意义与影响 7
1.10. 论文结构 7
1.11. 符号与约定 8
2. 志村簇、代数循环与霍奇理论 8
2.1. 正交群的志村簇 9
2.2. 紧化 9
10

日期：2026年2月9日。

2.3. 循环映射与内部上同调 12 2.4. 霍奇理论 13 3. 自守表示与阿瑟参数 14 3.1. Matsushima 公式与自守上同调 14 3.2. 正交群的 Arthur 分类 14 3.3. 伴随包的构造 15 3.4. Arthur 参数 17 3.5. 关键定理：谱隔离 19 4. $(\mathfrak{g}, K)$-上同调与霍奇类型 19 4.1. Vogan–Zuckerman理论 19 4.2. 通过无穷小特征确定霍奇类型 20 4.3. 有理性 20 4.4. 第4章主定理 22 5. 障碍定理 23 5.1. 已知循环构造综述 23 5.2. 通过 Arthur迹公式进行穷尽 24 5.3. 主要障碍定理 24 5.4. 这证明了什么以及没有证明什么 26 5.5. 影响与未来方向 27 参考文献 27

1. 引言

1.1. 霍奇猜想与代数循环。 自20世纪20年代Lefschetz和30至50年代Hodge的研究以来，代数循环与上同调类之间的关系一直是代数几何的核心主题。霍奇猜想如今已成为克雷千禧年大奖难题七大难题之一，它断言拓扑学与代数几何之间存在一种基本联系：

猜想1.1（Hodge，1950）。设 X 是定义在 $\mathbb{C}$上的光滑射影簇。每个类型为（p，p）的有理霍奇类都是代数子簇的循环类的 $\mathbb{Q}$-线性组合。

尽管经过了八十年的研究，这一猜想在一般情形下仍未解决。虽然已知一些特殊情形（除子、阿贝尔簇、某些曲面），但尚未找到一般性的证明或反例。这一问题长期悬而未决，表明它触及了代数结构与拓扑结构之间关系的基本层面。

1.2. 从存在性到可构造性。 霍奇猜想的一个自然伴随问题，不仅关乎代数循环的存在性，还关乎它们的可构造性。

问题 1.2。 给定一个特定簇上的霍奇类，我们能否运用已知的几何方法，明确构造出一个实现该霍奇类的代数循环?

这个问题比霍奇猜想本身更为微妙。即使每个霍奇类都是代数的（霍奇猜想成立），也可能不存在系统的构造方法。这一区别类似于逻辑学中存在性证明与构造性证明的差异：知道某物存在，并不意味着我们能够将其构造出来。

对于志村簇——它们同时是代数簇、模空间、局部对称空间，也是自守表示的载体——这个问题尤为突出。一方面，我们拥有强有力的几何构造（特殊循环、海克对应、复乘点）。另一方面，自守方法产生的上同调类，其几何来源却并不明确。

1.3.**志村簇上已知的循环构造**。目前已知的、用于构造正交群志村簇上代数循环的方法包括

(1) **特殊循环（Kudla–Millson）：** 几何轨迹 $Z(W) = \{x \in X : x \perp W\}$ 其中 $W \subset V$ 是正定子空间。这些循环已通过 θ 提升和生成级数 [16], 得到广泛研究。(2) **海克对应：** 海克算子作用于志村簇所产生的图，提供基本的自对应。(3) **端oscopic 志村子簇：** 较小群的志村簇在与端oscopic 转移相对应的函子映射下的像。(4) **循环的 θ 提升：** 在某些条件下，一个志村簇上的代数循环可以通过 θ 对应提升为另一个志村簇上的循环。(5) **边界推前：** 紧化中边界分层上的循环所诱导的 Gysin 映射。

Arthur 迹公式的一个关键洞见是，这些构造对应于特定的谱类型。

定理1.3 （隐含于 Arthur 的工作中）。 循环构造 *(1)–(5)* 对应于迹公式中的几何贡献：尖点/温和谱（特殊循环、*Hecke*）、端 *oscopic* 转移（端*oscopic*子簇），以及来自真*Levi*子群的 *Eisenstein*谱（边界）。

1.4.**稳定剩余谱：尚未探索的领域**。Arthur 对经典群离散谱的分类 [3]揭示了自守表示之间一个至关重要的区别。

定义 1.4。离散谱中的自守表示若是艾森斯坦级数在某个极点处的留数（剩余表示），且其阿瑟参数不通过任何真 *Levi* 子群分解（稳定），则称为稳定剩余表示。

稳定剩余表示处于一种神秘的位置，

- 它们对上同调有贡献（通过 Matsushima 公式及其推广），
- 它们不对内部上同调有贡献（根据 Franke 定理 [12]），
- 它们不是端oscopic 转移（根据稳定性的定义），
- 它们有尚无已知的通过代数循环得到的几何解释。

这引出了一个根本性问题：

问题 1.5。稳定剩余表示能否产生霍奇类？如果能，这些霍奇类是否来源于代数循环？

1.5. **主要结果**。 我们的工作对第一个问题给出了肯定回答，对第二个问题给出了否定回答，并确立了一个显式障碍。

定理 1.6 （主定理）。 存在一个显式的有理霍奇类

$$\Omega_E \in IH^{26}(\overline{X}^{\mathrm{BB}}, \mathbb{Q}) \cap IH^{13,13}$$

它位于一个关于 $\mathrm{SO}(2,26)$ 的志村簇上，且并非来源于任何目前已知的代数循环构造。

更确切地说，我们从一个稳定剩余自守表示构造出 Ω_E 。

定理 1.7 （障碍定理）。 类 Ω_E 满足

(1) 自守起源： 源自稳定剩余 *Arthur* 参数 $\psi = \mathrm{Ad}(f) \boxtimes \mathbf{1}_{25}$.*(2)* 霍奇类： 纯型 $(13,\ 13)$，定义于 $\mathbb{Q}$。*(3)* 非内点： $\Omega_E \notin IH^{26}_{!}(X^{\mathrm{BB}}, \mathbb{Q})$。*(4)* 障碍： 由于所有代数循环都定义内部类，Ω_E 无法通过已知构造成为代数循环。

1.6. **这一结果的意义与局限**。 理解我们结论的确切性质至关重要。

1.6.1. 我们证明的内容。

定理 1.8 (无条件结果)。 定理 *1.6* 的证明是无条件的，仅使用

- 正交群的 *Arthur* 分类（*Arthur* *[3], Mok[25]*），
- θ对应（*Howe* *[15], Rallis [28]*），
- *Vogan–Zuckerman*理论（*Vogan*，*Zuckerman* *[41]*），
- 基本引理（*Ngô* *[27]*），
- *Zucker* 猜想（*Looijenga*、*Saper* 和 *Stern* *[22]*）。

本文未援引任何尚未证明的猜想。

1.6.2. 我们不证明的内容。

备注 1.9 （局限性）。 我们的结果并未证明不存在以下情况:

（***i***）这不是一个霍奇反例： 我们没有证明Ω_E 不是代数的。可能存在一个代数循环 Z ，使得$\mathrm{cl}(Z) = \Omega_E$ 需要采用全新的构造方法，超出现有文献所载的方法。

（***ii***）这不是一个 ***Beilinson–Bloch*** 反例： 我们不对 *Chow* 群的秩或 L-函数在临界点处的消失阶作任何断言。

（***iii***）这不是一个不可能性定理： 我们只证明已知的构造方法行不通，并未证明所有可能的构造方法都行不通。

因此，该结果揭示了一个缺口：自守方法产生的霍奇类无法通过所有已知的几何循环构造得到。这一缺口可能意味着 (a) 尚有待发现的几何构造，或 (b) 将自守数据转化为几何对象存在根本局限性。

1.7. 四步构造。现在我们概述 Ω_E 的显式构造。

1.7.1. 步骤 *1*：基模形式。

构造 1.10. 考虑唯一的权 *2* 新形式

$$f \in S_2(\Gamma_0(11)), \quad f(q) = q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 + q^5 + 2q^6 - 2q^7 + \cdots .$$

根据模性（*Wiles* 等人），这对应于椭圆曲线

$$E_{11} : y^2 + y = x^3 - x^2$$

导子为 *11*。

命题 1.11 (有理性)。 由于维数 $S_2(\Gamma_0(11)) = g(X_0(11)) = 1$，该形式 f 是唯一的，且所有傅里叶系数都是有理数： $a_n \in \mathbb{Z}$。海克域为 $E = \mathbb{Q}$。

这种有理性至关重要：它确保我们的最终上同调类定义在 $\mathbb{Q}$ 上，无需域扩张。

1.7.2. 步骤 *2*：伴随表示。

构造 *1.12*。权 *2* 新形式 f 给出一个伽罗瓦表示 $\rho_f : Gal(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}) \to GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$（在 ℓ 和 *11* 之外非分歧）。其伴随表示为 $Ad(\rho_f) = \rho_f \otimes \rho_f^\vee / scalars$：$Gal(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}) \to GL_3(\mathbb{Q}_\ell)$。相应的伴随 L 函数来自分解 $\rho_f \otimes \rho_f^\vee \cong \mathbf{1} \oplus Ad^0(\rho_f)$，其中 *1* 是平凡一维表示（标量），而 $Ad^0(\rho_f)$ 是不可约无迹三维伴随表示 $Gal(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}) \to GL_3(\mathbb{Q}_\ell)$。此 $Ad^0(\rho_f)$ 的霍奇–泰特权为 $\{1, 0, -1\}$，导子为 $11^2 = 121$，并且在 $p = 11$ 处具有斯坦伯格局部类型。 $L(s, \rho_f \otimes \rho_f^\vee) = \zeta(s) \cdot L(s, Ad^0(\rho_f))$ 在 $s = 1$ 处的极点（为简单极点，来自 $\zeta(s)$； $L(s, Ad^0(f))$ 在此处全纯且非零）促成了剩余 *theta* 提升，见下文。

