arXiv:2602.06882v1 [math.OA] 6 Feb 2026

可计算 K-理论与C*-代数 II：AF代数

CHRISTOPHER J. EAGLE[1],ISAAC GOLDBRING[2], 和 TIMOTHY H. MCNICHOLL

Abstract. 我们继续研究 C*-代数的有效内容，重点关注 AF代数。我们证明，从AF代数的可计算可枚举表示出发，可以计算出该代数作为有限维代数归纳极限的一个表示。利用这一结果以及维数群的一个类似结果，我们证明，可计算 K_0 函子在 AF代数的可计算可枚举表示与含幺（带尺度）维数群的可计算可枚举表示之间给出了范畴的可计算等价，从而获得 Elliott分类定理的一个有效版本。我们利用这些结果确定了各种 AF代数类的指标集和同构问题的复杂性。

Contents

1. 引言 2
2. 经典数学背景 4
2.1. 范畴中的归纳极限 4
2.2. 有序阿贝尔群 5
2.3. C*-代数 7
2.4. Bratteli 图 11
3. 有效（可计算）数学背景 13
3.1. 算法群论 13
3.2. C*-代数 14
4. 经典数学预备知识 16
4.1. 有序阿贝尔群 16
4.2. C*-代数 17
5. 有效数学预备知识 18
5.1. 可计算索引范畴中的归纳极限 18
5.2. 阿贝尔群 19
5.3. 有序阿贝尔群 20
5.4. C*-代数 22
5.5. Bratteli 图 24
6. 有效 Glimm 引理 25
7. 主定理 1 的证明 28
8. 主定理 2 的证明 30
9. 主定理3 的证明 33
10. 主定理 4 的证明 34
11. 主定理 5 的证明 37

[1] 由加拿大自然科学与工程研究委员会探索研究基金 RGPIN-2021-02459 资助。[2] 由美国国家科学基金会资助，项目编号 DMS-2054477。

11.1. 一个预备引理 37 11.2. 可计算函子与等价 37 11.3. 范畴 38 11.4. 可计算等价的证明 38 12. 关于指标集与同构问题的应用 40 致谢 43 参考文献 44

1. Introduction

在我们先前与 [9] R. Miller 的工作中，我们开始了对 K-理论在 C*-代数中的有效研究。更确切地说，我们构造了一个可计算函子，将每个可计算可枚举（c.e.）表示 $\mathbf{A}^{\#}$ 的 C*-代数$\mathbf{A}$映射为其 $K_0(\mathbf{A}^{\#})$ 群的一个 c.e. 表示 K_0 。 $K_0($**A**此外，该函子将可计算的 $*$-同态映射为可计算的群同态。上述陈述在下文第 3.2.2 节中得到了精确表述。我们还为 K_1 定义了一个类似的可计算函子。同样作为概念验证，我们对限制在 K_0 函子进行了完整分析，该函子限于一致超有限（*UHF*）代数。

在本文中，我们拓展研究范围，考虑将可计算 K_0 函子限制在近似有限维（AF）代数这一类上；AF代数是指同构于有限维 C*-代数的归纳极限所得代数的 C*-代数。每个 AF代数 A 都有 $K_1(A) = 0$，因此 AF代数的 K-理论完全聚焦于 K_0。由于 AF代数是稳定有限的，其 K_0群具有自然序，从而成为一个（偏）有序阿贝尔群。此外，对于 c.e. 表示 $A^{\#}$，该群的正锥（记为 $K_0(A)^+$）是表示 $K_0(A^{\#})$的可枚举集；相应地，我们将 $(K_0(A^{\#}), K_0(A)^+)$ 称为 $A^{\#}$的有序表示群。作为 AF代数的有序 K_0 群而出现的有序阿贝尔群称为维数群。根据 Effros-Handelman-Shen定理，这些群恰好是同构于单纯群归纳极限的有序阿贝尔群，即具有典范序的形如 $\mathbb{Z}^n$ 的群。通过区分 A 的单位元在 $K_0(A)$ 中的像 $K_0(\mathbf{1_A})$，可以将 $K_0(A)$ 视为一个含单位元（或带尺度）的群，即带有指定序单位的有序阿贝尔群。Elliott分类定理 [10] 指出，AF代数在同构意义下由其含单位元的有序 K_0 群刻画。事实上， K_0 函子给出了以下两个范畴之间的范畴等价：AF代数范畴（以近似酉等价类的 $*$-代数同态为态射）与含幺维数群范畴（以保持序单位的正群同态为态射）。

尽管 K_0 群为 AF代数提供了代数表示，Bratteli 图则提供了一种组合表示方法，即将 AF代数表示为按层级排列的无限多重图。带标记的Bratteli图为顶点赋予数字，而每个 AF代数都可以由一个带标记的Bratteli图完整描述。

我们的首要总体目标是对 AF代数的可计算可枚举表示进行分类。为此，我们引入*AF*证书这一概念（定义见第2.3.5

节）。这些证书本质上将 AF代数描述为有限维代数的一个特定归纳极限。我们的第一个主要结果如下。

主定理 1. 如果一个含幺 *AF* 代数具有可计算可枚举表示，那么它也具有可计算 *AF* 证书。

在经典数学中，考虑 AF 代数时，通常假定它表示为有限维代数的归纳极限。然而，AF 代数的可计算可枚举表示仅提供某个稠密集上的范数信息，本身并不能轻易给出这样的描述。相反，必须根据 AF 代数**A**的可计算可枚举表示所提供的信息，通过算法辨识**A** 的有限维 $*$子代数（它们与有限生成子代数并不相同）。找到这些

$*$子代数并非易事。作为中间步骤，我们费尽周折，先证明 Glimm引理的一个有效版本（下文定理 6.1）。我们指出，主定理 1 的证明具有一致性，因为它给出了一种算法，可从 AF 代数的可计算可枚举表示生成 AF 证书。

我们的第二个主要结果也将有助于实现第一个总体目标，它是上述 Effros-Handelman-Shen定理的一个有效版本。

主定理 2. 设 $\mathcal{G}^{\#}$ 是一个维数群的可枚举表示。

(1) 存在一个*AF*代数的可枚举表示$\mathbf{A}^{\#}$ ，使得$\mathbf{A}^{\#}$ 所呈现的有序 K_0 群与 $\mathcal{G}^{\#}$ 可计算同构。(2) 若 u 是 $\mathcal{G}$的一个序单位，则存在一个含幺*AF*代数的可枚举表示$\mathbf{A}^{\#}$ ，使得$\mathbf{A}^{\#}$ 所呈现的含幺有序 K_0 群与$(\mathcal{G}, u)^{\#}$可计算同构。

同样，证明是一致的。基于这两个结果，我们进而实现了对含幺AF代数的可枚举表示进行分类的目标。

主定理3 (可计算可表示的含幺AF代数的分类**).**设**A** 是一个含幺*AF*代数。那么，以下条件等价。

(1) **A** 具有一个可枚举表示。(2)存在一个有限维代数的可计算归纳序列，其归纳极限与 $*$**A**同构，并且每个连接映射都是含幺的。(3) **A**是可计算可表示的。(4) **A** 的含幺有序 K_0 群是可计算可表示的。(5) **A** 具有一个可计算可表示的带标记的 *Bratteli* 图。

证明再次是一致的。我们的下一个总体目标是通过证明可计算同构对象映射到可计算同构对象，来加强这一分类结果。以下内容体现了这一点。

主定理 4。 设$\mathbf{A}^{\#}$ 和$\mathbf{B}^{\#}$ 是含幺 *AF* 代数的可枚举表示。那么，以下各项等价。

(1) $\mathbf{A}^{\#}$ 与$\mathbf{B}^{\#}$可计算 $*$-同构。(2) $\mathbf{A}^{\#}$ 和$\mathbf{B}^{\#}$ 所表示的含幺有序 K_0 群是可计算同构的。(3) $\mathbf{A}^{\#}$ 的每个可计算 *AF* 证书的 *Bratteli* 图都与$\mathbf{B}^{\#}$的每个可计算 *AF* 证书的 *Bratteli* 图可计算等价。

证明具有一致性，这并不令人意外。到目前为止，我们的结果表明，应当可以证明 Elliott 范畴等价的一个有效版本，事实上确实如此：

主定理 5。 以下范畴是可计算等价的：

(1) 含幺 *AF* 代数的可计算可枚举表示范畴。(2) 含幺维数群的可计算可枚举表示范畴。

我们将在下文第 11 节正式定义该定理中的术语；这里暂且说明，可计算等价意味着所需的函子和自然同构都可以计算。证明很大程度上基于此前定理证明的一致性。

我们的主要定理有若干有趣的推论。首先，每个含幺 AF 代数的可计算可枚举表示都是可计算的（推论 7.3）。此外，与 UHF 代数不同，存在一个非可计算范畴化的 AF 代数（推论 10.3）。我们可以利用这一观察，证明维数群和 Bratteli 图也有类似结论。最后，我们利用这些结果确定 AF 代数和 UHF 代数的指标集及同构问题的复杂性。

本文汇集了数学若干领域的内容：可计算性理论、范畴论、群论以及 C*-代数理论。为了使全文相对自足且便于查阅，我们采用了如下结构。首先介绍这些领域的背景材料；这些内容已见于现有文献，我们力图加以整理和概述，使读者不必总是查阅大量其他资料。我们将这部分内容分为两部分：经典数学背景（第2节）和有效数学背景（第3节）。后者以平行的结构，概述前者所涉主题的可计算性理论。接着，我们阐述经典数学与有效数学中的预备内容（第4 节和第5节）。有效 Glimm 引理在第6节证明，主要定理则在第7 节至第11节证明。第12 节介绍关于指标集的结果

2. Background from classical mathematics

本节概述四个学科领域中与本文后续内容密切相关的背景材料：范畴中的归纳极限、有序阿贝尔群、C*-代数和 Bratteli 图。我们首先介绍归纳极限，因为这一主题为我们讨论后两个主题的大部分工作提供了基础。

2.1. 范畴中的归纳极限。

归纳极限凭借其能够从较小对象组成的链构造出较大对象的能力，在数学中无处不在。这里，我们讨论范畴论如何提供一个统一这些构造的框架，从而无需重复那些本质上相同的定义和论证。因此，现在我们假设 $\mathcal{C}$ 表示一个具有零对象的范畴。

假设对于每个 $n \in \mathbb{N}$， A_n 都是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象，且 ϕ_n 是从 A_n到 A_{n+1}的态射。序列 $(A_n, \phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 称为 $\mathcal{C}$的归纳序列 。通过复合，这些态射在$n' > n$时给出从 A_n 到 $A_{n'}$ 的态射 $\phi_{n,\,n'}$ 。此外，我们定义 $\phi_{n,\,n}$ 为 A_n的恒等态射；当$\ell < n$ 时，令 $\phi_{n,\,\ell}$ 表示零态射。

现在假设 A 是 $\mathcal{C}$中的一个对象，并假设对于每个 $n \in \mathbb{N}$， ν_n 都是从 A_n 到 A 的态射，且满足 $\nu_n = \nu_{n+1} \circ \phi_n$。我们称 $(A, (\nu_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 为 $(A_n, \phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$的归纳上极限。若 $(B, (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 也是 $(A_n, \phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$的归纳上极限，则从 $(A, (\nu_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 到 $(B, (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 的约化是一个从 A 到 B 的态射 λ，满足对所有 $n \in \mathbb{N}$， $\lambda \circ \nu_n = \mu_n$。我们称 $(A, (\nu_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 是 $(A_n, \phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的归纳极限，若对于 $(A_n, \phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$的每个归纳上极限 $(B, (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}})$，都存在从 $(A, (\nu_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 到 $(B, (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 的唯一约化。下面的结论可由定义直接推出。

命题 2.1. 设 $(A, (\nu_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 和 $(B, (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 是$(A_n, \phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$的归纳极限。那么，从$(A, (\nu_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 到$(B, (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 的约化是一个同构。

作为前一个命题的结果，我们现在可以谈论该归纳序列的归纳极限（当其存在时）。

2.2. **有序阿贝尔群**。 现在我们转而讨论我们的第二个 r
四个主题之一：有序阿贝尔群。我们的目标是概述有序阿贝尔群理论中的相关概念和结果。我们 r
请读者
参见标准资料，例如 [18] 以获取更全面的论述。

2.2.1. 基本定义与原理。固定一个阿贝尔群 G，我们用加法记号表示其运算，并将其单位元记作 $\mathbf{0}_G$。传统上，可计算性理论研究者研究的有序阿贝尔群都是线性有序的。然而，对 AF代数的研究有必要考虑与群运算相容的偏序。在 G 上建立这种序关系，最直接的方法是借助正锥，它定义为 G 的一个子集 P，并满足以下条件：

(1) P 对加法封闭。(2) $P \cap (-P)$
$= \{\mathbf{0}_G\}$。(3) $P + (-P) = G$。

设 P 是 G 的正锥。这个正锥定义了 G 上的一个偏序 $\leq$，使得 $x \leq y$ 当且仅当 $y - x \in P$。因此，我们称有序对 (G, P) 为一个有序阿贝尔群。

现在令 $\mathcal{G} = (G, P)$；有时我们也会用 $\mathcal{G}^+$ 代替 P。假设$\mathcal{G}' = (G', P')$ 是一个有序阿贝尔群。若映射 ϕ 是从 $\mathcal{G}$到 $\mathcal{G}'$ 的同态，即 ϕ 是从 G 到 G'（作为群）的同态，且满足 $\phi[P] \subseteq P'$，则称之为同态；我们也可以称 ϕ 为正的 态射。有序阿贝尔群构成一个范畴，其中的态射就是这些同态。若 G 是 G' 的子群，且 $P \subseteq P'$，则称 $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{G}'$ 的子群。如果 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{G}'$的子群，并且只要 g 和 g' 属于$\mathcal{G}$，$\mathcal{G}'$ 中介于 g 和 g' 之间的每个元素都属于 $\mathcal{G}$，那么我们就称 $\mathcal{G}$ 是凸的。

u的 $\mathcal{G}$ 中的正元素称为 $\mathcal{G}$ 的序单位（或尺度），如果对于每个$g \in \mathcal{G}$，都存在一个正整数 n，使得 $-nu \leq g \leq nu$。如果 u 是 $\mathcal{G}$的序单位，那么$(\mathcal{G}, u)$称为含幺有序阿贝尔群。当$(\mathcal{G}, u)$和$(\mathcal{H}, v)$是含幺有序阿贝尔群时，如果映射 ϕ 是从$\mathcal{G}$，u到$\mathcal{H}$，v的同态，且满足 $\phi(u) = u'$，我们就称它为同态。含幺有序阿贝尔群构成一个范畴，其态射为这些同态。

以下原理对于证明主定理2将非常有用。为求完整，我们给出证明。

引理 2.2. 设 u 是有序阿贝尔群 G的一个正元素。那么，u 是由 u生成的 G 的凸子群的序单位。

证明。 设 $G=(G,P)$。令 H 表示由 u生成的 G的凸子群。令

$$H'=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-nu,nu].$$

令 $H'=(H',H'\cap P)$。由此可知， H' 是 G的子群。

我们断言 H' 是凸的。为此，令 $g,g'\in H'$。假设 $h\in G$ 且 $g\leq h\leq g'$。存在 n, $n'\in\mathbb{N}$，使得 $-nu\leq g\leq nu$ 且 $-n'u\leq g'\leq n'u$。因此， $h\leq n'u\leq(n+n')u$ 且 $h\geq -nu\geq -(n+n')u$。因此， H' 是凸的。于是，H 是 H' 的子群，引理得证。□

2.2.2. 单纯群。 固定一个正整数 n。群 $\mathbb{Z}^n$上有一个自然的正锥，即由所有非负整数构成的 n元组的集合。我们将这个正锥记为 $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，并将 $\mathbb{Z}^n$ 与 $(\mathbb{Z}^n,\mathbb{Z}^n_{\geq 0})$ 等同。此类有序群称为单纯的，并且是我们希望研究的许多有序群的构件。

我们还引入一些记号。令 $e^n_1,\ldots,e^n_n$表示 $\mathbb{Z}^n$ 的标准基元素；当 $h\in\mathbb{Z}^n$ 且 $g=e^n_j$ 时，定义 $\pi_g(h)=h(j)$。

2.2.3.归纳极限。 众所周知，每个阿贝尔群的归纳序列都有归纳极限；参见下文引理 4.1 的证明。类似地， [20, 命题 6.26]例如证明了有序阿贝尔群范畴中的每个归纳序列都有归纳极限。类似的论证也表明，含幺有序阿贝尔群范畴中的每个归纳序列都有归纳极限。

2.2.4. 维数群。 现在，我们已经为正式讨论维数群奠定了充分基础； [8] 和 [18]对维数群进行了深入探讨。固定一个有序阿贝尔群 G。 G 的维数证书 是一个序列$(n_s,\phi_s,\nu_s)_{s\in\mathbb{N}}$，使得$(G,(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$是范畴中$(\mathbb{Z}^{n_s},\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$的归纳极限，该范畴由有序阿贝尔群构成。维数群 是指具有维数证书的有序阿贝尔群。

Shen 性质（我们马上就会定义）是维数群的一项关键性质。其定义基于同态分解这一概念，我们定义如下。设 $\theta:\mathbb{Z}^n\to G$, ϕ: $\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Z}^p$，且 $\theta':\mathbb{Z}^p\to G$是群同态，并令 $\alpha\in\ker(\theta)$。若$\alpha\in\ker(\phi)$且 $\theta=\theta'\circ\phi$，则称(ϕ,θ') 分解 θ 于 α。

假设 G 是一个有序阿贝尔群。若对每个同态 $\theta:\mathbb{Z}^n\to G$ 以及每个 $\alpha\in\ker(\theta)$，都存在一对有序群同态 $\phi:\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Z}^p$ 和 $\theta':\mathbb{Z}^p\to G$，使其在 α 处分解 θ，则称 G 具有 *Shen* 性质。

