arXiv:2602.06876v1 [math.PR] 6 Feb 2026

KPZ线系综的体区高度

Duncan Dauvergne Fardin Syed

2026年2月9日

摘要

对于 $t > 0$，令 $\{\mathcal{H}_n^{(t)}, n \in \mathbb{N}\}$ 为参数 t 的 KPZ 线系综，它满足齐次的 **H**-布朗吉布斯性质，其中 $\mathbf{H}(x) = e^x$。我们证明了关于第 n 条线 $\mathcal{H}_n^{(t)}$的定量集中估计，由此得到渐近性 $\mathcal{H}_n^{(t)} = n\log n + o(n^{3/4+\epsilon})$，当 $n \to \infty$ 时成立。证明中的一个关键步骤是针对 **H**-布朗吉布斯线系综的一般分部积分公式，由此可得恒等式 $\mathbb{E}\exp(\mathcal{H}_{n+1}^{(t)}(x) - \mathcal{H}_n^{(t)}(x)) = nt^{-1}$，适用于任意 n, t, x。

1 引言

由卡达尔、帕里西和张提出的 [KPZ86],KPZ方程

$$\partial_t \mathcal{H} = \frac{1}{2}\partial_x^2 \mathcal{H} + \frac{1}{2}(\partial_x \mathcal{H})^2 + \xi \tag{1.1}$$

是随机一维界面生长的基本模型。这里，$\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, y)$表示界面在时间 t 和空间位置 y处的高度，ξ 是时空白噪声。KPZ方程通常通过乘性随机热方程（SHE）的 Cole-Hopf变换来理解。也就是说，KPZ方程的解为 $\mathcal{H}(t, x) = \log \mathcal{Z}(t, x)$，其中 $\mathcal{Z}$ 满足以下随机偏微分方程：

$$\partial_t \mathcal{Z} = \frac{1}{2}\partial_y^2 \mathcal{Z} + \mathcal{Z}\xi. \tag{1.2}$$

虽然很容易验证式（1.1）与式（1.2）之间的形式关系，但要严格证明这一点极其困难，直到 [Hai13]才最终得到理解。

窄楔形初始数据下的KPZ方程为 $\mathcal{H}^{\mathrm{nw}} = \log \mathcal{Z}^{\mathrm{nw}}$，其中 $\mathcal{Z}^{\mathrm{nw}}$ 对应于方程（1.2）在狄拉克δ初始条件 $\mathcal{Z}(0, y) = \delta_0(y)$下的解。在固定时刻 $t > 0$，函数 $x \mapsto \mathcal{H}^{\mathrm{nw}}(x, t)$可嵌入为随机函数族 $\mathcal{H}^{(t)} := \{\mathcal{H}_n^{(t)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ 中的顶曲线 $\mathcal{H}_1^{(t)}$，该函数族称为KPZ线系综。KPZ线系综在 [CH16] 中作为O'Connell–Yor聚合物的边缘标度极限构造而成。另一种构造方式是通过乘性SHE的多层扩展[OW15]给出。这两种定义在 [Nic21]中建立了联系。第三种定义可由[Dim22]导出：KPZ线系综是唯一（按分布）的曲线族，其最低编号的曲线$\mathcal{H}_1^{(t)}$ 与 $\mathcal{H}^{\mathrm{nw}}(\cdot, t)$同分布，且满足某种H-布朗吉布斯性质，见（1.4）及其上下文讨论。

由于文献中出现的 KPZ 线系综所采用的缩放略有不同，本文采用第2.2节给出的精确定义，该定义与以下表述一致：

[Nic21] ，也与 [CH16]最初发表的版本一致。采用这种缩放方式，可确保 KPZ$_t$ 线系综具有齐次的 **H**-布朗吉布斯性质，并且相对于抛物线 $-x^2/(2t)$是平稳的，讨论见第1.1 节。

自 [CH16], KPZ$_t$ 线系综被引入以来，人们利用它推导出了关于KPZ方程的大量丰富结果，例如参见 [DG23、CGH21、GHZ23、GH22、CG20a]。最为重要的是，正如 $t \to \infty$所述， [Wu23a、Vir20、DM21、AH26] 的组合结果表明，KPZ$_t$线系综经过重新标度后收敛到Airy线系综 [PS02、CH14], ，后者是一种非相交线系综，在随机矩阵、随机铺砌和随机界面生长中作为普适标度极限出现；有关结果示例可参见 [Joh03、BKMM07、Pet14、DM18、DNV23、AH25] ，更多参考文献可见综述 [Joh18] 。Wu [Wu23b] 利用这一点证明：由相同噪声驱动的KPZ方程的全体解收敛于有向景观[DOV22], ，后者是KPZ普适类中最丰富的极限对象。最近， [Wu25] 证明，KPZ方程在时间 t的任意解都是KPZ$_t$ 线系综的一个（显式）可测函数。

然而，尽管该对象起着核心作用，KPZ 线系综在体区中的行为（即当线指标 n很大时）仍知之甚少。我们的主要结果，定理 1.1，给出了当指标 n趋于无穷时 KPZ$_t$ 线系综位置的定量界。对于本定理以及全文，对 $t > 0$， $n \in \mathbb{N}$，我们定义

$$e_n^{(t)} = \log(t^{1-n}(n-1)!) + \frac{t}{24}.$$

定理 1.1. 固定 $t_0 > 0$、 $\epsilon > 0$。存在常数 d、 $C > 0$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$、 $t > t_0$ 以及 $a \geq C$（$tn^{2\epsilon} + t^{1/4}n^{3/4+2\epsilon}$），我们有

$$\mathbb{P}\left(|\mathcal{H}_n^{(t)}(0) - e_n^{(t)}| > a\right) \leq 2\exp(-dan^{\epsilon}\max(1, t^{-1/4}n^{1/4})).$$

特别地，定理1.1 表明 KPZ$_t$ 线系综满足如下强大数定律。几乎必然，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{H}_n^{(t)}(0)}{n\log n} = 1. \tag{1.3}$$

特别地，随着线指标增大，KPZ 线系综趋于 正 ∞ ！这一行为与 Airy线系综 $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$形成鲜明对比，后者发散至负 ∞：$\mathcal{A}_n(0) = (1+o(1))(-3\pi n/2)^{2/3}$，进一步比较见第 1.1 节。

定理 1.1 仅给出了 KPZ 线的单点统计量渐近性。利用定理1.1中的指数控制，我们可以借助 KPZ 线系综的强连续模以及抛物平稳性，轻松地将单点统计量推广为 KPZ 线系综的上确界/下确界界 [Wu25]。下面给出一个示例表述。

推论 1.2. 固定 $t_0 > 0$， $\epsilon > 0$。那么存在常数 d， $C > 0$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$， $t > t_0$和 $a > C($$tn^{2\epsilon} + t^{1/4}n^{3/4+2\epsilon}$)，都有如下估计

$$\mathbb{P}\left(\sup_{x\in[-e^a,e^a]} |\mathcal{H}_n^{(t)}(x) - \frac{x^2}{2t} - e_n^{(t)}| > a\right) \leq 2\exp(-dan^{\epsilon}\max(1, t^{-1/4}n^{1/4})).$$

注 1.3. 定理 1.1 着重于在大 n范围内获得有趣的界。事实上，尽管我们并不认为任何估计都是最优的，但对于较小的 n 和

较大的 t 情形下的界尤其弱。顺便指出，在定理 1.1 的证明过程中，我们得到以下单侧估计，它能在 a 较小 t 时，对某些 $t_0 > 0$取值提供更好的控制。对于所有 $d > 0$，存在一个常数 $a > 0$，$t > t_0$ 且 $n \in \mathbb{N}$，使得

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{H}_n^{(t)}(0) - e_n^{(t)} > a\right) \leq 2\exp(-da^{3/2}t^{-1/2}) + n\exp(-a/(2n)).$$

这一估计包含在引理 5.1中。结合上述界与定理 1.1，我们可以看到，KPZ$_t$ 线系综 会反转。例如，对于指标 $i \leq t^{1-\epsilon}$，上述界以及已知的 $\mathcal{H}_1^{(t)}$ 渐近性意味着

$$\mathcal{H}_1^{(t)}(0) - \mathcal{H}_i^{(t)}(0) \geq (i/2)\log t$$

当 $t \to \infty$时，以趋于 1 的概率成立。另一方面，定理 1.1 意味着，对于 $i \geq t^{1+\epsilon}$，我们有

$$\mathcal{H}_1^{(t)}(0) - \mathcal{H}_i^{(t)}(0) \leq -(i/2)\log i$$

当 $t \to \infty$ 时，以趋于 1 的概率成立。

注 1.4 （未来工作）。 定理 1.1 中界的一个主要动机，是基于几何罗宾逊-申斯特德-克努特等距的一个版本（见[推论21] 和 [Dau22，定理 3.3]），该等距源自对 [NY04] 中离散结果的推广；我们希望借此证明一种新的刻画，描述从时间 0 到时间 t 的 KPZ 片，它以 KPZ 线系综 [DS26], 为基础。事实证明，这种刻画需要对 KPZ 线的位置给出渐近界，作为关键的技术估计。

1.1 我们应该感到惊讶吗？关于定理1.1的讨论

在开始证明定理1.1之前，我们先给出两种启发式解释，以帮助理解 KPZ线系综的体行为。

理解 KPZ线系综的一个好起点，是先考察它那个更容易理解的近亲——（抛物型）艾里线系综。抛物型艾里线系综由一组互不相交的路径构成 $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\}$ 它们满足序约束 $\mathcal{A}_i > \mathcal{A}_{i+1}$ 对所有$i \geq 1$均成立。过程 $x \mapsto \mathcal{A}(x) + x^2$ 是平稳的。艾里线系综最初在 [PS02] 中作为多核生长模型的标度极限构造出来，并在 [CH14]中实现为一组局部呈布朗运动的互不相交路径。

论文 [CH14] 表明，艾里线系综满足一种极其有用的重抽样性质，即布朗吉布斯性质。对于任意有限矩形 $R := [a,b] \times \{1,\dots,k\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{R}$，在给定 $\mathcal{A}$ 在 R^c 上的取值后，$\{\mathcal{A}_i(x) : (x,i) \in R\}$ 的条件分布是由一组连接端点 $\mathcal{A}_i(a)$ $\mathcal{A}_i(b)$ $i = 1$、.....、k 的布朗桥组成，并且这些路径受到约束而彼此互不相交。事实上，这一性质与顶行的抛物线形状共同刻画了该对象，见 [AH26]。

与 Airy线系综类似，KPZ$_t$ 线系综 $\mathcal{H}^{(t)}$ 在抛物移位下也具有平稳性：$x \mapsto \mathcal{H}^{(t)}(x) + x^2/(2t)$。此外，它满足布朗吉布斯性质的一个软版本，称为 **H**-布朗吉布斯性质。对于上述矩形 R，给定 $\mathcal{H}^{(t)}$ 在R^c上的取值，$\mathcal{H}^{(t)}$ 在 R 上的条件分布是连接端点$\mathcal{H}_i^{(t)}(a)$ $\mathcal{H}_i^{(t)}(b)$ $i = 1,\dots,k$的 k 条布朗桥的分布，并按一个与以下量成正比的拉东–尼科迪姆导数重新加权：

$$\exp\left(-\mathcal{E}_{\mathbf{H}}(B)\right) := \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\int_a^b \mathbf{H}(B_{i+1}(x) - B_i(x))dx\right), \qquad \mathbf{H}(x) = e^x. \tag{1.4}$$

注意，每当系综中的两条线违反排序条件 $\mathcal{H}_i > \mathcal{H}_{i+1}$时，这个拉东–尼科迪姆导数就会施加双重指数惩罚，因此，虽然 KPZ$_t$ 线系综中的线并非严格有序，但公式（1.4）表明，它们强烈倾向于保持有序。进一步加强 KPZ$_t$ 与 Airy 线系综之间联系的，是 [Wu23a、Vir20、DM21、AH26] 上文讨论的标度极限结果。若 $\{\mathcal{H}_n^{(t)}\}_{n=1}^{\infty}$ 表示 KPZ$_t$ 线系综，则

$$\left\{t^{-1/3}\mathcal{H}_n^{(t)}(t^{2/3}x) + \frac{t^{4/3}}{24}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[t\to\infty]{d} \mathcal{A}$$

几乎必然地，在 (x, n) 的紧子集上 $\in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$。要理解我们为何会预期上述收敛，首先注意到，左侧的 $\mathcal{H}^{(t)}$ 经重标度后，在加上抛物线 x^2后是平稳的，并满足 **H**-布朗吉布斯性质，其中 $\mathbf{H}(x) = e^{t^{1/3}x}$。在 $t\to\infty$ 极限中，这一吉布斯性质变为通常的布朗吉布斯性质；等价地，也可以用 1.4）并令 $\mathbf{H}(x) = \infty\mathbf{1}(x\geq 0)$ 来定义。

KPZ 与 Airy 线系综之间有许多相似之处，因此它们的体行为竟有如此显著的差异，或许会令人相当惊讶。事实上，吉布斯性质（1.4）似乎会促使线按 $\mathcal{H}_1 > \mathcal{H}_2 > \cdots$的顺序排列，但为何这会导致它们在 n中的渐近排列顺序恰恰相反，并不显而易见。从更宏观的层面来看，我们可以这样解释：与布朗吉布斯性质不同，软 **H**-布朗吉布斯性质（1.4）过于弱，无法抵消抛物线对线的向下牵引，除非最小指标的那些线下垂。

关于 KPZ 线系综的另一种视角来自定向聚合物。在 KPZ方程的层面上，与定向聚合物的联系见 [AKQ14]。KPZ线系综的推广则来自多层随机热方程 [OW15], ，下面我们对其作形式化描述。令 $\xi = \xi(t,\ x)$为定义在 $\mathbb{R}^2$上的时空白噪声。对于 $t > 0$，定义

$$\mathcal{Z}_n^t(x) = p(t,x)^n\,\mathbb{E}_{0^n}^{x^n}\Big[:\exp:\Big(\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \xi(s, B_i(s))\,ds\Big)\Big], \tag{1.5}$$

