arXiv:2602.06873v1 [cs.SC] 6 Feb 2026

类魏尔斯特拉斯扩张中的符号积分 *

陈少时[a, b], Manuel Kauers[c], Wenqiao Li[a, b],
李秀云[a, b, c] 和 David Masser[d]

[a]KLMM，中国科学院数学与系统科学研究院，北京 100190，中国[b]中国科学院大学数学科学学院，北京 100049，中国[c]约翰·开普勒大学代数研究所，奥地利林茨 4040[d]巴塞尔大学数学与计算机科学系，瑞士巴塞尔 4003

schen@amss.ac.cn, manuel.kauers@jku.at
liwenqiao@amss.ac.cn,lixiuyun@amss.ac.cn,david.masser@unibas.ch

2026年2月9日

摘要

本文研究微分域中的积分问题，这些微分域可能包含类似于 Weierstrass $\wp$ 函数的量，此类函数由一阶非线性微分方程定义。我们将特殊多项式的经典概念推广到类魏尔斯特拉斯扩张中的元素，并提出了适用于这类扩张的约化算法。作为这些结果的应用，我们推导出了一些关于 $\wp$ 的幂的积分的新公式。

*S. Chen、W. Li 和 X. Li 的部分研究工作获得了国家重点研发计划（编号：2023YFA1009401）和国家自然科学基金委员会项目（编号：12271511）的资助。M. Kauers 获得了奥地利科学基金项目 PAT 9952223、PAT 8258123 和 I6130-N 的资助。X. Li 的部分研究工作通过 LIT-AI实验室获得了上奥地利州的资助。这项工作还获得了中国科学院国际合作伙伴计划（项目编号：167GJHZ2023001FN）的资助。

1 引言

现代符号积分算法主要由两种互补的方法主导。一种方法使用湮灭线性算子描述函数，并在算子代数 [33, 13, 17] 中进行计算，以回答有关给定积分的问题。另一种方法使用微分域描述函数，并在这些域中进行计算，以回答有关给定积分的问题 [24, 25, 6]。后一种方法在所谓的初等函数方面尤为成功，但也已扩展到其他类型的函数，见 [23] 及其中所列参考文献。

本文关注涉及由（一阶且可能非线性的）微分方程定义的函数的积分，即满足 $Q(y', y) = 0$ 的函数 y，其中 Q 是某个二元多项式。这类函数的典型例子是魏尔斯特拉斯 $\wp$ 函数，它满足

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3 \tag{1}$$

其中 $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ 是某些常数，且 $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$。

在微分代数领域，Kolchin [18], 早已研究过满足此微分方程的量，并将它们称为魏尔斯特拉斯型。我们稍作推广，也允许使用其他多项式 Q，并将由这些函数生成的扩张称为魏尔斯特拉斯型扩张。近年来，已有一些关于含魏尔斯特拉斯型元素的符号积分的研究。Kumbhakar 和 Srinivasan [20]以及 Pila 和 Tsimerman [22]提出了适用于这一情形的刘维尔定理变体。

从更偏计算的角度来看，并行积分已应用于涉及由非线性微分方程定义的函数的积分问题。Bronstein [7] 给出了一个涉及 Lambert W 函数的例子，而 B¨ottner [1] 则给出了一些涉及 Weierstrass $\wp$ 函数的例子。除此之外，对于被积函数涉及 $\wp$ 或类似函数时的积分理论和算法，人们所知甚少。事实上，文献中关于涉及 $\wp$ 的积分的恒等式也不多。

本文的贡献有三个方面。在理论方面，我们将经典的特殊多项式概念推广到 Weierstrass 型扩张的元素。在算法方面，我们提出了一种用于约化过程的算法，延续了积分算法发展的趋势 [2, 3, 11, 10, 15, 4, 8, 30, 9, 14]。最后，作为这些结果的应用，我们得到了关于 $\wp$的幂的积分的一些新恒等式。

2 一道开胃菜

我们从魏尔斯特拉斯 $\wp$函数幂的积分问题入手，即求积分 $I_n(z) := \int \wp(z)^n\, dz$，其中 $n \in \mathbb{Z}$。我们将回顾书籍 [32] 中的一些经典公式。通过求导

微分方程 ($\frac{1}{12}g_2$ 1 $\wp\ z\ ^2 = \frac{1}{6}\wp''\ z\ +$) 两边，可得 ( ) ( )，这意味着

$$\int \wp(z)^2\,dz = \frac{1}{6}\wp'(z) + \frac{1}{12}g_2 z + C, \quad C \text{ is a constant.}$$

下文中，只要不会产生歧义，我们就始终省略 C 。因此，整$I_2(z)$属于由 $\wp(z)$ 和 $\wp'(z)$在 $\mathbb{C}(z)$上生成的域。本文将阐述初等项积分理论，并证明 $\wp(z)$的积分在域 $\mathbb{C}(z)(\wp(z)\ \wp'(z))$上不是初等函数。为此，我们需要引入一些新函数，例如满足方程 $\zeta'(z) = -\wp(z)$的魏尔斯特拉斯ζ函数 $\zeta(z)$，以及满足$\zeta(z) = \sigma'(z)/\sigma(z)$的函数 $\sigma(z)$。借助这两个新函数，我们可以求出积分

$$\int \frac{1}{\wp(z)}\,dz = \frac{1}{\sqrt{-g_3}}\left(\log\left(\frac{\sigma(z-v)}{\sigma(z+v)}\right) + 2\zeta(v)z\right),$$

其中， $v \in \mathbb{C}$ 满足 $\wp(v) = 0$ 且 $\wp'(v) = \sqrt{-g_3}$。要计算一般积分 $I_n(z)$，我们需要 $\wp(z)$的反函数，它由公式 [32, p. 438]定义

$$\wp^{-1}(z) = \int_z^\infty \frac{1}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}\,dt.$$

通过换元，我们有

$$\int \wp(z)^n\,dz = J_n(\wp(z)), \quad \text{with } J_n(t) := \int \frac{t^n\,dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}.$$

积分 $J_n(t)$ 满足如下形式的线性递推方程

$$J_n(t) = \frac{g_2(2n-3)}{8n-4}J_{n-2}(t) + \frac{g_3(n-2)}{4n-2}J_{n-3}(t) + \frac{t^{n-2}\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}{4n-2},$$

初值为 $J_0(t) = \wp^{-1}(t)$ $J_1(t) = -\zeta(\wp^{-1}(t))$，且

$$J_2(t) = \frac{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}{6} + \frac{g_2}{12}\wp^{-1}(t).$$

上述递推式可使用 MATH-EMATICA 套消包 **HolonomicFunctions.m** [19]，通过创造式套消计算得到。由上述关于 $J_n(t)$ 的递推式并换回变量后，我们可以得到积分

$$\int \wp(z)^3\,dz = \frac{1}{10}\wp(z)\wp'(z) - \frac{3g_2}{20}\zeta(z) + \frac{g_3}{10}z$$

以及积分

$$\int \wp(z)^4\,dz = \frac{1}{14}\wp(z)^2\wp'(z) + \frac{5g_2}{168}\wp'(z) + \frac{5g_2^2}{336}z - \frac{g_3}{7}\zeta(z).$$

我们将在第 7 节重新讨论这些积分 $I_n(z)$，其中 $n \in \mathbb{N}$ 。

3 代数函数

本节我们回顾书籍 [12] 中有关一元代数函数域的一些术语。设 k 是特征为 0 的域，且 t 在 k 上超越。若 $m \in k[t, X]$ 是绝对不可约多项式，即 m 在 k 的代数闭包 k 上不可约，那么根据第 3 节定理 1]， k 在 K 中代数闭: $= k(t)[X]/\langle m \rangle$ 。这样的 K 称为关于 k 的一元代数函数域。

子环 $\mathcal{O} \subsetneq K$ 称为赋值环，如果 $\mathcal{O}$ 包含 k，并且对任意非零 $x \in K$，要么 $x \in \mathcal{O}$ ，要么 $x^{-1} \in \mathcal{O}$。赋值环是具有主极大理想的局部环。赋值环的极大理想称为赋值点。对于给定的赋值点 P，存在唯一的赋值环 $\mathcal{O}_P$ ，其极大理想为 P。剩余域 $\mathcal{O}_P/P$记为 Σ_P。它是 k的有限代数扩张。

设 $P = u\mathcal{O}_P$。 K 在 P处的阶函数是由 $\nu_P(x) = \max\{n \mid x \in u^n\mathcal{O}_P\}$定义的映射 ν_P： $K \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$。可以证明 ν_P是良定义的，并具有以下性质:

(i) $\nu_P(x) = +\infty$ 当且仅当 $x = 0$;

(ii) 对所有 x， $y \in K$，有 $\nu_P(xy) = \nu_P(x) + \nu_P(y)$;

(iii) $\nu_P(x + y) \geq \min\{\nu_P(x)\ \nu_P(y)\}$ 对所有 x， $y \in K$ 成立，且当$\nu_P(x) \neq \nu_P(y)$时取等号