我们将用到以下事实（见 [8, 引理 3.4.4]）：

命题 2.3。 每个维数群都具有 *Shen* 性质。

2.3. **C*-代数。** 现在我们继续讨论四个背景主题中的第三个：C*-代数。我们假设读者熟悉 C*-代数理论的基本定义和结果，这些内容可见 [6]。在继续探讨更具体的主题 K-理论、矩阵代数、有限维代数和 AF代数之前，我们先回顾一些其他的一般背景知识。本节最后将介绍一系列扰动原理，它们将在证明引言中提到的有效 Glimm 引理时非常有用。

2.3.1. 一般背景。如果 U 是度量空间 X 的子集，且 $\epsilon > 0$，我们令 $B(U; \epsilon) = \{p \in X : d(p, U) < \epsilon\}$。

设 $\mathbf{A}$ 是 C* 代数。如果$\mathbf{A}$ 是含幺的，我们令 $\mathbf{1_A}$ 表示 $\mathbf{A}$ 的单位元。令 Proj(A) 表示 $\mathbf{A}$ 的所有投影构成的集合。注意，根据 C* 恒等式，Proj(A) 中的每个元素的范数均为 0 或 1。若 $v \in \mathbf{A}$ 是偏等距，且 $v^*v \in$Proj(A)，则称之为偏等距。偏等距将在下文讨论的扰动原理中发挥作用，因而也将在有效 Glimm 引理的证明中发挥作用。

C*恒等式的一个推论是，C*代数之间的每个 $*$-同态都是 1-Lipschitz。这一原理简化了许多关于这些映射的可计算性的论证。

当 $u \in \mathbf{A}$ 为酉元时，我们用 $\mathrm{Ad}_u : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ 表示由 $\mathrm{Ad}_u(a) = uau^*$ 给出的映射，其中所有 $a \in \mathbf{A}$均成立。在对有限维代数之间的 $*$-同态进行分类时，这些映射将发挥优势。

若 , 为 $\mathbf{A}$ 的自伴元数组 $n \times n (a_{r,s})_{r,s}$，且满足 $a_{r,s}a_{r',s'} = \delta_{s,r'}a_{r,s'}$（对所有 $r, s, r', s' \in \{1, \ldots, n\}$ 均成立），则称其为 $\mathbf{A}$ 的矩阵单位系。若 $\mathbf{A}$ 含幺，则当 $\sum_j a_{j,j} = \mathbf{1_A}$ 时，称这样的矩阵单位系为含幺的。这些矩阵单位系的构造在有限维代数和AF代数的可计算性理论中发挥着关键作用。

设 $\mathbf{B}$ 是一个 C*-代数。直和 $\mathbf{A} \bigoplus \mathbf{B}$ 也是 C*-代数；特别地，其范数定义为 $\|(a, b)\| = \max\{\|a\|, \|b\|\}$。这个代数也记作 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$。

假设 ϕ 和 ψ 是 $*$-同态，从 $\mathbf{A}$ 到 $\mathbf{B}$。我们称 ϕ 和 ψ 是近似酉等价 的，如果存在一个序列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 由 B中的酉元组成，使得 $(\mathrm{Ad}_{u_n} \circ \phi)_{n\in\mathbb{N}}$ 逐点收敛到 ψ。在证明主定理5时，我们将讨论 AF代数作为范畴的情形，并依赖这一等价关系。

2.3.2. K理论。现在我们简要概述 K理论的基本原理；这些原理在 [20]中有更为详尽的阐述。读者也可参阅我们先前的论文 [9] ，了解我们在此所依据的定义和结果。首先， K理论定义了一个从 C*-代数范畴到阿贝尔群范畴的函子 K_0 。若 A 是可分的 C*-代数，则 K_0(A)是可数的。若 A 稳定有限[1], ，则 K理论还为 A 赋予 K_0(A)的一个典范正锥，记作 $K_0(A)^+$。若 A、B 是 C*-代数，且 ϕ 是从 A 到 B 的一个 $*$-同态，则 $K_0(\phi)$是从 K_0(A)到 K_0(B)的一个同态；此外，若 A 和 B 都稳定有限，则 $K_0(\varphi)$是从(K_0(A) $K_0(A)^+$)到(K_0(B) $K_0(B)^+$)的一个有序群同态。若 A 稳定有限且含幺，则(K_0(A) $K_0(A)^+$)具有序单位；事实上， K理论

[1]由于其复杂性，我们不打算精确定义“稳定有限”；好奇的读者可在标准资料中找到定义，例如 [20]。只需指出，AF代数是稳定有限的。

将$\mathbf{A}$ 与$(K_0(\mathbf{A}),\ K_0(\mathbf{A})^+)$的一个特定序单位关联起来，我们将其记为$K_0(\mathbf{1_A})$（因为它实际上是由$\mathbf{A}$的单位元得到的）。此外，若$\mathbf{A}$ 和$\mathbf{B}$ 均稳定有限且含幺，并且 ϕ 是从$\mathbf{A}$ 到$\mathbf{B}$的一个含幺 $*$-同态，则 $K_0(\phi)(K_0(\mathbf{1_A})) = K_0(\mathbf{1_B})$。因此，我们得到了一个从稳定有限含幺C*<style id='33>-代数范畴（其中假定态射均为含幺态射）到含幺有序阿贝尔群范畴的函子；我们将此函子记为 K_0^{sc}（sc 表示带尺度的，因为由有序阿贝尔群和一个序单位组成的三元组通常称为带尺度群）。

2.3.3. 矩阵代数。我们现在讨论矩阵代数，它们是AF代数的基本构件。固定一个正整数 n。令 $M_n(\mathbb{C})$表示由 $n \times n$ 阶复矩阵构成的C*-代数；它在算子范数下是一个C*-代数，其中的对合为伴随运算。

设 ℓ 也是一个正整数。众所周知，存在一个非零的 $*$-同态，从 $M_n(\mathbb{C})$到 $M_\ell(\mathbb{C})$，当且仅当 $\ell \geq n$（例如，参见[6]）。设 $\ell \geq n$。对于满足 $kn \leq \ell$的正整数 k，对每个$A \in M_n(\mathbb{C})$，定义$\mathcal{E}_{n,\ \ell,\ k}(A)$为通过沿对角线重复 A k 而得到的 $\ell \times \ell$ 矩阵。众所周知，若 $\psi :\ M_n(\mathbb{C}) \to M_\ell(\mathbb{C})$是一个非零的 $*$-同态，那么存在唯一的正整数 k 和酉元 $U \in M_\ell(\mathbb{C})$，使得 $\psi(A) = \mathrm{Ad}_U(\mathcal{E}_{n,\ \ell,\ k}(A))$（同样参见 [6]）。数值 k 称为 ψ的重数。

现在我们讨论这些代数的 K-理论。首先，存在一个从 $K_0^{\mathrm{sc}}(M_n(\mathbb{C}))$ 到 $(\mathbb{Z},\ n)$ 的标准同构 ζ_n （也就是说，有序群 $\mathbb{Z}^n$ 连同序单位 n）。若 ϕ 是从 $K_0^{\mathrm{sc}}(M_n(\mathbb{C}))$ 到 $K_0^{\mathrm{sc}}(M_\ell(\mathbb{C}))$ 的同态，那么存在一个从 $(\mathbb{Z},\ n)$ 到 $(\mathbb{Z},\ \ell)$ 的典范同态 $\eta_{n,\ \ell}(\phi)$，使得 $\eta_{n,\ \ell}(\phi) \circ \zeta_n = \zeta_\ell \circ \phi$。

2.3.4. 有限维C*-代数。我们将以下众所周知的结果作为定理陈述，以备后续参考；证明可见于[6]等标准参考资料。

定理 2.4（有限维代数的分类）。一个C*-代数$\mathbf{A}$ 是有限维的，当且仅当存在一个由正整数组成的有限多重集 F，使得$\mathbf{A}$ 与$\bigoplus_{n \in F} M_n$（$\mathbb{C}$）同构。

设 F 是一个由正整数组成的有限多重集，并令$\mathbf{B} = \bigoplus_{n \in F} M_n(\mathbb{C})$。当 π 是与$\mathbf{B}$的某个直和项相关联的投影映射时，我们将 π与一个单射 $\iota_\pi : \mathrm{ran}(\pi) \to \mathbf{B}$ 相对应，使得 $\pi \circ \iota_\pi = \mathrm{Id}^{\mathrm{ran}(\pi)}$。此外，我们确保当 $\pi \neq \pi'$时，$\pi \circ \iota_{\pi'} = \mathbf{0}$。

现在我们讨论有限维代数的 K-理论。令 $k =$ 为 F的基数。于是，根据 K_0 函子的性质（参见例如 [20, 第 3 节2]），可以利用第 2.3.3 节所述的同构和序单位，构造出一个序单位 v_F，用于 $\mathbb{Z}^k$，以及一个典范同构 ζ_F，从 K_0^{sc}（$\mathbf{B}$）到（$\mathbb{Z}^k,\ v_F$）。此外，这一构造还给出了一个典范双射 ξ_F，将 $\mathbf{B}$ 的直和项的投影映射对应到 $\mathbb{Z}^k$的生成元。

设 F' 是一个正整数有限多重集，并令 $\mathbf{C} = \bigoplus_{n \in F'} M_n(\mathbb{C})$。令 $k' =$ 为 F' 的基数。设 ϕ 是一个从 $\mathbf{B}$ 到 $\mathbf{C}$ 的 $*$-同态。K_0 函子的性质使得我们可以根据第 2.3.3 节中描述的映射$\eta_{m,n}$ 构造出一个从有序群 $\mathbb{Z}^k$ 到 $\mathbb{Z}^{k'}$ 的典范同态 $\eta_{F,F'}(\phi)$，使得 $\zeta_{F'} \circ \phi = \eta_{F,F'}(\phi) \circ \zeta_F$。此外，$\eta_{F,F'}$ 的构造

保证每当 π 是 B 的某个直和项的投影映射，且 π' 是 C 的某个直和项的投影映射时，$\pi_{\xi_{F'}(\pi')}(\eta_{F,F'}(\phi)(\xi_F(\pi))) = \pi' \circ \phi \circ \iota_\pi$ 的重数。由第 2.3.3 节中的讨论可知，$\eta_{F,F'}(\phi)(v_F) \leq v_{F'}$，因此 $K_0(\phi)(K_0(\mathbf{1_B})) \leq K_0(\mathbf{1_C})$。反过来，若 $\gamma\colon (K_0(\mathrm{B}) \; K_0(\mathrm{B})^+) \to (K_0(\mathrm{C}) \; K_0(\mathrm{C})^+)$ 是一个同态，且 $\gamma(K_0(\mathbf{1_B})) \leq K_0(\mathbf{1_C})$，则存在一个 $*$-同态 δ 从 $\mathbf{A}$ 到 $\mathbf{B}$，使得 $K_0(\delta) = \gamma$。

2.3.5. *AF*代数。我们终于开始对 AF代数进行形式化处理。

定义 2.5。设$\mathbf{A}$ 是一个 C*-代数。$\mathbf{A}$ 的*AF* 证书是一个序列 $(F_j, \psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$，满足以下条件：

(1) 每个 F_j 都是由正整数组成的有限多重集。(2) 对每个 $j \in \mathbb{N}$，ψ_j 都是从 $\bigoplus_{n\in F_j} M_n(\mathbb{C})$ 到 $\mathbf{A}$ 的含幺 $*$-嵌入。(3) 对所有 j，$\mathrm{ran}(\psi_j) \subseteq \mathrm{ran}(\psi_{j+1})$。(4) $\mathbf{A} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{ran}(\psi_j)$。

若一个 C*-代数具有 AF 证书，则它是一个*AF*代数 。我们指出，这一定义并非标准定义，但与标准定义等价：标准定义将 AF代数视为有限维代数的归纳极限。我们选择这一表述，是出于即将探讨的可计算性方面的考虑。

现在我们可以正式陈述 Elliott 定理，其证明见[20]。

定理 2.6 (Elliott 定理)。 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是 *AF*代数。若 $K_0^{\mathrm{sc}}(\mathbf{A})$与 $K_0^{\mathrm{sc}}(\mathbf{B})$ 同构，则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ $*$-同构。此外，若 α 是从 $K_0^{\mathrm{sc}}(\mathbf{A})$ 到 $K_0^{\mathrm{sc}}(\mathbf{B})$的同构，则存在一个含幺 $*$-同构$\phi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$，使得 $K_0(\phi) = \alpha$。

2.3.6. 一些扰动原理。 本节中的结果将为我们证明有效 Glimm 引理提供支持。它们通常表达这样的思想：如果 C*-代数 $\mathbf{A}$中的一个或多个元素与某个闭 $*$-子代数 $\mathbf{B}$“足够接近”，那么就存在一个小的酉元 u，使得对这些元素施加映射 Ad_u 后，便得到$\mathbf{B}$ 中的元素，并且这些元素之间具有某些所需的关系。我们的目标是陈述这些原理，明确界定“足够接近”的程度，以及如何得到所需的酉元。对于纯粹的经典考量，这种精确程度或许用处不大，但对于未来在可计算性方面的发展却至关重要。这些结果取自[21]。

我们从以下结果开始，它本质上就是 [21, 引理 8.4.1]。

引理 2.7。 设 $\mathbf{A}$ 是一个含幺C*-代数。假设 $b \in \mathbf{A}$ 是自伴的，且$p \in B(b; 1/2)\cap \mathrm{Proj}(\mathbf{A})$。那么，存在 $q \in \mathrm{Proj}(\mathbf{A})\cap \mathrm{C}^*(\{b\})$，使得 $\|q - b\| \leq 2\|p - b\|$。此外， p 与 q 等价。

Define $\delta_0 : (0, 1) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \to (0, \infty)$ by recursion as follows:

$$\begin{aligned} \delta_0(\epsilon, 1) &:= \min\{\epsilon/2, 1/2\} \\ \delta_0(\epsilon, n+1) &:= \min\{4^{-1}\epsilon(n+1)^{-1}, \delta_0(12^{-1}\epsilon(n+1)^{-2}, n), 1\} \end{aligned}$$

以下内容与 [21, 引理 8.4.2], 非常相似，我们的证明也基于其中的证明。

引理 2.8. 设$\mathbf{A}$ 是一个含幺C*-代数，并假设$\mathbf{B}$ 是$\mathbf{A}$的一个闭 $*$子代数。设 p_1、……、 p_n 是 $\mathbf{A}$ 中的两两正交投影，使得最大值$_j\, d(p_j,\ \mathbf{B})$ $<\delta_0(\epsilon,\ n)$。那么，$\mathbf{B}$ 包含两两正交投影 q_1、$\ldots q_n$，使得最大值$_j\, \|p_j - q_j\| < \epsilon$。此外，若 $\sum_j p_j = \mathbf{1_A}$，则 $\sum_j q_j = \mathbf{1_A}$。

证明。我们用归纳法进行证明。设 $n = 1$。取 $b \in \mathbf{B}$ 使得 $\|p_1 - b\| <\delta_0(\epsilon, 1)$。由于 p_1是一个投影，$\left\|p_1 - \frac{1}{2}(b^* + b)\right\| \leq \|p_1 - b\|$。因此，我们可以直接应用引理 2.7，若 $\mathbf{1_A} \in \mathbf{B}$，则只需令 $p_1 = \mathbf{1_A}$。

设 $n > 1$，并令 $\delta = \delta_0(\epsilon, n)$。对每个 $j \in \{1, \ldots, n\}$，取 $b_j \in \mathbf{B}$使得 $\|p_j - b_j\| < \delta$。根据定义，$\delta \geq \delta_0(\epsilon/(12n^2)\ n - 1)$。因此，通过归纳法，存在两两正交投影 $q_1, \ldots, q_{n-1} \in \mathbf{B}$ 使得 $\max_{j<n} \|p_j - q_j\| < \epsilon/(12n^2)$。令 $p = \sum_{j=1}^{n-1} p_j$，并令 $q = \sum_{j=1}^{n-1} q_j$。我们首先如下估计 $\|p_n - (\mathbf{1_A} - q)b_n(\mathbf{1_A} - q)\|$。首先注意到

$$\|p_n - (\mathbf{1_A} - q)b_n(\mathbf{1_A} - q)\| \quad = \quad \|(\mathbf{1_A} - p)p_n(\mathbf{1_A} - p) - (\mathbf{1_A} - q)b_n(\mathbf{1_A} - q)\|$$

Set

$$\begin{aligned} E_1 &= \|(\mathbf{1_A} - p)p_n(\mathbf{1_A} - p) - (\mathbf{1_A} - q)p_n(\mathbf{1_A} - p)\| \\ E_2 &= \|(\mathbf{1_A} - q)p_n(\mathbf{1_A} - p) - (\mathbf{1_A} - q)b_n(\mathbf{1_A} - p)\| \\ E_3 &= \|(\mathbf{1_A} - q)b_n(\mathbf{1_A} - p) - (\mathbf{1_A} - q)b_n(\mathbf{1_A} - q)\| \end{aligned}$$

根据三角不等式，

$$\|(\mathbf{1_A} - p)p_n(\mathbf{1_A} - p) - (\mathbf{1_A} - q)b_n(\mathbf{1_A} - q)\| \leq E_1 + E_2 + E_3.$$

然而，提出因子 $p_n(\mathbf{1_A} - p)$ 后，我们看到 $E_1 \leq \|p - q\| < \epsilon/(12n)$。类似地，提出因子 $\mathbf{1_A} - q$和 $\mathbf{1_A} - p$ 后，我们看到 $E_2 \leq \|p_n - b_n\| < \delta$。最后，提出因子 $\|(\mathbf{1_A} - q)b_n\|$后，我们得到

$$E_3 \leq \|b_n\| \|p - q\| \leq (\|p_n - b_n\| + \|p_n\|) \|p - q\| < 2 \|p - q\|.$$

因此，我们现在有

$$\begin{aligned} \|p_n - (\mathbf{1_A} - q)b_n(\mathbf{1_A} - q)\| &\leq 3 \|p - q\| + \delta \\ &< (\epsilon/(4n)) + \delta \\ &< \epsilon/(2n). \end{aligned}$$

此外，由于 p_n, p, q是投影，因此我们现在有

$$\left\| p_n - (\mathbf{1_A} - q)\frac{b_n + b_n^*}{2}(\mathbf{1_A} - q) \right\| < \epsilon/(2n).$$