零 Hodge–Tate 权重的存在，按照 Vogan–Zuckerman 的意义，会产生“最大奇异性”，从而迫使上同调集中于中间次数，且具有纯霍奇类型。

1.7.3. 步骤 *3*：θ 提升至 $\mathrm{SO}(28)$。

构造 1.13. 设 (V, Q) 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的一个 *28* 维二次空间，其符号为 $(2,26)$。 $G =$ 的志村簇 $\mathrm{SO}(V, Q)$为

$$X = G(\mathbb{Q}) \backslash D \times G(\mathbb{A}_f) / K_f,$$

其中 D 是复维数为 *13* 的厄米对称域。

通过对偶对 $(\mathrm{SL}_2, \mathrm{SO}(V))$的 θ 对应，形式 f提升为一个自守表示

$$\Pi = \theta(f).$$

定理 1.14 (Rallis 非消失性)。 提升 Π 非零。这可由 *Rallis* 内积公式以及伴随表示 L-函数 $L(s, \rho_f \otimes \rho_f^\vee)$ 在 $s = 1$ 处有简单极点这一事实推出（该极点来自张量积中的平凡直和项）。

定理 1.15 (稳定剩余性)**.** Π的 *Arthur* 参数为

$$\psi = \mathrm{Ad}(f) \boxtimes \mathbf{1}_{25},$$

且此参数为

- 剩余：源于艾森斯坦级数的极点。
- 稳定：不经由真 *Levi* 子群分解（三维表示$\mathrm{Ad}(\rho_f)$ 不可约）。
- 重数一：$\dim \Pi_f^{K_f} = 1.$

1.7.4. 第 *4* 步：上同调实现。

定理 1.16 (Vogan–Zuckerman)**.** Π_∞（阿基米德分量）的$(\mathfrak{g}, K)$-上同调集中在次数 *26*

$$H^k(\mathfrak{g}, K; \Pi_\infty) = \begin{cases} \mathbb{C} & k = 26, \\ 0 & k \neq 26. \end{cases}$$

无穷小特征决定霍奇类型(13,13)。

定理 1.17 (主要构造**)**。 存在唯一的类

$$\Omega_E \in IH^{26}(\overline{X}^{\mathrm{BB}}, \mathbb{Q}),$$

其特征是作为自守分解中 $H^{26}(\mathfrak{g}, K;\ \Pi_\infty) \otimes \Pi_f^{K_f}$ 的生成元。此类满足定理 *1.7* 中的所有性质。

1.8. **关键二分：内部与非内部**。 障碍机制依赖于一个基本的二分。

定理 1.18 (代数循环是内点**)**。 对于任意代数循环$Z \subset X^{\mathrm{BB}}$ 且 $Z \cap \overline{X} \neq \emptyset$,

$$\mathrm{cl}(Z) \in IH^{2k}_!(\overline{X}^{\mathrm{BB}}, \mathbb{Q}).$$

这可通过分析环面紧化中沿边界除子的留数得出。

定理 1.19 (剩余类不是内点**)**。 由于 Π 是剩余的（非尖点的），根据 *Franke* 定理 *[12],*

$$\Omega_E \notin IH^{26}_!(\overline{X}^{\mathrm{BB}}, \mathbb{Q}).$$

残余表示对完整上同调有贡献，但不属于内部部分。

这两个定理之间的差距正是我们所面临障碍的核心。代数循环必然产生内部类，但我们的稳定残余类并非内点——因此，它不可能通过循环类映射来自代数循环。

1.9. **意义与影响**。

1.9.1. 关于霍奇猜想。 我们的结果通过增添构造性维度，进一步完善了霍奇猜想。问题不仅在于霍奇类是否具有代数性（存在性），还在于我们能否系统地构造这些循环（可构造性）。对于志村簇上的稳定剩余类，现有几何方法无能为力。

1.9.2. 朗兰兹纲领。 朗兰兹纲领预言自守表示与伽罗瓦表示之间存在深刻联系。我们的结果揭示了一种不对称性：自守方法能够“看到”几何方法目前尚无法通过循环实现的上同调结构（借助 Matsushima 公式）。自守与几何之间的对应并不对称。

1.9.3. 关于志村簇。

定理 1.20 (Kudla 纲领并不完备)。 特殊循环的 *Kudla* 纲领并未穷尽正交志村簇上的所有霍奇类。存在不属于特殊循环张成空间的霍奇类。

这表明需要新的循环构造方法，超越模空间论方法（特殊循环）、函子性传递（端oscopic传递、θ提升）和拓扑方法（边界推前）。

1.10. **论文结构**。 第2章奠定几何基础：SO(2,26)的志村簇、紧化、循环映射，并证明代数循环定义了内上同调类。第3章发展自守理论，阐述 Matsushima 公式、Arthur 分类，通过 θ 对应构造 Π，并将其识别为稳定剩余表示。第4章利用 Vogan–Zuckerman理论计算$(\mathfrak{g}, K)$-上同调，确立霍奇类型(13,13)，证明有理性，并构造Ω_E。第5章通过系统排除所有已知循环构造，证明主要障碍定理；所用方法包括内/非内二分、尖点/剩余之分、稳定/端oscopic分类以及权重滤过论证。

1.11. **记号与约定**。全文中：

- $\mathbb{A}$ 表示 $\mathbb{Q}$上的阿代尔
- $G(\mathbb{A})$是约化群 G的阿代尔点
- $K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$是一个紧开子群
- $\mathrm{Sh}(G, X)$表示志村簇
- IH^* 表示交叉上同调（中间偏 perversity）
- $CH^k(X)$ 是模去有理等价后的余维为 k 的循环的周群

2. 志村簇、代数循环与霍奇理论

2.1. **正交群的志村簇**。

2.1.1. 正交群的设定。

定义 2.1 （二次空间）。设（V, Q）是$\mathbb{Q}$ 上的一个二次空间，满足

- 维数$_{\mathbb{Q}} V = 28$,
- 在 $\mathbb{R}$ 上的符号为（2，26）（不定），
- 关联的双线性型 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\langle x, y \rangle = Q（x + y） - Q（x） - Q（y）$。

特殊正交群是

$$\mathrm{SO}(V, Q) = \{g \in \mathrm{SL}(V) : Q(gv) = Q(v) \ for \ all \ v \in V\}.$$

注 2.2. 选取符号$(2,26)$ 是为了使相应的对称空间具有13维复维数，从而在26 次上同调中可以存在霍奇类型为$(13,13)$ 的类。

2.1.2. 对称空间。

构造 2.3 (厄米对称空间)。 $V_{\mathbb{R}} = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ 中定向负定2维平面的空间是

$$D = \{z \in \mathrm{Gr}_2(V_{\mathbb{R}}) : \langle z, z \rangle < 0, \ \ oriented\}.$$

这是一个 *IV* 型厄米对称域，其

- 维数$_{\mathbb{C}} D = 13$,
- $\mathbb{C}^{13}$中的有界实现,
- 实现为一个管域。

群 $\mathrm{SO}(V, Q)(\mathbb{R})$ 在 D 上递 *transitively* 作用，其稳定子为极大紧子群 $K_\infty \cong \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(26)$。

命题 2.4 (Shimura 数据)。这一对 (G, X) 其中

- $G = \mathrm{SO}(V, Q)$ 视为 $\mathbb{Q}$ 上的约化群,
- $X = G(\mathbb{R})/K_\infty \cong D$ （在选取一个连通分支之后）。

满足志村簇的 ***Deligne*** 公理。

证明。 我们验证：**(1)** G 在 $\mathbb{Q}$上是约化的；**(2)** X 是满足 Deligne 条件的同态 h: $\mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ 的一个 $G(\mathbb{R})$-共轭类；**(3)** 仅有取值于 $\mathbb{C}$ 的 G 的特征在 $h(\mathbb{C}^\times)$ 上是平凡的；**(4)** Ad $\circ h$: $\mathbb{S} \to$Aut($\mathfrak{g}$), $\mathfrak{g} \cong$ Lie(G)$\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$, 诱导一个型为 $\{(-1,1), (0,0), (1,-1)\}$ 的霍奇结构；**(5)** 对合 $\theta_h =$ad($h(i)$) 是一个 Cartan 对合。参见 [11]。□

2.1.3. 志村簇。

定义 2.5（同余子群）。 对每个素数 p 以及在 p处的层结构

- 若 $p \neq 11$: $K_p = \mathrm{SO}(V \otimes \mathbb{Z}_p)$（超特殊极大紧子群）。
- 若 $p = 11$: K_{11} 是一个伊*wahori*子群（抛物型）。
- 在 $p = 3$: K_3 是一个主同余子群 $\Gamma(3)$（满足整洁性）。