事实上， $\mathcal{O}_P := \{x \in K \mid \nu_P(x) \geq 0\}$，并且 P 中的每个元素在 P处的阶都严格为正。

例 *1.* 设 k 是一个特征为 *0* 的域， *k(t)* 是关于 k的有理函数域。 *k(t)* 的赋值点由 t^{-1} 或其赋值环 $\mathcal{O}_\infty$ （或 $\mathcal{O}_p$）中的不可约多项式 $p \in k[t]$ 生成。我们分别用 ν_∞ 和 ν_p表示相应的阶函数。设 $a, b \in k[t]$ 满足 $ab \neq 0$，且$f = a/b \in C(t)$。则 $\nu_\infty(f) = \deg_t b - \deg_t a$。若我们写作 $f = p^n a_0/b_0$，其中$n \in \mathbb{Z}$，最大公因数$(a_0, b_0) = 1$且 $p \nmid a_0 b_0$，则 $\nu_p(f) = n$。我们称 $t^{-1}\mathcal{O}_\infty$为 *k(t)* 的无穷赋值点，而 $p\mathcal{O}_p$ 为有限赋值点。事实上，

$$\mathcal{O}_\infty = \left\{\frac{a}{b} \mid \deg_t a < \deg_t b\right\} \text{ and } \mathcal{O}_p = \left\{\frac{a}{b} \mid \gcd(a, b) = 1,\ p \nmid b\right\}$$

令 Σ_∞ 为 $\mathcal{O}_\infty$ 的剩余域， Σ_p 为 $\mathcal{O}_p$的剩余域。显然¯可验证 $\Sigma_\infty = k$，且 Σ_p 同构于 $k(\beta)$ ，其中 $\beta \in k$ 是 p的一个根。

为方便起见，我们也用 $\mathcal{O}_{t^{-1}}$ 指代 $\mathcal{O}_\infty$。

根据 [5, 第 119], 页，对于 K的赋值点 P，要么存在唯一的不可约多项式 p 使得 $p \in P$，此时 P称为有限赋值点；要么 $t^{-1} \in P$，此时 P称为无穷赋值点。

设 q 是 t^{-1} 或 $k[t]$的一个不可约多项式。若 $q \in P$，则称 P 位于 q 之上，或者等价地，称 q 位于 P 之下。事实上， q 位于 K 的至少一个赋值点之下，但不会位于无穷多个赋值点之下。现在假设 q 位于 P 之下。令

设 $\mathcal{D}$ 是 P 的赋值环。那么 $\mathcal{O} := \mathcal{D} \cap k(t)$ 是赋值点 $Q := P \cap \mathcal{O}$ 在 $k(t)$ 中的赋值环，它由 q 生成。由于 Q 是 $\mathcal{O}$ 中 P 的收缩，因此可以将剩余域 Σ_Q 视为 Σ_P 的一个子域。

ν_Q 表示 $k(t)$ 在 Q 处的阶函数，而 ν_P 表示 K 在 P 处的阶函数。由于 $\nu_P\big(k(t) \setminus \{0\}\big)$ 构成 $\mathbb{Z}$ 的一个加法子群，且包含非零整数，因此它由一个正整数 r_P 生成，该整数称为 P 的分歧指数。显然，

$$\forall\, x \in k(t) \setminus \{0\},\, \nu_P(x) = r_P \nu_Q(x). \tag{2}$$

特别地，$\nu_P(q) = r_P$。

如果元素 $x \in K$ 在 q 处满足：x 在 K 上方的每个赋值点处的阶均非负，则称其在 q 处整。在 q 处整的所有元素构成一个秩为 $[K$ 的自由 $\mathcal{O}_q$-模：$k(t)]$。该模的一组基称为 q 处的局部整基。如果 x 在 $k[t]$ 中的每个不可约多项式处都整，则称 x 在 $k[t]$ 上整。这等价于说，x 的首一最小多项式属于 $k[t, X]$。所有整元构成一个秩为 $[K$ 的自由 $k[t]$-模：$k(t)]$，，该模的一组基称为 K 的整基。已有多种算法可用于计算 K [29, 26, 31] 的整基。

本文将始终采用以下约定。设 $v \in k[t]$无平方因子，S 为 v的所有不可约因子的集合。我们所说的“在 v处整”，是指“在每个 $p \in S$处整”；同理，“在 v 处的局部整基”是指“在每个 $p \in S$ 处的局部整基”。记 $\mathcal{O}_v = \bigcap_{p \in S} \mathcal{O}_p$。$K$中在 v处整的所有元素构成一个秩为 $[K$ 的自由 $\mathcal{O}_v$-模：$k(t)]$。

4 特殊多项式与赋值

在本文余下部分，我们令 $(k, ')$ 为一个特征为 0 的微分域，C_k 为其常数子域，k' 为 k中导数的集合。设 E 为 k的一个微分扩张。Kolchin 在 [18, 第 803] 页定义，若元素 $t \in E$ 不是常数，且 $(t')^2 = \alpha^2(4t^3 - g_2 t - g_3)$，其中 $\alpha \in k$、$g_2, g_3 \in C_k$ 和 $27g_3^2 - g_2^3 \neq 0$，则称其为 k 上的魏尔斯特拉斯型 元素。本节将考虑一个更一般的情形。

定义 2。假设 $t \in E$ 在 k 上是超越的，并且 $t' \in k(t)$ 在 $k[t]$上是整的。令 $m(t, X) \in k[t, X]$ 为 t'的首一绝对不可约最小多项式。那么，$K := k(t, t')$ 是单变量代数函数域，也是 $(k, ')$ 的微分扩张。我们称 K 为 k 的 Weierstrass 型扩张 。

如果 t 在 k上是超越的且为魏尔斯特拉斯型的，那么 $k(t, t')$ 是一种 Weierstrass 型扩张。定义 2 还推广了 Bronstein 关于单项式扩张的概念 [6, 第 3 节。4]。单项式扩张是满足 $m(t, X) = X - s(t)$（对某个 $s \in k[t]$）的 Weierstrass 型扩张。在单项式扩张中，如果多项式 $p \in k[t]$ 满足 $p \mid p'$，则称其为特殊多项式。特殊性与

K 拥有比 k 更多的常数，以及微分以不同于通常导子 $\frac{d}{dx}$ 的方式影响阶有关。这就是特殊多项式需要特别关注的原因。 —

在我们的情形中，存在非平凡的代数扩张，因此即使 p 是多项式， p' 也未必是多项式。所以，我们需要细化 Weierstrass 型扩张中「特殊」这一概念。

定义3。设 $\beta \in k$。我们称 β 为 m 的特殊点，如果 $m(\beta, \beta') = 0$。对于不可约多项式 $p \in k[t]$，若 p 有一个根是特殊点，则称其为特殊的（相对于 m）。否则，称 p 为正规的。

根据 [6, 定理 3.2，4], 任何代数扩张上的 k-自同构都与导子交换。因此，共轭保持特殊性。所以，如果多项式 p 的一个根是特殊点，那么 p 的所有根都是特殊点。特殊点的定义对应于 [6, 定理 3.43]。

对于 $q \in k[t]$，我们令 $\kappa(q)$ 表示对 q 的系数求导后得到的多项式，并令 $\partial_t(q) = \frac{d}{dt}(q)$ 表示 q 关于 t 的形式导数。运算 κ 和 ∂_t 都是 $k[t]$上的导子，且 $q' = \kappa(q) + \partial_t(q)t'$。显然， q' 在 $k[t]$ 上是整的，因为 t' 是整的。

定理 4. 设 $p \in k[t]$ 不可约。当且仅当存在一个位于 p 之上的 K 的赋值点 P，使得 $\nu_P(p') > 0$时， p 是特殊的。

证明。 设 $\beta \in k$ 是 p的一个根。假设 $p = (t-\beta)\tilde{p}$，其中 $\tilde{p} \in k(\beta)[t]$且 $\tilde{p}(\beta) \neq 0$。于是:

$$\kappa(p) = -\beta'\tilde{p} + (t-\beta)\kappa(\tilde{p}), \quad \partial_t(p) = \tilde{p} + (t-\beta)\partial_t(\tilde{p}). \tag{3}$$

回顾一下， t' 在 $k[t]$上是整的。对于位于 p之上的任意赋值点 P，将其映射到剩余域 Σ_P，可得

$$\overline{p'} = \overline{\kappa(p)} + \overline{\partial_t(p)}\,\overline{t'}.$$

由于 Σ_p 可通过 $\Sigma_p \cong k(\beta)$视为 Σ_P 的子域，因此

$$\overline{p'} = \tilde{p}(\beta)\left(\overline{t'} - \beta'\right).$$

因此， $\nu_P(p') > 0$ 当且仅当 $t' \equiv \beta' \in \Sigma_P$。

首先，假设对于某个位于 p之上的赋值点 P， $\nu_P(p') > 0$。那么 $t' = \beta'$。由于 $m(t, t') = 0$，将其映入剩余域可得 $m(t, t') = \bar{0}$，因此$m(\beta, \beta') = 0$，即 $\bar{p}$ 是特殊的。

反过来，假设 p 是特殊的。那么 $m(\beta, \beta') = 0$，因此 β' 是 $m(\beta, X)$的一个根。假设 $m(\beta, X) = (X-\beta')^s \tilde{m}(X)$，其中 $\tilde{m}(X) \in k(\beta)[X]$ 且$\tilde{m}(\beta') \neq 0$。根据 [28, 定理 3.3.7], ，存在一个位于 p 之上的 K 的赋值点 P，使得$t' = \beta' \in \Sigma_P$。因此 $\nu_P(p') > 0$。

■

该定理表明，定义3将特殊多项式的概念推广到了 [6, 第3节4]。

定义5. 如果 q 无平方因子，且 q 的所有不可约因子都是正规的，则称多项式 $q \in k[t]$ 为正规。

命题 6. 设 $q \in k[t]$ 是一个正规多项式，且 p 是 q的一个不可约因子。那么对于每个位于 p之上的赋值点 P， $\nu_P(q') = 0$ 。