其中 $p(t,\ x) = (2\pi t)^{-1/2}e^{-x^2/2t}$ 是高斯转移核，而 $\mathbb{E}_{0^n}^{x^n}$ 是以下对象的分布：n 互不相交布朗桥 $B_1, \ldots, B_n$ 每条桥均从时间 0 的位置 0 出发，并在时间 x 结束于位置 t。由于 ξ 仅作为一个分布定义，积分 $\int \xi(s,\ B_i(s))\,ds$没有明确定义，因此需要进行恰当的重整化。这里，$:\exp:$是维克指数，它实际上是对式（1.5）进行严格解释的一种简写，具体通过以下维纳混沌展开给出：

$$Z_n^t(x) := p(t,x)^n\Big(1 + \sum_{k=0}^{\infty}\int_{0<t_1<\cdots t_k<t}\int_{\mathbb{R}^k} R_k^{(n)}\big((t_1,x_1),\ldots,(t_k,x_k)\big)\xi(dt_1,dx_1)\ldots\xi(dt_k,dx_k)\Big).$$

这里 $R_k^{(n)}$ 是 k点相关函数，描述的是 n 从位置 0、时间 0 出发，并在位置 x、时间 t结束的互不相交布朗桥。（1.5）背后的直觉是，Z_n^t 是白噪声背景中多路径布朗聚合物的配分函数。我们还可以通过将互不相交的半离散聚合物或格点聚合物的配分函数取极限来定义 Z_n^t，这进一步支持了这一观点，参见 [Nic21、CN17] 以及第2.2节。

正如 KPZ 方程与随机热方程相关联，KPZ 线系综也与多层随机热方程相关联。两者之间的精确关系由

[Nic21]确立。采用我们所选的归一化方式，有

$$\mathcal{H}_n^{(t)} = \log\left(\frac{\mathcal{Z}_n^t}{\mathcal{Z}_{n-1}^t}\right) + \log(t^{1-n}(n-1)!). \tag{1.6}$$

（1.6）中的常数因子当然是 $e_n^{(t)}$中发散的部分。剩余部分 $\mathcal{H}_n^{(t)}$可以看作我们在非相交连续聚合物中增加一条额外路径时，配分函数 $\mathcal{Z}_n^t$ 所获得的（乘法）增益。如果我们以恰当的方式对 $\mathcal{Z}_n^t$ 进行了归一化，那么可以合理地预期，这种增益是低阶的，这便大大消除了定理 1.1背后的疑团。然而，尽管（1.6）给出了清晰的启发式解释，我们不知道如何从聚合物描述出发证明定理1.5 ，而在证明中，我们始终只会直接处理 $\mathcal{H}^{(t)}$。特别是，我们定理中的因子 $e_n^{(t)}$源于它与一维 Toda 格的联系；而在推导（1.6）时，在 [Nic21] 中，这个常数来自n维单纯形的体积。

1.2 一个更有希望的启发式、一维 Toda 格与证明概要

要开始理解 KPZ$_t$ 线系综的体行为，首先考虑 Airy 或 KPZ$_t$ 线系综中的以下重采样问题。

抛物线边界问题。固定线系综的第 $(n+1)$ 条曲线，使其在一个大区间 $[-T,T]$ 上沿着确定性抛物线 $-x^2/(2t)$。使用布朗吉布斯性质或**H**-布朗吉布斯性质（其中$\mathbf{H}(x) = e^x$），在这条下边界之上采样 n 条曲线，并在 $\pm T$ 处施加适当的边界条件。

在布朗吉布斯设定下，严格排序约束迫使每条曲线都位于其下方曲线之上，实际上要求所有 n 条曲线都保持在抛物线之上。在长区间上将 n 条布朗路径抬升至抛物线势垒之上，会付出巨大的熵代价（或维纳代价），但曲线的排序仍得以保持。尽管如此，由于这种熵代价，序号较大的曲线受到更强的挤压，导致 Airy 线之间的间距随序号增加而减小。

相比之下，在**H**-布朗吉布斯性质下，曲线之间的无序并非被严格禁止，而是会受到双指数能量的惩罚。因此，最上方的几条线仍可能保持有序，以避免这种惩罚。然而，当 n 足够大时，维持所有曲线都位于抛物线上方的代价会超过少数无序违规所带来的惩罚。因此，超过某个指标后，部分曲线违背排序在能量上会更有利，导致系综下部的单调性遭到破坏。

由于 KPZ$_t$ 线系综在抛物移位 $-x^2/(2t)$ 下是平稳的，因此可以分析维纳代价与**H**-布朗吉布斯性质所施加的相互作用能量之间的平衡。这种平衡对相邻曲线之间的间隙分布施加了约束。特别是，对于受**H**-布朗吉布斯性质支配的线系综而言，若要在这种抛物移位下保持平稳，线间隙的指数矩必须取特定值。

定理 1.5。 设 $\{\mathcal{H}_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 *KPZ$_t$* 线系综。则对所有 $i \geq 1$:

$$\mathbb{E}\big[\exp(\mathcal{H}_{i+1}(0) - \mathcal{H}_i(0))\big] = \frac{i}{t}.$$

定理 1.5 是更一般的、适用于 **H**-布朗线系综的成本平衡定理的一个特例，该定理见定理 3.1。定理3.1 通过对离散化系综应用高斯分部积分论证，再取极限而得以证明。

定理1.5 的一个直接推论是，对于 $i \ll t$，我们以高概率有 $\mathcal{H}_i > \mathcal{H}_{i+1}$，这与 Airy线系综中观察到的严格排序一致。然而，当 $i \gg t$时，间隙的指数矩发散，这表明排序可能会失效，并且系综体区中会出现反向单调性。

由定理1.5很容易猜出定理 1.1。事实上，若假设所有线 $\mathcal{H}_i$ 都是确定性的，那么定理 1.5 便会推出 $\mathcal{H}_i(0) = \log(t^{1-n}(n-1)!) + c$，其中某个常数为 c。根据已知的 $c = t/24$ 渐近性，我们可以证明 $\mathcal{H}_1$。从定理1.5 推导出更难的定理1.1 之所以困难，是因为指数矩很容易掩盖随机变量的典型行为。

现在，让我们进一步探讨上述抛物线边界问题中维纳代价与相互作用能之间的平衡问题。回想一下，我们可以将维纳测度在路径 f 处的密度视为与指数化的狄利克雷能量成正比：

$$\mathcal{W}(f) \propto \exp\big(-\mathcal{E}_{\mathrm{dir}}(f)\big), \qquad \mathcal{E}_{\mathrm{dir}}(f) = \sum_{i=1}^{n} \int_{-T}^{T} \frac{1}{2} |\dot{f}|^2.$$

因此，**H**-布朗运动的密度可形式化地表示为 s

$$\mathcal{P}_{\mathbf{H}}(f) \propto \exp\big(-\mathcal{E}_{\mathbf{H}}(f) - \mathcal{E}_{\mathrm{dir}}(f)\big).$$

在此测度下，最可能出现的路径对应于组合能量泛函的极小化路径

$$\mathcal{E}(f) = \mathcal{E}_{\mathbf{H}}(f) + \mathcal{E}_{\mathrm{dir}}(f).$$

对 $\mathcal{E}$ 应用标准的欧拉-拉格朗日变分原理可知，这条最优路径满足一维户田格方程

$$\ddot{f}_i = e^{f_i - f_{i-1}} - e^{f_{i+1} - f_i}, \qquad f_0 = +\infty, \quad f_{n+1}(x) = -x^2/2t.$$

有理由预期，在大尺度下，抛物线边界问题中的路径会集中在某条能量极小化路径附近。此外，KPZ$_t$ 线系综的抛物平稳性表明，我们应当存在一条能量极小化路径，其中所有路径都是平移抛物线

$$f_i(x) = -\frac{x^2}{2t} + c_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

事实上，不难验证，对于给定的 f_{n+1}, f_0，这样的解唯一。条件 $\ddot{f}_i = -t^{-1}$ 与户田方程共同推出

$$e^{f_{i+1} - f_i} = \frac{i}{t}, \qquad \text{or equivalently} \qquad c_i = -\sum_{j=i}^{n} \log(\frac{i}{t}).$$

这与我们主要定理中的间隙间距相符。

定理的证明1.1 利用这一户田启发式来界定 KPZ$_t$ 线系综。这分为两个步骤。在第4节，我们研究上述抛物线边界问题，其中规定侧边界条件与上述抛物户田解的侧边界条件完全一致。这里的设置

适合进行测度变换：去掉抛物线，并将所有端点平移至同一位置。这样做的代价是，我们将哈密顿量 e^x 变为依赖线指标的哈密顿量 $i(e^x - x - 1)$。由于该哈密顿量在偏离 0 时迅速增大，这表明解会强烈集中在一个平坦解附近。我们以较粗略的方式证明这种集中，所用的工具不外乎对配分函数的一个界。

还需要将抛物线边界问题重新关联回KPZ 线系综。我们在第5节中完成这一点。这里的基本想法对于使用布朗吉布斯论证的研究者来说应当并不陌生（特别是，它让人联想到 [AH26]的第2章）：本质上，我们对**H**-布朗线系综使用单调耦合，适当地提高和降低边界条件，并增大或减小抛物线孔径，以获得与不同抛物线边界问题的比较。构造这些单调耦合的初始输入是定理1.5的指数矩控制，以及来自 [Wu25]的KPZ线系综的强连续模。借助这些初始输入，我们可以递归地控制0处的线的位置以及线的上确界和下确界，从而给出一条不等式链，最终用其深上尾来界定线的位置的中等上尾和下尾。代入注1.3中关于深上尾的界（其本身不过是定理1.5 与马尔可夫不等式），便得到该结果。

1.3 开放问题

本文仅仅迈出了理解 KPZ 线系综整体分布的第一步。事实上，我们认为本文中的估计仍有很大改进空间，也可以引入新工具（例如，我们尚未使用间隙单调性），从而揭示 KPZ 线系综的新定性性质。首先，我们预计，KPZ 线系综不仅会随着线指标增大而最终漂移至 $+\infty$ ，而且最终会以一种刚性的方式完全有序，其间距与定理1.5中的间距高度吻合。

猜想1.6。 固定 $t > 0$。那么，当 $n \to \infty$ 时，几乎必然有：

$$\mathcal{H}_{n+1}^{(t)}(0) - \mathcal{H}_n^{(t)}(0) = \log(n/t) + o(1)$$

这里预期的 $o(1)$ 误差项，可通过考虑如下含三条线的 H-布朗重采样问题来理解。令 $n \gg t$，并将 $\mathcal{H}_{n+1}^{(t)}, \mathcal{H}_{n-1}^{(t)}$ 固定在长区间上的位置 $e_{n+1}^{(t)} - x^2/(2t)$ $e_{n-1}^{(t)} - x^2/(2t)$。由于 $\mathcal{H}_{n+1}^{(t)} - \mathcal{H}_{n-1}^{(t)} = \log(n(n-1)/t^2) \gg 0$，若按照式 (1.4) 中的权重对线 $\mathcal{H}_n^{(t)}$进行重采样，成本平衡论证表明，线$\mathcal{H}_n^{(t)}$应保持在 Toda位置 $e_n^{(t)} - x^2/(2t)$ 的 $O(n^{-1/4+\epsilon})$ 范围内。沿着这一思路继续推理，可以合理地预期，当 n 趋于无穷时，线本身也会变得刚性。

猜想 1.7。 固定 $t > 0$。那么当 $n \to \infty$ 时，函数序列 $\mathcal{H}_n^{(t)} - \mathcal{H}_n^{(t)}(0)$ 几乎必然在紧集上一致收敛到确定性抛物线 $-x^2/(2t)$。

对于点过程 $\mathcal{H}_n^{(t)}(0)$本身围绕 Toda 位置 $e_n^{(t)} - x^2/(2t)$ 集中的程度，我们并不那么确定。我们认为这里出现一个低阶的确定性修正并非不合理，甚至可能存在一个在 $n \to \infty$ 时仍然保留下来的随机项。

最后，我们提出一个猜想，给出著名的 Airy线系综刻画的类似结果，参见[AH26]。

猜想 1.8。 设 $\mathcal{L}=\{\mathcal{L}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一族具有**H**-布朗吉布斯性质的随机曲线，其中$\mathbf{H}(x)=e^x$。假设对任意 $\epsilon>0$，都存在一个常数 $\kappa(\epsilon)>0$，使得

$$\mathbb{P}\big(|\mathcal{L}_1(x)-\frac{x^2}{2t}|\le \epsilon x^2+\kappa(\epsilon)\big)\ge 1-\epsilon$$

对所有 $x\in\mathbb{R}$均成立。则 $\mathcal{L}$ 与 KPZ$_t$ 线系综在分布上相同，相差一个独立仿射平移。

与1.8 中的 Airy 刻画相比， [AH26], 虽然关于猜想的已知应用较少，但我们预计它可能更容易证明。例如，可以说， [AH26] 中最困难的部分是全局定律：在大数定律层面，确立具有抛物线型首曲线的不相交线系综的 Airy 点位置。我们认为，本文的方法经过修改后，或许能在正温度情形下得到相同结果；所需修改是消除我们对 [Wu25]中的 KPZ线系综连续模的依赖。

全文约定

我们常常省略对象对 t 或其他下标和上标的依赖，例如，常写作 $\mathcal{H}_n$，而不写 $\mathcal{H}_n^{(t)}$。我们用 $\mathbb{P}_{\mathcal{F}}(A)\coloneqq\mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}]$表示事件 A 在给定 σ 代数 $\mathcal{F}$ 条件下的概率。接下来，我们采用简写$[a,b]_{\mathbb{Z}}\coloneqq[a,b]\cap\mathbb{Z}$。最后，在证明过程中，我们使用的常数可能逐行变化。

2 预备知识

本节定义**H**-布朗线系综，并将 KPZ 线系综引入为 O'Connell-Yor 聚合物的边缘标度极限。此外，我们定义多层随机热方程，并阐明它与 KPZ 线系综之间的确切关系。

2.1 H-布朗吉布斯性质与线系综

定义 2.1. 考虑区间 $\Sigma\subset\mathbb{N}$和 $\Lambda\subset\mathbb{R}$。令 $C(\Sigma\times\Lambda,\mathbb{R})$表示从 $\Sigma\times\Lambda\to\mathbb{R}$ 到 C的连续函数所构成的集合，并赋予紧集上一致收敛拓扑。对于 $f\in C(\Sigma\times\Lambda,\mathbb{R})$，我们将 $f_i(x)=f(i,x)$，并将 f视为函数序列 $f_i,i\in\Sigma$。

一个（$\Sigma\times\Lambda$）**指标的线系综** $\mathcal{L}$是一个取值于 $C(\Sigma\times\Lambda,\mathbb{R})$的随机变量。