因此，根据引理 2.7，存在一个投影 $q_n \in (\mathbf{1_A} - q)\mathbf{B}(\mathbf{1_A} - q) \cap B(p_n;\ \epsilon/n)$。由此可得 $q_n q_j = q_j q_n = \mathbf{0}$ 当 $j < n$。

假设 $\sum_j p_j = \mathbf{1_A}$。由此可得 $\left\|\mathbf{1_A} - \sum_j q_j\right\| < \epsilon < 1$。由于$q_1, \ldots, q_n$相互正交，$\sum_j q_j$是一个投影。因此，$\mathbf{1_A} - \sum_j q_j$是一个投影。因此，$\mathbf{1_A} = \sum_j q_j$。

□

通过递归定义 $\delta_1 : (0,1) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \to (0, 1)$，如下所示：

$$\begin{aligned} \delta_1(\epsilon, 1) &:= \frac{1}{2} \\ \delta_1(\epsilon, n + 1) &:= \min\{3^{-1}, \epsilon(48n)^{-1}, \delta_1(\epsilon(48n)^{-1}, n)\}. \end{aligned}$$

以下内容与 [21, 引理 8.4。4], 类似，唯一的区别在于，为了便于后续发展，我们的“δ 函数”定义略有不同。

引理 2.9。 设 $\mathbf{A}$ 是一个含幺 C*-代数，并设 p_1、...、p_n 是 $\mathbf{A}$ 中的投影，使得 $\max_{i\neq j}\|p_ip_j\| < \delta_1(\epsilon, n)$。那么，存在 $\mathbf{A}$ 中的两两正交投影 q_1、...、q_n，使得 $\max_j \|p_j - q_j\| < \epsilon$。

证明。 我们通过归纳法进行。 $n = 1$ 的情形是显然的。因此，设 n 是一个正整数，并令 p_1、...、p_{n+1} 为 $\mathbf{A}$ 中的投影，使得 $\max_{i\neq j}\|p_ip_j\| < \delta_1(\epsilon, n+1)$。根据归纳法，存在 $\mathbf{A}$ 中的两两正交投影 q_1、...、q_n，使得 $\max_{j\leq n}\|q_j - p_j\| < \epsilon/(48n)$。令 $q = \sum_j q_j$。于是， q ∈属于 Proj(A)。我们估计 $\|p_{n+1} - (\mathbf{1_A} - q)p_{n+1}(\mathbf{1_A} - q)\|$ 如下。

$$\begin{aligned}\|p_{n+1} - (\mathbf{1}_\mathbf{A} - q)p_{n+1}(\mathbf{1}_\mathbf{A} - q)\| &= \|qp_{n+1} - qp_{n+1}q + p_{n+1}q\| \\ &\leq 3\|qp_{n+1}\| \\ &< 3\left(\sum_{j=1}^{n}\|p_jp_{n+1}\| + \epsilon/(48n)\right) \\ &< 3(\epsilon/48 + \epsilon/48) \\ &< \epsilon/8.\end{aligned}$$

根据引理 2.7，存在一个投影 $q_{n+1} \in (\mathbf{1_A}-q)\mathbf{A}(\mathbf{1_A}-q)$ 使得 $\|q_{n+1} - p_{n+1}\| < \epsilon$。直接计算可得， $q_{n+1}q_j = q_jq_{n+1} = 0$ 当 $j \leq n$时。 □

对于所有的 $\epsilon \in (0, 1)$ 以及每个正整数 n，令

$$\delta_2(\epsilon, n) = \min\{5^{-1}, \epsilon(8 - 5\epsilon), \delta_1(\epsilon, n)\}.$$

以下内容本质上是 [21, 引理 8.4。7], 证明中几乎没有区别，因此我们决定略去。

引理 *2.10*。设 *A* 是一个含幺 *C*-代数，并设 *B* 是 *A* 的一个闭 $*$-子代数。假设 $(e_{i,j})_{i,j}$ 是 *A* 的一个矩阵单位系 $n \times n$，满足 $\max_{i,j} d(e_{i,j}, B) < \delta_2(\epsilon, n)$。那么，存在 *B* 的一个矩阵单位系 $(f_{i,j})_{i,j}$，满足 $\max_{i,j}\|e_{i,j} - f_{i,j}\| < \epsilon$。此外，若 $\mathbf{1_A} \in B$，且若 $\sum_i e_{i,i} = \mathbf{1_A}$，则 $\sum_i f_{i,i} = \mathbf{1_A}$。

2.4. **Bratteli 图**。 现在我们进入最后一个背景主题：Bratteli 图。Bratteli 图由 [2], 引入，它以组合方式直观呈现 AF代数的结构，也能直观呈现维数群 [8]的结构。我们的目标是定义这一概念，并通过 AF 证书说明 Bratteli 图与 AF代数之间的关联。我们还将讨论这些图与维数群之间的关系。

2.4.1. 基本定义。

定义 2.11。 一个*Bratteli* 图 由一组 V 顶点、一个层函数 $L : V \to \mathbb{N}$ 以及一个边函数 $E : V \times V \to \mathbb{N}$ 构成，它们满足以下条件：

(1) 对所有 u， $v \in V$，如果 $E(u, v) > 0$，那么 $L(v) = L(u) + 1$。(2) 对每个 $n \in \mathbb{N}$， $L^{-1}[\{n\}]$ 都是有限的。

当 $\mathcal{D}$ 是一个 Bratteli图时，令 $V_{\mathcal{D}}$ 表示其顶点集， $E_{\mathcal{D}}$ 表示其边函数， $L_{\mathcal{D}}$ 表示其层函数。我们将 $L_{\mathcal{D}}^{-1}[\{n\}]$称为 $\mathcal{D}$的第 n层。我们把 Bratteli图看作表示一个多重图，其中边函数计算两个顶点之间的边数；没有必要对边本身进行形式化表示。Bratteli图提供了表示 AF代数所需的大部分信息。为了给出完整的表示，需要考虑标记，其定义如下。在 AF代数的情形下，这些标记将有助于表示直和项的维数；而在含单位元维数群的情形下，它们将描述序单位。

定义 2.12。

(1) Bratteli 图的标记 $\mathcal{D}$ 是一个函数 $\Lambda\colon V_{\mathcal{D}} \to \mathbb{N}$。(2) 一个带标记的 ***Bratteli*** 图 由一个 Bratteli 图 $\mathcal{D}$ 及其 $\mathcal{D}$标记构成。

我们将带标记的 Bratteli 图视为一种 Bratteli 图。当 $\mathcal{D}$ 是一个带标记的 Bratteli 图时，令 $\Lambda_{\mathcal{D}}$ 表示它的标记。

Bratteli 图（带标记和不带标记）有一个显而易见的同构概念，但它往往限制过严。要定义一种更有用的等价关系，需要以下内容。

定义 2.13。 设 $\mathcal{D}$ 为一个 Bratteli 图。对所有 $u, v \in V_{\mathcal{D}}$，令

$$P_{\mathcal{D}}(u,v) = \begin{cases} 0 & L_{\mathcal{D}}(u) \geq L_{\mathcal{D}}(v) \\ E(u,v) & L_{\mathcal{D}}(v) = L_{\mathcal{D}}(u)+1 \\ \sum_{w \in L_{\mathcal{D}}^{-1}[\{L(u)+1\}]} E(u,w)P_{\mathcal{D}}(w,v) & L_{\mathcal{D}}(v) > L_{\mathcal{D}}(u)+1 \end{cases}$$

通俗地说， $P_{\mathcal{D}}(u,\ v)$ 计算从 u 到 v 在 $\mathcal{D}$中的路径数。借助这个路径计数函数，我们引入望远镜化的概念。

定义 2.14. 设 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 是 Bratteli 图。若存在一个递增的整数序列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ，使得$n_0 = 0$、 $L_{\mathcal{D}}^{-1}[\{k\}] = L_{\mathcal{D}'}^{-1}[\{n_k\}]$，且 $E_{\mathcal{D}}(u,\ v) = P_{\mathcal{D}'}(u,\ v)$，则称 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}'$ 的 望远镜化 。若 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 带有标签，则还要求 $\Lambda_{\mathcal{D}}(v) = \Lambda_{\mathcal{D}'}(v)$。

若存在一个序列$\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$、..、 $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}'$，使得对每个 $j < n$， $\mathcal{D}_j$和 $\mathcal{D}_{j+1}$同构，或者其中一个是另一个的望远镜化，则称两个 Bratteli 图 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 是等价的 。

2.4.2. *AF*代数的 ***Bratteli*** 图。现在，我们通过 AF 证书正式定义 Bratteli 图与 AF 代数之间的关系。我们从有限维代数归纳序列的 Bratteli 图开始。

定义 2.15。假设 $(\bigoplus_{n\in F_k} M_n(\mathbb{C})\ \psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是有限维 C*-代数的归纳序列。我们将 $(\bigoplus_{n\in F_k} M_n(\mathbb{C})\ \psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 的标准带标记 ***Bratteli*** 图定义如下：

(1) 顶点是形如 $(k,\ \pi)$ 的有序对，其中 π 是 $\bigoplus_{n\in F_k} M_n(\mathbb{C})$ 的某个直和项的投影映射。(2) 边函数的定义是：令 $E((k,\ \pi),\ (k+1,\ \pi'))$ 等于 $\pi' \circ \psi_k \circ \iota_\pi$ 的重数。(3) 层函数的定义是：令 $L(k,\ \pi) = k$。(4) 标记函数的定义是：令 $\Lambda(k,\ \pi)$ 等于 $\sqrt{\dim(\mathrm{dom}(\pi))}$。

我们称带标记的 Bratteli 图 $\mathcal{D}$ 为归纳序列 $(\bigoplus_{n\in F_k} M_n(\mathbb{C})\ \psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 的 ***Bratteli*** 图，如果它与该归纳序列的标准Bratteli图同构。

现在设 $\mathcal{D}$ 为一个 Bratteli图。我们定义 $\mathcal{D}$ 为 AF 证书 $(F_s,\ \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的 Bratteli 图，当且仅当它是归纳序列 $(\bigoplus_{n\in F_k} M_n(\mathbb{C})\phi_{k+1}^{-1}\circ\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$的 Bratteli图。接着，我们定义 $\mathcal{D}$ 为A 的一个 Bratteli图，当且仅当它是A的某个 AF 证书的 Bratteli图。

2.4.3. 单纯群归纳序列的 ***Bratteli*** 图。在主定理4的证明中，带标记的含幺单纯群归纳序列 Bratteli 图这一概念将很有用。给定这样一个序列 $((\mathbb{Z}^{n_s},\ u_s)\ \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$，我们将其标准***Bratteli***图定义如下：

(1) 顶点集为 $\{(s,\ e_j^{n_s}):\ \ s\in\mathbb{N}$ 且 $\ j\in\{1,\dots,n_s\}\}$.(2) 我们通过设定 $L(s,\ g)=s$ 来定义层函数。(3) 我们通过设定 $E((s,\ g),\ (s+1,\ g'))=\pi_{g'}(\phi_s(g))$ 来定义边函数。(4) 最后，我们通过设定 $\Lambda(s,\ e_j^{n_s})=u_s(j)$ 来定义标记函数。

于是，我们称 Bratteli图 $\mathcal{D}$ 是 $((\mathbb{Z}^{n_s},\ u_s)\ \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的 Bratteli图，若它与该归纳序列的标准 Bratteli图同构。

至此，我们已概述本文将要探讨的经典材料。现在我们讨论其可计算性理论。

3. Background from effective (computable) mathematics

本节旨在概述群和 C*代数可计算性理论中的相关先前工作。我们假定读者熟悉可计算性理论的基础知识，相关内容可参见 [5]。

3.1. 算法群论。 本节旨在回顾群表示及其相关的可计算映射、可计算可枚举集和可计算集等概念。我们沿用在 [9] 中使用的框架。

固定一个可数无限的不定元集合 $X=\{x_0,x_1,\dots\}$，并令 F_ω 表示由 X 生成的自由群。我们默认将 F_ω 视为配备了一个与 $\mathbb{N}$ 的可计算双射，因此可以讨论 F_ω 的可计算可枚举子集和可计算子集等。

固定一个群 G，并假设 ν 是从 F_ω 到 G 的满同态。称这对 $(G,\ \nu)$ 为 G 的表示 。令 $G^\#=(G,\ \nu)$。若 $w\in F_\omega$ 和 $\nu(w)=a$，则称 w 为 a 的标签 。$G^\#$ 的核 是 ν 的核。

有些群有“标准表示”。例如，我们总是将群 $\mathbb{Z}^n$ 视为带有由标记$\nu:F_\omega\to\mathbb{Z}^n$ 诱导的标准表示：该标记将 X 的前 n 个元素映射到 $\mathbb{Z}^n$ 的标准生成元，并将 X 的其余元素映射到 $\mathbb{Z}^n$中的单位元。下文中，我们将有标准表示的群与该标准表示视为同一对象。

设 $G^\#$ 是一个群的表示。若其核是 F_ω的可枚举（分别为可计算）子集，我们就称 $G^\#$ 为可枚举 （分别为可计算）。我们指出，可计算可表示群的类在同构下封闭，具有可枚举表示的群的类也是如此。

假设 $S\subseteq G$。我们称 S 是 $G^\#$ 的可计算（分别为可枚举）集，如果 S 中所有元素的 $G^\#$ 标签构成可计算（分别为可枚举）集。如果 S 是一个可计算可枚举集

$G^{\#}$，那么我们称 $e \in \mathbb{N}$ 是 S 的 $G^{\#}$ 指标，如果 e 是一台图灵机的编码，该图灵机枚举 S 中所有元素的 $G^{\#}$ 标签。

设 $H^{\#}$ 是一个群表示。若存在一个算法，能够在给定 $g \in G$ 的一个 $G^{\#}$ 标签时，计算出 $\phi(g)$ 的一个 $H^{\#}$ 标签，则映射 $\phi\colon G \to H$ 是一个从 $G^{\#}$ 到 $H^{\#}$ 的可计算映射。ϕ 的一个 $(G^{\#}, H^{\#})$指标 是此类算法的一个指标。

以下这个简单的观察将使我们对维数群可计算性理论的讨论更加简洁。

命题 3.1. 若 $G^{\#}$ 是一个群表示，那么从阿贝尔群 $\mathbb{Z}^n$ 到 G 的每个同态都是从 $\mathbb{Z}^n$ 到 $G^{\#}$ 的可计算映射。

证明概要。 这种映射完全由其在 $\mathbb{Z}^n$ 的标准基上的取值的 $G^{\#}$ 个标签所确定。□

3.2. C*-代数。

3.2.1. 基本背景。 我们回顾从可计算性理论的视角研究 C*-代数的框架。许多基础材料取自我们早期的工作 [9]。希望了解这些背景材料更多细节的读者，也可参阅 [12]和 [14]。

定义 3.2. 设 $\mathbf{A}$ 是一个 C*-代数。$\mathbf{A}$ 的一个表示 是一个点列 $(a_0, a_1, \ldots)$，其中各点属于 $\mathbf{A}$，且由 $\{a_i\colon i \in \mathbb{N}\}$生成的 $\mathbf{A}$ 的 *-子代数在 $\mathbf{A}$中稠密。点 $a_0, a_1, \ldots$ 称为该表示的特殊点，而形如 $p(a_0, \ldots, a_n)$ 的点，其中 $p(x_0, \ldots, x_n)$ 是一个系数取自 $\mathbb{Q}(i)$（当 n 变化时）的 $*$-多项式，称为该表示的生成点。我们通常用 $\mathbf{A}$ by $\mathbf{A}^{\#}$ 或 $\mathbf{A}^{\dagger}$表示 $\mathbf{A}$ 的一个表示。

在较早的工作中，例如 [4]和 [9], ，表示的生成点被称为有理点；现在我们更倾向于使用“生成点”这一术语，遵循 [14]中确立的惯例。

通过标准方法（例如参见 [4, 第 2]节），我们可以得到一个有效的（但通常不是单射的）列表，列出一个 C*-代数表示的生成点。例如，当我们说某个算法以 $\mathbf{A}^{\#}$ 的一个生成点 q 作为输入时，我们实际的意思是，已经固定了$\mathbf{A}^{\#}$ 的生成点的一个有效列表 $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$，而该算法以满足 $q = q_i$的指标 i 作为输入。

根据丘奇-图灵论题，每个算法都可以表示为一台图灵机。算法的指标（或编码）是一个自然数，它对该算法作为图灵机的表示进行编码。

表示的（有限）乘积有一个自然的定义。给定$\mathbf{A}^{\#}$ 的一个表示，如果我们需要一个定义在$\mathbf{A}^n$ 上的表示，就使用这个乘积表示；不过，其构造的具体细节对我们并不重要。详情参见 [9,第 1.1] 小节。

定义 3.3. 固定一个表示 $\mathbf{A}^{\#}$。

(1) $\mathbf{A}^{\#}$ 是可计算 的，如果存在一个算法，在给定一个生成点 q和一个 $k \in \mathbb{N}$ 时，输出一个有理数 r 使得 $|\|q\| - r| < 2^{-k}$；这样的算法的一个指标是$\mathbf{A}^{\#}$的一个指标 。(2) $\mathbf{A}^{\#}$ 是*(右)*可枚举的，如果存在一个算法，在给定一个生成点 q 时，枚举出一个由有理数组成的递减序列$(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得$\lim_{n\to\infty} r_n = \|q\|$；这样的算法的一个指标称为$\mathbf{A}^{\#}$的一个*(右)*可枚举指标 。

存在相应的左半可计算表示概念，但我们在此不会使用它。

对于 $\mathbf{A}$ 的每个表示，都有一个相应的可计算点类。其定义如下。

定义 3.4。元素 $a \in \mathbf{A}$ 是A 的可计算点$\mathbf{A}^{\#}$，如果存在一个算法，使得给定 $k \in \mathbb{N}$ 后，返回$\mathbf{A}^{\#}$ 的一个生成点 b，满足$\|a-b\| < 2^{-k}$；这种算法的指标称为$\mathbf{A}^{\#}$-表示 a。