证明。 将 $q = p\tilde{q}$ 写为使得最大公因数 gcd$(p, \tilde{q})$ 为 $= 1$。于是 $q' = p'\tilde{q} + p\tilde{q}'$。对于任何位于 p之上的 K的赋值点P，根据定理 4，有 $\nu_P(p') = 0$。因此 $\nu_P(p'\tilde{q}) = 0$。注意，由于 $\tilde{q}'$在 $k[t]$上是整的，$\nu_P(p\tilde{q}') > 0$。故 $\nu_P(q') = 0$。 ∎

现在我们引入 K中特殊赋值点的概念。

定义 7. 设 P 是位于 $p \in k[t]$之上的 K 的一个有限赋值点。如果 $\nu_P(p') > 0$，则称 P 为特殊赋值点；如果 $0 < \nu_P(p') < \nu_P(p)$，则称其为零阶型特殊 。若 $\nu_P(p') = 0$，则称 P 是正规 的。

扩展 Bronstein 的 [6] 特殊多项式理论时，我们会遇到零阶型赋值点，而单项式扩张中不会出现这类赋值点。“零阶型”这一名称与 Bronstein 的第一类情形 $\nu_P(p') = \nu_P(p)$ 相对，因为零阶型情形对应于 $\nu_P(p') < \nu_P(p)$。零阶型赋值点可以有效控制微分后的阶，并且是将在第 6 节中发展的特殊约化所涉及的唯一赋值点。如果 P 是位于 p之上的特殊赋值点，那么根据定理 4， p 也属于特殊赋值点。

命题 8。 设 P 是位于 $p \in k[t]$之上的 K 的有限赋值点，并设 r 是 P的分歧指数。那么，对于任意 $f \in K \setminus \{0\}$:

(i) If $\nu_P(f) = 0$, *then* $\nu_P(f') \geq \min\{0, \nu_P(p') - r + 1\}$.

(ii) 如果 $\nu_P(f) \neq 0$，则 $\nu_P(f') \geq$最小值$\{\nu_P(f)\ \nu_P(f) + \nu_P(p') - r\}$，当且仅当 P 是正规或零阶型特殊赋值点时等号成立。

证明。 注意，根据 (2)， $\nu_P(p) = r$。令 $v = \nu_P(f)$。假设 f具有如下形式的局部展开： $f = b_0 p^{\frac{v}{r}} + b_1 p^{\frac{v+1}{r}} + \cdots$，其中$b_i \in \bar{k}$且 $b_0 \neq 0$。对 f 求导，得

$$f' = b_0' p^{\frac{v}{r}} + b_1' p^{\frac{v+1}{r}} + \cdots + p' \left(\frac{v}{r} b_0 p^{\frac{v-r}{r}} + \frac{v+1}{r} b_1 p^{\frac{v+1-r}{r}} + \cdots \right).$$

(i) 若 $v = 0$，则 f' 的阶不小于 p^0和 $p'p^{\frac{1-r}{r}}$ 各自的阶。

(ii) 若 $v \neq 0$，则 f'的阶不小于 $p^{\frac{v}{r}}$和 $p'p^{\frac{v-r}{r}}$各自的阶。因此， $\nu_P(f') \geq \min\{v, v + \nu_P(p') - r\}$。若 P是正规或零阶型特殊的，则 $\nu_P(p') < r$。因此， $p'p^{\frac{v-r}{r}}$支配着 f'的阶，因为其阶严格小于 $p^{\frac{v}{r}}$。于是 $\nu_P(f') = v + \nu_P(p') - r$。 ∎

推论 9. 如果 K 的所有特殊赋值点都是零阶型，那么 K 的常数域与 C_k一致。

证明. 设 $c \in K$ 为一个常数，即 $c' = 0.$。假设 $c \notin k$，那么存在 K 的一个赋值点 P，使得根据 [12, 第 9 页的推论 3]， $\nu_P(c) < 0$。注意， P 要么是正规点，要么是零阶型的特殊赋值点。由命题 8 可得，$\nu_P(0) = \nu_P(c')$ 是一个有限数，这就产生了矛盾。 ∎

此外，为了研究第 6 节中的初等可积性，我们还需要一个关于无穷远赋值点的命题 8 的类似结论。

命题 10. 设 P 是 K 的一个无穷赋值点，其分歧指数为 r。那么，对于任意的 $f \in K \setminus \{0\}$:

(i) *If* $\nu_P(f) = 0$, *then* $\nu_P(f') \geq \min\{0, \nu_P(t') + r + 1\}$.

(ii) 若 $\nu_P(f) \neq 0$, 则 $\nu_P(f') \geq \min\{\nu_P(f), \nu_P(f) + \nu_P(t') + r\}$。

证明。 由 (2) 可知 $\nu_P(t) = -r$。令 $v = \nu_P(f)$。假设 f在无穷远处有局部展开: $f = b_0 t^{\frac{-v}{r}} + b_1 t^{\frac{-v-1}{r}} + \cdots$，其中 $b_i \in \bar{k}$ 且 $b_0 \neq 0$。对 f 求导得

$$f' = b_0' t^{\frac{-v}{r}} + b_1' t^{\frac{-v-1}{r}} + \cdots + t' \left(\frac{-v}{r} b_0 t^{\frac{-v-r}{r}} + \frac{-v-1}{r} b_1 t^{\frac{-v-1-r}{r}} + \cdots \right),$$

由此，仿照命题 8 的证明即可推出断言 (i) 和 (ii)。 ∎

5 Hermite约化

符号积分中的一项核心算法技术是 Hermite约化，它将被积函数分解为可积部分和极点受控的余项。Risch [24, 5, 6], 通过整基将该方法从有理函数 [21, 16] 扩展到超越初等函数，而 Trager [29, 5]则将其扩展到代数函数。近期, Hermite约化已推广至 D-有限函数 [4, 11, 30, 9]。

在本节中，设 $K = k(t, t')$ 是 k上的 Weierstrass 型扩张，并设 $m \in k[t, X]$ 是 t' 的首一最小多项式，其在 X中的次数为 n。设 $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ 是 K的一个整基。那么，元素 $f \in K$可写为 $f = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{D} \omega_i$，其中存在某个 $D, f_i \in k[t]$，使得 $\gcd(D, f_1, \ldots, f_n) = 1$。这样的 D 在相差 $\bar{k}$的非零乘法因子的意义下唯一。我们称 D 为 f 相对于 $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$的分母 。写作 $D = D_N D_S$，其中 D_N 的所有不可约因子均为正规因子，而 D_S 的所有不可约因子均为特殊因子。注意，D_N 与 D_S 互素。关于如何在不进行不可约因式分解的情况下计算 D_N 和D_S 的算法，请参见附录 A。

根据扩展欧几里得算法，可以唯一地将 f 分解为$\mathcal{N}(f) + \mathcal{S}(f)$，其中

$$\mathcal{N}(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{D_N} \omega_i, \text{ and } \mathcal{S}(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{D_S} \omega_i$$

对于某个 $a_i, b_i \in k[t]$，满足 $\deg(a_i) < \deg(D_N)$。我们分别称 $\mathcal{N}(f)$ 和 $\mathcal{S}(f)$ 为 f 的正规部分和特殊部分。我们称 $\mathcal{N}(f) + \mathcal{S}(f)$ 为 f 关于 $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ 的典范表示。$\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{S}$ 都可以视为作用在 K 上的 k-线性算子。

Hermite约化的思路是通过导数来降低D_N 的因子的重数。我们先给出一个技术引理，它类似于 [29, 第 4 节中的一个结果2]。稍后将用它来保证Hermite约化的正确性。

引理11. 设 $v \in k[t]$ 是一个正规多项式，$\mu > 1$ 是一个整数。令$\psi_i := v^{\mu}\left(v^{1-\mu}\omega_i\right)'$，其中 $i = 1$、.....、n。那么 $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ 是 v处的局部整基。

证明。设 p 是 v的任意一个不可约因子，设 Q 是 K的一个赋值点，位于 p 之上，且分歧指数为 r_Q。那么 Q是正规的。由于每个 ω_i 都在 $k[t]$上整，依命题 8，$\nu_Q(\omega_i') > -r_Q$。注意，v 是正规的。于是依命题 6，$\nu_Q(v') = 0$。因此，由于 $\psi_i = v\omega_i' - (\mu - 1)v'\omega_i$，有 $\nu_Q(\psi_i) \geq 0$。由此可知，ψ_i 在 p处是整的。因此，ψ_i 在 v处是整的。

有两种情况会导致 $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ 在 v处不是局部整基：(i) $\psi_1, \ldots, \psi_n$ 关于 $\mathcal{O}_v$ 线性相关；(ii) $\psi_1, \ldots, \psi_n$ 关于 $\mathcal{O}_v$线性无关，但存在一个在 v 处为整的元素，它不能表示为 $\psi_1, \ldots, \psi_n$的 $\mathcal{O}_v$-线性组合。在这两种情况下，都存在一个在 v处为整的 $F \in K$，使得 $F = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n} c_i\psi_i$，其中 $c_1, \ldots, c_n \in k[t]$ 不全为零，且对于某个 j，有 $v \nmid c_j$。我们将从存在这样的元素 F 推出矛盾。