现在固定 $k_1<k_2\in\mathbb{N},[a,b]\subset\mathbb{R}$以及两个向量 $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^{k_2-k_1+1}$。我们将自由布朗桥测度 $\mathbb{P}^{k_1,k_2,[a,b],\vec{x},\vec{y}}_{\text{free}}$定义为 k_2-k_1+1 个相互独立的布朗桥$B=(B_{k_1},\dots,B_{k_2})\in C(\{k_1,\dots,k_2\}\times[a,b])$的分布，其中 $B_i(a)=x_i,B_i(b)=y_i$。当 $k_1,k_2,[a,b],\vec{x},\vec{y}$的取值由上下文明确时，我们简记为 $\mathbb{P}_{\text{free}}$；类似地， $\mathbb{E}_{\text{free}}$也采用此简记。H-布朗线系综是通过用相互作用哈密顿量 H 对自由布朗桥测度进行倾斜构造的。

定义 2.2。 考虑一个可测函数 $\mathbf{H}\colon[-\infty,\infty)\to[0,\infty]$，其中$\mathbf{H}(-\infty)=0$，称为**哈密顿量**，并配有下指标和上指标边界条件 f， g：

$[a,b]\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. 对于 $h\in C(\{k_1,\dots,k_2\}\times[a,b])$，定义其相对于$\mathbf{H}$ f， g的**玻尔兹曼权重** 为

$$W_{\mathbf{H}}^{f,g}(h)\coloneqq\exp\left(-\sum_{i=k_1-1}^{k_2}\int_a^b\mathbf{H}\circ\Delta_i h(s)\,ds\right),\qquad\text{where}\qquad\Delta_i h=h_{i+1}-h_i.$$

其中 $h_{k_1-1}=f$， $h_{k_2+1}=g$。我们通过拉东–尼科迪姆导数公式，将 $\mathbb{P}^{f,\,g\,\mathbf{H}}=\mathbb{P}^{k_1,\,k_2,\,[a,b],\,\vec{x},\,\vec{y},\,f,\,g\,\mathbf{H}}$ 上的 $C(\{k_1,\dots,k_2\}\times[a,b])$ 定义为 **H-布朗桥测度**

$$\frac{d\mathbb{P}_{\mathbf{H}}^{f,g}}{d\mathbb{P}_{\text{free}}}(h)\coloneqq\frac{1}{Z_{\mathbf{H}}^{f,g}}W_{\mathbf{H}}^{f,g}(h),$$

其中 $Z^{f,\,g\,\mathbf{H}}=Z^{k_1,\,k_2,\,(a,\,b)\,\vec{x},\,\vec{y},\,f,\,g\,\mathbf{H}}$ 是配分函数

$$Z_{\mathbf{H}}^{f,g}\coloneqq\mathbb{E}_{\text{free}}[W_{\mathbf{H}}^{f,g}(B)].\tag{2.1}$$

我们称 $\mathcal{L}$ 是一个 **H-布朗线系综**，如果 $\mathcal{L}\sim\mathbb{P}^{f,\,g\,\mathbf{H}}$。

为了便于分析，我们将 H-布朗线系综$\mathbf{H}$ 的定义扩展为允许使用哈密顿量向量 $\vec{\mathbf{H}}=(\mathbf{H}_{k_1-1},\,\dots,\,\mathbf{H}_{k_2})$。定义中的其他部分保持不变，我们只需重新定义玻尔兹曼权重如下：

$$W_{\mathbf{H}}^{f,g}(h)\coloneqq\exp\left(-\sum_{i=k_1-1}^{k_2}\int_a^b\mathbf{H}_i\circ\Delta_i h(s)\,ds\right).\tag{2.2}$$

现在我们可以定义$\mathbf{H}$-布朗吉布斯性质了。

定义 2.3。考虑一个哈密顿量$\mathbf{H}$、区间 $\Sigma\subset\mathbb{N}$ 和 $\Lambda\subset\mathbb{R}$，以及一个以 $(\Sigma\times\Lambda)$ 为指标的线系综 $\mathcal{L}$。若 $\mathcal{L}$ 满足以下性质，则称其满足 **H-** 布朗吉布斯性质；该性质对每个 $k_1\le k_2\in\Sigma$ 和 $[a,b]\subset\Lambda$ 都成立。

令 $\vec{x}=(\mathcal{L}_{k_1}(a)\dots,\mathcal{L}_{k_2}(a))$， $\vec{y}=(\mathcal{L}_{k_1}(b)\dots,\mathcal{L}_{k_2}(b))$，并令 $f=\mathcal{L}_{k_1-1}$和 $g=\mathcal{L}_{k_2+1}$（若 $k_1-1\notin\Sigma$，则令 $f=+\infty$；若 $k_2+1\notin\Sigma$，则令 $g=-\infty$；由于$\mathbf{H}(-\infty)=0$，这相当于在玻尔兹曼权重中去掉涉及 f 或 g 的项）。定义外部 σ-代数 $\mathcal{F}_{\text{ext}}$如下：

$$\mathcal{F}_{\text{ext}}\coloneqq\sigma\big\{\mathcal{L}\big|_{\Sigma\times\Lambda\setminus(\{k_1,\dots,k_2\}\times[a,b])}\big\}\tag{2.3}$$

则$\mathcal{L}|_{[k_1,k_2]_{\mathbb{Z}}\times(a,b)}$ 在给定 $\mathcal{F}_{\text{ext}}$ 下的条件分布为 $\mathbb{P}^{k_1,k_2,[a,b],\vec{x},\vec{y},f,g\,\mathbf{H}}$。

容易验证，对于紧域 $\Sigma\times\Lambda$，一个以$(\Sigma\times\Lambda)$为指标的线系综满足$\mathbf{H}$-布朗吉布斯性质，当且仅当它是一个$\mathbf{H}$-布朗线系综。然而，当我们转向非紧域时，便不再可能通过拉东–尼科迪姆导数直接定义$\mathbf{H}$-布朗线系综这一概念。不过，我们仍然可以定义具有$\mathbf{H}$-布朗吉布斯性质的线系综，而这一性质对于分析这些对象极为有用。

顺带一提，Airy线系综的非相交布朗吉布斯性质可以通过哈密顿量 $\mathbf{H}_{\text{ord}}(x)=\infty\mathbf{1}(x\ge0)$ 来定义。

2.2 O'Connell-Yor 与 KPZ 线系综

KPZ线系综是与 O'Connell-Yor 聚合物相关的线系综的标度极限。由于文献中对 KPZ线系综的定义存在一些不一致之处，我们在此精确定义 O'Connell-Yor 聚合物以及向 KPZ线系综的标度极限。

定义2.4. 对于 $a \le b \in \mathbb{R}$ 和 $n \le m \in \mathbb{Z}$，从 (a,n) 到 (b,m) 的向右上路径 ϕ 是从 $[a,b]$ 到 $[n,m]_{\mathbb{Z}}$ 的非递减右连续且有左极限函数。从 (a,n) 到 (b,m) 的路径与序列 $a = s_n \le s_{n+1} \le \cdots \le s_{m-1} \le b$ 一一对应，定义为令 $s_i = \inf\{s \in [a,b] : \phi(s) > i\}$。我们称时刻 s_i 为路径 ϕ的跳跃时刻。若从 (a,n) 到 (b,m) 的 k 元路径组 $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ 满足 $\phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_n$，则称其为不相交路径。

接下来，设 $B = \{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是一列独立标准布朗运动，设 ϕ 是一条从 $(0,1)$ 到 (s,N) 的路径，其中 $s \ge 0$，$N \in \mathbb{N}$，并定义 ϕ 的能量如下：

$$E(\phi) = B_1(s_1) + (B_2(s_2) - B_2(s_1)) + \cdots + (B_N(s) - B_N(s_{N-1})). \tag{2.4}$$

对于 $n \in \{1, \ldots, N\}$ 与 $t > 0$ 定义 n-路径 **O'Connell-Yor 聚合物配分函数** $\mathbf{n}$

$$Z_n^N(t) = \int_{D_{n,t}} e^{\sum_{i=1}^n E(\phi_i)} d\mu(\phi). \tag{2.5}$$

这里 $D_{n,t}$ 是从 $(0,1)$ 到 (t,N) 的互不相交 n-元组路径 ϕ 的空间。利用路径与跳跃时刻之间的对应关系，我们可以将 $D_{n,t}$ 视为 $(\mathbb{R}^N)^n$ 的一个子集。测度μ 就是 $(\mathbb{R}^N)^n$ 上的勒贝格测度。接下来，将 **O'Connell-Yor线系综** X^N 定义为

$$X_n^N(s) = \log\left(\frac{Z_n^N(s)}{Z_{n-1}^N(s)}\right), \qquad (n,s) \in [1,N]_{\mathbb{Z}} \times (0,\infty). \tag{2.6}$$

约定 $Z_0^N = 1$。

O'Connell [O'C12] 证明了过程 X^n 可描述为 Doob$-h$ 变换，并确定了该过程的生成元。基于这一描述，Corwin 与 Hammond [CH16]证明了 O'Connell-Yor线系综具有$\mathbf{H}$-布朗吉布斯性质（这也可以从 Katori 更早的工作中提取出来 [Kat11, Kat12]）。

引理2.5 (命题 3.4, [CH16])。 O'Connell-Yor线系综 X^n 具有一个$\mathbf{H}$-布朗吉布斯性质，其哈密顿量为$\mathbf{H}(x) = e^x$。

我们将KPZ线系综定义为O'Connell-Yor线系综的一个标度极限。

定理2.6。对于 $N \in \mathbb{N}$，$t > 0$，以及 $x \in \mathbb{R}$ 令

$$C(N,t,x) := (t^{1/2}N^{-1/2})^{N-1} \exp\left(N + \frac{\sqrt{tN}+x}{2} + xt^{-1/2}N^{1/2}\right) \tag{2.7}$$

并定义

$$\mathcal{H}_n^{t,N}(x) := X_n^N(\sqrt{tN}+x) - \log\left(C(N,t,x)\right) \tag{2.8}$$

于是，当 $N \to \infty$ 时，过程 $\mathcal{H}^{t,N}$ 依分布收敛到一个以 $(\mathbb{N} \times \mathbb{R})$ 为指标的线系综$\mathcal{H}^{(t)}$，其底层拓扑是在 $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ 的子集上紧集上一致收敛。过程 $\mathcal{H}^{(t)}$ 是 $\boldsymbol{KPZ}_t$ 线系综；与 *O'Connell-Yor* 线系综一样，$\mathcal{H}^{(t)}$ 具有哈密顿量为 $\mathbf{H}(x) = e^x$ 的 $\mathbf{H}$-布朗吉布斯性质。最后，过程$(x,n) \mapsto \mathcal{H}_n^{(t)}(x) + x^2/(2t)$ 在 x 中是平稳的。

、N 的紧性以及极限吉布斯性质（这是紧性的一个直接推论）已在 [CH16] 中证明。Nica [Nic21] 证明了极限点的唯一性以及由此得到的平稳性。

注释 2.7。请注意，我们将 KPZ 线系综定义为线系综 $\mathcal{H}^{t,N}$ 的标度极限，这与 [Nic21] 以及 [CH16] 最初发表版本中的定义一致。然而，在 [CH16]，最新的 arXiv 版本中，KPZ 线系综被重新定义为线系综 $\tilde{\mathcal{H}}^{t,N}$ 的标度极限 $\tilde{\mathcal{H}}^{t}$，其中给出

$$\tilde{\mathcal{H}}_n^{t,N}(x) = \mathcal{H}_n^{t,N}(x) - \log\left(t^{1-n}(n-1)!\right). \tag{2.9}$$

标度极限之间相差一个依赖于线指标的平移 $\log\left(t^{1-n}(n-1)!\right)$。采用 $\tilde{\mathcal{H}}^{t}$ 的优点在于，根据（1.6），它与多层随机热方程的联系更简单。然而，引入依赖于线指标的平移并不能保留**H**-布朗吉布斯性质 $\mathbf{H}(x) = e^x$，反而会得到一个具有吉布斯性质的线系综，其哈密顿量向量的强度随线而变化。

2.3 关键输入

2.3.1 单调性（H-布朗线系综）

前两个有用的引理出自 [CH16]，讨论的是具有凸哈密顿量 $\mathbf{H}$ 的布朗$^{\rightarrow}$线系综的随机单调性 $\mathbf{H}$。文献 **CH** [16]，并未证明向量哈密顿量 $\mathbf{H}$ 的情形，但这些引理在向量哈密顿量情形下仍然成立，且证明几乎完全相同。为求完整，我们在附录中给出向量值哈密顿量的证明。

引理 2.8（非向量哈密顿量情形见 [CH16] 中的引理 2.6）。固定 $k_1 < k_2 \in \mathbb{N}$、$a < b \in \mathbb{R}$以及两个向量 $\vec{x}$、$\vec{y} \in \mathbb{R}^{k_2-k_1+1}$。固定一个凸哈密顿量 H，或一个凸哈密顿量向量 $\mathbf{H} = (\mathbf{H}_{k_1-1}, \ldots, \mathbf{H}_{k_2})$。固定两对可测函数 f^i、g^i：$[a,b] \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$，其中 $i = 1$、2 满足 $f^1 \le f^2$ 和 $g^1 \le g^2$。

设 $\mathcal{L}^{(i)}$ for $i = 1$，2 是两个按 $\mathbb{P}^{(i)}{}_{\mathbf{H}} := \mathbb{P}^{\vec{x},\ \vec{y},\ [a,b],\ f^i,\ g^i}{}_{\mathbf{H}}$ 分布的**H**-布朗线系综。那么存在一个 $\mathcal{L}^{(1)}$，$\mathcal{L}^{(2)}$ 的耦合，使得对所有 $j \in [k_1, k_2]_{\mathbb{Z}}$, $x \in [a,b]$，$\mathcal{L}_j^{(1)}(x) \le \mathcal{L}_j^{(2)}(x)$。