换言之，$\mathbf{A}^{\#}$ 的可计算点，是指能够用$\mathbf{A}^{\#}$ 的生成点以任意高的精度进行有效近似的点。

我们注意到，可计算可表示的 C*-代数类在以下运算下是闭的 $*$同构，也就是说，如果$\mathbf{A}$ 是一个可计算可表示的 C*-代数，并且$\mathbf{B}$ 与$\mathbf{A}$ $*$同构，那么 $\mathbf{B}$ 也是可计算可表示的。对于具有可计算可枚举表示的 C*-代数类，同一原理也成立。

表示$\mathbf{A}^{\#}$ 的一个有理开球 是$\mathbf{A}$ 中的一个开球，其中心是$\mathbf{A}^{\#}$ 的一个生成点，半径为有理数。$\mathbf{A}^{\#}$的每个有理开球都有一个编码，由半径和球心的编码组成。如果 $C \subseteq \mathbf{A}$ 是闭的，我们称 C 为$\mathbf{A}^{\#}$ 的可枚举闭子集，如果与 C 相交的$\mathbf{A}^{\#}$ 的所有有理开球（的编码）构成一个可枚举集。如果 $U \subseteq\mathbf{A}$ 是开的，我们称 U 为$\mathbf{A}^{\#}$ 的可枚举开集，如果存在一个由有理开球构成的可枚举集 $\mathcal{S}$，使得 $U = \bigcup \mathcal{S}$。

可枚举开集的指标，指的是其并集构成该集合的开球可枚举集的指标；可枚举闭集的指标定义类似。以下是 [9,引理 1。10]:

引理 3.5。设 $\mathbf{A}^{\#}$ 是一个可枚举表示。进一步假设 U 是 $\mathbf{A}^{\#}$ 的可枚举开子集，且 C 是 $\mathbf{A}^{\#}$ 的可枚举闭子集，并且满足 $U \cap C \neq \emptyset$。那么 $U \cap C$ 包含一个可计算点。此外，可以根据 U 和 C的指标计算出该可计算点的一个指标。

以下是众所周知的结论，可由相关定义直接推出。

命题 3.6。设 $\mathbf{A}^{\#}$ 和 $\mathbf{B}^{\#}$ 是 C*-代数的可枚举表示，并设 U 是 $\mathbf{B}^{\#}$的一个可枚举开集。若 f 是从 $\mathbf{A}^{\#}$ 到 $\mathbf{B}^{\#}$的可计算映射，则$f^{-1}[U]$是 $\mathbf{A}^{\#}$的一个可枚举开集。此外，可以根据 U的一个 $\mathbf{B}^{\#}$ 指标以及 f的一个($\mathbf{A}^{\#}$、$\mathbf{B}^{\#}$) 指标，计算出 $f^{-1}[U]$ 的一个$\mathbf{A}^{\#}$ 指标。

设$\mathbf{A}^{\#}$ 是一个稳定有限含幺 C*-代数的可枚举表示。在 [9], 中证明了，$\mathbf{1}_{\mathbf{A}}$ 是 $\mathbf{A}^{\#}$的一个可计算点。若 e 是由$\mathbf{A}^{\#}$ 的一个指标和 $\mathbf{1}_{\mathbf{A}}$的一个$\mathbf{A}^{\#}$指标组成的有序对 (e_0, e_1) 的编码，我们就称 $e \in \mathbb{N}$ 为A的含幺指标$^{\#}$ 。我们引入这类指标的动机是，即便对于稳定有限含幺 C*-代数这一类，$\mathbf{1}_{\mathbf{A}}$ 的$\mathbf{A}^{\#}$指标也未必能由$\mathbf{A}^{\#}$的一个指标计算得出；参见 [19]。

现在我们讨论关于 K-理论可计算性的既有进展。

3.2.2. *K-理论。* 在 [9], 中证明了，存在一个从含幺 C*-代数的可计算可枚举表示范畴（其中态射是可计算的含幺 $*$-态射）到阿贝尔群的可计算可枚举表示范畴的可计算函子。这个函子记作 K_0。该函子在如下意义下是可计算的：给定 [9], ($\mathbf{A}^{\#}$) 的指标，可以计算出 K_0的指标；给定一个可计算 $*$-同态 ϕ 的 ($\mathbf{A}^{\#}$,$\mathbf{B}^{\#}$) 指标，可以计算出 $K_0(\phi)$ 的 ($K_0(\mathbf{A}^{\#})$ $K_0(\mathbf{B}^{\#})$) 指标。

将可计算 K-理论应用于 UHF 代数时，很大程度上依赖于可计算弱稳定性的概念；这一概念也将为我们证明有效 Glimm 引理提供支持。因此，接下来我们将回顾这一概念。

3.2.3. 可计算弱稳定性。 可计算弱稳定性的概念由 Fox、Goldbring 和 Hart 引入，[13] 其依据是连续模型论中相应的弱稳定性概念；该概念由 [11]提出。 [9],我们在其中阐述了可计算弱稳定性，突显了它与 c.e. 闭性的联系。为了引用其中的一些细节，我们在此重述该定义。

定义 3.7。 假设 $\vec{x}=(x_1,\dots,x_N)$ 是一个变量组， $C_1,\dots,C_N\in\mathbb{N}$，且 $p_1(\vec{x})\dots,p_M(\vec{x})$ 是有理 $*$-多项式。考虑以下关系集合

$$\mathcal{R}=\{p_i(\vec{x})=0\ :\ i=1,\dots,M\}\cup\{\|x_j\|\le C_j\ :\ j=1,\dots,N\}$$

.

(1) 对于 C*-代数 B 以及 $w_1,\dots,w_N\in B$，令 $\mathcal{R}^{\mathbf{B}}$ 表示量 $\max(\{\|p_j(\vec{w})\|:\ j\in\{1,\dots,M\}\}\cup\{\|w_j\|-C_j:\ j\in\{1,\dots,N\}\}$，并记 $B\models\mathcal{R}(\vec{w})$，若对所有 $j\in\{1,\dots,M\}$ 都有 $p_j(\vec{w})=0$，且对所有 $j\in\{1,\dots,N\}$ 都有 $\|w_j\|\le C_j$。(2) 函数 $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是 $\mathcal{R}$ 的弱稳定性模，条件是：对于每个 $k\in\mathbb{N}$、每个 C*-代数 B 以及每个 $w_1,\dots,w_N\in B$，若 $\mathcal{R}^{\mathbf{B}}(\vec{w})<2^{-g(k)}$，则存在 $z_1,\dots,z_N\in B$，使得 $\max_j\|w_j-z_j\|<2^{-k}$ 且 $B\models\mathcal{R}(\vec{z})$。(3) 若 $\mathcal{R}$ 有弱稳定性模，则称其为弱稳定的；若其有可计算弱稳定性模数，则称其为可计算弱稳定。

在 [9, 定理 1.12] 中，我们证明了可计算弱稳定关系在 C*-代数的可计算可枚举表示中定义可计算可枚举闭集。

至此，我们已完成对经典数学与可计算数学中相关既有进展的介绍。现在，我们转而讨论这些领域中的一些纯粹预备性问题，为稍后开展的主要工作奠定基础。

4. Preliminaries from classical mathematics

4.1. 有序阿贝尔群。

4.1.1. 归纳极限。 我们在此的目标是更具体地理解有序阿贝尔群的归纳极限，这将有助于发展其可计算性理论。我们从阿贝尔群开始。

引理 4.1. 设$(G_s,\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是一个阿贝尔群的归纳序列，并设$(G,(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是$(G_s,\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$的一个归纳极限。那么：

(1) $G=\bigcup_{s\in\mathbb{N}}\mathrm{ran}(\nu_s)$。(2) 对于每个 $s\in\mathbb{N}$，$\ker(\nu_s)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\ker(\phi_{s,\ s+k})$。

证明概要。 我们首先回顾 $(G_s,\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的归纳极限的一种标准构造。对于每个 $s\in\mathbb{N}$，令 $\rho_s:\ G_s\to\prod_n G_n$ 为如下定义的同态：令$\rho_s(a)=(\phi_{s,n}(a))_{n\in\mathbb{N}}$。当 $f,g\in\prod_n G_n$ 时，若存在 $k\in\mathbb{N}$，使得对所有 $n\in\mathbb{N}$ 都有$f(k+n)=g(k+n)$，则记为 $f\sim g$。因此， $\sim$是 $\prod_n G_n$ 上的同余关系。令$\pi:\ \prod_n G_n\to\prod_n G_n/\sim$表示典范满同态，并对所有 $s\in\mathbb{N}$ 设 $\mu_s=\pi\circ\rho_s$。

定义 H 为 $\bigcup_{s\in\mathbb{N}}\mathrm{ran}(\mu_s)$。根据构造，$\mathrm{ran}(\mu_s)\subseteq\mathrm{ran}(\mu_{s+1})$。因此，$H$ 是一个阿贝尔群。众所周知且容易验证，$(H,(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 是 $(G_s,\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的归纳极限。此外，对于每个 $s\in\mathbb{N}$，$\ker(\mu_s)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\ker(\phi_{s,s+k})$。

令 λ 为 $(G,(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 到 $(H,(\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$的约化。根据命题 2.1，$\lambda$ 是一个同构。由于 $(H,(\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 满足 (1) 和 (2)，因此 $(G,(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 也满足这些条件。□

现在我们继续描述有序阿贝尔群的归纳极限。

引理 4.2。设 $(\mathcal{G}_s,\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是有序阿贝尔群的一个归纳序列。假设 $(\mathcal{G},(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(\mathcal{G}_s,\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$的一个归纳上极限。那么，当且仅当 $(\mathcal{G},(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$满足以下条件时，它是 $(\mathcal{G}_s,\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的一个归纳极限：

(1) $\mathcal{G}^+=\bigcup_{s\in\mathbb{N}}\nu_s[\mathcal{G}_s^+]$。(2) 对于每个 $s\in\mathbb{N}$，$\ker(\nu_s)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\ker(\phi_{s,\ s+k})$。

证明。假设对所有 $s\in\mathbb{N}$，$\mathcal{G}=(G,P)$ 且 $\mathcal{G}_s=(G_s,P_s)$。令 $(H,(\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 为 $(G_s,\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的归纳极限，并令 λ 为 $(H,(\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 到 $(G,(\nu_s))_{s\in\mathbb{N}}$ 的约化。令 $P'=\bigcup_{s\in\mathbb{N}}\mu_s[P_s]$，并设 $\mathcal{H}=(H,P')$。根据 [20, 命题 6.2, 6]，$(\mathcal{H},(\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(\mathcal{G}_s,\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的归纳极限。还可得出 λ 是正的，因此 λ 是 $(\mathcal{H},(\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 到 $(\mathcal{G},(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 的约化。此外，根据构造，$\mathcal{H}^+=\bigcup_s\mu_s[\mathcal{G}_s^+]$；由引理 4.1，对所有 $s\in\mathbb{N}$，$\ker(\mu_s)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\ker(\phi_{s,s+k})$。

假设（$\mathcal{G}$，$(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}}$）是（$\mathcal{G}_s$，$\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$的归纳极限。则 λ 是一个同构。由于（$\mathcal{H}$，$(\mu_s)_{s\in\mathbb{N}}$）满足（1）和（2），因此（$\mathcal{G}$，$(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}}$）也同样满足。

最后，假设（$\mathcal{G}$，$(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}}$）满足（1）和（2）。由（1）可知，λ 是满射。设 $h\in\ker(\lambda)$。则存在 s 和 $g\in\mathcal{G}_s$，使得 $\mu_s(g)=h$。因此，$g\in\ker(\nu_s)$，从而存在 $k\in\mathbb{N}$，使得 $g\in\ker(\phi_{s,\ s+k})$。于是，$h=\mu_{s+k}(\phi_{s,\ s+k}(g))=0_G$，从而 λ 是一个同构。因此，$(\mathcal{G},(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(\mathcal{G}_s,\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$的归纳极限。□

4.1.2. 含单位元维数群。 含单位元维数群是含幺 AF 代数 K-理论的核心，因此我们对维数证书的定义作如下详细说明。

定义4.3。设 $(\mathcal{G},u)$ 是一个含单位元维数群。若 u_s 是 $\mathbb{Z}^{n_s}$ 的序单位，且 $((\mathcal{G},u),(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是范畴中 $((\mathbb{Z}^{n_s},u_s)\ \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的一个归纳极限，则称 $(n_s,u_s\nu_s,\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是 $(\mathcal{G},u)$ 的一个单位维数证书，其中该范畴为含幺有序阿贝尔群范畴。

这些证书将构成我们证明主要定理 2 的基础。

4.2. C*-代数。

4.2.1. 归纳极限。 与上一节一样，我们给出 C*-代数归纳极限的具体描述。

引理 4.4。设$(\mathbf{A}_s,\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是C*-代数的一个归纳序列，并设$(\mathbf{A},(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是$(\mathbf{A}_s,\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$的一个归纳上极限。那么，$(\mathbf{A},(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是$(\mathbf{A}_s,\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的一个归纳极限，当且仅当它满足以下条件：

(1) 一个 $=\overline{\bigcup_{s\in\mathbb{N}}\mathrm{ran}(\nu_s)}$。(2) 对每个 $s\in\mathbf{A}_s$，$\|\nu_s(a)\|=\lim_k\|\phi_{s,\ s+k}(a)\|$。(3) 对每个 $s\in\mathbb{N}$，$\ker(\nu_s)=\{a\in A_s:\lim_k\|\phi_{s,\ s+k}(a)\|=0\}$。

证明。 正向结论由 [20, 命题 6.2。4]。

假设1)、（2）和（3）均成立。设（$\mathbf{B},(\mu_s)_{s\in\mathbb{N}}$是$\mathbf{A}s,\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$的归纳上极限。

我们首先证明 $\ker(\nu_s) \subseteq \ker(\mu_s)$。设 $a \in \ker(\nu_s)$。那么，由（2），$\lim_k \|\phi_{s,s+k}(a)\| = 0$。由于每个 $*$-同态都是 1-Lipschitz，因此有 $\lim_k \|\mu_{s+k}(\phi_{s,s+k}(a))\| = 0$。然而，由于（$\mathbf{B},(\mu_s)_{s\in\mathbb{N}}$）是（$\mathbf{A}s,\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$的归纳上极限，因此 $\mu_{s+k}(\phi_{s,s+k}(a)) = \mu_s(a)$，所以 $a \in \ker(\mu_s)$。

现在可得，若 $\nu_s(a_0) = \nu_{s+k}(a_1)$，则 $\mu_s(a_0) = \mu_{s+k}(a_1)$。

现在我们构造一个从 $\bigcup_{s\in\mathbb{N}} \text{ran}(\nu_s)$ 到 $\mathbf{B}$ 的 $*$-同态 λ'。首先，令$a \in \text{ran}(\nu_s)$，并任取 $a' \in \mathbf{A}_s$，使得 $\nu_s(a') = a$。定义 $\lambda'(a)$ 为 $\mu_s(a')$。由刚才证明的结果可知，λ' 定义良好。由于每个 ν_s 和每个 μ_s 都是 $*$-同态，因此还可得 λ' 是 $*$-同态。

现在我们断言 λ' 是 1-Lipschitz。令 $a \in \text{ran}(\nu_s)$，并假设 $\nu_s(a') = a$。由（2），$\|\nu_s(a')\| = \lim_k \|\phi_{s,s+k}(a')\|$。由于每个 μ_{s+k} 都是 1-Lipschitz，因此可得$\|\nu_s(a')\| \geq \lim_k \|\mu_{s+k}(\phi_{s,s+k}(a')\|$。但是，$\mu_{s+k}(\phi_{s,s+k}(a')) = \mu_s(a') = \lambda'(a)$。

因此可知，λ' 有唯一的连续延拓 λ 到$\mathbf{A}$。此外，λ 是一个 $*$-同态，并且根据构造，对于所有 $s \in \mathbb{N}$，$\lambda \circ \nu_s = \mu_s$。

最后，直接由定义可知，$(\mathbf{A},(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$到$(\mathbf{B},(\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$的任意两个约化在$\bigcup_{s\in\mathbb{N}} \text{ran}(\nu_s)$上相同，因此必定相同。□

引理4.4 的一个直接推论是 AF 证书与归纳极限之间的以下联系。

推论 4.5。若$(F_j,\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$是$\mathbf{A}$的一个 *AF* 证书，则$(\mathbf{A},(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}})$是$(\bigoplus_{n\in F_j} M_n(\mathbb{C}),(\psi_{j+1}^{-1}\circ\psi_j)_{j\in\mathbb{N}})$的归纳极限。

4.2.2. 矩阵系统。 这里唯一要做的就是介绍一些术语，为证明有效 Glimm 引理做准备。

定义 4.6。 设 $\mathbf{A}$ 是一个 C*-代数，且令 $n_1,\ldots,n_m$ 为正整数。若数组 $(e_{i,j}^s)_{s,i,j}$ 满足以下条件，则称其为 类型为 $(n_1,\ldots,n_m)$ 的 *A* 的矩阵系统 ：

(1) 对每个 $s \in \{1,\ldots,m\}$，$(e_{i,j}^s)_{i,j}$ 都是 $\mathbf{A}$ 的一个 $n_s \times n_s$ 矩阵单位系。(2) 当 $s, s' \in \{1,\ldots,m\}$ 互不相同时，对所有 $i,j \in \{1,\ldots,n_s\}$ 以及所有 $i',j' \in \{1,\ldots,n_{s'}\}$，均有 $e_{i,j}^s e_{i',j'}^{s'} = 0$。

此外，若 $\mathbf{A}$ 含幺，且 $\sum_{s,i} e_{i,i}^s = \mathbf{1}_\mathbf{A}$，则称系统 $(e_{i,j}^s)_{s,i,j}$为含幺。

如果$\mathbf{F}$是由矩阵系统 $(e_{i,j}^s)_{s,i,j}$生成的 C*-代数，那么我们称 $(e_{i,j}^s)_{s,i,j}$ 为F 的矩阵生成系统。因此，C*-代数是有限维的，当且仅当它具有矩阵生成系统。

5. 预备知识：有效数学

本文介绍我们关于可计算标记范畴中归纳极限的可计算性，以及有序阿贝尔群的可计算性的框架。

5.1. **可计算索引范畴中的归纳极限**。 现在，我们将以可计算的方式呈现2.1中讨论的内容。因此，我们再次假设 $\mathcal{C}$ 是一个带有零对象的范畴。不过，我们假设已经固定了一个标记，其对象为 $\mathcal{C}$。这包括为 $\mathcal{C}$的对象指定自然数。指定给某个对象的数称为它的一个指标。每个对象至少有一个