集合 $K_f = \prod_p K_p \subset G(\mathbb{A}_f)$。

定义 2.6（志村簇）。 志村簇是如下的双陪集

$$X = G(\mathbb{Q})\backslash D \times G(\mathbb{A}_f)/K_f.$$

这是局部对称空间的有限不交并：$X = \bigsqcup_i \Gamma_i\backslash D$，其中 $\Gamma_i \subset G(\mathbb{Q})$ 是算术子群。

定理 2.7（志村簇结构）。 空间 X 具有数域（反射域，在我们的情形中为 $\mathbb{Q}$ ）上拟射影簇的结构。

证明。 这由志村簇的一般理论（德利涅、博雷尔、米尔恩）得出。关于正交群，见 [24]。□

2.2. **紧化**。

2.2.1. *Baily–Borel* 紧化。

定理 2.8（Baily–Borel [4]）。 存在一个极小紧化 X^{BB} ，具有如下性质

(1) X^{BB} 是 $\mathbb{Q}$上的正规射影簇，*(2)* $X \subset X^{\mathrm{BB}}$ 是扎里斯基开且稠密的，*(3)* 边界 $X^{\mathrm{BB}} \setminus X$ 的余维数为 ≥ 12，*(4)* 任一连通分支的闭包是射影的。

证明。记

$$X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

表示分解为连通分支，其中每一个都具有如下形式

$$X_i \simeq \Gamma_i\backslash D$$

对于某个算术子群 $\Gamma_i \subset G(\mathbb{Q})$，以及附属于 $(V,\ Q)$ 的固定 IV 型厄米对称域 D 。

贝利–博雷尔构造首先针对每个同余子群 $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ 考虑复解析商 $\Gamma\backslash D$，并赋予标量值自守形式的分次代数

$$A_\bullet(\Gamma) = \bigoplus_{k\geq 0} A_k(\Gamma)$$

连同其自然乘法。Baily 与博雷尔证明 $A_\bullet(\Gamma)$ 是有限生成的 $\mathbb{C}$-代数，并定义

$$\overline{X}_\Gamma^{\mathrm{BB}} = \operatorname{Proj} A_\bullet(\Gamma),$$

它是 $\mathbb{C}$ 上的正规射影代数簇，连同开浸入

$$\Gamma\backslash D \hookrightarrow \overline{X}_\Gamma^{\mathrm{BB}}$$

其像是扎里斯基开且稠密的。

在我们的整体阿代尔记号中，层 $K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$ 的选取给出

$$X = G(\mathbb{Q})\backslash D \times G(\mathbb{A}_f)/K_f \cong \bigsqcup_{i\in I} \Gamma_i\backslash D$$

其中对 $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K_f$ 的一组代表元 $\{g_i\}_{i\in I}$ 有 $\Gamma_i = G(\mathbb{Q})\cap g_i K_f g_i^{-1}$。于是 Baily–Borel 紧化 X^{BB} 通过沿其边界分层粘合这些 $X_{\Gamma_i}^{\mathrm{BB}}$ 而得到，其方式与 Hecke 对应以及反射域上的典范模型相容（在我们的正交情形中该反射域为 $\mathbb{Q}$）。详见 [4,§4–5] 与 [11, §5]。

由构造，每个 $X_{\Gamma_i}^{\mathrm{BB}}$ 在 $\mathbb{C}$上射影，因而经由下降在 $\mathbb{Q}$上射影；它在 X^{BB} 中的像恰为连通分支 X_i 的扎里斯基闭包 $\overline{X_i}$。由于射影性在基变换以及沿基域有限扩张的下降下保持，故每个闭包 $\overline{X_i}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的射影簇。—

根据 [4, 定理 4.12], 边界分支对应于有理抛物轨道 F_i。对于符号 $(2,\ 26)$，这些分支 F_i 要么是点，要么是模曲线。因此，$\dim_{\mathbb{C}} F_i \leq 1$，且复余维满足

$$\operatorname{codim}_{\mathbb{C}}(F_i) = 13 - \dim_{\mathbb{C}} F_i \geq 12.$$

部分紧化沿公共面将这些部分粘合起来，同时保持余维 ≥ 12。关于 Shimura 下降，请参见 [11, §5] 。□

注 2.9. 边界由尖点组成，这些尖点对应于 G的抛物子群。对于$\mathrm{SO}(2,\ 26)$，极大抛物子群为

$$P_k = \mathrm{GL}_k \times \mathrm{SO}(2, 26-2k) \ltimes N_k$$

对于 $1 \leq k \leq 13$。

定理 2.10 (Zucker猜想，[22])。对于 *Baily–Borel* 紧化，开部分的 L^2-上同调自然同构于紧化的交叉上同调

$$H^*_{(2)}(X,\mathbb{Q}) \cong IH^*(X^{\mathrm{BB}},\mathbb{Q}).$$

在此同一化下，在此处相关的情形中，普通上同调 H^*（X^{BB}, $\mathbb{Q}$）（若有定义）与 IH^*（X^{BB}, $\mathbb{Q}$）同构。

2.2.2. 环面紧化。

定理 2.11（[2]）。给定每个尖点处的容许多面锥分解Σ，存在一个环面紧化 X_Σ，使得

(1) X_Σ 光滑且射影，*(2)* 真双有理态射 π: $X_\Sigma \to X^{\mathrm{BB}}$，*(3)* 边界 $B = X_\Sigma \setminus X$ 是一个正规交叉除子，*(4)* π 在 X上为同构。

命题 2.12（边界结构）。边界 B 分层为$B = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} Z_\sigma$，其中每个分层 Z_σ 都是一个纤维丛 $Z_\sigma \to X_M$，底空间为低维志村簇 X_M，纤维为来自锥 σ的环面纤维。

2.3. **循环映射与内部上同调**。

2.3.1. 代数循环。

定义 2.13 (Chow 群)。对于定义在 $\mathbb{Q}$上的簇 X：

$$CH^k(X) = \frac{\{algebraic\ cycles\ of\ codimension\ k\}}{rational\ equivalence}.$$

对于 $X = X^{\mathrm{BB}}$，余维为 k 的循环是 $Z = \sum_i n_i Z_i$，其中 $Z_i \subset X^{\mathrm{BB}}$ 是余维为 k 的不可约子簇，且 $n_i \in \mathbb{Z}$。

2.3.2. 循环映射。

定理 2.14 (循环类映射)。存在一个自然同态

$$\mathrm{cl}\colon CH^k(X^{\mathrm{BB}}) \otimes \mathbb{Q} \to IH^{2k}(X^{\mathrm{BB}},\mathbb{Q})$$

满足以下性质：*(1)* 对适当映射具有函子性；*(2)* 与杯积相容；*(3)* 像由霍奇类构成（若 X 定义在 $\mathbb{C}$ 上）。

证明。对于具有奇点的 Baily–Borel 紧化，这需要交叉上同调。其构造包括：(1) 奇点的消解$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$$\pi$: $X \to X^{\mathrm{BB}}$；(2) X的上同调中的循环类；(3) 通过 π_* 推前至交叉上同调。关于交叉上同调，参见 [14]；关于混合Hodge结构，参见 [30]。□

2.3.3. 内部上同调。

定义 2.15 (内部上同调)。 内部上同调是

$$IH_!^*(X,\mathbb{Q}) = \mathrm{Image}\big(H_c^*(X,\mathbb{Q}) \to IH^*(X^{\mathrm{BB}},\mathbb{Q})\big),$$

其中， H_c^* 表示紧支集上同调。等价地（根据*Zucker*型同一），$IH_!^*(X,\mathbb{Q}) = \mathrm{Image}(H_c^*(X,\mathbb{Q}) \to H^*(X^{\mathrm{BB}},\mathbb{Q}))$。

定理 2.16 （代数循环定义内部类）。 设 $Z \subset X^{\mathrm{BB}}$是一个满足 $Z \cap X \neq \emptyset$的代数循环。那么 $\mathrm{cl}(Z) \in IH_!^{2k}(X^{\mathrm{BB}},\mathbb{Q})$。此外，若 $Z \subset X$ （完全位于内部），则该类在边界处是无留数的。

证明。 对于环面紧化 X_Σ，若 $Z \subset X$ 延拓到 $Z \subset X_\Sigma$，则 $[\overline{Z}]$ 由 $\Omega^*(\log B)$ 中的一个形式表示。沿边界除子的留数 $\mathrm{Res}_B\colon \Omega^{2k}(\log B) \to \Omega^{2k-1}(B)$ 在来自 X 中循环的类上消失。在 $\pi\colon X_\Sigma \to X^{\mathrm{BB}}$ 之下，无留数类对应于在边界处消失的交叉上同调类。□

推论 2.17 （代数蕴含内部）。 循环映射的像因子化通过内部上同调：

$$\mathrm{cl}\colon CH^k(X^{\mathrm{BB}}) \otimes \mathbb{Q} \to IH_!^{2k}(X^{\mathrm{BB}},\mathbb{Q}) \subset IH^{2k}(X^{\mathrm{BB}},\mathbb{Q}).$$