引理 2.9 (引理 2.7 中给出的非向量哈密顿量情形，见 [CH16])。固定 $k_1 < k_2 \in \mathbb{N}$，$a < b \in \mathbb{R}$，以及一对可测函数 f，g：$[a,b] \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$。固定一个凸哈密顿量 $\mathbf{H}$，或一个凸哈密顿量向量 $\mathbf{H} = (\mathbf{H}_{k_1-1}, \ldots, \mathbf{H}_{k_2})$。固定两对向量 $\vec{x}^{(i)}$，$\vec{y}^{(i)} \in \mathbb{R}^{k_2-k_1+1}$，其中 $i = 1$，2 使得 $x_j^{(1)} \le x_j^{(2)}$ 且 $y_j^{(1)} \le y_j^{(2)}$。
设 $\mathcal{L}^{(i)}$ 对于 $i = 1$，2 是两个按照 $\mathbb{P}^{(i)}{}_{\mathbf{H}} := \mathbb{P}^{\vec{x}^{(i)},\ \vec{y}^{(i)},\ [a,b],\ f,\ g}{}_{\mathbf{H}}$ 分布的 **H**-布朗线系综。则存在 $\mathcal{L}^{(1)}$，$\mathcal{L}^{(2)}$ 的一个耦合，使得对于所有 $j \in [k_1, k_2]_{\mathbb{Z}}$、$x \in [a,b]$，$\mathcal{L}_j^{(1)}(x) \le \mathcal{L}_j^{(2)}(x)$。

2.3.2 KPZ 线系综的性质

以下结果涉及 KPZ方程的单点上尾和下尾，或者等价地，KPZ线系综的顶曲线。

引理 2.10 （ [CG20b], 定理 1.11 [CG20a]）。固定 $t_0 > 0$。则存在$d > 0$ 仅依赖于 t_0 使得对所有 $t > t_0$ 以及 $m > 0$:

$$\mathbb{P}_{\mathbf{H}}(\mathcal{H}^{(t)}(0) + \frac{t}{24} \le -mt^{1/3}) \le 2\exp\big(-dm^{5/2}\big),$$
$$\mathbb{P}_{\mathbf{H}}(\mathcal{H}^{(t)}(0) + \frac{t}{24} \ge mt^{1/3}) \le 2\exp\big(-dm^{3/2}\big).$$

注意，在 [CG20b], 的定理 1.1 中，得到了更强且精确得多的下尾界。此后， [Tsa22]对其进行了优化。就我们的目的而言，上述粗略界已足够。

接下来，我们介绍 [Wu25] 的一项新颖结果。该结果利用最优传输理论中的 Caffarelli 收缩定理，来控制 KPZ线系综中各条线的正则性。 [Wu25]中的结果适用于更一般的线系综，例如 β-Dyson 布朗运动以及其他**H**-吉布斯线系综，但我们这里只介绍针对 KPZ线系综的结果。

引理 2.11（ [Wu25]中的定理 2.8 和命题 3.4）。固定 $t > 0$，令 $\mathcal{H}^{(t)}$ 为参数为 t的 KPZ线系综。那么对所有 t、n和 $x \in \mathbb{R}$，期望 $\mathbb{E}|\mathcal{H}_n^{(t)}(x)| < \infty$ 和$\mathbb{E}\mathcal{H}_n^{(t)}(x) = \mathbb{E}\mathcal{H}_n^{(t)}(0) - \frac{x^2}{2t}$。此外，若令 $\hat{\mathcal{H}}_n^t(x) = \mathcal{H}_n^{(t)}(x) + \frac{x^2}{2t}$，则存在普适常数 $d > 0$，使得对所有 $[a, b] \subset \mathbb{R}$、$j \in \mathbb{N}$ 和 $m > 0$，均有:

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{x,y\in[a,b],\, t\neq s} \frac{|\hat{\mathcal{H}}_j^t(x) - \hat{\mathcal{H}}_j^t(y)|}{\sqrt{|x-y|\log(2(b-a)/(x-y))}} \ge m\Big) \le 2e^{-dm^2}.$$

2.3.3 再一个事实

我们最后通过记录 布朗桥停留在管状区域内的概率的一个标准界 .

引理 2.12. 设 $L > 0$，并设 $B : [0, L] \to \mathbb{R}$ 为满足 $B(0) = B(L) = 0$ 的布朗桥。则对所有 $r > 0$ 和 $d > \pi^2/8$，存在常数 $c_d > 0$，使得

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,L]} |B_t| \le r\Big) \ge c_d \exp(-dL/r^2).$$

证明。 由布朗缩放，只需在 $r = 1$时证明该结果。接下来，设 W_t 为 $[0, \infty)$ 上的标准布朗运动，并设 $T = \min\{t \ge 0 : |W_t| = 1\}$。现在， $|W_t|$ 是在直线 $x = 0$ 处反射的布朗运动，而 $|B_t|$ 是在条件 $B_L = 0$ 下类似反射的布朗运动。因此，我们可以耦合 W_t， B_t，使得对所有 $t \in [0, L]$ 都有 $|B_t| \le |W_t|$，从而

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,L]} |B_t| \le 1\Big) \ge \mathbb{P}(T \ge L). \tag{2.10}$$

接下来，固定 $\theta \in (0, \pi^2/8)$，并利用 $t \mapsto \cos(\sqrt{2\theta}W_t)\exp(\theta t)$是一个鞅，我们得到

$$1 = \mathbb{E}\cos(\sqrt{2\theta}W_{t\wedge T})\exp(\theta(t \wedge T)) \ge \cos(\sqrt{2\theta})\mathbb{E}\exp(\theta(t \wedge T)),$$

由此，取 $t \to \infty$ 可得 $\mathbb{E}\exp(\theta T) \le 1/\cos(\sqrt{2\theta})$。对于所有 $\theta < \pi^2/8$，这个指数界为我们提供了所需的可积性，因此对于任意固定的 $\theta < \pi^2/8$，可在上面的等式中取 $T \to \infty$，从而得到 $\mathbb{E}\exp(\theta T) = 1/\cos(\sqrt{2\theta})$。由于 $\cos(\sqrt{2\theta}) \to 0$ as$\theta \to \pi^2/8$，结论得证。 □

3 KPZ线系综间距的指数矩

在本节中，我们证明定理 1.5。我们首先为更一般的 **H**-布朗线系综建立一个分部积分公式。本节中，我们固定任意连续哈密顿量$\mathbf{H}:\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\to[0,\infty)$。在其余各节中，我们将专门考虑以下选择：$\mathbf{H}(x)=e^x$。

定理 3.1. 设 **H** 是任意一个连续可微的哈密顿量，使得 $|\mathbf{H}'(x)|=\exp(o(x^2))$当 $x\to\pm\infty$ 时成立。设 $\mathcal{L}$ 是定义域为 $[k_1,k_2]_{\mathbb{Z}}\times[-T,T]$、分布为$\mathbb{P}_{\mathbf{H}}=\mathbb{P}^{k_1,\ k_2,\ [a,b],\ \vec{x},\ \vec{y},\ f,\ g}{}_{\mathbf{H}}$ 的 **H**-布朗线系综，其中向量为 $\vec{x}$、$\vec{y}\in\mathbb{R}^{k_2-k_1+1}$，边界条件为 f、g：$[a,b]\to\mathbb{R}$。

设 $a<b\in[-T,T]$ 和 $i\in[k_1,k_2]_{\mathbb{Z}}$，定义随机变量 $Y=\mathcal{L}_i(b)-\mathcal{L}_i(a)$，并令$\mu_{a,\ b}=(\mathcal{L}_i(T)-\mathcal{L}_i(-T))(b-a)/(2T)$。设 $F:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是任意一个导数有界的连续可微函数。那么

$$\mathbb{E}_{\mathbf{H}}\big[(Y-\mu_{a,b})F(Y)\big]=\mathbb{E}_{\mathbf{H}}\big[F'(Y)\big]\big((b-a)-\frac{(b-a)^2}{2T}\big)$$
$$+\int_{-T}^{T}\mathbb{E}_{\mathbf{H}}[F(Y)(\mathbf{H}'(\Delta_i\mathcal{L}(s))-\mathbf{H}'(\Delta_{i-1}\mathcal{L}(s)))]\,\mathrm{Cov}^{T,a,b}(s)\,ds,$$

其中

$$\mathrm{Cov}^{T,a,b}(s):=\frac{(b\wedge s+T)(T-b\vee s)}{2T}-\frac{(a\wedge s+T)(T-a\vee s)}{2T}. \tag{3.1}$$

注3.2。若将对象特化为哈密顿量为 $\mathbf{H}(x)=e^x$ 的 KPZ线系综，那么在附加假设 $\mathcal{H}^{(t)}_{i+1}-\mathcal{H}^{(t)}_i\xrightarrow[t\to\infty]{}-\infty$ 对所有 i 均成立的条件下，定理 3.1 意味着对任意指标 i，在给定 $\mathcal{H}^{(t)}|_{(\{i\}\times[a,a+2b])^c}$ 增量 $\mathcal{H}$ 的条件下 $\mathcal{H}^{(t)}_i(a+b)-\mathcal{H}^{(t)}_i(a)$ 收敛到一个均值为 $[\mathcal{H}^{(t)}(a+2b)-\mathcal{H}^{(t)}(a)]/2$、方差为 $b/2$ 的正态随机变量。结合 $\mathcal{H}^{(t)}(x)+x^2/(2t)$ 的平稳性可知，过程 $\mathcal{H}^{(t)}-\mathcal{H}^{(t)}(0)$ 在 $t\to\infty$ 趋于无穷时收敛到一个由无穷多个相互独立的布朗运动构成的线系综。这确定了多层随机热方程的一个联合平稳分布。通过加入一个斜率，可以构造出一族这样的联合平稳分布。

为了证明定理 3.1 ，我们将引入 **H**-布朗线系综的一种近似，该近似对玻尔兹曼权重进行离散化。更确切地说，设 $N\in\mathbb{N},T>0$，设 $\delta=\delta(N,T)=\frac{2T}{2^N}$ 并定义网格：

$$\Pi_N=\{-T,-T+\delta,-T+2\delta,\dots,T-\delta,T\}=\{t_0=-T<t_1<\cdots<t_{2^N}=T\}.$$

给定 $k_1,k_2,[a,b],\quad\vec{x},\vec{y},f$ 和 g，对于 $h\in C([k_1,k_2]_{\mathbb{Z}}\times[a,b])$，定义离散化的玻尔兹曼权重 t

$$W_{\mathbf{H}_N}(h):=\exp\left(-\delta\sum_{i=k_1-1}^{k_2}\sum_{j=1}^{2^N}\mathbf{H}\circ\Delta_ih(t_j)\right). \tag{3.2}$$

我们与之前完全相同地定义配分函数 $Z_{\mathbf{H}^N}$ 和测度 $\mathbb{P}_{\mathbf{H}^N}$，但以离散化的玻尔兹曼权重 $W_{\mathbf{H}_N}$ 取代 $W^{f,g}{}_{\mathbf{H}}$。注意，当 $N\to\infty$ 时，我们有

$$W_{\mathbf{H}_N}\to W_{\mathbf{H}}=W^{f,g}_{\mathbf{H}},\qquad Z_N:=\mathbb{E}_{\mathrm{free}}W_{\mathbf{H}_N}(\mathcal{L})\to Z=\mathbb{E}_{\mathrm{free}}W_{\mathbf{H}}(\mathcal{L}), \tag{3.3}$$

其中，上述第一次收敛是逐点收敛。事实上，第一次收敛源于**H**的连续性，这保证了(3.2)中的黎曼和收敛到一个积分，并且

第二次收敛只是有界收敛定理的直接应用，这里利用了所有玻尔兹曼权重均不大于 1 这一事实。这些事实共同蕴含 $\mathbb{P}_{\mathbf{H}^N}$ 弱收敛到 $\mathbb{P}_{\mathbf{H}}$，从而证明了我们的离散化是合理的。

定理 *3.1* 的证明。首先，只需证明在给定线$\mathcal{L}_{i-1}$，$\mathcal{L}_{i+1}$的条件下等式成立，因为随后取期望即可得到无条件等式。根据$\mathbf{H}$-布朗吉布斯性质（并重新编号），该定理可归结为单条路径的情形 $\mathcal{L}_1$，其上下边界条件 $f = \mathcal{L}_0$，$g = \mathcal{L}_2$是确定的。此外，只需证明 a，$b \in \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \Pi_N$时等式成立，因为对所有项应用有理数逼近即可得到一般结果，这些项都是 a，b 的连续函数（这里利用 $|\mathbf{H}'|$ 上的尾部界来保证积分关于 a，b的连续性）。在这种情况下，我们先对测度 $\mathbb{P}_{\mathbf{H}_N} = \mathbb{P}^{f,\ g\mathbf{H}_N}$证明该等式的一个近似版本，其中 N足够大，使得 $a < b \in \Pi_N$。我们有

$$\mathbb{E}_{\mathbf{H}_N}\big[(Y-\mu_{a,b})F(Y)\big] = Z_N^{-1}\mathbb{E}_{\text{free}}\big[\bar{\mathcal{L}}_1(b)F(Y)W_{\mathbf{H}_N}(\mathcal{L})\big] - Z_N^{-1}\mathbb{E}_{\text{free}}\big[\bar{\mathcal{L}}_1(a)F(Y)W_{\mathbf{H}_N}(\mathcal{L})\big], \quad (3.4)$$

其中 $\bar{\mathcal{L}}(x) = \mathcal{L}(x) - \mathbb{E}_{\text{free}}\mathcal{L}_1(x)$。在测度 $\mathbb{P}_{\text{free}}$下，离散化路径$(\mathcal{L}_1(x) : x \in \Pi_N \setminus \{-T, T\})$是一个均值为零的高斯随机向量，其协方差为

$$\mathbb{E}\bar{\mathcal{L}}_1(x)\bar{\mathcal{L}}_1(y) = \frac{(T + x\wedge y)(T - x\vee y)}{2T}. \quad (3.5)$$

利用高斯分部积分，(3.4) 右端的第一项等于

$$Z_N^{-1}\sum_{k=1}^{2^N-1}\mathbb{E}_{\text{free}}\big[\bar{\mathcal{L}}_1(b)\bar{\mathcal{L}}_1(t_k)\big]\mathbb{E}_{\text{free}}\Big[\frac{\partial}{\partial\mathcal{L}_i(t_k)}F\big(\mathcal{L}_i(b)-\mathcal{L}_i(a)\big)\exp\Big(-\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{2^N}\delta\mathbf{H}(\Delta_i\mathcal{L}(t_j))\Big)\Big].$$

在代入 来自 (3.5) 的协方差并计算偏导数后，得到 s

$$\sum_{k=1}^{2^N-1}\Big(\frac{(T+b\wedge t_k)(T-b\vee t_k)}{2T}\Big)\cdot\delta\cdot Z_N^{-1}\mathbb{E}_{\text{free}}\big[F(Y)\big(\mathbf{H}'(\Delta_1\mathcal{L}(t_k)) - \mathbf{H}'(\Delta_0\mathcal{L}(t_k))W_{\mathbf{H}_N}(\mathcal{L})\big]$$
$$+\frac{(T+b)(T-b)}{2T}Z_N^{-1}\cdot\mathbb{E}_{\text{free}}\big[F'(Y)W_{\mathbf{H}_N}(\mathcal{L})\big] - \frac{(T+a)(T-b)}{2T}\cdot Z_N^{-1}\mathbb{E}\big[F'(Y)W_{\mathbf{H}_N}(\mathcal{L})\big].$$