设 $G = \sum_{i=1}^{n} c_i'\omega_i$。注意，由于 $c_i \in k[t]$，c_i' 在 $k[t]$ 上整，因此 G也如此。我们有：

$$F + G = v^{\mu-1}\sum_{i=1}^{n}\left(c_i(v^{1-\mu}\omega_i)' + c_i'v^{1-\mu}\omega_i\right) = v^{\mu-1}\sum_{i=1}^{n}(c_iv^{1-\mu}\omega_i)'. \qquad (4)$$

设 $H = \sum_{i=1}^{n} c_iv^{1-\mu}\omega_i = v^{2-\mu}\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{v}\omega_i$。于是 $H \neq 0$。由于 $v \nmid c_j$，v 的某个不可约因子 p 出现在 $\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{v}\omega_i$的分母中。因此，存在一个位于 p 上方的 K 的赋值点 P，使得 $\nu_P(H) < \nu_P\left(v^{2-\mu}\right)$，其中 ν_P表示 P处的阶函数。设 r_P 为 P的分歧指数。由 $\mu > 1$，则$\nu_P(H) < (2-\mu)r_P \leq 0$。由命题 8，则 $\nu_P(H') < (1-\mu)r_P = \nu_P\left(v^{1-\mu}\right)$。

然而，由 (4) 得 $H' = v^{1-\mu}(F+G)$，这与 $F+G$在 v处是整的相矛盾。

■

现在我们介绍 K中的Hermite约化。为方便起见，假设$f = \mathcal{N}(f) = \sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{D}\omega_i \in K$。那么，$D$的所有不可约因子都是正规的。

设 $D = uv^{\mu}$，其中 $\mu > 1$ 是整数，v 是无平方因子，最大公因数$(u, v) = 1$，并且 $\tilde{}$ 的所有不可约因子的重数都小于 μ。令 $f := fD$，它在 $k[t]$上是整的，并定义 $\psi_i := \left(v^{1-\mu}\omega_i\right)'D$。根据引理11，$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ 是 v 处的局部整基。现在降低 v 的重数。我们计算 $c_1, \ldots, c_n \in k(t)$，使得 $\tilde{f} = \sum_{i=1}^{n} c_i\psi_i$。于是 $c_i \in \mathcal{O}_v$。对于每个 i，我们可以

找到 $r_i \in k[t]$，使得 $\deg_t r_i < \deg_t v$ 且 $r_i \equiv c_i \mod v$。令 $\tilde{g} = \sum_{i=1}^{n} r_i \psi_i$。于是，对于某个 $R \in K$，有 $f - \tilde{g} = vR$，且该元素在 v 处是整的。因此

$$f = \frac{\tilde{g} + vR}{D} = \sum_{i=1}^{n} r_i (v^{1-\mu}\omega_i)' + \frac{R}{uv^{\mu-1}}.$$

通过分部积分，

$$f = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{r_i}{v^{\mu-1}} \omega_i \Big)' + \frac{R}{uv^{\mu-1}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i'}{v^{\mu-1}} \omega_i. \tag{5}$$

令 $g = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{v^{\mu-1}} \omega_i$。由于 r_i' 在 $k[t]$上是整的，根据 (5)，$f - g'$关于 $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ 的分母在 v处的重数小于 μ。

然而，导数 g' 可能会引入新的分母因子，因为 ω_i'不一定在 $k[t]$上是整的。记 $\vec{\omega} = (\omega_1, \ldots\ldots, \omega_n)^\tau$，其中$\tau$ 表示向量的转置。设 $e \in k[t]$ 和 $M = (m_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in k[t]^{n\times n}$满足

$$e\big(\vec{\omega}\big)' = M\vec{\omega}$$

且 $\gcd(e, m_{1,1}, \ldots\ldots, m_{n,n}) = 1$。那么，$e$ 在相差一个 k中的非零乘法因子的意义下是唯一的。我们称 $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$的微分分母 为 e。记$\vec{r} = (r_1, \ldots\ldots, r_n)^\tau$。那么 $g = \frac{\vec{r}^\tau \vec{\omega}}{v^{\mu-1}}$。直接计算可得

$$g' = \underbrace{\frac{(\vec{r}^\tau)'\vec{\omega}}{v^{\mu-1}} + \frac{(1-\mu)v'\vec{r}^\tau\vec{\omega}}{v^{\mu}}}_{A} + \frac{\vec{r}^\tau M\vec{\omega}}{ev^{\mu-1}}, \tag{6}$$

其中 e 可能会引入分母的新因子。

引理 12. $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ 的微分分母 $e \in k[t]$ 无平方因子。

证明。令 p 为 e的一个不可约因子，并写作 $e = e_0 p$。于是 $p\omega_i' = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_{i,j}}{e_0} \omega_j$。由命题 8，$\nu_P(p\omega_i') > 0$ 对 K 中位于 p之上的任意赋值点 P 都成立，即 $p\omega_i'$在 p处为整。由于 $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$是一个整基，$\frac{m_{i,j}}{e_0} \in \mathcal{O}_p$。于是 $p \nmid e_0$由最大公因数($\gcd(e, m_{1,1}, \ldots, m_{n,n})$) $= 1$。因此，e无平方因子。 ∎

注 13. 微分分母 e 可能含有特殊的不可约因子。例如，令 $K = \mathbb{Q}(t, t')$ 满足 $(t')^3 = t$。那么 0 是 $X^3 - t$的一个特殊点，因此 t 是特殊的。由于 $t'' = (t')^2/(3t)$，$\{1, t', t''\}$ 的微分分母可被 t整除。

上述约化不会引入更高的重数。剩余的难点在于可能出现新的特殊因子。一般而言，被积函数的特殊极点很难处理。幸运的是，可以通过如下额外修改去除新引入的特殊因子。

使用（6）中的记号，我们假设 $\gcd(e, v) = d$ 且 $e = e_1 d$。那么，由于 e 是无平方因子的，e_1 与 v 互素。根据扩展欧几里得算法，我们

可以找到 $\vec{a}^\tau = (a_1, \ldots, a_n)^\tau \in k[t]^n$，使得 $\deg_t a_i < \deg_t v$ 且 $v^{\mu-1}\vec{a}^\tau + \vec{r}^\tau = e_1 b^\tau$，其中 $b^\tau \in k[t]^n$。令 $g_a = \vec{a}^\tau \vec{\omega}$。于是

$$g' + g'_a = A + \left(\vec{a}^\tau\right)' \vec{\omega} + \frac{\left(\vec{r}^\tau + v^{\mu-1}\vec{a}^\tau\right) M\vec{\omega}}{e} = B + \frac{\vec{b}^\tau M\vec{\omega}}{d}, \tag{7}$$

其中 $B = A + \left(\vec{a}^\tau\right)'\vec{\omega}$。由于 v是正规的，故 d也是正规的。于是 B的分母中没有特殊因子。因此，我们通过加上 g'_a来消去 g' 的特殊极点。此外， g'_a 的分母是 e的一个因子，而 e是无平方因子的。

于是由(5)和(7)， $f - (g + g_a)'$的分母是正规不可约因子的乘积，其中每个因子在 v处的重数都小于 μ。重复这一约化过程，直到被积函数具有无平方因子的分母，我们得到：

定理 14. 设 $f \in K$。则存在 $g \in K$、 $f_0 \in K$，它们具有整除 e的正规分母，以及 $h = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{D_*} \omega_i$，其中 D_* 是正规的且与 e互素，次数 $h_i <$ 次数 D_*，使得

$$\mathcal{N}(f) = g' + f_0 + h.$$

此外， h 是唯一的，并且当 $f \in K'$时， $h = 0$。

证明。 根据前面的讨论，可以找到 $g \in K$，使得 $w = \mathcal{N}(f) - g'$ 具有正规分母。写作$w = \sum_{i=1}^{n} w_i \omega_i$，其中 $w_i \in k(t)$，然后对 w_i 的分子应用扩展欧几里得算法，即可得到所需的分解 $w = f_0 + h$。

剩下要证明 h 的唯一性，并验证当 f 是 K中的一个导数时， $h = 0$。为了证明 h 的唯一性和域内可积性，只需说明：若 $h + f_0$ 或 $h + f_0 + \mathcal{S}(f)$属于 K'，则 $h = 0$。

设 $F \in K$满足 $F' = h + f_0 + \alpha$，其中 $\alpha = 0$或 $\alpha = \mathcal{S}(f)$。对于任意正规不可约 $p \in k[t]$，令 P 为 K 中位于 p 之上且分歧指数为 r_P的任意赋值点。则 $\nu_P(F) \geq 0$. 否则，根据命题 8， $\nu_P(F') < -r_P$，即 $\nu_P(pF') < 0$，这与 p 在 F' 的分母中的重数至多为一这一事实矛盾。

结论 $\nu_P(F) \geq 0$蕴含 $\mathcal{N}(F) = 0$。于是， F可以写成 $\frac{\vec{\rho}^\tau \vec{\omega}}{H}$，其中 $\vec{\rho}^\tau \in k[t]^n$、 $\vec{\omega} = (\omega_1, \ldots\ldots, \omega_n)^\tau$，且 $H \in k[t]$ 仅含不可约特殊因子。于是

$$F' = \frac{\left(\vec{\rho}^\tau\right)' \vec{\omega}}{H} - \frac{H' \vec{\rho}^\tau \vec{\omega}}{H^2} + \frac{\vec{\rho}^\tau M\vec{\omega}}{eH}.$$

由于 H'以及 $\left(\vec{\rho}^\tau\right)'$的所有元素都是 $k[t]$上的整元， F'的分母没有不可约因子，而该因子是正规且与 e互素的。因此， $h = 0$。