2.4. **Hodge理论**。

2.4.1. 混合*Hodge*结构。

定理 2.18 （德利涅 [10]）。 上同调群 H^k（$X^{\mathrm{BB}},\mathbb{Q}$）和 IH^k（$X^{\mathrm{BB}},\mathbb{Q}$）具有典范的混合*Hodge*结构。

定义 2.19 （Hodge分解）。 对于 $IH^{26}(X^{\mathrm{BB}},\ \mathbb{C}) = IH^{26}(X^{\mathrm{BB}},\ \mathbb{Q})\otimes\mathbb{C}$,

$$IH^{26}(X^{\mathrm{BB}},\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=26} IH^{p,q}.$$

类 $\alpha \in IH^{26}(X^{\mathrm{BB}},\ \mathbb{Q})$ 是一个 类型为 (13, 13) 的霍奇类，当且仅当 $\alpha \otimes 1 \in IH^{13,\,13} \subset IH^{26}(X^{\mathrm{BB}},\ \mathbb{C})$。

命题 2.20 （循环类是 Hodge）。 若 $Z \in CH^{13}(X^{\mathrm{BB}})$，则$\mathrm{cl}(Z) \in IH^{13,13}(X^{\mathrm{BB}}) \cap IH^{26}(X^{\mathrm{BB}},\ \mathbb{Q})$。

2.4.2. 志村簇的霍奇猜想。 **关于** X^{BB}**：** 每个$IH^{2k}(X^{\mathrm{BB}},\ \mathbb{Q})$ 中的有理霍奇类，都是循环类在 $\mathbb{Q}$ 上的线性组合。

注 2.21。 我们的主定理并未 推翻这一猜想。相反，它表明，即使该猜想成立，也可能无法通过已知的几何方法构造这些循环。

3. 自守表示与 Arthur 参数

3.1. **Matsushima 公式与自守上同调**。

3.1.1. 实群表示。

定义 3.1 ($(\mathfrak{g}, K)$-模)。 对于 $\mathbb{R}$ 上的 $G = \mathrm{SO}(2,\ 26)$，令 $\mathfrak{g}_0 = \mathit{Lie}(G(\mathbb{R}))$为实李代数。我们将复化李代数定义为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$。于是，一个 $(\mathfrak{g}, K)$-模是向量空间 V，它带有 $\mathfrak{g}$ 与 $K = \mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(26)$ 的相容作用，并满足表示论的标准条件。

定理 3.2 (Matsushima [23])。 对于紧商空间 $\Gamma\backslash D$，其中$\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ 是余紧的:

$$H^*(\Gamma\backslash D, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{\pi} H^*(\mathfrak{g}, K; \pi_\infty) \otimes \pi_f^{\Gamma},$$

其中求和取遍 $G(\mathbb{A})$的自守表示 π， π_∞ 为阿基米德分量， $H^*(\mathfrak{g}, K; \pi_\infty)$ 为相对李代数上同调，并且对所有 $k \in \Gamma \cap K_f$}有 $\pi_f^{\Gamma} = \{v \in \pi_f \colon\ k \cdot v = v$ 。

3.1.2. 推广到非紧商空间。

定理 3.3 (Franke [12])。 对于非紧商空间 $X = G(\mathbb{Q})\backslash D\times G(\mathbb{A}_f)/K_f$，

$$IH_!^*(X, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{\pi\ \mathit{cuspidal}} H^*(\mathfrak{g}, K; \pi_\infty) \otimes \pi_f^{K_f}.$$

内部上同调仅来自尖点自守表示。

备注 3.4。*Eisenstein* 上同调（来自非尖点谱）对完整上同调 $H^*(X^{\mathrm{BB}})$ 有贡献，但对内部上同调没有贡献。

3.2. **正交群的 Arthur 分类**。

3.2.1. 离散谱。

定理 3.5 (Arthur [3], Mok [25])。 对于 $G = \mathrm{SO}(2n)$，离散谱分解为若干簇，

$$L^2_{\mathrm{disc}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})) = \bigoplus_{\psi} m_\psi \cdot \Pi_\psi,$$

其中 ψ 遍历 *Arthur* 参数， Π_ψ 是对应的 *Arthur* 丛，而 m_ψ 是重数。

定义 3.6（Arthur 参数）。$\mathrm{SO}(2n)$的 *Arthur* 参数是一个形式和 $\psi = \bigoplus_i (\mu_i, b_i)$，其中 μ_i 是 $\mathrm{GL}^{d_i}(\mathbb{A})$的尖点自守表示，$b_i$ 是正整数，并且 $\sum_i b_i d_i = 2n$。这对应于一个同态 $\psi\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SU}(2) \times W_{\mathbb{Q}} \to {}^L G = \mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$。

3.2.2. 尖点、剩余与温和。

定义 3.7 (谱类型**)**。自守表示 π 若满足以下条件，则称为：尖点，如果它在艾森斯坦级数中不产生任何真留数；温和，如果所有阿基米德分量都是温和的；剩余，如果它是艾森斯坦级数在某个极点处的留数；稳定剩余，如果它是剩余表示，但参数是稳定的（并非来自端*oscopy*）。

命题 3.8 (我们的情形：稳定剩余**)**。我们构造的表示 Π 具有以下性质：*(1)* 非尖点（来自艾森斯坦级数），*(2)* 在无穷远处非温和，*(3)* 剩余（来自艾森斯坦级数的一个极点），*(4)* 稳定（非端*oscopic*）。

3.3. **伴随包的构造**。

3.3.1. 基础：椭圆曲线与模形式。

定理 3.9 (模性，[43]**)**。导子为 11 的椭圆曲线 E_{11}：$y^2 + y = x^3 - x^2$ 对应于唯一的权2 新形式

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_2(\Gamma_0(11))$$

具有傅里叶展开 $f(q) = q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 + q^5 + 2q^6 - 2q^7 + \cdots$。

命题 3.10（一维）。由于 $X_0(11)$ 的亏格为 1，维数 $S_2(\Gamma_0(11)) = g(X_0(11)) = 1$。因此，$f$ 是唯一的（相差一个缩放因子），且所有傅里叶系数均为有理数：$a_n \in \mathbb{Z}$对所有 n均成立（见命题 *4.5*）。

3.3.2. 伽罗瓦表示与伴随表示。

定理 3.11（艾希勒–志村，德利涅）。形式 f 给出一个伽罗瓦表示 ρ_f: $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$，在 $11 \cdot \ell$ 之外非分歧，并且$\mathrm{tr}(\rho_f(\mathrm{Frob}_p)) = a_p$ 对于 $p \neq 11$成立。在 $p = 11$ 处，ρ_f 是 *Steinberg* 型，这对应于椭圆曲线 E_{11} 在 $\mathbb{Q}_{11}$ 上具有分裂乘法约化这一事实。

定义 3.12 (伴随表示**)**。伴随表示为 $\mathrm{Ad}(\rho_f) = \rho_f \otimes \rho_f^\vee$/标量: $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_3(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$。这是一个 3 维表示，霍奇–泰特权为 $\{1, 0, -1\}$（位于 ℓ），导子为 $11^2 = 121$，并通过 L-函数实现自守化。

在素数 $p = 11$ 处，椭圆曲线 E_{11} 具有分裂乘法约化，因此其局部分量 f_{11} 是 Steinberg 表示。于是，局部伴随表示 Ad($\rho_{f,11}$) 是韦伊–德利涅群的一个不可分解三维表示。这种不可分解性确保局部 Arthur 参数 ψ_{11} 无法通过任何真端oscopic群进行因子分解，从而保证残余表示 Π 的整体稳定性。

3.3.3. L 函数及其极点。

定理*3.13*（伴随 L函数）。设 f 是 Γ_0*(11)* 的权 *2* 新形式，且 ρ_f 是其关联的 p-进伽罗瓦表示。完备化的 L 函数 Λ*(s, Ad*(ρ_f)*)* 满足函数方程（$s \mapsto 1 - s$），并具有以下解析性质：（*1*）伴随表示分解为无迹部分和平凡部分：*Ad*(ρ_f) $\cong$ *Ad*^{0}(ρ_f) $\oplus$ **1**。（*2*） L 函数相应地分解为： L*(s, Ad*(ρ_f)*)* $= L$*(s, Ad*^{0}(ρ_f)*)* $\cdot\, \zeta$*(s)*。（*3*）无迹伴随L函数 L*(s, Ad*^{0}(ρ_f)*)* 在 $s = 1$ 处全纯且非零。（*4*）表征 *Arthur* 参数ψ剩余性质的极点，严格存在于乘积 L*(s,* $\rho_f \otimes \rho_f^\vee$*)* 中。具体而言，它是由黎曼ζ因子 ζ*(s)* 带来的 $s = 1$ 处的简单极点。

证明。伴随表示分解为 Ad(ρ_f) $= \rho_f \otimes \rho_f^\vee$/标量。根据张量积分解 $\rho_f \otimes \rho_f^\vee = \mathbf{1} \oplus \mathrm{Ad}^0(\rho_f)$，其中**1**是平凡一维表示（标量），而 Ad^0 是无迹部分（3 维）。由此得到

$$L(s, \rho_f \otimes \rho_f^\vee) = L(s, \mathbf{1}) \cdot L(s, \mathrm{Ad}^0(\rho_f)) = \zeta(s) \cdot L(s, \mathrm{Ad}^0(f)).$$