现在，取 $N\to\infty$ 后，上面的最后两项收敛到相同的对象，其中 $Z_N \mapsto Z$，$W_{\mathbf{H}_N}\mapsto W_{\mathbf{H}}$。这里用到了 (3.3)。为处理上面的黎曼和，注意到将期望移到外面后，可以将其写成 $\mathbb{E}_{\text{free}}[\phi_n^b(\mathcal{L})]$，其中函数序列 ϕ_n^b 逐点收敛到极限

$$\phi^b(\mathcal{L}) = Z^{-1}W_{\mathbf{H}}(\mathcal{L})F(Y)\int_{-T}^{T}\frac{(T+b\wedge s)(T-b\vee s)}{2T}(\mathbf{H}'\circ\Delta_1\mathcal{L} - \mathbf{H}'\circ\Delta_0\mathcal{L})(s)ds.$$

我们可以通过利用尾部界 $|\mathbf{H}'(x)| = \exp(o(x^2))$ as $x\to\pm\infty$，将这一逐点收敛推广为期望意义下的收敛，$\mathbb{E}_{\text{free}}[\phi_n^b(\mathcal{L})]\to\mathbb{E}_{\text{free}}[\phi^b(\mathcal{L})]$。由于差值 $\Delta_i\mathcal{L}$ 具有一致的高斯尾，这意味着函数 ϕ_n 一致可积。总之，当 $N\to\infty$时，$Z_N^{-1}\mathbb{E}_{\text{free}}\big[\bar{\mathcal{L}}_1(b)F(Y)W_{\mathbf{H}_N}(\mathcal{L})\big]$ 收敛到

$$\mathbb{E}_{\text{free}}\phi^b(\mathcal{L}) + Z^{-1}\mathbb{E}_{\text{free}}[F'(Y)W_{\mathbf{H}}(\mathcal{L})]\Big(\frac{(T-b)(b-a)}{2T}\Big).$$

对 (3.4) 中第二项进行相同的论证可得

$$\lim_{N\to\infty} Z_N^{-1}\mathbb{E}_{\text{free}}\big[\bar{\mathcal{L}}_1(a)F(Y)W_{\mathbf{H}_N}(\mathcal{L})\big] = \mathbb{E}_{\text{free}}\phi^a(\mathcal{L}) - \mathbb{E}_{\text{free}}[F'(Y)W_{\mathbf{H}}(\mathcal{L})]\big(\frac{(T+a)(b-a)}{2T}\big).$$

将两个表达式相减，并用 $\mathbb{E}_{\mathbf{H}}$ 改写期望，即得证。

□

定理 *1.5* 的证明。 在证明中，令 $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(t)}$ 为 $\mathbf{KPZ}_t$ 线系综。我们将通过归纳法证明该定理，即证明对于所有 $n \in \mathbb{N}$，指数矩 $\mathbb{E}e^{\mathcal{H}_{n+1}(0)-\mathcal{H}_n(0)}$ $\mathbb{E}e^{\mathcal{H}_n(0)-\mathcal{H}_{n-1}(0)}$均存在，且满足公式

$$\mathbb{E}e^{\mathcal{H}_{n+1}(0)-\mathcal{H}_n(0)} - \mathbb{E}e^{\mathcal{H}_n(0)-\mathcal{H}_{n-1}(0)} = \frac{1}{t}, \tag{3.6}$$

其中 $\mathcal{H}_0 = \infty$。我们将基础情形和归纳步骤一并证明，并在过程中指出其中细微的差异。固定 $n \in \mathbb{N}$，并且（在 $n \geq 2$ 时的归纳步骤中）假设断言对 $n-1$ 成立。

固定 $T > 0$，并定义外部 σ-代数及其对应的条件分布如下

$$\mathcal{F}_T = \sigma(\mathcal{H}|_{(\{i\}\times[-T,T])^c}), \qquad \mathbb{P}_T = \mathbb{P}\big(\,\cdot\,|\mathcal{F}_T\big) \tag{3.7}$$

现在令 $a < b \in [-T, T]$。应用定理 3.1，取哈密顿量 $\mathbf{H}(x) = e^x$ 和 $F = 1$，得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\mathcal{H}_n(b) - \mathcal{H}_n(a)\big] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}_T[\mathcal{H}_n(b) - \mathcal{H}_n(a) - (\mathcal{H}_n(T) + \mathcal{H}_n(-T))(b-a)/(2T)]\big] \\
&= \mathbb{E}\int_{-T}^{T} \mathbb{E}_T\big[e^{\mathcal{H}_{n+1}(s)-\mathcal{H}_n(s)} - e^{\mathcal{H}_n(s)-\mathcal{H}_{n-1}(s)}\big]\mathrm{Cov}^{T,a,b}(s)\,ds \qquad (3.8)\\
&= \int_{-T}^{T} \mathbb{E}\big[e^{\mathcal{H}_{n+1}(s)-\mathcal{H}_n(s)} - e^{\mathcal{H}_n(s)-\mathcal{H}_{n-1}(s)}\big]\mathrm{Cov}^{T,a,b}(s)\,ds \qquad (3.9)\\
&= (\mathbb{E}e^{\mathcal{H}_{n+1}(0)-\mathcal{H}_n(0)} - \mathbb{E}e^{\mathcal{H}_n(0)-\mathcal{H}_{n-1}(0)})\int_{-T}^{T} \mathrm{Cov}^{T,a,b}(s)\,ds. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

在第一个等式中，我们使用了对称性 $\mathbb{E}\mathcal{H}_n(T) = \mathbb{E}\mathcal{H}_n(-T)$。该等式中无条件期望的存在性由引理 2.11 保证。第二个等式由定理 3.1 得出。对于第三个等式，我们需要 $\mathbb{E}e^{\mathcal{H}_n(s)-\mathcal{H}_{n-1}(s)} < \infty$，以证明可以使用富比尼定理。在 $n = 1$ 情形下，这等价于断言 $\mathbb{E}e^{\mathcal{H}_n(s)} < \infty$，而这由引理 2.10 中的尾部界推出。在 $n \geq 1$ 情形下，这依赖于归纳假设。注意，先验而言，第二个期望 $\mathbb{E}e^{\mathcal{H}_{n+1}(s)-\mathcal{H}_n(s)}$ 可能等于 $+\infty$。等式 (3.9) 排除了这种可能，表明 (3.6) 的左端有定义。最后一个等式用到了 $\mathcal{H}$ 的平稳性。

接下来，我们有 $\mathbb{E}[\mathcal{H}_n(b) - \mathcal{H}_n(a)] = (a^2 - b^2)/(2t)$，由引理 2.11 得出。因此，计算出 (3.10) 中的协方差积分后，我们得到：

$$-\frac{b^2}{2t} + \frac{a^2}{2t} = \big(-\frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2}\big)\big(\mathbb{E}e^{\mathcal{H}_{i+1}(0)-\mathcal{H}_i(0)} - \mathbb{E}^{\mathcal{H}_i(0)-\mathcal{H}_{i-1}(0)}\big),$$

这可简化为（3.6）。 □

4 具有平稳 Toda 边界的 H-布朗线系综

本节中，我们研究区间 $[-T,T]$ 上的一个带有抛物线下边界的 $\mathbf{H}$-布朗线系综 $\mathcal{L}=(\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_n)$，并选取侧边界条件，使得我们能够显式计算 $\mathcal{L}$ 的最有利构型。本节的目标是证明该最有利构型周围的集中现象。本节中，我们始终令 $\mathbf{H}(x)=e^x$。令

$$f_i(x)=-\frac{x^2}{2t}+e_i,\qquad e_i:=\sum_{j=1}^{i-1}\log\Big(\frac{j}{t}\Big)+\frac{t}{24},$$

并令 $\vec{e}=(e_1,\ldots\ldots,e_n)$。我们定义

$$\mathcal{L}\sim\mathbb{P}_{\mathbf{H}}^{t,n}:=\mathbb{P}_{\mathbf{H}}^{1,n,(-T,T),\vec{e}-T^2/(2t),\vec{e}-T^2/(2t),\infty,f_{n+1}}.$$

也就是说，$\mathcal{L}$ 是定义在 $[-T,T]$ 上的 $\mathbf{H}$-布朗线系综，没有上边界，具有抛物线下边界 f_{n+1}，并且 $\mathcal{L}(-T)=\mathcal{L}(T)=\vec{e}-T^2/(2t)$。当上下文已明确这些值时，我们省略 $\mathbb{P}^{t,n}_{\mathbf{H}}$ 上的上标 n 和 t。现在，令 $\mathbb{P}_{\mathrm{free}}=\mathbb{P}^{\vec{x}}_{\mathrm{free}}=\mathbb{P}^{1,n,(-T,T),\vec{x},\vec{x})}_{\text{自由}}$ 为定义在 $[-T,T]$ 上的n相互独立的布朗桥 B 的分布，并满足 $B(-T)=B(T)=\vec{x}$。$\mathcal{L}\sim\mathbb{P}_{\mathbf{H}}$ 相对于 $\mathbb{P}^{\vec{e}-T^2/(2t)}_{\text{自由}}$ 的拉东–尼科迪姆导数为:

$$\frac{d\mathbb{P}_{\mathbf{H}}}{d\mathbb{P}^{\vec{e}-T^2/(2t)}_{\mathrm{free}}}(\mathcal{L})=Z^{-1}\exp\Big(-\sum_{i=1}^{n}\int_{-T}^{T}e^{(\mathcal{L}_{i+1}-\mathcal{L}_i)(s)}\,ds\Big),\qquad Z=\mathbb{E}^{\vec{e}-T^2/(2t)}_{\mathrm{free}}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\int_{-T}^{T}e^{B_{i+1}-B_i}\right),$$

其中 $\mathcal{L}_{n+1}=B_{n+1}=f_{n+1}$ 是抛物线下边界。本节的目标是证明，顶行 $\mathcal{L}_1$ 不会偏离确定性函数 f_1 太远。研究这种集中现象时，分析平移构型会容易得多

$$(\hat{\mathcal{L}}_1,\dots,\hat{\mathcal{L}}_n,0)=(\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_{n+1})-(f_1,\dots,f_{n+1}).\tag{4.1}$$

该构型在 $\pm T$ 处等于 0，其分布相对于 $\mathbb{P}^0_{\mathrm{free}}$ 绝对连续。下一个引理计算拉东–尼科迪姆导数。

引理4.1。令 $\mathbb{P}_{\mathbf{H}_t}=\mathbb{P}_{\hat{\mathbf{H}}_t,(n)}$ 为 $\mathcal{L}=(\mathcal{L}_1,\ldots\ldots,\mathcal{L}_n)$ 的分布，并令 $\Phi(x)=e^x-1-x$。则

$$\frac{d\mathbb{P}_{\hat{\mathbf{H}}_t}}{d\mathbb{P}^{\vec{0}}_{\mathrm{free}}}(\hat{\mathcal{L}})=\hat{Z}^{-1}\hat{W}_n(\hat{\mathcal{L}}),\qquad \hat{W}_n(g):=\exp\Big(-\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}\int_{-T}^{T}i\Phi(g_{i+1}-g_i)\Big),$$

其中 $\hat{Z}=\mathbb{E}^{\vec{0}}_{\mathrm{free}}\hat{W}(B)$ 以及 $g_{n+1}=0$。此外，对于如上所述的 Z，我们有 t

$$Z=\hat{Z}\exp(-\mathcal{E}^{n,t}_{\min}),\qquad \mathcal{E}^{n,t}_{\min}:=\frac{nT^3}{3t^2}+\frac{Tn(n+1)}{t}.$$

证明。我们首先将 $\mathcal{L}$ 的端点平移，然后再平移抛物线。令

$$(L_1,\dots,L_{n+1})=(\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_{n+1})-\vec{e}+T^2/(2t),$$

并令 μ 为 $L=(L_1,\ldots\ldots,L_n)$ 的分布。于是

$$\frac{d\mu}{d\mathbb{P}^{\vec{0}}_{\mathrm{free}}}(L)=Z^{-1}\tilde{W}(L),\qquad \tilde{W}(h)=\exp\Big(-\sum_{i=1}^{n}\int_{-T}^{T}\frac{i}{t}\,e^{h_{i+1}-h_i}\Big),$$

其中 $h_{n+1}(x) = (T^2 - x^2)/(2t) =: p(x)$，而 $\mathbb{E}^{\vec{0}}_{\text{free}}\tilde{W}(B)$ 仍等于原配分函数 Z。现在我们通过抛物线 p 进行平移。首先，令 $\mathbb{P}_B$ 为在 $[-T,T]$ 上满足 $B(\pm T) = 0$ 的布朗桥 B 的分布，并令 $\mathbb{P}_{B-p}$ 为 $B = B - p$ 的分布。根据卡梅隆 – 马丁定理，我们有

$$\frac{d\mathbb{P}_{B-p}}{d\mathbb{P}_B}(\hat{B}) = \exp\left(-\int_{-T}^{T}\dot{p}_i\, d\hat{B}_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{-T}^{T}\dot{p}_i^2\right) = \exp\left(-\frac{T^3}{3t^2} - \frac{1}{t}\int_{-T}^{T}\hat{B}_i(x)dx\right), \tag{4.2}$$

其中，在等式中我们使用了随机分部积分，将随机积分改写为勒贝格积分。接下来，令 μ^k 表示测度 μ 的 k重乘积，则有

$$\frac{d\mathbb{P}_{\hat{\mathbf{H}}_t}}{d\mathbb{P}_B^k}(\hat{\mathcal{L}}) = \frac{d\mathbb{P}_{\hat{\mathbf{H}}_t}}{d\mathbb{P}_{B-p}^k}(\hat{\mathcal{L}})\frac{d\mathbb{P}_{B-p}^k}{d\mathbb{P}_B^k}(\hat{\mathcal{L}}) = \frac{d\mu}{d\mathbb{P}_B^k}(\hat{\mathcal{L}}+p)\frac{d\mathbb{P}_{B-p}^k}{d\mathbb{P}_B^k}(\hat{\mathcal{L}}),$$