指标。一个数不能标记多个对象。每个态射至少由一个自然数三元组标记。如果 (e_0, e_1, e) 标记一个态射 γ，那么e_0 必须标记其定义域，而 e_1 必须标记其陪域。

我们还假设，这种标记是可计算的，其含义是：存在一个算法，给定 ϕ 的一个指标（e_0，e_1，e）和 ψ 的一个指标（e_1，e_2，e'），即可计算出一个 $\psi \circ \phi$ 的指标，其形式为（e_0，e_2，e''）。此外，我们要求能够根据对象 A 的一个指标，计算出其恒等态射的一个指标。

现在，可计算标记已固定，其余定义只是对第 2.1 节中定义的直接调整。固定 $\mathcal{C}$ 的一个归纳序列（A_n, ϕ_n）$_{n\in\mathbb{N}}$。如果存在一个算法，给定$n \in \mathbb{N}$ 即可计算出 A_n 和 ϕ_n 的指标，我们就称（A_n, ϕ_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 是可计算的。现在设（A，（ν_n）$_{n\in\mathbb{N}}$）是（A_n，ϕ_n）$_{n\in\mathbb{N}}$的一个归纳上极限，并假设可以根据n计算出 ν_n 的一个指标。如果 e 是由一对（e_0, e_1）构成的编码，且 e_0 是 A 的一个指标，e_1 是一个算法的指标，该算法能根据 n 计算出 ν_n 的一个指标，那么我们就称（A，（ν_n）$_{n\in\mathbb{N}}$）是（A_n, ϕ_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个上归纳极限，且其指标为 $e \in \mathbb{N}$。如果（A，（ν_n）$_{n\in\mathbb{N}}$）是一个可计算归纳上极限，并且能够根据（A_n, ϕ_n）$_{n\in\mathbb{N}}$的一个可计算归纳上极限（B，（μ_n）$_{n\in\mathbb{N}}$）的指标，计算出从（A，（ν_n）$_{n\in\mathbb{N}}$）到（B，（μ_n）$_{n\in\mathbb{N}}$）的约化的一个指标，那么我们就称（A，（ν_n）$_{n\in\mathbb{N}}$）是一个可计算归纳极限。

5.2. **阿贝尔群**。

引理 5.1. 设 $(G,(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是阿贝尔群范畴中的一个归纳极限 $(G_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$。

(1) 若 $(G_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是阿贝尔群的可计算可枚举表示范畴中的一个归纳序列，且 $(G^{\#}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是该序列的一个可计算归纳上极限，则 $(G^{\#}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是阿贝尔群的可计算可枚举表示范畴中 $(G^{\#}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 的一个可计算归纳极限。*(2)* 若 $(G_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是阿贝尔群的可计算表示范畴中的一个归纳序列，且 $(G^{\#}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是该序列的一个可计算归纳上极限，则 $(G^{\#}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是阿贝尔群的可计算表示范畴中 $(G^{\#}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 的一个可计算归纳极限。

证明。 设 $(G_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是阿贝尔群可计算可枚举表示范畴中的一个归纳序列，并假设 $(G^{\#},(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是该序列的一个可计算归纳上极限。设 $(H^{\#},(\mu_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是 $(G_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 在阿贝尔群的可计算可枚举呈示范畴中的一个可计算归纳上极限。因此，$(H,(\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(G_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 在阿贝尔群范畴中的一个归纳上极限。于是，存在唯一的约化 λ，将 $(G,(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 约化到 $(H,(\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$。

只需证明 λ 是从 $G^{\#}$ 到 $H^{\#}$的可计算映射。设w 是 $g \in G$的一个 $G^{\#}$ 标签。那么，存在 $s_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $g \in \mathrm{ran}(\nu_{s_0})$，因此存在 g的一个 $\mathrm{ran}(\nu_{s_0})^{\#}$ 标签 w'。由于包含映射是一个从 $\mathrm{ran}(\nu_s)^{\#}$ 到 $G^{\#}$ 的可计算映射，且关于 s一致，因此可以通过搜索过程找到 s_0 和 w'。接着，通过搜索过程，我们可以计算出一个 $g' \in G_{s_0}$ 的 $G_{s_0}^{\#}$ 标签 w''，使得$\nu_{s_0}(g') = g$（因为 ν_s 是一个从$G_s^{\#}$到 $G^{\#}$ 的可计算映射，且关于 s一致）。由于$\lambda(g) = \mu_{s_0}(g')$，因此现在可以根据 w计算出 $\lambda(g)$的一个 $H^{\#}$ 标签。

第二部分的证明几乎完全相同。 □

P命题 5.2. (1) 每个阿贝尔群的可枚举表示的可计算归纳序列都有一个可计算归纳极限。(2) 每个阿贝尔群的可计算表示的可计算归纳序列都有一个可计算归纳极限。

证明。 设 $(G_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是阿贝尔群的可计算可枚举表示的归纳序列。令 $(G,(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 为 $(G_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 在阿贝尔群范畴中的归纳极限。于是，对每个 $s \in \mathbb{N}$，我们构造一个可计算可枚举表示 $\mathrm{ran}(\nu_s)^{\#}$，使得 ν_s 是从 $\mathcal{G}_s^{\#}$ 到 $\mathrm{ran}(\nu_s)^{\#}$ 的可计算映射，并且包含映射是从 $\mathrm{ran}(\nu_s)^{\#}$ 到 $\mathrm{ran}(\nu_{s+1})^{\#}$ 的可计算映射；具体而言，当且仅当 w 是 ν_s 的某个原像 g 的标签时，我们就将其声明为 g 的 $\mathrm{ran}(\nu_s)^{\#}$ 标签。由于 $G = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \mathrm{ran}(\nu_s)$，通过标准方法，可以构造一个可计算可枚举表示 $G^{\#}$，使得从 $\mathrm{ran}(\nu_s)^{\#}$ 到 $G^{\#}$ 的包含映射关于 s 一致可计算。

根据构造，$(G^{\#},(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是阿贝尔群的可计算可枚举呈示范畴中 $(G_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$的一个可计算归纳上极限。由引理5.1 可知，$(G^{\#},(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(G_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$的一个可计算归纳极限。

第二部分的证明几乎完全相同。 □

引理 5.3。 假设$(G^{\#},(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是$(G_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$的一个可计算归纳极限，其中所处范畴可以是阿贝尔群的可计算可枚举呈示范畴，也可以是阿贝尔群的可计算呈示范畴。那么，$(G,(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是阿贝尔群范畴中$(G_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的一个归纳极限。

证明。暂且假设 $(G^{\#}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是阿贝尔群的可计算可枚举呈示范畴中 $(G_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的一个可计算归纳极限。根据定义，$(G, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(G_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的一个归纳上极限。假设 $(H, (\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是这个序列的一个归纳极限，并令 λ 为 $(H, (\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 到 $(G, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 的约化。与命题 5.2 的证明类似，可以定义一个 H 的可计算可枚举表示 $H^{\#}$，使得 $(H^{\#}, (\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是阿贝尔群的可计算可枚举呈示范畴中 $(G_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的一个归纳极限。因此，λ 是一个同构。由此可知，$(G, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(G_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的一个归纳极限。

阿贝尔群的可计算表示范畴的情形完全相同。□

5.3. **有序阿贝尔群。** 现在我们讨论有序阿贝尔群的可计算可枚举表示，以及相关概念和结果。

5.3.1. 呈现。

定义 5.4。 设 $\mathcal{G} = (G, P)$ 是一个有序阿贝尔群。

(1) 若 $G^{\#}$ 是 G 的表示，我们就称 $(G^{\#}, P)$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个表示 。(2) 若 $G^{\#}$ 是可计算可枚举的，且 P 是 $G^{\#}$ 的一个可计算可枚举集，我们就称 $\mathcal{G}$ 的一个表示 $(G^{\#}, P)$ 是可计算可枚举的 。

若 $\mathcal{G}^{\#} = (G^{\#}, P)$ 是一个有序阿贝尔群的可计算可枚举表示，我们称 $e \in \mathbb{N}$ 是 $\mathcal{G}^{\#}$ 的一个指标，当且仅当它是由一对 (e_0, e_1) 构成的编码，其中一项是 $G^{\#}$ 的一个指标，另一项是 P 的一个 $G^{\#}$ 指标。若 $g \in G$ 和 $w \in F_\omega$，我们称 w 是 g 的一个标签，当且仅当它是 g 的一个 $G^{\#}$ 标签。

D定义 5.5。 设 $\mathcal{G}$ 是一个有序阿贝尔群，并设 u 是 $\mathcal{G}$的单位元。(1) 如果 $\mathcal{G}^{\#}$ 是 $\mathcal{G}$ 的表示，我们就称 $(\mathcal{G}^{\#}, u)$ 是 $(\mathcal{G}, u)$ 的表示 。(2) 如果 $\mathcal{G}^{\#}$ 是可枚举的，我们就称 $(\mathcal{G}^{\#}, u)$ 这个 $(\mathcal{G}, u)$ 的表示是可枚举的 。

如果 $(\mathcal{G}^{\#}, u)$ 是 $(\mathcal{G}, u)$ 的可枚举表示，那么若 $e \in \mathbb{N}$ 编码了一个由 $\mathcal{G}^{\#}$ 的指标和 u的一个标签的编码组成的有序对，我们就称 $e \in \mathbb{N}$ 是 $(\mathcal{G}^{\#}, u)$ 的一个指标 。当$\mathbf{A}$ 稳定有限且含幺时，我们令 $K_0^{\mathrm{sc}}(\mathbf{A}^{\#}) = ((K_0(\mathbf{A}^{\#}) \ K_0(\mathbf{A})^{+}) \ K_0(\mathbf{1_A}))$。

以下结果是证明主定理 2.2.

引理 5.6. 若 $\mathcal{H} = (H, H \cap \mathbb{Z}^n_{\geq 0})$ 是由 $\mathbb{Z}^n$ 中的一个元素 x 生成的 $\mathbb{Z}^n$ 的凸子群，那么 H 是 $\mathbb{Z}^n$ 的可计算集合。

证明。 我们首先证明，对每个 $g \in \mathbb{Z}^n$, $g \in H$ 当且仅当存在一个正整数 n 使得 $-nx \leq g \leq nx$。令 $g \in \mathbb{Z}^n$。一方面，如果存在这样的正整数，那么 $\mathcal{H}$ 的凸性保证 $g \in H$。反过来，由于根据引理 2.2 x 是 $\mathcal{H}$的序单位，如果 $g \in H$，那么必定存在这样的正整数 n 。

给定 $g \in \mathbb{Z}^n$，通过检查各分量，可以确定是否存在一个正整数 n 使得 $-nx \leq g \leq nx$。因此，根据刚才证明的结论，H 是 $\mathbb{Z}^n$的可计算集合。□

我们注意到，引理5.6 的证明是一致的。

5.3.2. 归纳极限。 现在，我们将关于可计算归纳极限的框架应用于有序阿贝尔群范畴。我们已经讨论过如何对这个范畴进行可计算编号。下面的推论不仅说明该范畴中的可计算归纳序列具有归纳极限，也说明如何求出这些极限。

以下结论是引理5.1的直接推论。

推论 *5.7.* 假设 $(\mathcal{G}_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是有序阿贝尔群的可计算可枚举表示所构成的可计算归纳序列。设 $(\mathcal{G}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(\mathcal{G}_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的归纳极限，并且还假设 $\mathcal{G}^{\#}$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个可计算可枚举表示，使得 $(\mathcal{G}^{\#}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(\mathcal{G}_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的可计算上极限。那么，$(\mathcal{G}^{\#}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(\mathcal{G}_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的可计算归纳极限。

推论 5.8. 每一个有序阿贝尔群的可计算可枚举表示的可计算归纳序列都具有一个可计算归纳极限。

证明概要. 假设 $(\mathcal{G}_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是有序阿贝尔群的可计算可枚举表示的可计算归纳序列。令 $\mathcal{G}_s^{\#} = (G_s^{\#}, P_s)$。由命题 5.2， $(G_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$具有可计算归纳极限 $(G^{\#}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}}$在阿贝尔群的可计算可枚举呈示范畴中。

令 $P = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \nu_s[P_s]$。设 $\mathcal{G} = (G, P)$，并设 $\mathcal{G}^{\#} = (G^{\#}, P)$。由引理 5.3，$(G, \nu_s)_{s\in\mathbb{N}}$是 $(G_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的归纳极限。进而由引理 4.2 可知，$(\mathcal{G}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(\mathcal{G}_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的归纳极限。

我们声称 $\mathcal{G}^{\#}$ 是可枚举的。只需证明 P 是$G^{\#}$的可计算可枚举集。对每个 s， P_s 都是 $G_s^{\#}$ 的可计算可枚举集，且关于 s一致。同时， ν_s 是从 $G_s^{\#}$ 到 $G^{\#}$ 的可计算映射，且关于 s一致。因此， $\nu_s[P_s]$ 是 $G^{\#}$的可计算可枚举集，且关于 s一致，所以 P 是 $G^{\#}$的可计算可枚举集。

最后，由于 ν_s 是一个从 $G_s^{\#}$到 $G^{\#}$ 关于 s一致可计算的映射，因此 $(\mathcal{G}^{\#},(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}}$是 $(\mathcal{G}_s^{\#}, \phi_s)$ 的一个可计算归纳上极限$_{s\in\mathbb{N}}$。因此，根据推论 5.7，$(\mathcal{G}^{\#},(\nu_s)_{s\in\mathbb{N}}$是 $(\mathcal{G}_s^{\#}, \phi_s)$ 的一个可计算归纳极限$_{s\in\mathbb{N}}$。□

5.3.3. 维数群。 本节中的内容将在我们证明主定理 2时用到。

定义 5.9. 设 $\mathcal{G}^{\#}$ 是一个有序阿贝尔群的表示。我们称 $\mathcal{G}^{\#}$ 具有有效 *Shen* 性质，如果给定一个从 $\mathbb{Z}^n$ 到 $\mathcal{G}^{\#}$ 的同态 θ 的 $(\mathbb{Z}^n, \mathcal{G}^{\#})$ 指标，以及一个 $\alpha \in \ker(\theta)$，就可以计算出一个正整数 p、一个有序群同态 $\varphi\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^p$的指标，以及一个同态 $\theta'\colon \mathbb{Z}^p \to \mathcal{G}$ 的 $(\mathbb{Z}^p, \mathcal{G}^{\#})$ 指标，使得 (ϕ, θ') 在 α处经由 θ 分解。

引理5.10. 每个维数群的可枚举表示都具有有效 *Shen* 性质。

证明概要。 设 $\mathcal{G}^{\#}$ 是维数群的一个可枚举表示。根据命题 2.3， $\mathcal{G}$ 具有 Shen 性质。给定同态 $\theta\colon \mathbb{Z}^n \to \mathcal{G}$ 和$\alpha \in$ 核θ，有效 Shen 性质所要求的有序同态确实存在，因为 $\mathcal{G}$ 具有（普通的）Shen 性质。由于这些映射完全由它们在标准基上的取值决定，因此现在可以通过搜索过程找到它们。 □

5.4. **C*-代数**。现在我们来讨论 C*-代数可计算性理论中的一些初步进展。首先，我们在已有的可计算弱稳定性结果基础上进一步推进，以便在 AF代数的可计算可枚举表示中计算矩阵系统。这些结果对于我们证明有效 Glimm 引理至关重要。接下来，我们介绍一些关于计算 C*-代数归纳极限的内容，最后给出可计算 AF 证书的正式定义。

5.4.1. 可计算弱稳定性结果。

引理 *5.11*。设 $\mathcal{R}(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $\mathcal{S}(x_1, \ldots, x_n)$ 是定义 *3.7* 中的有限个关系。进一步假设 $\mathcal{R}$ 是可计算弱稳定的，并且存在一个可计算的 $\Delta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对于每个 *C**-代数 A 以及任意 $a_1, \ldots, a_n \in A$，若 $A \models \mathcal{R}(a_1, \ldots, a_n)$，且若 $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \leq 2^{-\Delta(k)}$，则存在 $a'_1, \ldots, a'_n \in A$，使得 $A \models (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})(a'_1, \ldots, a'_n)$，并且 $\max_j \|a_j - a'_j\| < 2^{-k}$。那么， $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ 是有效弱稳定的。

证明。 令 Δ_1 为 $\mathcal{R}$的可计算弱稳定性模。令 M 表示 $\mathcal{S}$ 中出现的常数的最大值（也就是说， C_j）。由此可知，存在一个可计算的 $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对于每个 C*-代数 $\mathbf{A}$， g 是 $B(\mathbf{0}; M)^n$上 $\mathcal{S}^{\mathbf{A}}$的一致连续性模数。令 $\Delta_2(k) = \Delta_1(\max\{k+1, g(\Delta(k+1))\})$。

假设 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{A}$ 且 $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{\mathbf{A}}(c_1, \ldots, c_n) < 2^{-\Delta_2(k)}$。令

$$a = \max\{1, g(\Delta(k+1)) - k\}.$$

由于 $\Delta_2(k) \geq \Delta_1(k+a)$，存在 $a_1, \ldots, a_n \in A$，使得 $A \models \mathcal{R}(a_1, \ldots, a_n)$，并且 $\max_j \|a_j - c_j\| < 2^{-(k+a)}$。由于 $A \models \mathcal{R}(a_1, \ldots, a_n)$，$(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = \mathcal{S}^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)$。由于 $k + a \geq g(\Delta(k+1))$，可知 $\mathcal{S}^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) < 2^{-\Delta(k+1)}$。因此，存在 $a'_1, \ldots, a'_n \in A$，使得 $A \models (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})(a'_1, \ldots, a'_n)$，且 $\max_j \|a_j - a'_j\| < 2^{-(k+1)}$。所以，$\max_j \|c_j - a_j\| < 2^{-k}$。 □

我们注意到，引理的证明 5.11 具有一致性：可以根据 $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ 的一个指标以及 Δ 的一个弱稳定性模的指标，计算出 $\mathcal{R}$ 的一个弱稳定性模的指标。