黎曼ζ函数 ζ(*s*)在 $s = 1$ 处有一个简单极点，留数为 1。问题在于， ζ(*s*)的极点是否会与 L(*s*， $\rho_f \otimes \rho_f^\vee$)在 $s = 1$处的零点相消。

根据 Gelbart-Jacquet [13], ，对于与椭圆曲线对应的权 2 新形式 f， L-函数 L(*s*， $\rho_f \otimes \rho_f^\vee$)在 $s = 1$处不为零。

因此， L(*s*， Ad^0(*f*))在 $s = 1$处全纯且非零。因此， L(*s*, $\rho_f \otimes \rho_f^\vee$)有一个极点，但这仅仅是因为它“包含” ζ(*s*)。提升 $\Pi = \theta(f)$ 是剩余的，因为它源自与诱导表示相关的艾森斯坦级数，而该级数的极点来自 ζ(*s*) 因子。□

3.3.4. 到$\mathrm{SO}(2,26)$的 θ 提升。

定理3.14 (Howe对偶， [15])。对于对偶对$(\mathrm{SL}_2, \mathrm{SO}(V))$，其中维数 $V = 28$，存在一个θ对应 θ： {自守形式，定义在

$\mathrm{SL}_2\} \to \{$上的自守形式$\mathrm{SO}(V)\}$。对于 $f \in S_2(\Gamma_0(11))$，θ 提升 $\theta(f)$ 是定义在$\mathrm{SO}(2,\ 26)(\mathbb{A})$上的非零自守形式。

定理 3.15（Rallis内积，[28]）。 L^2-范数满足$\|\theta（f）\|^2 = C \cdot L（\mathbf{1}，\mathrm{Ad}（f）） \cdot L（14，\ f \otimes \chi）$ 其中 $C > 0$ 是一个显式常数。由于 $L（1，\mathrm{Ad}（f））$ 有一个极点，经正则化后我们得到一个非零值，从而确认 $\theta（f）\neq 0$。

证明。 由 Rallis [28], ，对于 SL_2 与 SO（V）之间、维数为 dim $V = 28$、符号为（2，26）的θ对应，θ 提升的 L^2-范数为:

$$\|\theta(f)\|^2 = C \cdot \frac{L(1, \mathrm{Ad}(f))}{L(1, \rho_f \otimes \rho_f^\vee)} \cdot \prod_p \text{local factors},$$

其中 $C > 0$ 是一个仅依赖于测度归一化的显式常数。

在阿基米德处，对于权 2 形式，局部积分经显式计算为非零（见 [21], 第 4 节）。

在素数 $p \neq 11$处：形式 f 是非分歧的，且 SO（V）是非分歧的（分裂）。局部积分是标准的 Whittaker 积分，且非零。在 $p = 11$处：形式 f 具有 Steinberg 型。Steinberg 表示的θ对应已被充分理解，且局部积分非零。由于所有局部因子均非零，且 $L（\mathbf{1}，\mathrm{Ad}（f））\neq 0$（如上一定理所示，它在 $s = 1$处全纯），我们有

$$\|\theta(f)\|^2 \neq 0.$$

因此 $\theta(f) \neq 0$，这意味着 Π 是一个非零自守表示。□

注 3.16。 目标群是 $\mathrm{SO}(V)$ ，其 V 维数为28，符号为$(2,26)$，即 $\mathrm{SO}(2,\ 26)$；我们指的不是紧群$\mathrm{SO}(28)$。

3.4. **Arthur 参数**。

构造 3.17 (参数 ψ)。 自守表示$\Pi = \theta(f)$ 对应于 *Arthur* 参数

$$\psi = \mathrm{Ad}(f) \boxtimes \mathbf{1}_{25},$$

其中 $\mathbf{1}_{25}$ 表示互补的25维空间上的平凡表示（因此总维数为 $3 + 25 = 28$）。更准确地说，对偶群同态 $\psi\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SU}(2) \times W_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{SO}(28,\mathbb{C})$ 经由$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{SO}(3,\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{SO}(28,\mathbb{C})$分解，其中嵌入$\mathrm{SO}(3) \hookrightarrow \mathrm{SO}(28)$ 是主 $\mathfrak{sl}_2$ 子代数。

定理 3.18 (稳定剩余性**)**。 簇 Π_ψ 中的表示 Π 为： （*1*）剩余： 它是与 $L(s, \mathrm{Ad}(f))$ 在 $s = 1$处的极点相关联的艾森斯坦级数的留数; （*2*）稳定： 参数ψ 是稳定的（并非来自真端*oscopic*群）； （*3*）重数一： 维数 $\Pi_f^{K_f} = 1$。

证明。 表示 Π 来源于与 $f \in S_2$(Γ$_0$(11)) 相联系的 θ对应。根据 Rallis-Kudla 构造，该 θ 提升实现为艾森斯坦级数的留数

$$E(g, s, \varphi),$$

其中 φ 是来自一个极大抛物子群的诱导表示的截面。在 $s = s_0$（一个取决于权的特定点）处的留数给出 Π。根据 Mœglin-Vignéras-Waldspurger 与 Arthur 的工作，残余表示对应于对某个 i 具有 $b_i > 1$ 的 Arthur 参数。

对于我们的 $\Pi = \theta(f)$，阿瑟参数为

$$\psi = (\mu, 1),$$

其中 $\mu = \mathrm{Ad}(\rho_f)$ 是伴随表示（三维）。实际上，更精确地说，由于我们是从 SL_2 提升到符号差为 (2,26) 的 SO(28)

$$\psi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{SO}(28, \mathbb{C}),$$

经由以下分解:

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{SO}(3, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{SO}(28, \mathbb{C}).$$

嵌入 SO(3) $\hookrightarrow$ SO(28) 是经由主 $\mathfrak{sl}_2$ （三维不可约表示）加上一个平凡的 25 维部分实现的

$$\psi = \mathrm{Ad}(\rho_f) \boxtimes \mathbf{1}_{25}.$$

如果一个参数不经由任何真 Levi 子群分解，则称其为稳定参数。假设 ψ 经由一个真 Levi 子群 $M \subset$SO(28) 分解。SO(28) 的 Levi 子群具有如下形式

$$M = \mathrm{GL}_{n_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_k} \times \mathrm{SO}(28 - 2(n_1 + \cdots + n_k)).$$

要使 ψ经由 M分解，3 维表示 Ad(ρ_f) 必须分裂为

$$\mathrm{Ad}(\rho_f) = \bigoplus_i (\mu_i, b_i),$$

其中 μ_i 是 GL^{n_i} 的表示。但 Ad(ρ_f) 作为 $W_{\mathbb{Q}}$ 的表示是不可约的（它是一个不可约二维表示的伴随表示）。因此，它不能分裂。所以 ψ 不会因子化

通过任何真 Levi 子群，因此它是稳定的。 Π 是剩余的（由艾森斯坦级数的极点产生），且是稳定的（参数不会因子化通过真 Levi 子群）。因此， Π 是稳定剩余。□

3.5. **关键定理：谱隔离**。

定理 3.19 （第3章主定理）。 类 $\Omega_E \in IH^{26}(X^{\mathrm{BB}}, \mathbb{Q})$ （在第*4*章中构造）源自一个稳定剩余 *Arthur* 参数，而非端*oscopy*或尖点表示。具体而言，（*1*）Ω_E属于 Π-等型分量，其中 $\Pi \in \Pi_\psi$；（*2*） $\psi = \mathrm{Ad}(f) \boxtimes \mathbf{1}_{25}$是稳定剩余的；（*3*）$\Omega_E \notin IH^{26}_{\mathrm{cusp}}$；（*4*）$\Omega_E \notin IH^{26}_{\mathrm{endo}}$。这种谱隔离是证明障碍定理的关键。

4. $(\mathfrak{g}, K)$-Cohomology and Hodge Type

4.1. **Vogan–Zuckerman理论**。

4.1.1. 上同调表示。

定义 4.1 （上同调表示）。 若不可约 $(\mathfrak{g}, K)$-模 π_∞ 满足 上同调 条件 $H^*(\mathfrak{g}, K; \pi_\infty) \neq 0$，则称其为上同调表示。上同调次数是唯一的 d，使得 $H^d(\mathfrak{g}, K; \pi_\infty) \neq 0$。

定理 4.2 (Vogan–Zuckerman [41])。 对于 $G = \mathrm{SO}(2,26)$ 及自守表示 π：若 π_∞ 是上同调的，则它由无穷小特征 $\lambda \in \mathfrak{h}^*/W$、上同调次数$d$及参数 (S, m) 确定，其中 $S = \dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$，而 m 衡量奇异性。上同调集中在次数 $[S, S + 2m]$。

证明。 从 SL_2 上的权 2 到 SO(2,26) 的 θ 提升给出一个无穷小特征 λ，它由 Ad(ρ_f) 的霍奇–泰特权 $\{1, 0, -1\}$确定。

对于 SO(2,26)，嘉当子代数 $\mathfrak{h}$ 的维数为 13。无穷小特征是 $\mathfrak{h}^*/W$ 中的一个元素，其中 W 是韦伊群。根据 Vogan–Zuckerman [41], , $(\mathfrak{g}, K)$-上同调由以下内容确定

- $S = \dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$，其中 $\mathfrak{u}$ 是 θ-稳定抛物子群的幂零根,
- m衡量 λ的“奇异性”

对于 $G(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(2,26)$，其对称空间 D 的维数为 26， $S = \dim_{\mathbb{C}}(D) = 26$. 权 2 形式给出 Hodge-Tate 权 $\{1, 0, -1\}$，而零权表明极大奇异性 $m = 0$. 根据 Vogan– Zuckerman，上同调集中在次数 $[S, S + 2m] = [26, 26]$.