因此

$$\frac{d\mathbb{P}_{\hat{\mathbf{H}}_t}}{d\mathbb{P}_B^k}(\hat{\mathcal{L}}) = Z^{-1}\exp\Big(-\sum_{i=1}^{n}\int_{-T}^{T}\frac{i}{t}\,e^{\hat{\mathcal{L}}_{i+1}-\hat{\mathcal{L}}_i}\Big)\exp\left(-\frac{T^3}{3t^2} - \frac{1}{t}\int_{-T}^{T}\hat{\mathcal{L}}_i(x)dx\right),$$

ˆ其中 $\mathcal{L}_{n+1} = 0$。现在，我们可以写成

$$\sum_{i=1}^{n} ie^{\hat{\mathcal{L}}_{i+1}-\hat{\mathcal{L}}_i} + \hat{\mathcal{L}}_i = \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n} i\Phi(\hat{\mathcal{L}}_{i+1} - \hat{\mathcal{L}}_i),$$

这使我们能够简化前面的公式，得到

$$\frac{d\mathbb{P}_{\hat{\mathbf{H}}_t}}{d\mathbb{P}_B^k}(\hat{\mathcal{L}}) = Z^{-1}\exp(-\mathcal{E}^{n,t}_{\min})\exp\Big(-\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}\int_{-T}^{T} i\Phi(\hat{\mathcal{L}}_{i+1} - \hat{\mathcal{L}}_i)(x)\,dx\Big). \tag{4.3}$$

由于上式两边在测度 $\mathbb{P}_B^k = \mathbb{P}^{\vec{0}}_{\text{free}}$下的积分均为1，我们得到配分函数 Z的所需求值。令ˆ$Z = Z$ exp($\mathcal{E}^{n,\ t}$ 最小值)，即可得到所需的拉东–尼科迪姆导数公式。

□

本节其余部分将致力于控制系综ˆ ˆ$\mathcal{L}$顶行的行为。我们先给出 Z的一个简单下界。

引理 4.2. 存在一个普适常数 $d > 0$，使得

$$\hat{Z} \geq \frac{1}{2}\exp\left(-dTn\max\left(1, t^{-1/2}n^{1/2}\right)\right).$$

证明。 固定 $r > 0$，并令

$$\mathcal{S}_r = \Big\{\sup_{i=1,\dots,n}\sup_{s\in[-T,T]}|B_i(s)| \leq r\Big\}$$

表示以下事件： n条布朗桥都保持在宽度为 r的管状区域内。根据引理 2.12，存在一个绝对常数 $d > 0$，使得 $\mathbb{P}^{\vec{0}}_{\text{free}}(\mathcal{S}_r) \geq \frac{1}{2}\exp(-\frac{dTn}{r^2})$，对所有 $r > 0$均成立。此外，在~~$\mathcal{S}_r$~~上，我们有 $|B_{i+1} - B_i| \leq 2r$，因此 $\Phi(B_{i+1} - B_i) \leq e^{2r} - 1 - 2r \leq r^2$，对 $r \leq 1$均成立。因此，对于ˆ$r \leq 1$， Z 有下界

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\vec{0}}_{\text{free}}\Big[\mathbb{1}_{\mathcal{S}_r}\exp\Big(-t^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{-T}^{T} i\Phi(B_{i+1} - B_i)\Big)\Big] &\geq \mathbb{P}^{\vec{0}}_{\text{free}}(\mathcal{S}_r)\cdot\exp\Big(-t^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{-T}^{T} ir^2\Big)\\ &\geq \frac{1}{2}\exp\Big(-\frac{dTn}{r^2} - \frac{Tn(n+1)r^2}{t}\Big)\end{aligned}$$

现在令 $r =$最大值 $\big(1,\ t^{1/4}n^{-1/4}\big)$。经过简短的计算即可得到所需的界 . □

ˆ由于 $W \le 1$，引理4.2 有如下直接推论。

推论 4.3。 存在一个普适常数 $d > 0$，使得对于任意可测事件 A ，

$$\mathbb{P}_{\hat{\mathbf{H}}_t}(A) \le \hat{Z}^{-1}\mathbb{P}^{\vec{0}}_{\text{free}}(A) \le 2\exp\left(dTn\max\left(1, t^{-1/2}n^{1/2}\right)\right)\mathbb{P}^{\vec{0}}_{\text{free}}(A).$$

ˆ 我们现在可以对顶行 L_1 的上确界进行估计。

引理 4.4。 对于所有 $\epsilon > 0$，存在常数 $c, d > 0$，使得对于任意 $t, T > 0$, $n \in \mathbb{N}$和$a > cTn^{\epsilon}$ $\max(1, t^{-1/4}n^{1/4})$，我们有

$$\mathbb{P}_{\hat{\mathbf{H}}_t}(\sup_{x\in[-T,T]} \hat{\mathcal{L}}_1(x) \ge a) \le \exp(-da^2/T).$$

证明。 先引入一些记号，定义

$$p_n(a) = \mathbb{P}_{\hat{\mathbf{H}}_{t,(n)}}(\sup_{x\in[-T,T]} \hat{\mathcal{L}}_1(x) \ge a),$$

并令 $M_n = \max(1, t^{-1/4}n^{1/4})$。我们先证明以下断言。

断言： 存在一个绝对常数 $c > 0$，使得对于任意选取的 T， $t > 0$ 和$n \in \mathbb{N}$, $\ell \in \{2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$，以及任意 $a > cTM_n\sqrt{n/\ell}$，都有

$$p_n(a) \le \max_{\ell\le k\le 2\ell} p_{k-1}(a/2) + \exp(-a^2/(2T)). \tag{4.4}$$

断言的证明： 对于任意 $\ell \in \{2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$，考虑事件

$$A_\ell = \bigcup_{k=\ell}^{2\ell} D_k, \qquad D_k := \left\{\sup_{x\in[-T,T]} \hat{\mathcal{L}}_k(x) \le \frac{a}{2}\right\}.$$

由推论 4.3，我们有

$$\mathbb{P}_{\hat{\mathbf{H}}_t}(A_\ell^c) \le \hat{Z}^{-1}\mathbb{P}^{\vec{0}}_{\text{free}}(A_\ell^c) \le \exp(dTnM_n^2 - \frac{a^2\ell}{T}) \le \exp(-a^2/(2T)),$$

其中，最后一个不等式用到了 a 的下界和 n/ℓ 的上界，并取 $c > 0$ 足够大。因此

$$p_n(a) \le \mathbb{P}_{\hat{\mathbf{H}}_t}\left(\left\{\sup_{x\in[-T,T]} \hat{\mathcal{L}}_1(x) \ge a\right\} \cap A_\ell\right) + \exp(-a^2/(2T)). \tag{4.5}$$

现在，(4.5) 的上界为

$$\max_{\ell\le k\le 2\ell} \mathbb{P}_{\hat{\mathbf{H}}_t}\left(\sup_{x\in[-T,T]} \hat{\mathcal{L}}_1(x) \ge a \,\middle|\, D_k\right) + \exp(-a^2/(2T)). \tag{4.6}$$

˜ ˜ ˜ ˜现在固定 $k \in \{\ell, \dots, 2\ell\}$，并考虑一个线系综 $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{k-1})$，使得 $\mathcal{L} - a/2 \sim \mathbb{P}\hat{}\mathbf{H}_t,(k-1)$。也就是说， $\mathcal{L}$与向上平移 $\frac{a}{2}$ 后的 $\mathbb{P}\hat{}\mathbf{H}_t,(k-1)$ 具有相同的分布。根据引理 ˆ ˜ ˆˆ 2.8、2.9，若 $\mathcal{L} \sim \mathbb{P}_{\hat{\mathbf{H}}_t}(\cdot \mid D_k)$，则 $\mathcal{L}$随机支配 $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{k-1})$。因此 (4.6) 为

被（4）的右端所界定，正如所需。 ■

由该断言，根据离散微积分即可得到此引理。事实上，对固定的 $\epsilon > 0$，构造一个整数序列 $\ell_1 = 2 < \cdots < \ell_{\lceil 2/\epsilon \rceil} = n$，使得对所有 n都有 $2\ell_i/\ell_{i-1} \le n^\epsilon$。只要给定 ϵ， n 足够大，我们就可以这样做。于是对于 $a > c2^{\lceil 2/\epsilon \rceil} T M_n n^\epsilon$，任意给定 $i \in \{\ell_j - 1, \dots 2\ell_j - 1\}$，由于 $i/\ell_{j-1} \le 2\ell_j/\ell_{j-1} \le n^\epsilon$，在上述断言中取 $(n、\ \ell、\ a) = (i、\ \ell_{j-1}、\ a/2^{\lceil 2/\epsilon \rceil - j})$，可得

$$p_i(a/2^{\lceil 2/\epsilon \rceil - j}) \le \max_{\ell_{j-1} \le k \le 2\ell_{j-1}} p_{k-1}(a/2^{\lceil 2/\epsilon \rceil - j+1}) + \exp(-a^2/(2^{2\lceil 2/\epsilon \rceil - 2j+1} T)).$$

将这些不等式与关于 p_1、 p_2、 p_3 的初始尾部界（推论 4.3 ）结合起来，即可得到 $p_n(a) = p_{\ell_{\lceil 1/\epsilon \rceil}}(a)$ 的所需上界。 □

5 KPZ线系综的界

本节证明定理 1.1。回顾该定理的陈述：

$$e_n^{(t)} = \frac{t}{24} + \sum_{i=1}^{n-1} \log(\frac{i}{t}) = \log(t^{-(n-1)}(n-1)!) + \frac{t}{24} = n \log n - n - (n-1)\log t + \frac{t}{24} + O(\log n).$$

我们的目标是证明，KPZ$^{(t)}$ 线系综的第 n条线 $\mathcal{H}_n^{(t)} = \mathcal{H}_n$ 集中在平移抛物线 $e_n^{(t)} - x^2/(2t)$ 附近。为此，定义

$$\hat{\mathcal{H}}_n(x) = \mathcal{H}_n(x) - e_n^{(t)} + \frac{x^2}{2t},$$

对于 x， $T > 0$ 和 $T > 0$，定义

$$\begin{aligned} p_{n,t}^-(x) &= \mathbb{P}\left(\hat{\mathcal{H}}_n(0) \le -x\right), \\ p_{n,t}^+(x) &= \mathbb{P}\left(\hat{\mathcal{H}}_n(0) \ge x\right), \\ q_{n,t}^-(x,T) &= \mathbb{P}\left(\sup_{y \in [-T,T]} \hat{\mathcal{H}}_n(y) \le -x\right), \\ q_{n,t}^+(x,T) &= \mathbb{P}\left(\inf_{y \in [-T,T]} \hat{\mathcal{H}}_n(y) \ge x\right). \end{aligned}$$

我们将通过推导上述四个函数之间的不等式来证明定理 1.1 。在此之前，我们先记录关于 $p_{n,\ t}^+$ 的一个先验界，它可由 KPZ 线系综中间距的指数矩公式（定理 1.5）推出。

引理 5.1。 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $t > t_0 > 0$。那么，对所有 $x > 0$,

$$p_{n,t}^+(x) \le p_{1,t}^+(x/2) + (n-1)e^{-x/(2n)} \le 2\exp(-dx^{3/2}t^{-1/2}) + n\exp(-x/(2n)),$$

其中 $d > 0$ 仅取决于 t_0。

证明。 注意到

$$\left\{\hat{\mathcal{H}}_n(0) \ge x + e_n^{(t)}\right\} \subset \left\{\hat{\mathcal{H}}_1(0) \ge \frac{x}{2}\right\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \left\{\mathcal{H}_{i+1}(x) - \mathcal{H}_i(x) > \log(\frac{i}{t}) + \frac{x}{2n}\right\}.$$

因此，由定理 1.5、并集界和马尔可夫不等式可得

$$\begin{aligned} p^{+}_{n,t}(x) &\le \mathbb{P}\big(\hat{\mathcal{H}}_1(0) \ge \frac{x}{2}\big) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\mathcal{H}_{i+1}(x) - \mathcal{H}_i(x) > \log(\frac{i}{t}) + \frac{x}{2n}\big) \\ &\le p^{+}_{1,t}(x/2) + (n-1)e^{-x/(2n)}. \end{aligned}$$

第二个不等式使用引理2.10。 □

接下来，我们得到函数 $q^{\pm}$、$p^{\pm}$ 的如下不等式。首先，我们可以利用 p^{+}_{n}、$_t$ 对 q^{-}_{n}、$_t$ 进行上界估计。然后，我们利用 q^{-}_{n}、$_t$ 对 p^{-}_{n}、$_t$ 进行界定。通过对称论证，我们可以利用 p^{-}_{n}、$_t$ 对 q^{+}_{n}、$_t$ 进行界定，再利用 q^{-}_{n}、$_t$ 对 p^{+}_{n}、$_t$ 进行界定。由此闭合这一循环，得到关于 $p^{\pm}_{n}$、$_t$ 的自反不等式，它们共同证明定理 1.1。下一个引理将证明我们的基本不等式。

引理 5.2。 首先，对于任意 a，T，$t>0$ 和 $n\in\mathbb{N}$，我们有

$$p^{\pm}_{n,t}(a) \le 2\exp(-da^2/T) + q^{\pm}_{n,t}(\frac{a}{2}, T), \tag{5.1}$$

其中 $d>0$ 是一个普适常数。接下来，对于任意 $\epsilon>0$，存在仅依赖于 ϵ 的常数 c，$d>0$，使得下述结论成立。对于任意满足以下条件的 T，a，κ，$t>0$ 和 $n\in\mathbb{N}$：

$$4t^{1/2}(a+\kappa)^{1/2}(1+n/a)^{1/2} \le T \le \frac{a}{cn^{\epsilon}M} \tag{5.2}$$

其中 $M = \mathsf{max}(1,\ t^{-1/4}n^{1/4})$，我们有：

$$q^{\pm}_{n,t}(a,T) \le \exp\left(-da^2/T\right) + p^{\pm}_{1,t}(\frac{a}{4}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} p^{\mp}_{i,t}(\kappa). \tag{5.3}$$

证明。 为证明（5.1），注意到

$$\left\{\inf_{x\in[-T,T]} \pm\hat{\mathcal{H}}_n(x) \le -a\right\} \subset \left\{\sup_{u,v\in[-T,T],\,u\neq v} |\hat{\mathcal{H}}_n(u) - \hat{\mathcal{H}}_n(v)| \le \frac{a}{2}\right\} \cup \left\{\sup_{x\in[-T,T]} \pm\hat{\mathcal{H}}_n(x) \le -\frac{a}{2}\right\}. \tag{5.4}$$