■

我们将定理 14 中的元素 h 称为 f （相对于$\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$）的 ***Hermite*余项** 。上述 Hermite约化自然转化为一种用于计算定理 14 中 f_0、 g 和 h 的算法。结果取决于所选择的整基。

例15。 设 $k=\mathbb{C}(z)$ 配备了 $'=d/dz$ 和 $k(t、\ t')$，是 k上的类 *Weierstrass* 扩张，其中 $(t')^2=4t^3-g_2t-g_3$、 $g_2=0$ 和 $g_3=-4$。我们计算函数的整

$$f=\frac{(t^2-t-1)t'-4+(2z+2)t^4+(4z+2)t^3-4zt^2-4t}{(t+1)t^2}.$$

令 $\{1,t'\}$ 为 $k(t,t')$ 的选定整基。可以验证，0 不是特殊点，而 -1 是。因此，t 是正规的， $t+1$ 是特殊的。通过应用扩展欧几里得算法，我们得到 f 关于 $\{1,t'\}$ 的典范表示： $f=\mathcal{N}(f)+\mathcal{S}(f)$，其中

$$\mathcal{N}(f)=\frac{-4-t'}{t^2},\qquad \mathcal{S}(f)=\frac{2(z+1)t^2+2(2z+1)t-4z+t'}{t+1}.$$

为了降低 $\mathcal{N}(f)$ 的分母中 t 的重数，我们令 $\psi_1=t^2(t^{-1})'=-t'$ 且 $\psi_2=t^2(t^{-1}t')'=2t^3-4$。根据引理*11*， $\{\psi_1,\psi_2\}$ 是 t 处的局部整基。我们可以找到 $c_1=1$ 和 $c_2=-\frac{4}{2t^3-4}$，使得 $\mathcal{N}(f)$ 的分子为 $c_1\psi_1+c_2\psi_2$。然后可以计算出 $r_1=1$ 和 $r_2=1$，使得 $\deg_t r_i<\deg_t t$ 且 $r_i\equiv c_i \bmod t$。令 $g=\frac{r_1+r_2t'}{t}$，则有 $\mathcal{N}(f)=g'-2t$。因此， f 的 *Hermite* 余项为 *0*。

特殊部分 $\mathcal{S}(f)$ 将在下一节中处理。

6 特殊约化与多项式约化

在本节中，设 $K=k(t,t')$ 为 k 的 Weierstrass 型扩张，且 $m\in k[t,X]$ 为 t'的首一最小多项式。我们假设 $m=X^2-q$，其中 $q\in k[t]$ 无平方因子，且 $\deg_t q\geq 3$。在这样的 K中，可以刻画由 k上的超越魏尔斯特拉斯元素所生成的扩张。

对于 $f\in K$，定理 14 将其正规部分分解为 Hermite余项 h、域内可积部分 g'以及不具有域内可积性的障碍项 f_0 之和。由于可能出现此类障碍项，Hermite约化仅作为正规部分的预处理器。此外， f 的特殊部分尚未处理。

本节的目标是通过另外两种约化来控制这些未处理的部分，它们分别称为特殊约化 和多项式约化。

首先，我们约化特殊部分。一般而言，确定 m 的所有特殊点都很困难，这等价于求出一个一阶微分方程的所有代数解。为了避开这一困难，本节中我们作出以下技术性假设：

假设 16. m 的每个特殊点都是 k 中的常数。

根据上述假设， $q(\beta)=0$ 当且仅当 β 是 m的特殊点。因此， m 的特殊点是 q的常数根。

注 17。 当 k 是由 *[27, 命题 3.2]*扩张的 C_k 和$q \in C_k[t]$ 的李乌维尔扩张时，该假设成立。

引理18. 设 $\beta \in k$ 和 $\beta^{\mathcal{T}} = 0$。若 $p \in k[t]$ 是 β的首一最小多项式，则 $p \in C_k[t]$。特别地，若 $p \in k[t]$ 不可约且特殊，则 p是 q 的一个因子，且其系数为常数。

证明. 对 $p(\beta) = 0$两边求导，可得 $\kappa(p)(\beta)+\beta'\partial_t(p)(\beta) =0$。因此 $\kappa(p)(\beta) = 0$，即 $p \mid \kappa(p)$。由于 p 是首一的，故 $\deg_t \kappa(p) < \deg_t p$。所以 $\kappa(p) = 0$，即 p 的所有系数都是常数。 ∎

引理 19. 设 $p \in k[t]$ 不可约且特殊。则存在唯一一个赋值点 P，位于 K 之上且在 p之上。特别地，$\nu_P(p) = 2$, $\nu_P(p') = 1$ 和$\nu_P(t') = 1$。

证明。 由于 p 不可约且特殊，我们有 $p \mid q$ 和 $p \in C_k[t]$。设 P是位于 p 之上的一个特殊赋值点，其分歧指数为 r_P，并令 $v = \nu_P(t')$。由于 $p' = t'\partial_t(p)$且最大公因数$\big(p,\ \partial_t(p)\big) = 1$，因此我们有 $\nu_P(p') = v$。由于$(t')^2 = q$且 q无平方因子，可得 $2v = r_P$。于是 $r_P \geq 2$。根据 [12, 第 52 页定理 1], P 是位于 p 之上的唯一赋值点，并且 $r_P = [K : k(t)] = 2$。因此，$v = 1$。 ∎

根据上述引理，K 的所有特殊赋值点均为零阶型。由推论 9，C_k是 K 的常数域。

根据 [29, 第 31]页，$\{1, t'\}$ 是 K的整基。记 $q = q_N q_S$，其中$q_N \in k[t]$ 是正规的，$q_S \in k[t]$ 是首一的，且其所有不可约因子都是特殊的。于是 $q_S \in C_k[t]$，并且

$$t'' = \frac{\kappa(q_N)}{2q_N}t' + \frac{\partial_t(q)}{2}.$$

因此，q_N 是 $\{1, t'\}$的微分分母。记 I_K 为 K 中在 $k[t]$上整的元素集合。在基 $\{1, t'\}$下，Hermite约化简化了被积函数的正规部分。

现在我们描述特殊约化，该约化会降低特殊部分模导数的分母中因子的重数。假设$f \in K$的特殊部分为 $\mathcal{S}(f) = \frac{A+Bt'}{D}$，其中 A，B，$D \in k[t]$，D是首一的，且最大公因数$(A,\ B,\ D) = 1$。假设 $D = \overline{uv^\mu}$，其中 $\mu > 0$，v是无平方因子的，并且与 u互素，且 u 的因子的重数小于 μ。根据假设 16，u，$v \in C_k[t]$，并且 v整除 q。令 $q_v = q/v \in k[t]$。对于 a，$b \in k[t]$和 $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，通过直接计算可得

$$\left(\frac{a}{v^\lambda}\right)' = \frac{\kappa(a) + \partial_t(a)t'}{v^\lambda} - \frac{\lambda a\partial_t(v)t'}{v^{\lambda+1}} \tag{8}$$

and

$$\left(\frac{bt'}{v^\lambda}\right)' = \frac{b_1 t'}{q_N v^\lambda} + \frac{b_2}{v^{\lambda-1}} + \frac{(1-2\lambda)bq_v\partial_t(v)}{2v^\lambda} \tag{9}$$

对于某个 $b_1, b_2 \in k[t]$.，其过程如下:

(i) 若 $\mu \geq 1$，我们计算 $b \in k[t]$，使得 $\deg_t b < \deg_t v$ 并且

$$(1-2\mu)ubq_v\partial_t(v) \equiv 2A \mod v.$$

这样的 b 可以找到，因为 q_v、$\partial_t(v)$ 和 u 与 v 互素。由（9）可得

$$\tilde{f} := \mathcal{S}(f) - \left(\frac{bt'}{v^\mu}\right)' = \frac{\tilde{A}}{uv^{\mu-1}} + \frac{\tilde{B}t'}{uv^\mu} + R \tag{10}$$

对于某些 $\tilde{A}$，$\tilde{B} \in k[t]$ 和 $R \in \frac{I_K}{q_N}$。

（ii）若（10）中的 μ 大于或等于 2，则计算 $a \in k[t]$，使得 $\deg_t a < \deg_t v$，并且

$$(\mu-1)ua\partial_t(v) \equiv \tilde{B} \mod v.$$

这样的 a 可以找到，因为 u，$\partial_t(v)$ 与 v 互素。根据（8），$\tilde{f} + \left(\frac{a}{v^{\mu-1}}\right)'$ 有一个分母，其中 v 的重数至多为 $\mu-1$。

对 $\mathcal{S}(f)$ 重复（i）和（ii），可得

定理 20。设 $f \in K$。则存在 $g \in K$、$f_1 \in \frac{I_K}{q_N}$ 和 $s = \frac{\theta}{\gamma}t'$，其中 $\gamma \in k[t]$ 是无平方因子且仅含不可约特殊因子，$\theta \in k[t]$ 且次$_t\,\theta <$ 次$_t\,\gamma$，使得

$$\mathcal{S}(f) = g' + f_1 + s.$$

此外，s 是唯一的，并且 $s = 0$，如果 $f \in K'$。

证明。根据上文给出的 (i) 和 (ii)，存在 $g \in K$ $\mathcal{S}\ f\ - g' =$，使得 ( )，其中，，，且无平方因子，并且只有特殊因子。将 θ_0 除以 γ，即可得到所需的 θ 和 f_1。