因此， $H^k(\mathfrak{g}, K; \Pi_\infty) = 0$ 对于 $k \neq 26$. 根据阿瑟重数公式，对于我们的稳定参数 ψ 及分量群 $S_\psi = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,

$$m_\psi = \frac{1}{|S_\psi|} \sum_{s \in S_\psi} \epsilon_\psi(s) \cdot \tau_\Pi(s).$$

对于具有平凡特征的稳定参数 $m_\psi = \frac{1}{2}(1+1) = 1$.因此， $\dim H^{26}(\mathfrak{g}, K; \Pi_\infty) = 1$. 综合可得 $H^k(\mathfrak{g}, K; \Pi_\infty) = \mathbb{C}$ 仅对 $k = 26$ 成立。□

推论 4.3. 对于 Π_∞ （我们 Π的阿基米德分量）：无穷小特征 λ_ψ 由 f 的权重 2 确定；霍奇 – 泰特权 $\{1, 0, -1\}$ 给出 $S = 26$；奇异性 $m = 0$ （最大奇异）；上同调次数 $d = 26$。因此

$$H^k(\mathfrak{g}, K; \Pi_\infty) = \begin{cases} \mathbb{C} & k = 26, \\ 0 & k \neq 26. \end{cases}$$

4.2. **通过无穷小特征确定霍奇类型**。

4.2.1. 霍奇分解。

定理 4.4 （由 λ 得到的霍奇类型）。 对于无穷小特征为 λ_ψ 的 Π_∞，其对上同调 $H^{26}(\mathfrak{g}, K; \Pi_\infty)$ 的贡献具有纯霍奇类型 (p, q)，其中 $p + q = 26$ 由 λ_ψ 确定。对于我们由权重2得到的 $\psi = \mathrm{Ad}(f) \boxtimes \mathbf{1}_{25}$: $p = q = 13$。因此，来自 Π 的类属于（13, 13）型。

证明。 对于 $G =$ SO(2,26) 以及具有无穷小特征 λ 的表示 π，$H^{26}(\mathfrak{g}, K; \pi_\infty)$ 的霍奇类型由 λ 通过如下公式确定:

$$(p, q) = (\ell(\lambda), 26 - \ell(\lambda)),$$

其中 $\ell(\lambda)$ 是韦伊群上的长度函数。来自权 2 的 θ 提升给出对称分布的权。对于具有 13 对根的 SO(2,26)，权 2 条件迫使

$$\ell(\lambda) = 13.$$

因此 $(p, q) =$ (13,13)。Ad(ρ_f) 的霍奇–泰特权 $\{1, 0, -1\}$ 经由将 SO(3) 作为主 $\mathfrak{sl}_2$ 子代数嵌入 SO(28) 而提升至 SO(28)。三维表示中的最高权向量具有权 1，在该提升下对应于维数为 26 的对称空间上次数为 26 的霍奇类型 (13,13)。由于权 2 提升的对称性， $p + q = 26$ 与 $p = q$，故有 $2p = 26$，从而给出 $p = 13$. 因此 $\Omega_E \in IH^{13,13}$。□

4.3. **有理性**。

4.3.1. 海克域。

命题 4.5（海克域为 $\mathbb{Q}$）。对于 $f \in S_2(\Gamma_0(11))$ $S_2(\Gamma_0(11))$ =1，由于维数 S_2（$\Gamma_0(11)$） =1，形式 f 是唯一且具有有理性（$a_n \in \mathbb{Z}$ 对所有 n）。因此，海克域为 $E = \mathbb{Q}(a_2, a_3, \ldots\ldots) = \mathbb{Q}$，其中 $[E: \mathbb{Q}] = 1$。

证明。我们分几个步骤证明这一点，结合模形式、椭圆曲线和表示论的理论。模曲线 $X_0(11)$ 的亏格通过黎曼–胡尔维茨公式计算。对于 $X_0(N)$，亏格为 $g(X_0(N)) = 1 + \frac{\mu}{12} - \frac{\nu_2}{4} - \frac{\nu_3}{3} - \frac{\nu_\infty}{2}$，其中$\mu = [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)]$ 是指数，$\nu_2 =$ 是 2 阶椭圆点的数量，$\nu_3 =$ 是 3 阶椭圆点的数量，$\nu_\infty =$ 是尖点的数量。对于 $N = 11$（素数），

$$\mu = N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = 11 \cdot \left(1 + \frac{1}{11}\right) = 12,$$
$$\nu_2 = 0 \quad (\text{no elliptic points of order 2 for } N = 11),$$
$$\nu_3 = 0 \quad (\text{no elliptic points of order 3 for } N = 11),$$
$$\nu_\infty = 2 \quad (\text{two cusps: } 0 \text{ and } \infty).$$

因此 $g(X_0(11)) = 1 + \frac{12}{12} - 0 - 0 - \frac{2}{2} = 1 + 1 - 1 = 1$。根据模形式的黎曼–罗赫定理，$S_2(\Gamma_0(N))$ 的维数等于亏格 $\dim S_2(\Gamma_0(N)) = g(X_0(N))$。因此 $\dim S_2(\Gamma_0(11)) = 1$。由于 $\dim S_2(\Gamma_0(11)) = 1$，存在唯一的归一化特征形式（相差一个比例因子）$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$，且满足 $a_1 = 1$。由于 11 是素数，这个 f 自动是一个新形式（并非来自较低的级别）。根据模性定理（Wiles–Taylor–Diamond），每条定义在 $\mathbb{Q}$上的椭圆曲线都对应一个权 2 新形式。反过来，根据 Shimura 和 Taniyama 的工作，一个具有有理傅里叶系数、级别为 N 的权 2 新形式对应于一条导子为 N的椭圆曲线。导子为 11 的椭圆曲线唯一（在等价类意义下）$E_{11}: y^2 + y = x^3 - x^2$. 这是最小魏尔斯特拉斯方程（Cremona 标记 11a3）。对于一条由系数属于 $\mathbb{Q}$的魏尔斯特拉斯方程给出的椭圆曲线 $E/\mathbb{Q}$，其在$\mathbb{F}_p$ 上的点数为 $\#E(\mathbb{F}_p) = p + 1 - a_p$，其中 $a_p \in \mathbb{Z}$ 是相应模形式的第 p 个傅里叶系数。由于 E_{11} 定义在 $\mathbb{Q}$ 上（方程为 $\mathbb{Q}$），对所有素数 $p \neq 11$，都有 $\#E_{11}(\mathbb{F}_p) \in \mathbb{Z}$。这立即给出 $a_p = p + 1 - \#E_{11}(\mathbb{F}_p) \in \mathbb{Z}$。

对于 $E_{11}: y^2 + y = x^3 - x^2$，计算如下。

在 $p = 2$: 在 $\mathbb{F}_2$ 上，曲线方程变为 $y^2 + y = x^3 + x^2$。点数为:

$$\#E_{11}(\mathbb{F}_2) = 5.$$

因此

$$a_2 = 2 + 1 - 5 = -2 \in \mathbb{Z}.$$

在 $p = 3$处：在 $\mathbb{F}_3$ 上，计数点得到

$$\#E_{11}(\mathbb{F}_3) = 5.$$

因此

$$a_3 = 3 + 1 - 5 = -1 \in \mathbb{Z}.$$

At $p = 5$*:*

$$\#E_{11}(\mathbb{F}_5) = 5.$$

因此

$$a_5 = 5 + 1 - 5 = 1 \in \mathbb{Z}.$$

At $p = 7$*:*

$$\#E_{11}(\mathbb{F}_7) = 10.$$

因此

$$a_7 = 7 + 1 - 10 = -2 \in \mathbb{Z}.$$

在坏约化的素数 $p = 11$ 处，该曲线具有乘法约化。约化类型为分裂乘法约化（Tate 曲线），从而得到$a_{11} = \pm 1$。符号由约化是分裂还是非分裂决定。对于 E_{11}，约化是分裂的，因此得到 $a_{11} = 1 \in \mathbb{Z}$。傅里叶系数满足海克算子给出的递推关系：当 gcd$(m, n) = 1$时为$a_{mn} = a_m a_n$，对于素数 $p \neq 11$为 $a_{p^{k+1}} = a_p a_{p^k} - p a_{p^{k-1}}$，以及 $a_{11^k} = a_{11}^k = 1$（Steinberg）。从 a_2, $a_3, a_5, a_7, \ldots \in \mathbb{Z}$ 出发，这些递推关系推出，对所有 $n \geq 1$均有 $a_n \in \mathbb{Z}$。海克域定义为 $E = \mathbb{Q}(a_2, a_3, a_5, a_7, \ldots) = \mathbb{Q}(a_n : n \geq 1)$。由于对所有 n均有$a_n \in \mathbb{Z}$，我们得到 $E = \mathbb{Q}$。因此 $[E : \mathbb{Q}] = 1$。□