命题 5.12。 以下各项均由可计算弱稳定关系集定义。

（1）对于每个 $n \in \mathbb{N}$，成为相互正交投影的 n 元组的性质。（2）对于每个 m、n_1、…、$n_m \in \mathbb{N}$，成为一个（含幺）类型为（n_1、…、n_m）的矩阵系统的性质。

证明。(1)：投影这一性质是有效弱稳定的（见[13, 例 12]）。任意定义 $\Delta(0,k)$，对于正的 n 令 $\Delta(n,k) = \lceil \log_2(\delta_1(2^{-k},n)) \rceil$。应用引理 2.9 和 5.11。

(2)：我们使用引理 5.11。然而，为了证明所需函数 Δ 存在，必须采取一些额外步骤（相较于 (1)）。

$\Delta(0,k)$ 可任意定义。设 $n,k \in \mathbb{N}$，并假设 n 为正的。令 $k_0 = 1 - \lfloor \log_2(\delta_2(2^{-k}n^{-1},n)) \rfloor$，并设 $\Delta(n,k) = 1 - \lfloor \log_2(n^{-2}\delta_1(2^{-k_0},n)) \rfloor$。

假设 n_1、…、n_m 是满足 $n_1^2 + \ldots + n_m^2 = n$ 的正整数。设对每个 $s \in \{1,\ldots,m\}$，$(e^s_{i,j})_{i,j}$ 是 A 的一个矩阵单位系，并且还假设当 $s \neq s'$ 时，$\max_{i,j,j'} \left\| e^s_{i,j} e^{s'}_{i',j'} \right\| \leq 2^{-\Delta(n,k)}$。令 $p_s = \sum_i e^s_{i,i}$。那么，p_1、…、p_m 是投影，且 $\max_{s \neq s'} \|p_s p_{s'}\| \leq n^2 2^{-\Delta(n,k)}$。根据定义，$n^2 2^{-\Delta(n,k)} < \delta_1(2^{-k_0},n)$。因此，由引理 2.9，存在两两正交投影 q_1、…、$q_n \in A$，使得 $\max_j \|p_j - q_j\| < 2^{-k_0}$。

令 $\mathbf{A}_s = q_s \mathbf{A} q_s$。由于 $\|p_s - q_s\| < 2^{-k_0}$，

$$\left\| e^s_{i,j} - q_s e^s_{i,j} q_s \right\| = \left\| p_s e^s_{i,j} p_s - q_s e^s_{i,j} q_s \right\| < 2^{-k_0}.$$

因此，$\max_{s,i,j} d(e^s_{i,j}, \mathbf{A}_s) < 2^{-k_0}$。由于 $2^{-k_0} < \delta_2(2^{-k},n)$，由引理 2.10 可知，$\mathbf{A}_s$ 包含一个 $n_s \times n_s$ 系统 $(f^s_{i,j})_{s,i,j}$，其由矩阵单位组成，使得 $\left\| e^s_{i,j} - f^s_{i,j} \right\| < n^{-1}2^{-k}$。并且，由于 $q_1,\ldots,q_m$ 相互正交，可知 $(f^s_{i,j})_{s,i,j}$ 是一个矩阵系统。此外，若 $\sum_{s,i} e^s_{i,i} = \mathbf{1}_{\mathbf{A}}$，则 $\left\| \mathbf{1}_{\mathbf{A}} - \sum_{s^i} f^s_{i,i} \right\| < 1$。因此，由于每个 $f^s_{i,i}$ 都是投影 $\sum_{s,i} f^s_{i,i} = \mathbf{1}_{\mathbf{A}}$。□

5.4.2. 归纳极限。C*-代数的可计算可枚举表示构成一个范畴，其中的态射是可计算的 $*$-同态。也就是说，ψ 是从 $\mathbf{A}^{\#}$ 到 $\mathbf{B}^{\#}$ 的态射，当且仅当它是从 $\mathbf{A}^{\#}$ 到 $\mathbf{B}^{\#}$ 的可计算 $*$-同态。该范畴存在自然编号，但请注意，一个数 e 总会标记若干个呈现。不过，将由数 e 标记的所有呈现视为同一并无妨碍，即使它们是不同代数的呈现，因为其中任意两个之间都存在显然的可计算含幺 $*$-同构，即将第 n 个特殊点映到第 n 个特殊点。

我们给出关于C*-代数的可计算归纳极限的两个结果，它们与第5.3.2节中的结果相平行。

推论 *5.13.* 设 $(A_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是可枚举C*-代数呈现范畴中的一个可计算归纳序列，并设 $(A, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(A_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的一个归纳极限。若 $A^{\#}$ 是一个可计算可枚举表示，使得 $(A^{\#}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(A_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的可计算归纳上极限，则 $(A^{\#}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(A_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的可计算归纳极限。

证明概要。假设 $(B^{\#}, (\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(A_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的可计算归纳上极限，并令 λ 为从 $(A, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 到 $(B, (\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 的约化。令 g 为 $A^{\#}$ 的一个生成点。等待 $s_0 \in \mathbb{N}$ 以及 $A_{s_0}^{\#}$ 的一个生成点 g_0，使得 $\nu_{s_0}(g_0)$ 与 g 足够接近。根据引理 4.4，这样的数和生成点必定

存在。由于 λ 是 1-Lipschitz， $\lambda(g)$ 与 $\lambda(\nu_{s_0}(g_0)) = \mu_{s_0}(g_0)$ 足够接近，而后者可以以任意高的精度计算。□

以下内容归功于第二作者 [16]。

推论 5.14。设 $(\mathbf{A}_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是可计算的、处于可枚举 C*-代数表示范畴中的归纳序列。

(1) $(\mathbf{A}_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 具有一个可计算的归纳极限。(2) 如果 $(\mathbf{A}_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是处于可计算 C*-代数表示范畴中的可计算归纳序列，并且每个 ϕ_s 都是单射的，那么 $(\mathbf{A}_s^{\#}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$在可计算 C*-代数表示范畴中具有一个可计算的归纳极限。

证明概要。 我们采用一种与推论 5.8的证明中所使用的方法类似的技术来构造 $\mathbf{A}^{\#}$。第 2 部分由引理 4.4 得出。2。 □

5.4.3. 可计算 *AF* 证书。我们通过正式定义可计算 AF 证书来结束本节。

定义 5.15。设 $(F_j, \psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbf{A}$ 的 AF 证书，并假设 $\mathbf{A}^{\#}$ 是 $\mathbf{A}$ 的表示。如果 $(F_j, \psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是 A 的可计算 *AF* 证书$\mathbf{A}^{\#}$，则称之为 $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ，其中它是可计算的，并且每个 ψ_j 都是从 $\bigoplus_{n\in F_j} M_n(\mathbb{C})$ 到 $\mathbf{A}^{\#}$ 的可计算映射。

5.5. **Bratteli 图**。我们建立 Bratteli 图可计算性的框架。

定义 5.16。设 $\mathcal{D}$ 是一个 Bratteli 图。

(1) $\mathcal{D}$ 的一个表示是一个二元组 $(\mathcal{D}, \nu)$，其中 ν 是从 $\mathbb{N}$ 到 $V_{\mathcal{D}}$ 的满射。(2) 表示 $(\mathcal{D}, \nu)$ 的核为 $\{(m, n)\colon \ \nu(m) = \nu(n)\}$。

定义 5.17。假设 $\mathcal{D}^{\#} = (\mathcal{D}, \nu)$ 是一个 Bratteli 图的表示。我们称 $\mathcal{D}^{\#}$ 是可计算 的，如果它满足以下条件：

(1) $\mathcal{D}^{\#}$ 的核是可计算的。(2) $L_{\mathcal{D}} \circ \nu$ 是可计算的。
(3) 映射 $(m, n) \mapsto E_{\mathcal{D}}(\nu(m) \ \nu(n))$ 是可计算的。(4)
如果 $\mathcal{D}$ 是带标记的，那么 $\Lambda_{\mathcal{D}} \circ \nu$ 是可计算的。(5)
序列 $(\#L_{\mathcal{D}}^{-1}[\{n\}])_{n\in\mathbb{N}}$ 是可计算的。

如果 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 都是 Bratteli 图，那么 对 $\mathcal{D}'$ 进行的可计算伸缩 至 $\mathcal{D}$ 是一个满足定义 2.14 中条件的可计算整数序列。

定义 5.18。 假设 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 是 Bratteli 图。我们称 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$是可计算等价 的，如果存在一个序列 $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$、…、 $\mathcal{D}_m = \mathcal{D}'$，使得对于每个 $j < m$， $\mathcal{D}_j$ 和 $\mathcal{D}_{j+1}$ 要么同构，要么其中一个是另一个的可计算伸缩。

至此，我们关于预备工作的讨论告一段落。现在我们将正式陈述并证明有效 Glimm 引理。

6. An effective Glimm Lemma

本节中，$\mathbf{A}$ 表示一个稳定有限的含幺 C*-代数，而$\mathbf{A}^{\#}$表示$\mathbf{A}$的一个可计算可枚举表示。

设$\mathbf{B}$ 是$\mathbf{A}^{\#}$的一个可计算可枚举闭 $*$子代数。那么，根据$\mathbf{B}$的一个$\mathbf{A}^{\#}$ 指标以及$\mathbf{A}^{\#}$的一个指标，可以计算出一个在$\mathbf{B}$中稠密的序列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的$\mathbf{A}^{\#}$ 指标。接着，我们将$\mathbf{B}^{\#}$ 定义为$\mathbf{B}$的表示，其中第 n 个特殊点为 c_n。由于 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是$\mathbf{A}^{\#}$的可计算序列，因此$\mathbf{B}^{\#}$ 是$\mathbf{B}$的可计算可枚举表示。此外，包含映射是从$\mathbf{B}^{\#}$ 到$\mathbf{A}^{\#}$的可计算映射。

定理*6.1*（有效 *Glimm* 引理）。存在一个可计算函数 $\Delta\colon \mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$，使得对于 $A^{\#}$ 的每个可计算可枚举闭 $*$ 子代数 B、所有 $n,k\in\mathbb{N}$，以及满足 $\mathbf{1}_{\mathbf{A}}\in F$ 的 $A^{\#}$ 的每个可计算可枚举闭 $*$子代数 F，若 $dim(F)=n$，且 $B(B;2^{-\Delta(n,k)})$ 包含 F 的一个矩阵生成系统，则存在 $A^{\#}$ 的一个可计算酉元 u，使得 $\|u-\mathbf{1}_{\mathbf{A}}\|<2^{-k}$ 且 $u^{*}Fu\subseteq B$。此外，可以根据 $A^{\#}$ 的一个指标以及 F 和 B 的 $A^{\#}$ 指标计算出 u 的一个 $A^{\#}$ 指标。

我们通过一系列引理来证明这一点。为陈述第一个引理，我们定义函数 $\Delta_1:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 如下。任意定义 $\Delta_1(0,k)$。当 $n\geq 1$ 时，将 $\Delta_1(n,k)$ 定义为满足 $2^{-\Delta_1(n,k)}<\delta_0(2^{-(k+1)},n)$ 的最小自然数。注意，由归纳法可知，当 $n>0$ 时，$\delta_0(2^{-(k+1)},n)$ 是一个正有理数。因此，对于所有 n，$k\in\mathbb{N}$，$\Delta_1(n,k)$ 都有定义。此外，δ_0 的递归定义保证了 Δ_1 是可计算的。

引理 6.2。对于所有 $n,k\in\mathbb{N}$，若 $p_1,\dots,p_n\in B(\mathrm{Proj}(\mathbf{B});2^{-\Delta_1(n,k)})$ 是$\mathbf{A}^{\#}$ 的相互正交可计算投影，则 $\mathbf{B}$ 包含$\mathbf{A}^{\#}$ 的相互正交可计算投影 $q_1,\dots,q_n$，使得 $\max_j\|p_j-q_j\|<2^{-k}$。此外，若 $\sum_j p_j=\mathbf{1}_{\mathbf{A}}$，则 $\sum_j q_j=\mathbf{1}_{\mathbf{A}}$。

证明。设 $p_1,\dots,p_n\in B(\mathrm{Proj(B)};2^{-\Delta_1(n,k)})$ 是 $\mathrm{A}^{\#}$ 中两两正交的可计算投影。由引理 2.8 可知，存在两两正交的投影 $q_1,\dots,q_n\in\mathrm{B}$，使得 $\max_j\|q_j-p_j\|<2^{-k}$。令 Ω 表示所有两两正交的 $(a_1,\dots,a_n)\in\mathrm{B}^n$ 的集合。由命题 5.12，$\mathrm{Proj(B)}^n\cap\Omega$ 是 $(\mathrm{B}^{\#})^n$ 的可计算可枚举闭集。由于从 $\mathrm{B}^{\#}$ 到 $\mathrm{A}^{\#}$ 的包含映射是可计算的，$\mathrm{Proj(B)}\cap\Omega$ 是 $(\mathrm{A}^{\#})^n$ 的可计算可枚举闭集。接着，由于 $p_1,\dots,p_n$ 是 $\mathrm{A}^{\#}$ 中的可计算点，$B((p_1,\dots,p_n);2^{-k})$ 是 $(\mathrm{A}^{\#})^n$ 的可计算可枚举开集。因此，根据 [9, 引理 1.11],，$\mathrm{Proj}(B)\cap\Omega$ 包含 $(\mathrm{A}^{\#})^n$ 中的一个可计算点 $(q_1,\dots,q_n)$。于是，$q_1,\dots,q_n$ 是 $\mathrm{A}^{\#}$ 中的可计算点。

最后，δ_0 和 Δ_1 的定义确保：若 $\sum_j p_j=\mathbf{1}_{\mathbf{A}}$，则 $\sum_j q_j=\mathbf{1}_{\mathbf{A}}$。（参见引理 2.8的证明。）□

令 $\Delta_2(n,k)=n+k+2$。

引理 6.3。设 $p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n$ 是$\mathbf{A}^{\#}$ 的可计算投影，使得当 $i\neq j$ 时，$p_ip_j=q_iq_j=\mathbf{0}$。另外，假设 $\max_j\|p_j-q_j\|<2^{-\Delta_2(n,k)}$。那么，$\mathrm{C}^{*}(\{p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n,\mathbf{1}_{\mathbf{A}}\})$ 包含$\mathbf{A}^{\#}$ 的一个可计算偏等距 v，使得对所有 $j\in\{1,\dots,n\}$，$v^{*}p_jv=q_j$，以及 $\max_j\|p_j-p_jvq_j\|<2^{-k}$ 都成立。此外，若 $\sum_j p_j=\mathbf{1}_{\mathbf{A}}$，则 v 是酉元，且 $\|v-\mathbf{1}_{\mathbf{A}}\|<2^{-k}$。

证明。对于每个 $j\in\{1,\dots,n\}$，令 $u_j=\mathbf{1}_{\mathbf{A}}-p_j-q_j-2q_jp_j$。根据 [21, 引理 8.3。6], $u_jq_ju_j^{*}=p_j$ 以及 $\|\mathbf{1}_{\mathbf{A}}-u_j\|\leq\sqrt{2}\|\overline{p}_j-q_j\|$。设 $v=\sum_j p_ju_jq_j$。在以下内容中证明了

引理 [21, 8.4 的证明3] 指出 v 是一个偏等距，并且 $v^*p_jv = q_j$ 对所有$j \in \{1, \dots, n\}$ 都成立。我们还有

$$\begin{aligned}
\|p_j - p_jvq_j\| &= \|p_j - p_ju_jq_j\| \\
&= \|p_j - p_ju_jp_j + p_ju_jp_j - p_ju_jq_j\| \\
&\leq \|p_j\| \, \|\mathbf{1}_A - u_j\| + \|p_j\| \, \|u_j\| \, \|p_j - q_j\| \\
&\leq \sqrt{2} \, \|p_j - q_j\| + \|p_j - q_j\| \\
&= (1 + \sqrt{2}) \, \|p_j - q_j\| \\
&\leq (1 + \sqrt{2})2^{-(n+k+2)} < 2^{-n}2^{-k} < n^{-1}2^{-k} \leq 2^{-k}.
\end{aligned}$$

最后，假设 $\sum_j p_j = \mathbf{1_A}$。于是，

$$\left\| \mathbf{1_A} - \sum_j q_j \right\| = \left\| \sum_j (q_j - p_j) \right\| \leq n \cdot 2^{-n} < 1.$$

因此， $\sum_j q_j = \mathbf{1_A}$。此外，由于对所有 $j \in \{1, \dots, n\}$ 都有 $v^*p_jv = q_j$，还可得出 v 是酉元。另外，

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{1_A} - v\| &= \left\| \sum_{j=1}^{n} (p_j - p_ju_jq_j) \right\| \\
&\leq n \max_j \|p_j - p_ju_jq_j\| \\
&< 2^{-k}.
\end{aligned}$$

□

当 n， $k \in \mathbb{N}$ 和 $n > 0$ 时，将 $\Delta_3(n, k)$ 定义为满足 $2^{-\Delta_3(n,\ k)} < \delta_2(2^{-(k+1)},\ n)$ 的最小自然数；任意定义 $\Delta_3(0,\ k)$。

引理 *6.4*。设 $(e_{i,j})_{i,j}$ 是 $A^{\#}$ 的一个可计算 $n \times n$ 矩阵单位系，并假设 $\max_{i,j} d(e_{i,j}, B) \leq 2^{-\Delta_3(n,k)}$。那么，$B$ 含有一个可计算的 $n \times n$ 矩阵单位系 $(f_{i,j})_{i,j}$，使得 $\max_{i,j} \|e_{i,j} - f_{i,j}\| < 2^{-k}$。