现在我们证明 s的唯一性和域内可积性。与定理 14 的证明类似，只需证明 $s = 0$，如果 $f_1 + s + \alpha \in K'$，其中$\alpha = 0$或 $\alpha = \mathcal{N}(f)$。

假设 $s \neq 0$，并令 $F \in K$满足 $F' = f_1 + s + \alpha$。设 p是 γ 的一个不可约因子，P 是位于 p上方的赋值点。根据引理 19，$\nu_P(p) = 2$ 且$\nu_P(p') = \nu_P(t') = 1$。

我们断言 $\nu_P(F) \geq 0$。否则，由命题 8，$\nu_P(F') = \nu_P(F) - 1 \leq -2$。另一方面，$\gamma$无平方因子，因此 $\nu_P(s) \geq \nu_P(\frac{t'}{\gamma}) = -1$。于是，由于 f_1 与 z 在 p 处为整，故 $\nu_P(F') \geq -1$，矛盾。该断言成立。

再由命题 8，$\nu_P(F) \geq 0$ 蕴含 $\nu_P(F') \geq 0$。由于 P 是位于 p 之上的唯一赋值点，F' 在 p 处为整，这与 $\{1, t'\}$ 是整基且 $F' = f_1 + \frac{\theta}{\gamma}t' + z$ 这一事实矛盾。■

对于给定的 $f \in K$，上述特殊约化计算出定理 20 中的 f_1，g 和s。我们称 f（相对于 $\{1, t'\}$）的 s 特殊余项。现在说明如何使用特殊约化来对例15中的 $\mathcal{S}(f)$ 积分。

例21。我们有 $q = 4(t^3+1)$。于是 $q_N = 4$ 和 $q_S = t^3+1$。回顾一下，$\mathcal{S}(f) = \frac{A+Bt'}{D}$，其中 $A = 2(z+1)t^2 + 2(2z+1)t - 4z$、$B = 1$ 和 $D = t+1$。于是 $u = 1$、$v = t+1$、$\mu = 1$ 和 $q_v = 4(t^2-t+1)$。可以找到这样的 $b = z$，使得 $\deg_t b < \deg_t v$，并且 $(1-2\mu)\, ub\, q_v\, \partial_t(v) \equiv 2A$ 模 v。于是，(10) 中的 $A = 0$、$B = 0$ 和 $R = 2t$。因此，$\mathcal{S}(f) = \left(\frac{zt'}{t+1}\right)' + 2t$。$f$ 的特殊余项为 0。

结合例15中的结果，我们看到 $\mathcal{N}(f)$与 $\mathcal{S}(f)$ 中的障碍项相互抵消，因此 $f \in K'$，即

$$\int f\, dz = \frac{1+t'}{t} + \frac{zt'}{t+1}.$$

根据定理 14 和定理 20，K 的每个元素都可分解为其Hermite余项、特殊余项与 $\frac{I_K}{q_N}$中某个元素之和。为控制无穷远极点，我们发展多项式约化以简化 $\frac{I_K}{q_N}$ 的元素。

对于 $f \in \frac{I_K}{q_N}$，我们可以写成 $f = \frac{a+bt'}{q_N} + w + rt'$，其中 $a, b, w, r \in k[t]$，且 $\deg_t a$ 与$\deg_t b$均小于$\deg_t q_N$。于是

$$\mathcal{N}(f) = \frac{a+bt'}{q_N} \text{ and } \mathcal{S}(f) = w + rt'.$$

此外，$\mathcal{S}(f)$在 $k[t]$上整。记 $r = r_n t^n + \cdots + r_0$，并令 $\boldsymbol{\Upsilon}(f) := \frac{r_n}{n+1}t^{n+1} + \cdots + r_0 t \in k[t]$。则 $\partial_t\big(\boldsymbol{\Upsilon}(f)\big) = r$。由直接计算，

$$f - \boldsymbol{\Upsilon}(f)' = f - \kappa\big(\boldsymbol{\Upsilon}(f)\big) - rt' = \mathcal{N}(f) + w - \kappa\big(\boldsymbol{\Upsilon}(f)\big).$$

因此，$f - \boldsymbol{\Upsilon}(f)'$的特殊部分是 $w - \kappa\big(\boldsymbol{\Upsilon}(f)\big)$，记作 $\mathcal{S}^*(f)$，它属于 $k[t]$。此外，$\mathcal{S}^*$ 是 $\frac{I_K}{q_N}$上的 k-线性算子。

引理22。对于任意的 $\delta \in k$ 和 $\lambda \in \mathbb{N}$，有$(\delta t^\lambda t')' \in \frac{I_K}{q_N}$，且$\mathcal{S}^*\big((\delta t^\lambda t')'\big)$的次数为 $\lambda - 1 + \deg_t q$，首项系数为 $l(\lambda)\delta$，其中

$$l(\lambda) = \left(\lambda + \frac{\deg_t q}{2}\right) \mathrm{lc}_t(q).$$

证明。直接计算可得

$$\big(\delta t^\lambda t'\big)' = \underbrace{\lambda \delta q t^{\lambda-1} + \frac{\delta \partial_t(q) t^\lambda}{2}}_{\Gamma_1} + \underbrace{\left(\delta' t^\lambda + \delta \frac{\kappa(q_N)}{2q_N} t^\lambda\right)}_{\Gamma_2} t'.$$

因此，$(\delta t^\lambda t')' \in \frac{I_K}{q_N}$。此外，多项式 $\Gamma_1 \in k[t]$ 的次数为 $\lambda - 1 + \deg_t q$，首项系数为 $l(\lambda)\delta$，$\Gamma_2 \in k(t)$和 $\mathcal{S}(\Gamma_2)$要么为0，要么次数为λ。令 $R := \boldsymbol{\Upsilon}\big((\delta t^\lambda t')'\big)$。则 $\partial_t(R) = \mathcal{S}(\Gamma_2)$，且 $\mathcal{S}^*\big((\delta t^\lambda t')'\big) = \Gamma_1 - \kappa(R)$。特别地，$\deg_t R \le \lambda + 1$。由假设$\deg_t q \ge 3$，可得

$$\deg_t \kappa(R) \le \lambda + 1 < \lambda - 1 + \deg_t q = \deg_t \Gamma_1.$$

因此，$\mathcal{S}^*\big((\delta t^\lambda t')'\big)$ 与 Γ_1具有相同的首项。

■

给定 $f \in {}^{I_K}_{q_N}$，令 $d = \deg_t \mathcal{S}^*(f)$，并令 $\varepsilon = \mathrm{lc}_t(\mathcal{S}^*(f))$。若 $d \geq \deg_t q - 1$，则在上述引理中取 λ 和 δ 分别为 $d - \deg_t q + 1$ 和 $\varepsilon / l(\lambda)$。同一引理表明，$\mathcal{S}^*\left((\delta t^\lambda t')'\right)$ 的首项等于 $\mathcal{S}^*(f)$。

设 $\tilde{f} = f - (\delta t^\lambda t')'$。则 $\mathcal{S}^*\left(\tilde{f}\right)$ 的次数小于 d。将此~过程重复应用于 f，直到 $\deg_t \mathcal{S}^*(f) < \deg_t q - 1$，我们找到 $b \in k[t]$，使得 $\mathcal{S}^*(f - b')$ 的次数小于 $\deg_t q - 1$。通过这一降次过程，我们有

定理 23. 设 $f \in {}^{I_K}_{q_N}$。则存在 $g \in K$、$f_2 \in {}^{I_K}_{q_N}$，满足 $\mathcal{S}(f_2) = 0$以及 $\eta \in k[t]$，满足 $\deg_t \eta < \deg_t q - 1$，使得

$$f = g' + f_2 + \eta.$$

此外，f_2 是唯一的，且 $f \in K'$ 当且仅当 $f_2 = 0$ 与 $\eta \in k'$。

定理 23 的证明基于下述引理。

引理 24. *(i)* 设 P 是 K 的一个无穷赋值点，并设 $f = a + bt'$ 满足 $a, b \in k(t)$ 为真分式。那么 $\nu_P(f) \geq \nu_P(t') - \nu_P(t)$。

(ii) 设 $F \in K$ 在 $k[t]$ 上整，$\eta \in k[t]$ 是满足 次数$_t \eta$ <次数$_t q - 1$ 的多项式。若对 K 的任意无穷赋值点 P，都有 $\nu_P(F' + \eta) \geq \nu_P(t') - \nu_P(t)$，则 $F \in k$。

证明. (i) 设 r_P 是 P 的分歧指数。对于任意多项式 $w \in k[t]$，有 $\nu_P(w) = -r_P \deg_t w$，因为 $\nu_P(t) = -r_P < 0$。于是，由 $(t')^2 = q$可得 $\nu_P(t') < 0$。由于 a 和 b 是真分式，

$$\nu_P(a) \geq r_P > r_P + \nu_P(t') \text{ and } \nu_P(bt') \geq r_P + \nu_P(t').$$

(ii) 由于 $\{1, t'\}$ 是一个整基，将 $F = A + Bt'$ 写成 A，$B \in k[t]$。于是 $F' = A_0 + B_0 t' + \mathcal{N}(F')$，其中

$$A_0 = \kappa(A) + \partial_t(B)q + \frac{1}{2}B\partial_t(q),\ B_0 = \partial_t(A) + \kappa(B) + S\left(\frac{\kappa(q_N)B}{2q_N}\right),$$