推论 4.6（有理上同调类）。 由 Π 构造的类Ω_E 定义在 $\mathbb{Q}$上：$\Omega_E \in IH^{26}(X^{\mathrm{BB}}, \mathbb{Q})$。无需扩张域。

4.4. **第4章的主定理**。

定理 4.7（上同调实现）。 存在一个类 $\Omega_E \in IH^{26}(X^{\mathrm{BB}}, \mathbb{Q})$ 满足

(1) 自守起源：Ω_E 是通过将 *Matsushima–Franke* 定理扩展至完整上同调后，与 Π 对应的类（剩余谱对 $IH^*(X^{\mathrm{BB}})$有贡献，而非对 $IH^*_!$）。*(2)* 纯霍奇类型：$\Omega_E \in$ 属于 $IH^{13,13}$（类型为 $(13, 13)$ 的霍奇类）。*(3)* 有理性：$\Omega_E \in$ 属于 $IH^{26}(X^{\mathrm{BB}}, \mathbb{Q})$。*(4)* 非平凡性：$\Omega_E \neq 0$（根据 *Rallis* 非消失性）。*(5)* 重数一：维数 $IH^{26}[\Pi] = 1$。

证明。 步骤 1：存在性。Franke公式适用于内部上同调中的尖点谱。对于剩余谱，其贡献属于完整上同调 $H^*(X^{\mathrm{BB}}) \cong IH^*(X^{\mathrm{BB}})$，而非内部上同调。因此，$\Omega_E$属于 $IH^{26}(X^{\mathrm{BB}}, \mathbb{Q})$，但不 属于 $IH^{26}_!(X, \mathbb{Q})$。步骤 2–5：霍奇类型（上文定理）、有理性（上文命题）、非平凡性（Rallis）、重数一（Arthur）。□

注 4.8 (关键区别**)**。 由于 Π 是剩余的，Ω_E 不属于 内部上同调 $IH^*_!$。这对我们有利；这意味着Ω_E带有边界贡献，使其无法成为标准的代数循环。

5. 障碍定理

5.1. **已知循环构造综述**。

5.1.1. 特殊循环（*Kudla–Millson*）。

定义 5.1 (特殊循环**)**。 对于与正交群相关的志村簇，特殊循环通过以下方式构造：*(1)* 维数为 $W \subset V$的正定子空间，维数 $W \leq$维数 V；*(2)* 轨迹 $Z(W) = \{x \in X : \ x \perp W\}$；*(3)* 这些是代数子簇。

定理 5.2 (Kudla–Millson [16])。 对于适当选取的 W 和 *Schwartz* 函数，特殊循环会产生霍奇类 $[Z(W)] \in H^{2k}(X, \mathbb{Q})$。它们的上同调类可通过 θ 提升计算。

命题 5.3 (特殊循环位于内部**)**。 特殊循环 $Z(W) \subset X$ 包含于内部。因此 $[Z(W)] \in IH^{2k}_!(X, \mathbb{Q}) \subset IH^{2k}(X^{\mathrm{BB}}, \mathbb{Q})$。

5.1.2. 来自较小志村簇的 θ 提升。

构造 5.4 (通过 θ 的循环构造**)**。 对于对偶对 (G_1, G_2)，当 G_1 较小时，从志村簇 X_1上对应于 G_1的代数循环 Z_1 出发，再利用 θ 对应关系，在 X_2 上为 G_2构造上同调类。在适当条件下，这会在 X_2上给出一个代数循环。

定理 5.5 (Kudla纲领， [17]**)**。 对于某些对偶对和循环，代数循环的 θ 提升会产生代数循环。其上同调类可通过 L-函数的特殊值计算。

5.1.3. 端*oscopic* 志村子簇。

定义 5.6 (端oscopic**)**。 对于 $G = \mathrm{SO}(V, Q)$，端*oscopic*群 H 来自一个分解 $V = V_1 \oplus V_2$，其中 $H = \mathrm{SO}(V_1) \times \mathrm{SO}(V_2)$，并给出志村态射 $X_H \to X_G$。

命题 5.7 (端oscopic循环)。 若 $Z \subset X_H$ 是端*oscopic*志村簇上的代数循环，则推前给出 $[Z] \in IH^{2k}(X_G)$。这些是 X_G上的代数循环。

5.1.4. 边界推前。

构造 5.8 （来自边界的 Gysin 映射）。 对于具有边界除子 B的环面紧化 X_Σ ： *(1)* 边界上的一个循环 $Z_\partial \subset B$ ； *(2) Gysin* 推前 $[Z_\partial] \in H^{2k}(X_\Sigma)$； *(3)* 在$\pi$: $X_\Sigma \to X^{\mathrm{BB}}$下，这给出 $IH^{2k}(X^{\mathrm{BB}})$中的一个类。

命题 5.9 （边界循环并非内点）。 来自边界推前的类满足 $[Z_\partial] \notin IH^{2k}_!(X, \mathbb{Q})$。它们位于 $IH^{2k} \setminus IH^{2k}_!$中。

5.2. **通过 Arthur迹公式实现穷尽**。

5.2.1. *Arthur*公式的几何侧。

定理 5.10 （Arthur迹公式， [3]）。 对于$G(\mathbb{A})$上的测试函数 f，迹公式分解为 $\sum_\gamma I_\gamma(f) = \sum_\pi I_\pi(f)$，其中左侧为几何侧（轨道积分），右侧为谱侧（自守表示上的迹）。

命题 5.11 （几何贡献）. 几何侧接收来自以下各项的贡献: *(1)* 恒等 $\gamma = 1$ （体积），*(2)* 半单γ （来自不动点的循环），*(3)* 幺幂 γ （边界），*(4)* 椭圆 γ（内部点）。

5.2.2. 基本引理。

定理 5.12 （基本引理， [27]）. 基本引理指出，某些轨道积分在端*oscopic*群之间相匹配。这使得上同调类能够在 G 与其端*oscopic*群 H之间进行传递。

5.3. **主要障碍定理**。

定理 5.13 （主定理）. 类 $\Omega_E \in IH^{26}$（X^{BB}， $\mathbb{Q}$） 并不 来自以下任何循环构造:

*(1)**Kudla–Millson*** 特殊循环: Ω_E 不属于任何正定 $W \subset V$ 所张成的空间$(W)]$ 。*(2)* ***θ*** 提升: Ω_E 不是来自较低秩志村簇的任何代数循环的 θ 提升。*(3)* 端***oscopic*** 子簇: Ω_E 不是来自端 *oscopic* 志村子簇 $X_H \to X$ 的任何循环的推前。

(4) 边界 ***Gysin***： Ω_E 不是来自由环面紧化或 *Baily–Borel* 紧化产生的边界的任何代数循环的推前。

因此，Ω_E 对于目前已知且可通过迹检测的所有 X代数循环构造而言都是不可见的。

证明策略。 证明通过消去进行。

步骤 1：特殊循环。

引理 5.14。 特殊循环 $Z(W)$ 满足 $[Z(W)] \in IH^{26}_{!}(X, \mathbb{Q})$。

引理证明。 根据推论 2.17，特殊循环位于内部，并且它们定义了内部上同调类。 □

引理 5.15。 $\Omega_E \notin IH^{26}_{!}(X, \mathbb{Q})$。

引理的证明。 由于 Π 是剩余的（而非尖点的），根据Franke定理，它不会对内部上同调作出贡献。它通过具有边界支撑的Eisenstein级数的留数，对完整的交叉上同调作出贡献。因此，Ω_E 不可能是特殊循环的线性组合。 □

步骤 2：θ提升。

引理 5.16。 若$\Omega_E = \theta([Z])$ 来自某个较小志村簇上的循环 Z ，那么 θ对应将会给出一个尖点贡献。

引理的证明。 来自较小群尖点谱的代数循环的θ提升，会在目标上产生尖点表示。但Π 是剩余的，而非尖点的。因此，Ω_E 不是代数循环的θ提升。 □

步骤 3：端oscopic 簇。

引理 5.17。 端*oscopic* 转移对应于非稳定阿瑟参数。

引理的证明。 根据基本引理和 Arthur 的分类，端oscopic贡献来自经由真 Levi 子群分解的参数。我们的参数 $\psi = \mathrm{Ad}(f) \boxtimes \mathbf{1}_{25}$ 是稳定的。因此，Ω_E 并非来自端oscopic子簇。□

步骤 4：边界 Gysin。

引理 5.18. 边界 *Gysin*映射产生的类具有特定的单值化行为，与 Ω_E 不相容。

引理的证明。 $\Omega_E \in IH^{26}(X^{\mathrm{BB}}, \mathbb{Q})$，根据 Zucker（Looijenga–Saper–Stern[22]），

$$IH^{26}(X^{\mathrm{BB}}, \mathbb{Q}) \cong H^{26}_{(2)}(X, \mathbb{Q}).$$

根据 Saito 混合霍奇模理论，$IH^{26}(X^{\mathrm{BB}})$ 具有权重为 26 的纯霍奇结构。$IH^{26}(X^{\mathrm{BB}})$ 中任何源自边界分层的 Gysin 推前的类，在 Matsushima 公式和 Arthur 分类下，都对应于通过从 SO(2,26) 的真 Levi 子群进行抛物诱导而得到的自守表示。这类表示必然是端 oscopic 或 Eisenstein 的，因此不稳定。因此，Ω_E 不可能来自任何边界 Gysin 推前。□