不等式（5.1）可由将引理 2.11 应用于上文右端的第一个事件得出。

现在我们继续证明（5.3）。我们只证明 $-$ 情形，因为 $+$ 情形可对称地证明。定义以下事件

$$A^{n}_{T,a} := \{\sup_{x\in[-T,T]} \hat{\mathcal{H}}_n(x) \le -a\}, \qquad \mathfrak{E}^{n}_{T,\kappa} := \bigcap_{i=1}^{n-1} \left\{\hat{\mathcal{H}}_i(T) \le \kappa \text{ and } \hat{\mathcal{H}}_i(-T) \le \kappa\right\}. \tag{5.5}$$

由并集界，

$$q^{-}_{n,t}(a,T) \le \mathbb{P}\left(A^{n}_{T,a} \cap \mathfrak{E}^{n}_{T,\kappa} \cap \left\{\hat{\mathcal{H}}_1(0) \ge -\frac{a}{4}\right\}\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} p^{+}_{n,t}(\kappa) + p^{-}_{1,t}(\frac{a}{4}). \tag{5.6}$$

其中，上述不等式中的求和利用了过程 $\mathcal{H}_i(x) + \frac{x^2}{2t}$ 的平稳性。因此，我们只需对上述不等式右端的第一项进行界定，这可以

通过 **H**-布朗 Gibbs 方法来完成。首先，定义外部 σ-代数及其对应的条件分布如下：

$$\mathcal{F}_{\text{ext}} := \sigma\Big\{\mathcal{H}_i(x) : (i,x) \notin \{1,\dots,n-1\} \times [-T,T]\Big\}, \qquad \mathbb{P}_{\mathbf{H},\mathcal{F}_{\text{ext}}}(A) := \mathbb{E}_{\mathbf{H}}[\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_{\text{ext}}]. \tag{5.7}$$

由于$A^n_{T,\ a}$ 与 $\mathfrak{E}^n_{T,\ \kappa}$ 是 $\mathcal{F}_{\text{ext}}$ 可测的，因此

$$\mathbb{P}\left(A^n_{T,a} \cap \mathfrak{E}^n_{T,\kappa} \cap \left\{\hat{\mathcal{H}}_1(0) \geq -\frac{a}{4}\right\}\right) = \mathbb{E}_{\mathbf{H}}\left[\mathbb{P}_{\mathbf{H},\mathcal{F}_{\text{ext}}}(\hat{\mathcal{H}}_1(0) \geq -\frac{a}{4})\mathbb{1}(A^n_{T,a} \cap \mathfrak{E}^n_{T,\kappa})\right]. \tag{5.8}$$

现定义

$$f_n(x) = -\frac{x^2}{2t} + e_n^{(t)} - a,$$
$$v_i = -\frac{T^2}{2t} + e_i^{(t)} + \kappa, \qquad \vec{v} = (v_1,\dots,v_{n-1}).$$

注意到在事件 $A^n_{T,\ a} \cap \mathfrak{E}^n_{,\ \kappa}$上，成立 $\mathcal{H}_i\ (\pm T)\ \leq v_i$ 且 $\mathcal{H}_n \leq f_n$。因此，由引理2.8 与 2.9，（5.8）中期望内的项不超过

$$\mathbb{P}^{1,n-1,(-T,T),\vec{v},\vec{v},\infty,f_n}_{\mathbf{H}}\big(\mathcal{L}_1(0) \geq \frac{t}{24} - \frac{a}{4}\big). \tag{5.9}$$

我们现在采用以下步骤来抬高边界数据。首先，我们减小边界抛物线 f_n 的曲率，使之成为一条新抛物线 g_n，使得间隙 $g_n\ (\pm T)\ - v_{n-1}$ 恰好与第 4节中的 Toda 间距相匹配。更精确地，定义 $t' > t$ 为满足如下隐式方程

$$-\frac{T^2}{2t'} + e_n^{(t)} - a - \log(\frac{n-1}{t'}) = v_{n-1}, \tag{5.10}$$

或等价地

$$\frac{t'-t}{2tt'} = \frac{\kappa + a - \log(\frac{t'}{t})}{T^2}. \tag{5.11}$$

对 T的下界保证了 $T^2 > 16t\ (\kappa + a)$，从而该方程有唯一解 $t' \in [t, 2t]$。为说明这一点，令 $u = t'/t$。则（5.11）等价于

$$\frac{1}{u} - \frac{2t}{T^2}\log u = 1 - \frac{2t(\kappa+a)}{T^2} \in (\frac{1}{2}, 1).$$

满足上述方程的 u 的存在唯一性随即得出，因为函数 $h(u) =\frac{1}{u} - \frac{2t}{T^2}\log\ u$ 在 $u \in [1,2]$上严格递减，且 $h(1) = 1,\ \ h(2) < 1/2$。

其次，我们通过减小间距 $v_1,\dots,v_{n-1}$ 来抬高边界点 $v_{i+1} - v_i$，同时保持v_{n-1} 固定，同样是为了匹配第4节的间隙间距。此过程得到以下抬高的边界条件：

$$v'_{n-1} = v_{n-1}, \qquad v'_i = v'_{i+1} - \log(\frac{i}{t'}), \qquad \vec{v}' = (v'_1,\dots,v'_{n-1}), \tag{5.12}$$

$$g_n(x) = -\frac{x^2}{2t'} + e_n^{(t)} - a. \tag{5.13}$$

根据引理 2.8 和 2.9，**H**-布朗线系综 $\mathcal{L}'$ 在抬高的边界数据 $(\vec{v}', \vec{v}', g)$ 下随机支配 **H**-布朗线系综 $\mathcal{L}$ 在边界数据 $(\vec{v}, \vec{v}, f)$ 下，因此（5.9）有上界

$$\mathbb{P}_{\mathbf{H}}^{1,n,(-T,T),\vec{v}',\vec{v}',\infty.g_n}\big(\mathcal{L}_1'(0) \geq \frac{t}{24} - \frac{a}{4}\big). \tag{5.14}$$

现在我们希望应用引理 4.4 来证明上述概率很小。首先注意，我们预期第一条曲线所在的位置对应的抛物线现在由下式给出

$$g_1(x) := g_n(x) - \sum_{i=1}^{n-1} \log(\frac{i}{t'}) = \frac{t}{24} - \frac{x^2}{2t} - a + (n-1)\log(\frac{t'}{t})$$

现在，我们有

$$(n-1)\log(t'/t) \leq \frac{n(t'-t)}{t} = \frac{2t'n(\kappa + a - \log(t'/t))}{T^2} \leq \frac{a}{4}.$$

这里的等号用到了定义（5.11），最后一个不等式则用到了 $t' \in [t, 2t]$ 和 $T^2 > 16tn\,(\kappa + a)\,/a$。因此，我们有（5.14）的上界为

$$\mathbb{P}_{\mathbf{H}}^{1,n,(-T,T),\vec{v}',\vec{v}',\infty,g_n}\big((\mathcal{L}_1' - g_1)(0) \geq \frac{a}{2}\big).$$

由于 $a \geq cTn^{\epsilon}M$，现在我们可以应用引理 4.4 来完成证明。 □

利用这个引理，　现在我们可以证明定理1.1。我们在此用当前的记号重述该定理。

定理5.3。 固定 $\epsilon > 0, t_0 > 0$。存在常数 $d, C > 0$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}, t > t_0$ 和 $a \geq a_0 := C(tn^{2\epsilon} + t^{1/4}n^{3/4+2\epsilon})$，都有

$$\mathbb{P}\left(|\hat{\mathcal{H}}_n(0)| \geq a\right) \leq 2\exp(-daMn^{\epsilon}).$$

其中 $M = \max(1, t^{-1/4}n^{1/4})$。

在定理 5.3中，　n^{ϵ} 下界并非最优，通过改进证明可以进一步提高。我们没有尝试这样做，因为无论如何，我们都不认为这能得到尖锐的结果。

证明。设 $n \in \mathbb{N}, t > t_0 > 0, \epsilon > 0$。下文中，常数 $c, d > 0$ 是可以逐行变化的常数，并且允许依赖于 ϵ 和 t_0，但不依赖于其他参数。我们首先证明上尾的一个界，即证明 $p_{n,t}^{+}(a)$ 的一个界。若三元组 (T, a, κ) 对给定的 n, t, ϵ 满足不等式 (5.2)，则称其为 (n, t)-good。现在，利用引理 5.2 中的四个不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
p_{n,t}^{+}(a) &\leq 2\exp(-da^2/T) + q_{n,t}^{+}(\frac{a}{2}, T) \\
&\leq p_{1,t}^{+}(\frac{a}{8}) + 2\exp(-da^2/T) + 2\sum_{i=1}^{n-1} p_{i,t}^{-}(\kappa) \\
&\leq p_{1,t}^{+}(\frac{a}{8}) + 2\exp(-da^2/T) + 2n\exp(-d\kappa^2/L) + \sum_{i=1}^{n-1} q_{i,t}^{-}(\frac{\kappa}{2}, L) \\
&\leq p_{1,t}^{+}(\frac{a}{8}) + 2np_{1,t}^{-}(\frac{\kappa}{8}) + 2\exp(-da^2/T) + 2n\exp(-d\kappa^2/L) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i-1} p_{j,t}^{+}(\sigma).
\end{aligned}$$

这里，第一个不等式对 $p^+_{n,t}$ 使用了 (5.1)，第二个不等式对 $q^+_{n,t}$ 使用了 (5.3)，并要求三元组 $(T, a/2, \kappa)$ 为 (n, t)-good。第三个不等式对 $p^-_{i,t}, i = 1, \dots, n-1$ 使用了 (5.1)，第四个不等式对 $q^+_{i,t}, i = 1, \dots, n-1$ 使用了 (5.3)，并要求对于所有 $i = 1, \dots, n-1$，三元组 $(L, \kappa/2, \sigma)$ 为 (i, t)-good。注意到任意 (n, t)-good 三元组对于所有 $i \le n$ 都是 (i, t)-good，因此，只要两个三元组 $(T, a/2, \kappa)$、$(L, \kappa/2, \sigma)$ 都是 (n, t)-good，上述不等式链就成立。

在设定 T, L, κ, σ 之前，注意到我们可以进一步简化计算。若设 $P^+_{n,t}(a) = \max_{i=1,\dots,n} p^+_{i,t}(a)$，那么注意到，在对 a, T, L, κ, σ施加相同约束的条件下，我们有

$$P^+_{n,t}(a) \le p^+_{1,t}(\frac{a}{8}) + 2np^-_{1,t}(\frac{\kappa}{8}) + 2\exp(-da^2/T) + 2n\exp(-d\kappa^2/L) + n^2 P^+_{n,t}(\sigma). \tag{5.15}$$

要看出 (5.15) 为何成立，我们利用 $P^+_{n,t}(a) = p^+_{j,t}(a)$ 对某个 $j \le n$ 成立这一点，然后将上述不等式链应用于 $p^+_{j,t}$，并用更大的 $P^+_{n,t}$项替换最后的 $p^+_{j,t}$项之和。对 a, T, L, κ, σ 的约束仍然适用，因为正如前文所述，随着 i 增大，具有 (i, t)-良好性质的要求会变得更严格。

考察 (5.15)，可以猜想，在适当的参数选择下，它能将深尾部 $P^+_{n,t}(\sigma)$ 上的不等式传递到较浅的尾部 $P^+_{n,t}(a)$，对于 $a < \sigma$。我们还可以看出，随着 $,\sigma$ 增大，不等式会变得更强，因此我们将在 (5.2) 中的第二个约束下，将这些参数取到最大。对于一个较大的常数 $c > 0$，令

$$T = \frac{a}{cn^\epsilon M}, \qquad \kappa = \frac{1}{10^3 c^2}\frac{a^2}{tn^{2\epsilon}M^2(1+n/a)},$$
$$L = \frac{1}{c}\frac{\kappa}{n^\epsilon M}, \qquad \sigma = \frac{1}{10^3 c^2}\frac{\kappa^2}{tn^{2\epsilon}M^2(1+n/a)}.$$

我们有 $\kappa \ge 2a$ 和 $\sigma \ge 2\kappa$，假设

$$a > C(tn^{2\epsilon}M^2 + \sqrt{t}n^{1/2+\epsilon}M),$$

对于 $C > 0$ 给定的充分大 c，ϵ，t_0。上述右端由定理陈述中的 a_0 上界所控制。此外，鉴于 $\kappa \ge 2a$，$\sigma \ge 2\kappa$，很容易验证三元组 $(T, a/2, \kappa)$、$(L, \kappa/2, \sigma)$ 都是 (n, t)-良好的。最后，$a^2/T \le \kappa^2/L$ 由于 $\kappa \ge 2a$，方程 (5.15) 可简化为：

$$P^+_{n,t}(a) \le (2n+1)p^+_{1,t}(\frac{a}{8}) + (2n+1)\exp(-da^2/T) + n^2 P^+_{n,t}(\sigma).$$

现在，上述右端的前两项均由 $2\exp(-dan^\epsilon M)$ 上界所控制。对于第一项，这用到了引理2.10 以及 a的下界。由此得到

$$P^+_{n,t}(a) \le 2\exp(-dan^\epsilon M) + n^2 P^+_{n,t}(\sigma) \le 2\exp(-dan^\epsilon M) + n^2 P^+_{n,t}(4a). \tag{5.16}$$

接下来，令 $\ell = \lceil 3\log_4 n \rceil$。将上述不等式迭代 ℓ 次，我们得到

$$P^+_{n,t}(a) \le cn^{2\ell}\exp(-dan^\epsilon M) + cn^{2\ell}P^+_{n,t}(an^3).$$

上面右端的第二项可由引理 5.1 控制，并且很容易看出，与第一项相比它是低阶项。引理中关于 $p^+_{n,t}(a)$ 的界，随后可通过对 d 递减来化简得到；注意，前因子 $n^{2\ell}$ 与指数相比是低阶项。

现在，我们通过对 $p^+_{n,t}$ 的界来控制 $p^-_{n,t}(a)$。事实上，类似于引理开头的计算，对于任意一个为 (n,t)-良好的三元组 $(T, a/2, \kappa)$，我们有

$$\begin{aligned} p^-_{n,t}(a) &\le 2\exp(-da^2/T) + q^-_{n,t}(\frac{a}{2}, T) \\ &\le p^-_{1,t}(\frac{a}{8}) + 2\exp(-da^2/T) + 2\sum_{i=1}^{n-1} p^+_{i,t}(\kappa). \end{aligned}$$