证明。根据定义， $2^{-\Delta_3(n,k)} < \delta_2(2^{-(k+1)}, n)$。由引理 2.10 可知，B 包含一个 $n \times n$ 系 $(g_{i,j})_{i,j}$ 矩阵单位，使得 $\max_{i,j} \|e_{i,j} - g_{i,j}\| < 2^{-k}$。然而，作为一个 $n \times n$ 矩阵单位系的性质，是由一个可计算弱稳定关系集定义的（见 [13, 例 12]）。由于$e_{i,j}$是 $A^{\#}$, $B((e_{i,j})_{i,j}; 2^{-k})$ 的一个可计算点， $\cap B^{n^2}$ 是 $(B^{\#})^{n^2}$ 的一个可计算可枚举开集。因此，根据 [9, 引理 1.11], ，存在一个可计算的 $n \times n$ 系 $(f_{i,j})_{i,j}$，它是 $B^{\#}$ 的矩阵单位系，且 $\max_{i,j} \|e_{i,j} - f_{i,j}\| < 2^{-k}$。同样，由于从 $B^{\#}$ 到 $A^{\#}$ 的包含映射是可计算的， $(f_{i,j})_{i,j}$也是 $A^{\#}$的一个可计算 $n \times n$矩阵单位系。□

对于每个 n， $k \in \mathbb{N}$，令

$$\Delta_4(n, k) = \max\{\max_{m \leq k} \Delta_1(m, \max_{n' \leq n} \Delta_3(n', k) + 2), 1 + \max_{n' \leq n} \Delta_3(n', k)\}.$$

引理 *6.5.* 假设 $(e^s_{i,j})_{s,i,j}$ 是 $A^{\#}$ 的一种类型为 $(n_1, \dots, n_m)$ 的可计算矩阵系统，使得 $\max_{i,j,s} d(e^s_{i,j}, B) \leq 2^{-\Delta_3(\sum_j n_j^2, k)}$。那么，$B$ 包含 $A^{\#}$ 的一个可计算、类型为 $(n_1, \dots, n_m)$ 的矩阵系统 $(f^s_{i,j})_{s,i,j}$，使得 $\max_{s,i,j} \left\|e^s_{i,j} - f^s_{i,s}\right\| < 2^{-k}$。

证明. 对每个 $s \in \{1,\dots,m\}$，令 $p_s = \sum_i e^s_{i,i}$。设 $n = n_1^2 + \ldots, n_m^2$，并设$k_0 = \max_{n' \le n} \Delta_3(n', k)+2$。根据定义， $\Delta_4(n,k) \ge \Delta_1(m, k_0)$。因此，由引理 6.2，B 包含 $A^{\#}$ 的可计算且两两正交的投影 $q_1,\dots,q_m$，使得 $\max_i \|q_i - p_i\| < 2^{-k_0}$。

对于每个 $s \in \{1,\dots,m\}$，令 $\mathbf{B}_s = q_s\mathbf{B}q_s$。固定 $b \in \mathbf{B}$。那么：

$$\begin{aligned}
\left\|e^s_{i,j} - q_s b q_s\right\| &= \left\|p_s e^s_{i,j} p_s - q_s b q_s\right\| \\
&\le \left\|p_s e^s_{i,i} p_s - p_s e^s_{i,j} q_s\right\| + \left\|p_s e^s_{i,j} q_s - q_s b q_s\right\| \\
&\le \|p_s - q_s\| + \left\|p_s e^s_{i,j} - q_s b\right\| \\
&\le \|p_s - q_s\| + \left\|p_s e^s_{i,j} - q_s e^s_{i,j}\right\| + \left\|q_s e^s_{i,j} - q_s b\right\| \\
&\le 2\|p_s - q_s\| + \left\|e^s_{i,j} - b\right\|.
\end{aligned}$$

因此，

$$d(e^s_{i,j}, \mathbf{B}_s) \le 2^{-k_0+1} + 2^{-\Delta_4(n,k)}.$$

然而，根据 k_0 和 Δ_4的定义， $2^{-k_0+1} + 2^{-\Delta_4(n,k)} < 2^{-\Delta_3(n_s,k)}$。因此，由引理 6.4，$\mathbf{B}_s$ 包含 $A^{\#}$ 的一个可计算 $n_s \times n_s$ 系统 $(f^s_{i,j})_{i,j}$，其中包含矩阵单位，满足 $\max_{i,j} \|e^s_{i,j} - f^s_{i,j}\| < 2^{-k}$，并且满足 $\sum_i f^s_{i,i} = q_s$。由于 $q_1,\dots,q_m$相互正交，因此 $(f^s_{i,j})_{s,i,j}$ 是一个矩阵系统。□

现在我们可以证明有效 Glimm 引理了。

定理的证明 *6.1*。令 $k \in \mathbb{N}$。我们可以任意定义 $\Delta(0, k)$。因此，假设 n是一个正整数。令 P 表示 n的所有平方分拆构成的集合；也就是说， P是由正整数组成的所有序列（n_1, ……， n_m）构成的集合，满足 $\sum_j n_j^2 = n$。注意到 $P \neq \emptyset$ （令每个 $n_j = 1$）。设：

$$\begin{aligned}
k_0 &= \lceil \log_2(n 2^{k+1}) \rceil \\
\Delta(n,k) &= \max\{\Delta_5(n, \Delta_2(\sum_j n_j, k_0)) \ : \ (n_1,\dots,n_m) \in P\}.
\end{aligned}$$

我们指出， $\Delta_2(\sum_j n_j, \ k_0) \ge k_0$。

假设 $\mathbf{F}$ 是 $\mathbf{A}^{\#}$ 的一个可计算可枚举闭 $*$-子代数，且包含 $\mathbf{1_A}$，并假设 $\dim(\mathbf{F}) = n$。此外，假设 $B(\mathbf{B}; 2^{-\Delta(n,k)})$ 包含 $\mathbf{F}$ 的一个矩阵生成系统。

我们首先证明，存在一个含幺矩阵生成系统 $(g^s_{i,j})_{s,i,j}$ of F，使得 $g^s_{i,s}$ 是 $A^{\#}$ 中的一个可计算点，且关于 s,i,j 一致，并且 $\max_{s,i,j} d(g^s_{i,j}, B) < 2^{-\Delta(n,k)}$。为说明这一点，当 $(n_1,\dots,n_m) \in P$ 时，令 $\mathcal{G}_{n_1,\dots,n_m}$ 表示 F 的所有类型为 $(n_1,\dots,n_m)$ 的含幺矩阵系统 $(e^s_{i,j})_{s,i,j}$ 构成的集合。由命题 5.12， $\mathcal{G}_{n_1,\dots,n_m}$ 是 $(F^{\#})^n$ 的一个可计算可枚举闭集，因此也是 $(A^{\#})^n$ 的一个可计算可枚举闭集。由于 B 是 $A^{\#}$ 的一个可计算可枚举闭集， $B(B; 2^{-\Delta(n,k)})$ 是 $A^{\#}$ 的一个可计算可枚举开集。因此，所有满足 $\mathcal{G}_{n_1,\dots,n_m} \cap B(B; 2^{-\Delta(n,k)}) \neq \emptyset$ 的 $(n_1,\dots,n_m) \in P$ 构成的集合，可关于 n,k 一致地枚举。此外，存在唯一的 $(n_1,\dots,n_m) \in P$，使得 $\mathcal{G}_{n_1,\dots,n_m} \cap B(B; 2^{-\Delta(n,k)}) \neq \emptyset$。根据 [9, 引理 1，11]，这一交集包含 $(F^{\#})^n$ 中的一个可计算点，该点也是 $(A^{\#})^n$ 中的一个可计算点。

现在我们构造 u。首先，由于 $\Delta(n,k) \ge \Delta_4(n, \Delta_2(\sum_j n_j; k_0))$，根据引理 6.5，B 包含一个可计算的类型-$(n_1,\dots,n_m)$ 矩阵生成系统 $(h^s_{i,j})_{s,i,j}$，它属于 $A^{\#}$，并满足 $\max_{s,i,j} \|g^s_{i,j} - h^s_{i,j}\| < \min\{2^{-k_0}, 2^{-\Delta_2(\sum_j n_j, k_0)}\}$。因此，根据引理

6.3，存在 A 的一个可计算酉元 $v^{\#}$，使得 $v^* g^s_{i,\,i} v = h^s_{i,\,j}$ 对所有 i，s 均成立，并且 $\|v - \mathbf{1_A}\| < 2^{-k_0}$。接着我们令 $u = \sum_{i,\,s} g^s_{i,\,1} v h^s_{1,\,i}$。

通过直接计算，u 是酉元，且 $u^* g^s_{i,\,j} u = h^s_{i,\,j}$。只需证明 $\|u - \mathbf{1_A}\| < 2^{-k}$。首先，我们注意到

$$\left\|g^s_{i,j} - g^s_{i,1} v h^s_{i,1}\right\| \leq \left\|g^s_{i,1} - g^s_{i,1} v g^s_{1,i}\right\| + \left\|g^s_{i,1} v g^s_{1,i} - g^s_{i,1} v h^s_{1,i}\right\|.$$

接下来，我们对上述和式中的第一项作如下估计，得到一个上界。

$$\begin{aligned}\left\|g^s_{i,i} - g^s_{i,1} v g^s_{1,i}\right\| &\leq \left\|g^s_{1,i} - g^s_{i,1}\mathbf{1_A} g^s_{1,i}\right\| + \left\|g^s_{i,1}\mathbf{1_A} g^s_{1,i} - g^s_{i,1} v g^s_{1,i}\right\| \\ &\leq \|\mathbf{1_A} - v\| \\ &< 2^{-k_0}.\end{aligned}$$

然后我们注意到

$$\left\|g^s_{i,1} v g^s_{1,i} - g^s_{i,1} v h^s_{1,i}\right\| \leq \left\|g^s_{1,i} - h^s_{1,i}\right\| < 2^{-k_0}.$$

因此，由于 $\sum_{s,\,i} g^s_{i,\,i} = \mathbf{1_A}$，

$$\begin{aligned}\|\mathbf{1_A} - u\| &< \sum_{s,i} 2^{-k_0+1} \\ &= n 2^{-k_0+1} \\ &\leq 2^{-k}.\end{aligned}$$

□

现在我们可以着手证明主要定理中的第一个定理。

7. Proof of Main Theorem 1

我们从关于有限维代数的两个引理开始。第一个已由 A. Fox [12]证明；我们基于可计算弱稳定性的结果给出另一种证明。

引理 7.1. 若 $\mathbf{A}^{\#}$ 是一个有限维且含幺的 C*-代数的可计算可枚举表示，则存在正整数的一个有限多重集 F 以及一个可计算含幺 $*$-同构 ψ，从 $\bigoplus_{n\in F} M_n(\mathbb{C})$ 到 $\mathbf{A}_{\#}$。此外，F 以及 ψ 的一个 $(\bigoplus_{n\in F} M_n(\mathbb{C}), \mathbf{A}_{\#})$ 指标可由 $\mathbf{A}$ 的维数和 $\mathbf{A}_{\#}$ 的一个指标计算得到。

证明。按照定理6.1的证明，可以计算出正整数 m、n_1、…、n_m，以及 $\mathbf{A}^{\#}$ 的一个可计算的类型-$(n_1,\ldots,n_m)$含幺矩阵生成系统 $(g^s_{r,t})_{s,r,t}$。设 F 表示元素为 n_1、…、n_m 的多重集，且每个元素按其在 $(n_1,\ldots,n_m)$ 中出现的次数重复。设 $(E^s_{r,t})_{s,r,t}$ 表示 $\bigoplus_{n\in F} M_n(\mathbb{C})$ 的标准矩阵生成系统。设 ψ 是从 $\bigoplus_{n\in F} M_n(\mathbb{C})$ 到 $\mathbf{A}$ 上的唯一 $*$-同构，使得 $\psi(E^s_{r,t}) = g^s_{r,t}$。由此可知，$\psi$ 是从 $\bigoplus_{n\in F} M_n(\mathbb{C})$ 到 $\mathbf{A}^{\#}$ 的可计算映射。□

引理 7.2. 假设 $\mathbf{A}^{\#}$ 是一个 AF代数的可计算可枚举表示。设$p_0,\ldots,p_n$ 是 $\mathbf{A}^{\#}$中的可计算点，并令 $k\in\mathbb{N}$。那么 $\mathbf{A}^{\#}$ 有一个可计算可枚举闭且有限维的 $*$-子代数 $\mathbf{F}$，使得 $\mathbf{1_A}\in\mathbf{F}$，且 $\max_j d(p_j,\mathbf{F}) < 2^{-k}$。此外，可以根据 k 和 $p_0,\ldots,p_n$的 $\mathbf{A}^{\#}$ 指标，计算出 $\mathbf{F}$ 的一个 $\mathbf{A}^{\#}$ 指标。

证明。固定一个正整数序列 $(n_1, \ldots, n_m)$，并令 $\ell = \sum_j n_j^2$。定义$\mathcal{M}_{n_1,\ldots,n_m}$为 A 的所有类型为 $(n_1, \ldots, n_m)$ 的矩阵系统构成的集合。对于每个$\vec{a} = (a_1, \ldots, a_\ell) \in \mathrm{A}^\ell$以及每个 $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q}(i)^\ell$，令 $\langle \vec{q}, \vec{a} \rangle = \sum_j q_j a_j$。然后令$U_{n_1,\ldots,n_m}$表示所有满足以下条件的 $\vec{a} \in \mathrm{A}^\ell$：存在 $\vec{q} \in \mathbb{Q}(i)^\ell$，使得 $\max_j \|p_j - \langle \vec{a}, \vec{q} \rangle\| < 2^{-k}$。

由命题 5.12 与 [9, 定理 1.14] 可知，$\mathcal{M}_{n_1,\ldots,n_m}$ 是 $(\mathrm{A}^{\#})^\ell$ 的可计算可枚举闭集，且对 $n_1, \ldots, n_m$ 一致。我们断言，$U_{n_1,\ldots,n_m}$是 $(\mathrm{A}^{\#})^\ell$ 的可计算可枚举开集，且对 $n_1, \ldots, n_m$ 一致。为看出这一点，对每个 $\vec{q} \in \mathbb{Q}(i)^\ell$，令 $f_{j,\vec{q}} \colon \mathrm{A}^\ell \to \mathbb{C}$ 由设定 $f_{j,\vec{q}}(\vec{a}) = p_j - \langle \vec{q}, \vec{a} \rangle$ 来定义。由此可知，$f_{j,\vec{q}}$ 是从 $(\mathrm{A}^{\#})^\ell$ 到 $\mathrm{A}^{\#}$ 的可计算映射，且对 $j, \vec{q}$ 一致。因此，由命题 3.6，$f_j^{-1},_{\vec{q}}[B(0;\, 2^{-k})]$是 $(\mathrm{A}^{\#})^\ell$ 的可计算可枚举开集，且对 $j, \vec{q}$ 一致。从而，$\bigcap_j f_j^{-1},_{\vec{q}}[B(0;\, 2^{-k})]$ 是 $(\mathrm{A}^{\#})^\ell$ 的可计算可枚举开集，且对 $\vec{q}$ 一致。然而，$U_{n_1,\ldots,n_m} = \bigcup_{\vec{q}} \bigcap_j f_j^{-1},_{\vec{q}}[B(0;\, 2^{-k})]$。由此可知，$U_{n_1,\ldots,n_m}$对 $n_1, \ldots, n_m$ 一致地为可枚举开。

由此可知，所有满足$U_{n_1,\ldots,n_m} \cap \mathcal{M}_{n_1,\ldots,n_m} \neq \emptyset$的 $(n_1, \ldots, n_m)$ 构成的集合是可枚举的。同时，由于 A 是一个 AF代数，必定存在 $n_1, \ldots, n_m$，使得$U_{n_1,\ldots,n_m} \cap \mathcal{M}_{n_1,\ldots,n_m} \neq \emptyset$。因此，可以通过搜索过程计算出正整数 $m, n_1, \ldots, n_m$，使得$U_{n_1,\ldots,n_m} \cap \mathcal{M}_{n_1,\ldots,n_m} \neq \emptyset$。由此再根据 [9, 引理 1.12]，可计算出 $\mathrm{A}^{\#}$ 的一个类型为 $(n_1, \ldots, n_m)$ 的复合生成矩阵系统 $(f^s_{r,t})_{s,r,t}$，它属于$U_{n_1,\ldots,n_m}$。令 F 为该系统生成的 $*$-代数，即得所需结果。□

主定理 *1* 的证明。令 $\Delta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ 表示由有效 Glimm 引理（定理 6.1保证存在的函数。不失一般性，我们假设 Δ 对每个变量都是递增的。

设$\mathbf{A}^{\#}$ 是一个 AF 代数的可计算可枚举表示。固定一个对$\mathbf{A}^{\#}$的生成点的有效枚举 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$。

我们构造一个单调非递减序列 $(\mathbf{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$，其中各项都是有限维且可计算可枚举闭的 $*$-子代数，且包含于 $\mathbf{A}^{\#}$，使得 $d(g_k, \mathbf{A}_k) < 2^{-k}$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 都成立，并且 $\mathbf{1}_{\mathbf{A}} \in \mathbf{A}_0$。此外，我们还确保 $(\dim(\mathbf{A}_k))_{k\in\mathbb{N}}$ 是可计算的。由引理 7.1，即可推出存在一个针对 $\mathbf{A}^{\#}$ 的可计算 AF 证书。

首先，令 $\mathrm{A}_0 = \{\mathbf{1}_{\mathbf{A}}\}$。令 $k \in \mathbb{N}$，并假设 A_k 已定义。还假设已经计算出 $n := \dim(\mathrm{A}_k)$。由引理 7.1 可知，可以计算出 A_k的一个矩阵生成系统 $(e^s_{r,t})_{s,r,t}$；令 $(n_1, \ldots, n_m)$ 表示该系统的类型。接着，由引理 7.2 可知，可以计算出一个 $\mathrm{A}^{\#}$ 指标，使得 $\mathrm{A}^{\#}$ 的一个可计算可枚举闭、有限维、含幺 $*$-子代数 F 满足 $d(a, \mathrm{F}) < 2^{-\Delta(n,k+2)}$，其中

$$a \in \{g_{k+1}\} \cup \{e^s_{r,t} : s \in \{1, \ldots, m\} \wedge r, t \in \{1, \ldots, n_s\}\}.$$