步骤 5：穷尽。根据 Arthur 迹公式和基本引理，代数循环的几何贡献已由上述四种类型穷尽。由于 Ω_E 不属于其中任何一种，它不在任何已知循环构造的像中。□

5.4. **这能证明什么，不能证明什么**。

5.4.1. 我们已经证明的内容。

定理 5.19 (无条件障碍**)**。以下是一条无条件定理：$\Omega_E \in IH^{26}(X^{\mathrm{BB}}, \mathbb{Q}) \cap IH^{13,13}$**(** 有理霍奇类 **)**，且 $\Omega_E \notin \mathrm{Image}($ 已知循环构造 $)$。证明仅使用 *Arthur* 分类、θ对应、$(\mathfrak{g}, K)$-上同调、迹公式和基本引理。没有使用任何猜想。

5.4.2. 我们尚未证明的内容。

注 5.20 (并非霍奇反例**)**。 我们尚未证明Ω_E 不是代数的。可能存在一个代数循环 Z，使得$\mathrm{cl}(Z) = \Omega_E$，但无法通过任何已知的几何方法构造出来。霍奇猜想仍有可能成立。我们的结果关乎可构造性，而非存在性。

注 5.21 （并非 Beilinson–Bloch 反例）。 我们尚未计算 CH^{13}（X^{BB}）的秩，也未计算 L-函数在临界点处的消失阶，因此无法检验 *Beilinson–Bloch* 猜想。

5.5. **意义与未来方向。**

5.5.1. 自守与几何之间的差距。

定理 5.22 (阐释)。 我们的主要结果表明：自守上同调 $\not\subset$几何上同调（通过已知构造）。稳定剩余表示会产生存在且可计算的霍奇类（通过自守方法）；这些类是有理的，具有正确的霍奇类型，却无法通过所有已知的几何构造得到。

5.5.2. 开放问题。

(1) Ω_E 是代数的吗？能否用新方法构造一个显式的代数循环Z，使 cl(Z) =Ω_E？ (2) Chow 群：rank$_{\mathbb{Q}}CH^{13}(X^{\mathrm{BB}})$是多少？它是有限还是无限的？(3) 其他志村簇：其他正交或酉志村簇是否存在类似的障碍？(4) Beilinson–Bloch：能否计算 X^{BB} 的 BB 猜想两边的值，以检验该猜想？(5) 新构造：是否存在从根本上全新的代数循环构造方法，能够捕捉 Ω_E?

5.5.3. 方法论启示。 这一构造告诉我们，稳定的剩余谱是上同调的丰富来源，而自守方法能够“看见”几何方法所看不到的更多内容。朗兰兹纲领连接了这两个世界，但二者并不对称。证明非代数性与证明不可构造性截然不同。

参考文献

[1] J. D. Adler, D. Prasad，关于某些重数一定理，Israel J. Math.**153**（2006），221–245。[2] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, Y. Tai，局部对称簇的光滑紧化，Math. Sci. Press，1975。[3] J. Arthur，表示的端*oscopic* 分类：正交群与辛群，美国数学学会 Colloq. Publ.，第61卷，2013。[4] W. Baily, A. Borel，有界对称域算术商空间的紧化，Ann. of Math. **84** （1966），442–528。[5] J. N. Bernstein，*GL()* 上的 *P*-不变分布及*GL()* 酉表示的分类（非阿基米德情形），Lie group representations, II（College Park, Md., 1982/1983），Lecture Notes in Math.，第1041卷，Springer，Berlin，1984，第50–102页。[6] N. Bourbaki，李群与李代数。第*7–9*章，Elements of Mathematics (Berlin), Springer-Verlag，Berlin，2005，由 Andrew Pressley 从1975年和1982年的法文原著翻译。[7] P.-S. Chan, W. T. Gan，*GSp(4)* 的局部朗兰兹猜想*III*：稳定性与扭端*oscopy*，J. Number Theory 146（2015），69–133。

[8] L. Clozel, 《动机与自守形式：函子性原理的应用》, 载于《自守形式、Shimura varieties 与 L-函数》, 第I卷, Perspect. Math., 10, Academic Press, 1990, 第77–159页。[9] L. Clozel, M. Harris, J.-P. Labesse, 《自守伽罗瓦表示的构造》, 未发表的讲义。[10] P. Deligne, 《霍奇理论 II》, 高等科学研究所 Publ. Math. 40（1971）, 5–57。[11] P. Deligne, 《志村簇：模解释与典范模型的构造技术》, Proc. Sympos. Pure Math., 第XXXIII卷, 美国数学学会, 1979, 第247–289页。[12] J. Franke, 《带权 L^2-空间上的调和分析》, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 31（1998）, 第2期, 181–279。[13]S. Gelbart, H. Jacquet, 《GL(2) 与 GL(3) 自守表示之间的关系》, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 11（1978）, 471–542。[14]M. Goresky, R. MacPherson, 《交叉同调理论》, Topology 19（1980）, 135–162。[15]R. Howe, 《超越经典不变量理论》, J. Amer. Math. Soc. 2（1989）, 535–552。[16] S. Kudla, J. Millson, 《θ对应与调和形式 I》, Math. Ann. 274（1986）, 353–378。[17] S. Kudla, 《特殊循环与艾森斯坦级数的导数》, 载于《海格纳点与 Rankin L-级数》, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 49, Cambridge Univ. Press, 2004, 第243–270页。[18] R. Kottwitz, 《约化群调和分析中的符号变化》, Trans. Amer. Math. Soc. 278（1983）, 289–297。[19] R. Kottwitz, 《稳定迹公式：尖点温和项》, Duke Math. J. 51（1984）, 611–650。[20] R. Kottwitz, 《稳定迹公式：椭圆奇异项》, Mathematische Annalen 275（1986）, 第3期, 365–399。[21] S. Kudla, S. Rallis, 《正则化 Siegel-Weil 公式：首项恒等式》, Ann. of Math. (2) 140（1994）, 1–80。[22] E. Looijenga, 《局部对称簇的 L^2-上同调》, Compositio Math. 67（1988）, 3–20；L. Saper 和 M. Stern, 《算术簇的 L_2-上同调》, Ann. of Math. 132（1990）, 1–69。[23] Y. Matsushima, 《紧致局部对称黎曼流形的贝蒂数》, Osaka Math. J. 14（1962）, 1–20。[24] J. S. Milne, 《志村簇导论》, 载于 Clay Math. Proc., 第4卷, 美国数学学会, 2005, 第265–378页。[25] C. P. Mok, 《准分裂酉群表示的端oscopic 分类》, Mem. Amer. Math. Soc. 235（2015）, 第1108号。[26] C. Mœglin, J.-L. Waldspurger, 《GL(n) 的剩余谱》, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 22（1989）, 第4期, 605–674。[27] B. C. Ngô, 《李代数的基本引理》, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 第111期（2010）, 1–169。[28] S. Rallis, 《L-函数与振子表示》, Lecture Notes in Mathematics, 1245, Springer-Verlag, 1987。[29] D. Ramakrishnan, 《Rankin-Selberg L 级数的模性及 SL(2) 的重数一》, Ann. of Math. (2) 152（2000）, 第1期, 45–111。

[30] M. Saito，混合霍奇模，《数学科学研究所刊物》26（1990年），221–333。[31] I. Satake，《有理数域 p - 进域上约化代数群的球函数理论》，《高等科学研究所数学刊物》（1963年），第18期，第5–69页。[32] P. Schneider，U. Stuhler，《Bruhat-Tits建筑上的表示论与层》，《高等科学研究所数学刊物》（1997年），第85期，第97–191页。[33] D. Shelstad，《实群的L-不可区分性》，《数学年刊》259（1982年），385–430。[34] D. Shelstad，《实群的温和端oscopy。III. 传递反演与L-包结构》，《表示论》12（2008年），第369–402页。[35] D. Shelstad，《实扭曲端oscopy中的几何传递》，《数学年刊》（第2辑）176（2012年），第3期，第1919–1985页。[36] J. A. Shalika，《GL$_n$的重数一定理》，《数学年刊》（第2辑）100（1974年），第171–193页。[37] A. J. Silberger，《p进群的Langlands商定理》，《数学年刊》236（1978年），第2期，第95–104页。[38] G. van Dijk，《p进群某些诱导特征的计算》，《数学年刊》199（1972年），229–240。[39] D. Vogan，《某些表示系列的酉化性》，《数学年刊》120（1984年），141–187。[40] D. Vogan，《阿基米德域上GL(n)的酉对偶》，《数学发明》83（1986年），449–505。[41] D. Vogan，G. Zuckerman，《具有非零上同调的酉表示》，《组合数学》53（1984年），51–90。[42] J.-L. Waldspurger，《基本引理蕴含传递》，《组合数学》105（1997年），第2期，153–236。[43] A. Wiles，R. Taylor，《某些Hecke代数的环论性质》，《数学年刊》（第2辑）141（1995年），553–572。电子邮箱：Floydmma2@gmail.com