选取 T, κ，并令 $a > a_0$，使得 $\kappa > 2a$。于是，与我们先前的计算一样，我们有

$$p^-_{n,t}(a) \le 2\exp(-dan^\epsilon M) + nP^+_{n,t}(2a).$$

应用先前对$P^+_{i},_t$ 所建立的界，即可得到该结果。 □

ˆ推论 *1.2*的证明。 我们使用 $\mathcal{H}_n, M$ 这一先前各证明中的记号。令 $I = \mathbb{Z} \cap [-e^a, e^a]$。则

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\Big(\sup_{x\in[-e^a,e^a]} |\hat{\mathcal{H}}_n(x)| > a \Big) \\ &\quad \le \sum_{i\in I} \mathbb{P}\left(|\hat{\mathcal{H}}_n(i)| > a/2 \right) + \mathbb{P}\left(\exists s < t < s+1 \in [-e^a, e^a] : |\hat{\mathcal{H}}_n(s) - \hat{\mathcal{H}}_n(t)| > a/2 \right) \\ &\quad \le 3e^{a - dan^\epsilon M} + e^{-da^2}. \end{aligned}$$

ˆ第二个不等式使用定理 1.1 以及 $\mathcal{H}_n$ 的平稳性来界定对 $i \in I$的求和，并用引理 2.11处理第二项。利用 a 的下界化简最终结果，即得该推论。

□

向量值哈密顿量的单调耦合的证明

引理 A.1. 考虑两组边界函数 $f_{(1)}\, f^{(2)}\colon (a,b) \to \mathbb{R}$，使得 $f_{(1)} \le f_{(2)}$，以及端点对$(x^{(i)}_j, y^{(i)}_j)_{j=1}^k$，对 $i \in \{1,2\}$ 成立，且满足 $x^{(1)}_j \le x^{(2)}_j$，并对所有 $j \in \{1,\dots,k\}$有 $y^{(1)}_j \le y^{(2)}_j$。此外，固定一个由 n 个哈密顿量构成的向量 $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_k)$，使得每个$\mathcal{H}_i\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$是凸的。令 $\mathcal{L}^{(i)} = (\mathcal{L}^{(i)}_1, \dots, \mathcal{L}^{(i)}_k)$ 为依照 $\mathbb{P}^{(i)}_{\mathbb{H}}$ 分布的直线集合。存在 $\mathcal{L}^{(1)}, \mathcal{L}^{(2)}$ 的一个耦合，使得对所有 j有 $\mathcal{L}^{(1)}_j \le \mathcal{L}^{(2)}_j$。

证明。该证明几乎完全沿用 [CH16] 中引理 2.6（或 [DM21] 中引理 5.7）的证明，因此此处仅给出证明概要。设 $\vec{x}^n = (x^n_1, \dots, x^n_k)$ 与 $\vec{y}^n = (y^n_1, \dots, y^n_k)$，使得 $x^n_j, y^n_j \in n^{-1}(2\mathbb{Z})$ 且 $x^n_j \to x_j$，$y^n_j \to y_j$。我们现在在两组随机游走桥 $X^{n,i}_j$（针对 $j = 1,\dots,k$ 与 $i \in \{1,2\}$）上定义一组动力学，具体如下：每个 $X^{n,i}$ 具有从 x^n 到 y^n 的端点，并且当限制于 $n^{-2}\mathbb{Z} \cap [a,b]$ 时具有大小为 $\pm 2n^{-1}$ 的跳跃。我们可通过在这些值之间线性插值，将 $X^{n,i}$ 延拓至 (a,b)。我们将两组随机游走均从其最低可能构型出发，从而显然对所有$j \in \{1,\dots,k\}$ 与 $u \in [a,b]$ 成立 $(X^{n,1}_j)_0(u) \le (X^{n,2}_j)_0(u)$。

现在我们将连续时间马尔可夫动力学具体定义如下。对于每个 $s \in n^{-2}\mathbb{Z} \cap [a,b]$,$j \in \{1,\dots,k\}$ 和 $m \in \{-1,+1\}$，我们都设有一个速率为 1 的指数时钟。时钟响起时，我们尝试在时间 s 将两条游走都从 $X^{n,i}_j(s)$ 改为 $X^{n,i}_j(s) + 2mn^{-1}$ for $i = 1,2$。我们

将这一拟议的改变称为 $\tilde{X}^{n,i}$。如果该改变可行（即步长不会变得过大），并且符合 Metropolis规则，则接受该改变。对于 $i \in \{1,2\}$，定义：

$$R^i = \frac{W_{\mathbb{H}}(\tilde{X}^{n,i})}{W_{\mathbb{H}}(X^{n,i})}$$

现在采样一个 $U \sim \text{Unif}([0,1])$。当 $R^i \geq U$ 时接受该变更；需要特别指出的是，两个马尔可夫过程使用的是同一个均匀分布。由于这两个过程都是有限状态、不可约的马尔可夫过程，它们必然在无限时间下收敛到各自的平稳分布。此外，由于 $n \to \infty$，显然相应的平稳分布在 $n \to \infty$ 时收敛到 $\mathbb{P}_{\mathbf{H}}$。因此，剩下需要验证的是，在此耦合下，对所有 n, j，都有 $X^{n,j}{}^1 \leq X^{n,j}{}^2$。

假设 (s,j,m) 的时钟响起，并且 $X^{n,j}{}^1(s) = X^{n,j}{}^2(s)$。注意，我们只需考虑两种可能影响顺序的情形：当 (s,j) 处的两条路径呈现某种形式且 $+$ 响起，或者两条路径呈现另一种形式且 $-$ 响起。假设我们处于前一种情形（第二种情形的论证类似），并且正尝试翻转为 $\vee$ $\wedge$。我们只需验证 $R^1 \leq R^2$。注意，对于每个 i

$$R^i = \exp\Big(\int_{s-n^{-2}}^{s+n^{-2}} \big(\mathcal{H}_{j-1}(X_j^{n,i}(u) - X_{j-1}^{n,i}(u)) - \mathcal{H}_{j-1}(\tilde{X}_j^{n,i}(u) - X_j^{n,i}(u)) \big)\, du \Big)$$
$$\cdots \times \exp\Big(\int_{s-n^{-2}}^{s+n^{-2}} \big(\mathcal{H}_j(X_{j+1}^{n,i}(u) - X_j^{n,i}(u)) - \mathcal{H}_j(\tilde{X}_{j+1}^{n,i}(u) - X_j^{n,i}(u)) \big)\, du \Big).$$

其中，乘积中的两项表示相邻两条线之间相互作用强度的变化。我们通过定义以下函数来简化记号：

$$d_k^i(u) = X_{k+1}^{n,i}(u) - X_k^{n,i}(u), \qquad \delta(u) = \tilde{X}_j^{n,i}(u) - X_j^{n,i}(u)$$

于是有：

$$R^i = \exp\Big(\int_{s-n^{-2}}^{s+n^{-2}} \big(\mathcal{H}_{j-1}(d_{j-1}^i(u)) - \mathcal{H}_{j-1}(d_{j-1}^i + \delta(u)) \big)\, du \Big)$$
$$\cdots \times \exp\Big(\int_{s-n^{-2}}^{s+n^{-2}} \big(\mathcal{H}_j(d_j^i(u)) - \mathcal{H}_j(d_j^i(u) - \delta(u)) \big)\, du \Big).$$

现在，当 $X^{n,j}{}^1 \leq X^{n,j}{}^2$ 时，我们有 $d_{j-1}^1(u) \geq d_{j-1}^2(u)$，且 $d_j^1(u) \leq d_j^2(u)$。此外，由于每个 $\mathcal{H}_k$ 都是凸的，我们有：

$$\mathcal{H}_{j-1}(d_{j-1}^1(u)) - \mathcal{H}_{j-1}(d_{j-1}^1 + \delta(u)) \leq \mathcal{H}_{j-1}(d_{j-1}^2(u)) - \mathcal{H}_{j-1}(d_{j-1}^2 + \delta(u))$$
$$\mathcal{H}_j(d_j^1(u)) - \mathcal{H}_j(d_j^1(u) - \delta(u)) \leq \mathcal{H}_j(d_j^2(u)) - \mathcal{H}_j(d_j^2(u) - \delta(u))$$

这立即意味着 $R^1 \leq R^2$，因此每当 $X^{n,1}$ 向上翻转时，$X^{n,2}$ 也会向上翻转。对另一种情况也可应用对称的论证，从而完成证明。 □

参考文献

[AH25] Amol Aggarwal 和 Jiaoyang Huang. 多边形菱形铺砌的边缘统计，II：Airy线系综。《数学论坛：π》，13:e2，2025。

[AH26] Amol Aggarwal 和 Jiaoyang Huang. Airy线系综的强刻画。《数学发明》，243:293–605，2026。[AKQ14] Tom Alberts、Konstantin Khanin 和 Jeremy Quastel. 连续定向随机聚合物。《统计物理学杂志》，154(1):305–326，2014。[BKMM07] J Baik、T Kriecherbauer、Kenneth DT-R McLaughlin 和 Peter D Miller. 离散正交多项式：渐近性与应用，第164卷。普林斯顿大学出版社，2007。[CG20a] Ivan Corwin 和 Promit Ghosal. 一般初始数据下的 KPZ 方程尾部。《电子概率杂志》，25:1–38，2020。[CG20b] Ivan Corwin 和 Promit Ghosal. KPZ方程的下尾。《杜克数学杂志》，169(7):1329–1395，2020。[CGH21] Ivan Corwin、Promit Ghosal 和 Alan Hammond. KPZ方程的时间相关性。《概率年刊》，49(2):832–876，2021。[CH14] Ivan Corwin 和 Alan Hammond. Airy线系综的布朗吉布斯性质。《数学发明》，195(2):441–508，2014。[CH16] Ivan Corwin 和 Alan Hammond. KPZ线系综。《概率论及其相关领域》，166:67–185，2016。[CN17] Ivan Corwin 和 Mihai Nica. 中等无序有向聚合物与随机热方程的多层扩展。《电子概率杂志》，22(13):1–49，2017。[Cor21] Ivan Corwin. 几何 RSK 对应下聚合物配分函数的不变性。载于《随机分析、随机场与可积概率——福冈 2019》，第87卷，第89–137页。2021。[Dau22] Duncan Dauvergne. 最后通过渗流和有向聚合物的隐藏不变性。《概率年刊》，50(1):18–60，2022。[DG23] Sayan Das 和 Promit Ghosal. KPZ方程的迭代对数律与分形性质。《概率年刊》，51(3):930–986，2023。[Dim22] Evgeni Dimitrov. H-布朗吉布斯线系综的刻画。《概率与数学物理》，3(3):627–673，2022。[DM18] Erik Duse 和 Anthony Metcalfe. 离散交错粒子系统的普适边缘涨落。《布莱兹·帕斯卡数学年刊》，25(1):75–197，2018。[DM21] Evgeni Dimitrov 和 Konstantin Matetski. 布朗吉布斯线系综的刻画。《概率年刊》，49(5):2477–2529，2021。[DNV23] Duncan Dauvergne、Mihai Nica 和 B´alint Vir´ag. 一致收敛到 Airy线系综。《亨利·庞加莱研究所年刊（B辑）：概率与统计》，59(4):2220–2256，2023。[DOV22] Duncan Dauvergne、Janosch Ortmann 和 B´alint Vir´ag. 有向景观。《数学学报》，229(2):201–285，2022。

[DS26] Duncan Dauvergne 和 Fardin Syed。《艾里过程和 KPZ 片的新表示》。即将出版，2026 年。[GH22] Shirshendu Ganguly、Milind Hegde 和 Lingfu Zhang。通过切线法研究KPZ方程的精确上尾估计与极限形状。arXiv 预印本 arXiv:2208.08922，2022 年。[GHZ23] Shirshendu Ganguly、Milind Hegde 和 Lingfu Zhang。KPZ模型上尾中的路径测度的布朗桥极限。arXiv 预印本 arXiv:2311.12009，2023 年。[Hai13] Martin Hairer。求解 KPZ方程。《数学年刊》，第 559–664 页，2013 年。[Joh03] Kurt Johansson。离散多核生长与行列式过程。《数学物理通讯》，242(1):277–329，2003 年。[Joh18] Kurt Johansson。极限形状的边缘涨落。《数学当前进展》，2016(1):47–110，2018 年。[Kat11] Makoto Katori。O’Connell过程作为恶性布朗运动。《物理评论 E——统计、非线性与软物质物理》，84(6):061144，2011 年。[Kat12] Makoto Katori。相互湮灭布朗运动的存活概率与 O’Connell过程。《统计物理学杂志》，147(1):206–223，2012 年。[KPZ86] Mehran Kardar、Giorgio Parisi 和 Yi-Cheng Zhang。生长界面的动态标度。《物理评论快报》，56:889–892，1986 年 3 月。[Nic21] Mihai Nica。多层半离散定向聚合物的中间无序极限。《电子概率杂志》，26:1–50，2021 年。[NY04] Masatoshi Noumi 和 Yasuhiko Yamada。热带 Robinson–Schensted–Knuth 对应与双有理 Weyl群作用。《代数群与量子群的表示论》，40:371–442，2004 年。[O’C12] Neil O’Connell。定向聚合物与量子户田格。《概率年刊》，40(2):437，2012 年。[OW15] Neil O’Connell 和 Jon Warren。随机热方程的多层扩展。《数学物理通讯》，341(1):1–33，2015 年。[Pet14] Leonid Petrov。利用 Gelfand–Tsetlin格式研究随机菱形铺砌的渐近性。《概率论及其相关领域》，160(3):429–487，2014 年。[PS02] Michael Prahofer 和 Herbert Spohn。PNG液滴与艾里过程的标度不变性。《统计物理学杂志》，108(5):1071–1106，2002 年。¨Tsa[Li-Cheng Tsai。KPZ方程的精确下尾大偏差。《杜克数学杂志》，171(9):1879–1922，2022 年。22] Vir[B20] alint Vir´ag。热与景观 I。arXiv 预印本 arXiv:2008.07241，2020 年。´Wu23a[Xuan Wu。KPZ线系综的收敛性。《国际数学研究通知》，2023(22):18901–18957，2023 年。

[Wu23b] Xuan Wu。KPZ方程与有向景观。*arXiv* 预印本 *arXiv:2301.00547*，2023 年。[Wu 25] Xuan Wu。最优传输在 Dyson布朗运动及其他领域中的应用。*arXiv* 预印本 *arXiv:2412.17389*，2025 年。