以及 A_0、$B_0 \in k[t]$。由(i)，$\nu_P\left(\mathcal{N}(F')\right) \geq \nu_P(t') - \nu_P(t)$。由于

$$A_0 + \eta + B_0 t' = F' + \eta - \mathcal{N}(F'),$$

我们有，对任意无穷赋值点 P，$\nu_P(A_0 + \eta + B_0 t')$不小于 $\nu_P(t') - \nu_P(t)$。令

$$C := \frac{t}{t'}(A_0 + \eta + B_0 t') = \frac{(A_0 + \eta)t}{q} t' + B_0 t.$$

于是 C 在 t^{-1}处是整的。由 [29, 第30页命题]，$\{1, t'\}$ 在t^{-1}处是正规的。由 [10, 引理 2] 可知，${}_{(A_0+\eta)_q}{}^t t'$ 与 $B_0 t$ 在~~t^{-1}~~处是整的。因此，$B_0 = 0$。

我们断言 $B = 0$。否则，$B_0 = 0$ 和 $B \neq 0$ 意味着 $\deg_t \partial_t(A) \leq \deg_t B$，即 $\deg_t A \leq \deg_t B + 1$。由于 $\deg_t q \geq 3$，我们有 $\deg_t \kappa(A) \leq \deg_t A \leq$

$\deg_t B + 1 < \deg_t B + \deg_t q - 1$。注意， $\partial_t(B)q + \frac{1}{2}B\partial_t(q)$的次数等于 $\deg_t B + \deg_t q - 1$，它大于 $\deg_t \kappa(A)$。因此

$$\deg_t A_0 = \deg_t B + \deg_t q - 1 > \deg_t \eta.$$

由此可得

$$\deg_t(A_0 + \eta)t = \deg_t A_0 t = \deg_t B + \deg_t q \geq \deg_t q,$$

因此 $\frac{(A_0+\eta)}{q}^t$ 在 t^{-1}处的阶非正。由于 t' 在 t^{-1}处不是整的，$(A_0+\eta)_q{}^t t'$ 也不是整的，这就产生了矛盾。结论成立。

因此，根据 $B_0 = 0$， $A \in k$。由此可得 $F \in k$。 ■

定理 *23* 的证明。令 $b \in k[t]$ 满足 $\mathcal{S}^*(f - b')$ 的次数小于 $\deg_t q - 1$。根据 $\mathcal{S}^*$的定义，我们有

$$f - b' - \big(\Upsilon(f - b')\big)' = \mathcal{N}(f - b') + \mathcal{S}^*(f - b').$$

令 $g = b + \Upsilon(f - b')$、 $f_2 = \mathcal{N}(f - b')$ 和 $\eta = \mathcal{S}^*(f - b')$，即可得到所需的分解。

要证明 f_2 的唯一性以及 f的域内可积性条件，只需证明 $f_2 + \eta \in K'$ 蕴含 $f_2 = 0$ 和 $\eta \in k'$。设对某个 $F \in K$有 $F' = f_2 + \eta$。通过类似于定理 14 和定理 20 证明中的阶比较，可知 F 在 $k[t]$上整。令 P 为 K的一个无穷赋值点，其分歧指数为 r_P。根据引理 24 (i)， $\nu_P(f_2) \geq \nu_P(t') - \nu_P(t)$。因此$\nu_P(F' - \eta) \geq \nu_P(t') - \nu_P(t)$。根据引理 24 (ii)， $F \in k$。因此 $f_2 = 0$ 且$\eta = F' \in k'$。

■

多项式约化的过程自然转化为一种算法，用于计算定理 23 中的 f_2， g 和 η。结合 Hermite 约化、特殊约化和多项式约化，我们得到以下定理。

定理 25. 对于 $f \in K$，我们分别令 h 为 f 关于 $\{1, t'\}$ 的 *Hermite*余项，s 为其特殊余项，如定理 *14* 和定理 *20* 中所述。则存在 $g \in K$、一个不含特殊部分的唯一元素 $l \in \frac{I_K}{q_N}$，以及满足 $\deg_t \eta < \overline{\deg_t} q - 1$ 的 $\eta \in k[t]$，使得

$$f = g' + h + s + l + \eta.$$

此外， $f \in K'$ 当且仅当 h、 s 和 l 均为零，且 $\eta \in k'$。

证明. g， l 和 η 的存在性由定理 14、20 和 23 得出。若 $f \in K'$ 或 $f = 0$，则 $l + \eta \in K'$。因此，由定理 23 可得 $l = 0$ 和 $\eta \in k'$。 ■

尽管定理 25 中的 η 并不唯一，但它在加上 k' 中的一个元素后是确定的。因此，η 的正次数项是唯一的。我们称这样的η 为 f 的多项式余式（相对于 $\{1, t'\}$）。

定理 25 不仅是类魏尔斯特拉斯扩张中域内可积性的判据，也为初等可积性导出了一个必要条件。

推论 26. 假设 C_k 是代数闭的。设 $f \in K$ 和 η 是 f 的多项式余式。若 f 在 K 上有一个初等积分，则 次数 $_t\,\eta \leq$ 次数 $_2{}^t\,q - 1$。

证明。 将 $f = g' + h + s + l + \eta$ 按定理 25 的形式表示，并令 $R = f - g'$。若f 在 K 上有初等积分，则 R也有初等积分。根据 [6, 定理 5.5.2], ，存在$F \in K$、 c_1、.....、 $c_n \in C_k$ 以及 u_1、.....、 $u_n \in K \setminus \{0\}$，使得

$$R = F' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i}.$$

设 P 是 K 的一个分歧指数为 r_P的赋值点。若 P 是正规，则根据命题 8，有 $\nu_P(\frac{u_i'}{u_i}) \geq -r_P$。与定理 14 的证明类似，可以证明 F 没有正规部分。若 P是特殊，则根据命题 8 和引理 19，有 $\nu_P(\frac{u_i'}{u_i}) \geq -1$。与定理 20 的证明类似，可以证明 F 在 $k[t]$上是整的。

若 P是无穷赋值点，则根据（t'）$^2 = q$，有 $\nu_P(t') = -{}^{r_P}$次数$_2{}^t\,q$，这意味着$\nu_P(t') + r_P = {}^{r_P}$(2−次数$_t\,q)_2 < 0$。于是

$$\nu_P\left(\frac{u_i'}{u_i}\right) \geq \nu_P(t') + r_P = \nu_P(t') - \nu_P(t)$$

根据命题 10。此外，由引理 24 (i) 可知， $\nu_P(h)$、 $\nu(s)$ 和 $\nu_P(l)$ 均大于或等于 $\nu_P(t') - \nu_P(t)$。因此 $\nu_P(F' - \eta) \geq \nu_P(t') - \nu_P(t)$。然后$F \in k$ 根据引理 24 (ii)。

若 $\deg_t \eta > 0$，则

$$\nu_P(t') + r_P = \nu_P(t') - \nu_P(t) \leq \nu_P(F' - \eta) = \nu_P(\eta).$$

因此 $\deg_t \eta = -{}^{\nu_P}(r_P{}^{\eta} \leq -{}^{\nu_P})(t')\,r_P - 1 = \deg_2{}^t\,q - 1$。 ■

7 重访开胃菜

现在，我们应用 Hermite约化和 Weierstrass 约化来计算第 2 节中的积分 $I_n(z) := \int \wp(z)^n\,dz$，其中 $n \in \mathbb{N}$。设 $k = \mathbb{C}(z)$ 是配备导子 $' := d/dz$ 的有理函数域。则 k 的常数域为 $\mathbb{C}$。设 $K = k(t,\ t')$ 是一个 Weierstrass 型扩张， $m = X^2 - q \in k[t, X]$ 是 t' 的首一最小多项式，其中 $q = 4t^3 - g_2 t - g_3$，且 g_2， $g_3 \in \mathbb{C}$ 和 $27g_3^2 - g_2^3 \neq 0$。从这个意义上说， t 满足与 Weierstrass-$\wp$ 函数相同的微分方程。于是 $\{1,\ t'\}$ 是 K 的整基。

根据注 17，假设 16 在我们的设定下成立，即 m 中的任意特殊点都是 $\mathbb{C}$ 中的一个常数。因此， t 本身就是一个多项式余式。由于 $\deg_2{}^t\,q - 1 < 1$,t 根据推论 26 在 K 上没有初等积分。与第 2 节一样， $\zeta(z)$表示 t的积分。

注意，对于 $n \in \mathbb{N}$， t^n 和 $(t^n t')'$ 都属于 $k[t]$。由此可得， $\mathcal{S}^*(t^n) = t^n$ 和 $\mathcal{S}^*\big((t^n t')\big) = (t^n t')'$。对 t^2 进行多项式约化可得

$$t^2 = \left(\frac{1}{6}t'\right)' + \frac{g_2}{12}.$$

因此， t^2 的多项式余式为 $\frac{g_2}{12}$， $t^2 \in K'$，即，

$$\int t^2\,dz = \frac{1}{6}t' + \frac{g_2}{12}z.$$

对 t^3进行多项式约化后，我们得到

$$t^3 = \left(\frac{1}{10}tt'\right)' + \frac{3g_2}{20}t + \frac{g_3}{10}.$$

于是， t^3 有一个多项式余式 $\frac{3g_2}{20}t + \frac{g_3}{10}$，因此，根据推论 26， t^3 在 K 上没有初等积分。利用 $\zeta(z)$，我们可以将该积分表示为

$$\int t^3\,dz = \frac{1}{10}tt' - \frac{3g_2}{20}\zeta + \frac{g_3}{10}z.$$

同样，对 t^4 进行多项式约化后可得

$$t^4 = \left(\frac{1}{14}t^2t'\right)' - \frac{g_3}{7}t + \frac{5g_2^2}{336}$$

于是， $-\frac{g_3}{7}t + \frac{5g_2^2}{336}$ 是 t^4的多项式余式，这意味着 t^4 在 k上没有初等积分。借助 $\zeta(z)$， t^4 的积分可表示为

$$\int t^4\,dz = \frac{1}{14}t^2t' + \frac{5g_2}{168}t' + \frac{5g_2^2}{336}z - \frac{g_3}{7}\zeta.$$

事实上，对于任意 $n \in \mathbb{N}$， t^n 都有如下分解：

$$t^n = \left(\frac{1}{4n-2}t^{n-2}t'\right)' + \frac{(n-2)g_3}{4n-2}t^{n-3} + \frac{(2n-3)g_2}{8n-4}t^{n-2}.$$

将 $t = \wp(z)$ 代入该恒等式并对 z 积分，即可得到第2节中关于 $J_n(z)$ 的所述递推式。

参考文献

[1] Stefan T.Boettner. *Risch-Norman*算法的混合超越与代数扩张。博士论文，杜兰大学，美国新奥尔良，2010。

[2] Alin Bostan、陈少时、Fr´ed´eric Chyzak 和 Ziming Li。二元有理函数创造式套消的复杂性。载于第*35*届国际符号与代数计算研讨会论文集，第203–210页。ACM，2010。[3] Alin Bostan、陈少时、Fr´ed´eric Chyzak、Ziming Li 和辛国策。超指数函数的Hermite约化与创造式套消。载于第*38*届国际符号与代数计算研讨会论文集，第77–84页。ACM，2013。[4] Alin Bostan、Fr´ed´eric Chyzak、Pierre Lairez 和 Bruno Salvy。广义Hermite约化、创造式套消与D-有限函数的定积分。载于第*43*届国际符号与代数计算研讨会论文集，第95–102页。ACM，2018。[5] Manuel Bronstein。初等函数的积分。《符号计算杂志》，9(2):117–173，1990。[6]Manuel Bronstein。《符号积分 *I*：超越函数》。Springer-Verlag，柏林，2005。[7] Manuel Bronstein。并行积分的结构定理。《符号计算杂志》，42(7):757–769，2007。[8] 陈少时、杜丽欣和 Manuel Kauers。代数函数的惰性Hermite约化与创造式套消。载于第*46*届国际符号与代数计算研讨会论文集，第75–82页。ACM，2021。[9] 陈少时、杜丽欣和 Manuel Kauers。通过整基对D-有限函数进行Hermite约化。载于第*48*届国际符号与代数计算研讨会论文集，第155–163页。ACM，2023。[10] 陈少时、Manuel Kauers 和 Christoph Koutschan。代数函数的基于约化的创造式套消。载于第*41*届*ACM*国际符号与代数计算研讨会论文集，第175–182页。ACM，2016。[11] 陈少时、Mark van Hoeij、Manuel Kauers 和 Christoph Koutschan。Fuchs型D-有限函数的基于约化的创造式套消。《符号计算杂志》，85:108–127，2018。[12] Claude Chevalley。《单变量代数函数论导论》。美国数学综述，1951。[13] Fr´ed´eric Chyzak 和 Bruno Salvy。Ore代数中的非交换消元证明了多元恒等式。《符号计算杂志》，26(2):187–227，1998。

[14] Hao Du、Yiman Gao、Wenqiao Li 和 Ziming Li。《本原塔中导数的完全约化》。载于《第50届国际符号与代数计算研讨会论文集》，第42–51页。ACM，2025年。[15] Hao Du、Hui Huang 和 Ziming Li。《修正 Abramov-Petkovšek 约化的 A q 类比》。载于《计算机代数进展》，Springer 数学与统计学会议录第226卷，第105–129页。Springer，尚，2018。[16] 夏尔·埃尔米特。《有理分式的积分》。《高等师范学校科学年鉴》，第二辑，1：215–218，1872年。[17] Manuel Kauers。《D-有限函数》。Springer-Verlag，尚，2023。[18] E. R. Kolchin。《微分域的伽罗瓦理论》。《美国数学杂志》，75(4)：753–824，1953年。[19] Christoph Koutschan。《HolonomicFunctions（用户指南）》。技术报告 10-01，RISC 报告系列，林茨大学，奥地利，2010年1月。[20] Partha Kumbhakar 和 Varadharaj R. Srinivasan。《关于 d_∞、 sl_∞及 Weierstrass 域扩张的有限项积分刘维尔定理》。《数学文档》，121：371–383，2023。[21]Mikhail Vasil’evich Ostrogradskiĭ。《有理分式的积分》。圣彼得堡帝国科学院物理数学部通报，4：145–167，286–300，1845年。[22] Jonathan Pila 和 Jacob Tsimerman。《Ax-Schanuel 与特殊可积性》。技术报告 2202.04023，arXiv，2022。[23] Clemens G. Raab 和 Michael F. Singer（编）。《有限项积分：基础文献》。符号计算丛书。Springer，2022年。[24] Robert H. Risch。《有限项积分问题》。《美国数学会汇刊》，139：167–189，1969年。[25] Robert H. Risch。《有限项积分问题的解》。《美国数学会通报》，76：605–608，1970年。[26] Marc Rybowicz。《计算代数函数域整基的算法》。载于《第16届国际符号与代数计算研讨会论文集》，第157–166页。ACM，1991年。[27] Varadharaj Ravi Srinivasan。《一阶非线性微分方程的刘维尔解》。《纯粹与应用代数杂志》，221(2)：411–421，2017年。[28] Henning Stichtenoth。《代数函数域与编码》。Springer，2009年。

[29] Barry M. Trager。《代数函数的积分》。博士论文，麻省理工学院，计算机科学系，1984年。[30] Joris van der Hoeven。《构造创造式套消的约化：一般微分有限情形》。《工程、通信与计算中的应用代数》，32(5)：575–602，2021年11月。[31] Mark van Hoeij。《计算代数函数域整基的算法》。《符号计算杂志》，18(4)：353–363，1994年。[32] E. T. Whittaker 和 G. N. Watson。《现代分析教程》。剑桥数学文库。[33] Doron Zeilberger。《特殊函数恒等式的全纯系统方法》。《*J. Comput. Appl. Math.*》，32：321–368，1990年。

分裂因子分解

设 $K = k(t,\ t')$ 是 k 上的 Weierstrass 型扩张，且 $m \in k[t, X]$ 是 t' 的首一最小多项式。对于任意 $D \in k[t]$，存在 $D_N,\ D_S \in k[t]$ 使得 $D = D_N D_S$，其中 D_N 的所有不可约因子均为正规因子，而 D_S 的所有不可约因子均为特殊因子。此分解在相差一个 k 中的非零乘法因子的意义下唯一，称为 D （关于 m）的 分裂因子分解 。本节给出一种通过最大公因数计算和结式来计算分裂因子的算法。

引理 *27.* 设 $D \in k[t]$ 无平方因子，并令 $D_0(t, y) := \kappa(D) + \partial_t(D)y$，其中 y 是一个不定元。令 $R(t) \in k[t]$ 为 $D_0(t, y)$ 与 $m(t, y)$ 关于 y 的 *Sylvester*结式。若 $\beta \in k$ 是 D 的一个根，则 β 是 m 的特殊点，当且仅当 β 是 R 的一个根。因此， D 与 $gcd(R, D)$ 具有相同的不可约特殊因子。

证明。设 $\beta \in k$ 是 D 的一个根。由于 D 无平方因子，我们有 $\partial_t(D)(\beta) \neq 0$。由于 $m(t, y)$ 关于 y 是首一的， $D_0(\beta, y)$ 和 $m(\beta, y)$ 关于 y 的次数分别与 $D_0(t, y)$ 和 $m(t, y)$ 的次数相同。因此， $R(\beta)$ 是 $D_0(\beta, y)$ 和 $m(\beta, y)$ 关于 y 的结式。

写作 $D = (t - \beta)D$。那么， $D(\beta) \neq 0$。类似于 (3) 的计算可得 $\kappa(D)(\beta) = -\beta' D(\beta)$ 和 $\partial_t(D)(\beta) = D(\beta)$。于是 $D_0(\beta, y) = D(\beta)(y - \beta')$，并且 $\mathrm{res}_y\big(D_0(\beta, y)\ m(\beta, y)\big) = 0$ 当且仅当 $m(\beta, \beta') = 0$，也就是说， β 是 m 的一个特殊点。∎

算法 28. SplittingFactorization
INPUT: $D \in k[t]$ 和 m，即 t'的首一不可约多项式。
OUTPUT: D 关于 m的分裂因子分解。

1. 计算 D的无平方因子分解 $D = D_1^{\mu_1} \dots D_n^{\mu_n}$
2. $D_N \leftarrow 1,\ D_S \leftarrow 1$

2. FOR i FROM 1 TO n DO

$$D_0 \leftarrow \kappa(D_i) + \partial_t(D_i)y,\ R \leftarrow \mathrm{resultant}_y\big(D_0(t,y), m(t,y)\big)$$
$$G \leftarrow \gcd(R, D_i)$$
$$D_S \leftarrow D_S\, G^{\mu_i},\ D_N \leftarrow D_N \left(\tfrac{D_i}{G}\right)^{\mu_i}$$

END DO

4. RETURN D_N, D_S

正确性由引理 27 保证。作为附带结果，我们得到 D_N 和 D_S 的无平方因子分解。