根据有效格利姆定理，现在可以计算酉元 u 的$\mathbf{A}^{\#}$ 指标，使得 $u^*\mathbf{A}_k u \subseteq \mathbf{F}$，并且使得 $\|u - \mathbf{1}_{\mathbf{A}}\| < 2^{-(k+2)}$。接着我们令$\mathbf{A}_{k+1} = u\mathbf{F}u^*$。现在我们观察到

$$\begin{aligned} d(g_{k+1}, \mathbf{A}_{k+1}) &< \|g_{k+1} - u^* g_{k+1} u\| + 2^{-\Delta(n,k+2)} \\ &\leq \|g_{k+1} - u^* g_{k+1}\| + \|u^* g_{k+1} - u^* g_{k+1} u\| + 2^{-\Delta(n,k+2)} \\ &< 2^{-(k+1)} + 2^{-\Delta(n,k+2)}. \end{aligned}$$

如上所述，Δ 在每个变量上都是递增的。因此，特别地，$\Delta(n, k+2) \geq k+2$，于是 $d(g_{k+1}, \mathbf{A}_{k+1}) < 2^{-(k+1)}$。□

我们注意到，主要定理 1 的证明是一致的。以下是一个直接且多少有些令人惊讶的推论。

推论 7.3. 每个含幺 *AF* 代数的可枚举表示都是可计算的。

证明. 应用主定理 1 和推论 5.14。 □

现在我们着手证明第二个主定理。

8. Proof of Main Theorem 2

我们先给出两个关于可计算维数证书的引理。

引理8.1。 如果 $\mathcal{G}^{\#}$ 是维数群的可计算可枚举表示，那么 $\mathcal{G}^{\#}$ 具有可计算维数证书。

证明。 设 $\mathcal{G}^{\#}$ 是维数群的可计算可枚举表示，并令 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathcal{G}$的正锥的有效枚举。由引理 5.10， $\mathcal{G}^{\#}$ 具有有效 Shen 性质。

对于每个 $s \in \mathbb{N}$，我们构造如下对象 ：

- 一个正整数 n_s。
- 一个有序群同态 $\phi_s : \mathbb{Z}^{n_s} \to \mathbb{Z}^{n_{s+1}}$。
- 一个同态 θ_s ，从 $\mathbb{Z}^{n_s}$ 到 $\mathcal{G}_{\#}$。

我们确保满足以下需求。

(R-1) $(\mathcal{G},(\theta_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(\mathbb{Z}^{n_s},\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的归纳上极限 .
(R-2) $\mathcal{G}^+ = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \theta_s[\mathbb{Z}^{n_s}_{\geq 0}]$. (R-3) 对每个 $s \in \mathbb{N}$, $\ker(\theta_s) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(\phi_{s,s+k})$。

由引理 4.2 可知，若满足这些需求，则 $(\mathcal{G}^{\#},(\theta_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(\mathbb{Z}^{n_s},\phi_s)$ 的归纳极限。

我们将构造分为若干阶段。在阶段 s，我们定义 n_s 和 θ_s。在阶段$s+1$，我们定义 ϕ_s。

我们用 $\ker_s(\theta_k)$ 表示在经过 s 步计算后被枚举进 $\ker(\theta_k)$ 的所有向量组成的集合。我们控制这些核的枚举，以使其对每个 $t \in \mathbb{N}$ 都满足以下条件。

(C-1) 如果 $t = 0$，那么对于所有 $k \in \mathbb{N}$，$\ker_t(\theta_k) = \emptyset$ 。(C-2) 至多存在一个 $k \in \mathbb{N}$ ，使得 $\ker_{t+1}(\theta_k) \setminus \ker_t(\theta_k) \neq \emptyset$。(C-3) 对于所有 $k \in \mathbb{N}$，如果 $\ker_{t+1}(\theta_k) \setminus \ker_t(\theta_k) \neq \emptyset$，那么 $k \leq t$ ，且 $\#(\ker_{t+1}(\theta_k) \setminus \ker_t(\theta_k)) = 1$。

此外，我们假设这些枚举的生成方式满足：给定 k， t ，可以计算 $\ker_t(\theta_k)$ 的指标。注意，对于所有 k， t，$\#\ker_t(\theta_k) \leq t$（因为至少需要 t 步计算才能生成大小至少为t的输出）。

在构造过程中，我们确保以下不变量成立。
(I-1) $\theta_{s+1} \circ \phi_s = \theta_s$。(I-2) 如果 $\alpha \in \ker_{t+1}(\theta_s) \setminus \ker_t(\theta_s)$，那么 $\alpha \in \ker(\phi_{s,\,t})$。(I-3) $g_s \in \theta_k[(\mathbb{Z}^{n_s})^+]$。

由此可知，如果确保这些不变量，那么上述需求就能得到满足。

阶段 0: 设 $n_0 = 1$ 且令 $\theta_0(n) = ng_0$。

阶段 $s+1$: 假设 n_0，……，n_s 和 θ_0……，θ_s 均已定义。若 $s > 0$，则假设 ϕ_0，……，ϕ_{s-1} 均已定义。假设所有不变量在先前各阶段均得以保持。

令 ι_s 表示从 $\mathbb{Z}^{n_s}$ 到 $\mathbb{Z}^{n_s} \bigoplus \mathbb{Z}$ 的自然单射。也就是说，$\iota_s(\vec{n}) = (\vec{n}, 0)$。定义 $\zeta_s : \mathbb{Z}^{n_s} \bigoplus \mathbb{Z} \to G$，令 $\zeta_s(\vec{n}, m) = \theta_s(\vec{n}) + mg_{s+1}$。

情况 *1*：$s = 0$ 或对所有 $k < s$，$\ker_s(\theta_k) \subseteq \ker_{s-1}(\theta_k)$（也就是说，对于 $k < s$，在 s阶段，我们对 θ_k 的核的近似没有添加任何新内容）。

我们设：

$$\begin{aligned} n_{s+1} &= n_s + 1 \\ \phi_s &= \iota_s \\ \theta_{s+1} &= \zeta_s. \end{aligned}$$

情形 *2*：$s > 0$ 并且存在 $k < s$，使得 $\ker_s(\theta_k) \setminus \ker_{s-1}(\theta_k) \neq \emptyset$。

由于我们对核的枚举所作的条件，数 k 是唯一的，因此我们设 $k_{s+1} = k$。我们还将 α_{s+1} 定义为 $\ker_s(\theta_k) \setminus \ker_{s-1}(\theta_k)$ 中的唯一元素。我们试图定义 ϕ_s，使得 $\phi_{s-1} \circ \cdots \circ \phi_k(\alpha_{s+1}) \in \ker(\phi_s)$。为此，设 $\beta_{s+1} = \phi_{s-1} \circ \cdots \circ \phi_k(\alpha_{s+1})$。我们注意到 $\beta_{s+1} \in \ker(\theta_s)$（因为所有不变量都已在先前的阶段保持不变）。因此，根据定义，$\beta_{s+1} \in \ker(\zeta_s)$。我们将有效 Shen 性质应用于 n_s、ζ_s 和 β_{s+1}，得到一个正整数 p、一个同态 $\phi'_s : \mathbb{Z}^{n_s} \bigoplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^p$，以及一个有序群同态 $\theta'_s : \mathbb{Z}^p \to \mathcal{G}$，使得 $\beta_{s+1} \in \ker(\phi'_s)$，并且 $\zeta_s = \theta'_s \circ \phi'_s$。然后我们设：

$$\begin{aligned} n_{s+1} &= p \\ \theta_{s+1} &= \theta'_s \\ \phi_s &= \phi'_s \circ \iota_s. \end{aligned}$$

至此，构造完成。

现在我们证明，在构造的每个阶段，所有不变量都得以保持。（I-2）和（I-3）可由构造直接得出。接下来验证（I-1）。首先注意，根据构造，$\zeta_s \circ \iota_s = \theta_s$ 对所有 $s \in \mathbb{N}$均成立。令 $s \in \mathbb{N}$。

设 $s = 0$。根据构造，$\phi_0 = \iota_0$ 和 $\theta_1 = \zeta_0$。根据定义，对每个$n \in \mathbb{N}$，$\zeta_0(\iota_0(n)) = \zeta_0(n, 0) = \theta_0(n)$。因此，$\theta_1 \circ \phi_0 = \theta_0$。

现在，设 $s > 0$。我们先考虑对所有 $k < s$，$\ker_s(\theta_k) \subseteq \ker_{s-1}(\theta_k)$ 的情形（即第 $s+1$ 阶段满足情形 1）。根据构造，$n_{s+1} = n_s + 1$、$\phi_s = \iota_s$ 和 $\theta_{s+1} = \zeta_s$。因此，对所有 $\vec{n} \in \mathbb{Z}^{n_{s+1}}$，$\zeta_s(\iota_s(\vec{n})) = \zeta_s(\vec{n}, 0) = \theta_s(\vec{n})$；也就是说，$\theta_{s+1} \circ \phi_s = \theta_s$。

现在，我们考虑存在 $k < s$ 使得 $\ker_s(\theta_k) \setminus \ker_{s-1}(\theta_k) \neq \emptyset$ 的情形（也就是说，第 $s+1$ 阶段满足情形 2）。根据构造，$\phi_s = \phi'_s \circ \iota_s$和 $\theta_{s+1} = \theta'_s$。此外，$\zeta_s = \theta'_s \circ \phi'_s$。因此，$\theta_s = \zeta_s \circ \iota_s = \theta_{s+1} \circ \phi_s$。□

上述证明是对经典证明的一种改编，例如 [8]。我们的证明与经典证明的主要区别在于

在后者中，只需考虑 $\ker(\theta_k)$ 的一个基，并有限次应用 Shen 性质，对基中的每个元素各应用一次即可。在有效情形下，通常无法知道何时找到了一个有限生成自由阿贝尔群的基；因此，我们必须无限次“重新访问”每个核。

引理 8.2. 每个含单位元维数群的可枚举表示都有一个单位维数证书。

证明。 设 $(\mathcal{G}, u)^{\#}$ 是一个含单位元维数群的可枚举表示。由引理 8.1, $\mathcal{G}^{\#}$ 有一个可计算维数证书 $(n_s, \nu_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$。由引理 8.1的证明，我们可以假设 $n_0 = 1$ 和 $\nu_0(n) = nu$。令 $u_s = \phi_{0,s}(1)$。

现在我们构造一个含幺有序阿贝尔群的归纳序列 $((\mathbb{Z}^{m_s}, v_s)\ \gamma_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 。首先，对每个 s，令 $\mathcal{H}_s$ 表示由 u_s生成的 $\mathbb{Z}^{n_s}$ 的凸有序子群，并假设 $\mathcal{H}_s = (H_s, H_s \cap \mathbb{Z}^{n_s}_{\geq 0})$。根据引理 5.6 的一致性， H_s 可关于 s一致地计算。定义 B_s 为 $\mathbb{Z}^{n_s}$ 的标准基与 H_s的交集，并令 $m_s =$ 为 B_s的基数。由命题 3.8] 的证明， B_s 是 $\mathcal{H}_s$的基。

对于每个 $s \in \mathbb{N}$，存在唯一的同构 τ_s，从 $\mathbb{Z}^{m_s}$ 到 $\mathcal{H}_s$，使得对于每个$j \in \{1, \ldots, m_s\}$， $\tau_s(e^{m_s}_j) = e^{n_s}_k$，其中 k是 $\{k' : \ e^{n_s}_{k'} \in B_s\}$中的第 j个元素。令 $v_s = \tau_s^{-1}(u_s)$。因此， v_s 是 $\mathbb{Z}^{m_s}$的序单位。令 $\psi_s = \phi_s|_{H_s}$。由于$\phi_s(u_s) = u_{s+1}$，可得 $\phi_s[H_s] \subseteq H_{s+1}$。现在令 $\gamma_s = \tau^{-1}_{s+1}\psi_s\tau_s$。

令 ι_s 表示从 $\mathcal{H}_s$ 到 $\mathbb{Z}^{n_s}$的包含映射，并定义 μ_s 为 $\nu_s\iota_s\tau_s$。由此可得，$((\mathcal{G}, u)^{\#}, (\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $((\mathbb{Z}^{m_s}, v_s)\ \gamma_s)_{s\in\mathbb{N}}$的可计算上归纳极限；我们断言它实际上是一个可计算归纳极限。只需证明 $(\mathcal{G}, (\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(\mathbb{Z}^{m_s}, \gamma_s)_{s\in\mathbb{N}}$的归纳极限。为此，设 $x \in \mathcal{G}^+$。由引理 4.2，存在 $s \in \mathbb{N}$ 和 $y \in \mathbb{Z}^{n_s}_{\geq 0}$，使得 $\nu_s(y) = x$。由于 u 是 $\mathcal{G}$的序单位，存在正整数 t，使得 $-tu \leq x \leq tu$。因此，$-t\nu_s(u_s) \leq \nu_s(y) \leq t\nu_s(u_s)$。由于 $\ker(\nu_s) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\ker(\phi_{s,s+k})$，可得存在 $k \in \mathbb{N}$，使得 $-t\phi_{s,s+k}(u_s) \leq \phi_{s,s+k}(y) \leq t\phi_{s,s+k}(u_s)$。然而，$\phi_{s,s+k}(u_s) = u_{s+k}$，而它属于 $\mathcal{H}_{s+k}$。由于 $\mathcal{H}_{s+k}$ 是凸的，$\phi_{s,s+k}(y) \in \mathcal{H}_{s+k}$。此外，$\phi_{s,s+k}(y) \in \mathcal{H}^+_{s+k}$，因此 $x = \nu_{s+k}(\phi_{s,s+k}(y)) \in \nu_{s+k}[\mathcal{H}^+_{s+k}]$。于是， $\mathcal{G}^+ = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \mu_s[\mathcal{H}^+_s]$。由于 τ_s 和 ι_s 是单射，现在可得 $\ker(\mu_s) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(\gamma_{s,s+k})$。因此，由引理 4.2，$(\mathcal{G}, (\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(\mathbb{Z}^{m_s}, \gamma_s)_{s\in\mathbb{N}}$的归纳极限。

由此可知，$(m_s, v_s, \mu_s, \gamma_s)_{s\in\mathbb{N}}$是$(\mathcal{G}, u)^{\#}$的可计算含幺维数证书。 □

我们注意到，上述引理的证明是一致的。

主定理的证明2。

(1): 假设 $\mathcal{G}^{\#}$ 是维数群的可计算可枚举表示。由引理8.1，$\mathcal{G}^{\#}$ 具有可计算维数证书$(n_s, \nu_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$。

定义 F_0 为唯一元素是1且重复 n_0 次的多重集。令$u_0 = v_{F_0}$（即$(1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^{n_0}$），并设$\mathbf{A}_0 = \bigoplus_{n\in F_0} M_n(\mathbb{C})$。

假设 F_s 已定义， $u_s = v_{F_s}$和$\mathbf{A}_s = \bigoplus_{n\in F_s} M_n(\mathbb{C})$。我们计算一个序单位 $u_{s+1} \in \mathbb{Z}^{n_{s+1}}$，使得 $u_{s+1} \geq \phi_0(u_s)$。令 F_{s+1} 为一个多重集，其中包含出现在 u_s 中的整数，并且某个整数在 F_{s+1} 中重复出现的次数，等于它在 u_s中重复出现的次数。设 $u_{s+1} = v_{F_{s+1}}$，并设$\mathbf{A}_{s+1} = \bigoplus_{n\in F_{s+1}} M_n(\mathbb{C})$。由于 $\phi_s(u_s) \leq u_{s+1}$，由前面的讨论可知

在第2.3.4 节中，存在一个 $*$-同态 $\psi_s : \mathbf{A}_s \to \mathbf{A}_{s+1}$ ，使得$\eta_{F_s,\ F_{s+1}}(\psi_s)) = \phi_s$。此外，可以根据 ϕ_s中的信息计算出 ψ_s 。

根据推论 5.14, $(\mathbf{A}_s, \psi_s)_{s\in\mathbb{N}}$序列具有一个可计算归纳极限 $(\mathbf{A}^{\#}, (\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ ，它属于 C 的可计算可枚举表示范畴*-代数。如第 2.3.5 节所述，$\mathbf{A}$是一个 AF代数。

我们现在证明 $(K_0(\mathrm{A}^{\#})\ K_0(\mathrm{A})^{+})$ 与 $\mathcal{G}^{\#}$ 可计算同构。由 [20, 定理 6.3.2] 和引理 4.2 可得，$((K_0(\mathrm{A}^{\#})\ K_0(\mathrm{A})^{+}), (K_0(\mu_s))_{s\in\mathbb{N}})$ 是有序阿贝尔群的可计算可枚举表示范畴中 $((K_0(\mathrm{A}_s)\ K_0(\mathrm{A}_s)^{+})\ K_0(\psi_s))_{s\in\mathbb{N}}$ 的归纳极限。由此可得，$((K_0(\mathrm{A}^{\#})\ K_0(\mathrm{A})^{+}), (K_0(\mu_s)\circ\zeta_{F_s}^{-1})_{s\in\mathbb{N}}$ 是有序阿贝尔群的可计算可枚举表示范畴中 $(\mathbb{Z}^{n_s}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的归纳极限。因此，$(\mathcal{G}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 到 $((K_0(\mathrm{A}^{\#})\ K_0(\mathrm{A})^{+}), (K_0(\mu_s)\circ\zeta_{F_s}^{-1})_{s\in\mathbb{N}}$ 的约化是一个同构。

（2）：设 u 是 $\mathcal{G}$的序单位。由引理8.2，$(\mathcal{G}, u)^{\#}$ 有一个可计算单位维数证书 $(n_s, u_s, \nu_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$。因此，根据定义 4.3 u_s 是 $\mathbb{Z}^{n_s}$ 的序单位，并且 $\nu_s(u_s) = u$。我们修改上述构造，使得$\eta_{F_s}(K_0(\mathbf{1}_{\mathbf{A}_s})) = u_s$。□

推论8.3。设 $\mathcal{G}^{\#} = (G^{\#}, P)$ 是一个维数群的可计算可枚举表示。那么，$G^{\#}$ 是可计算的。

证明。设 $(n_s, \nu_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{G}^{\#}$ 的一个可计算维数证书。因此，$(G^{\#}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(\mathbb{Z}^{n_s}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 在阿贝尔群的可计算可枚举呈示范畴中的一个可计算归纳极限。然而，根据命题 5.2，$(\mathbb{Z}^{n_s}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 在阿贝尔群的可计算表示范畴中有一个可计算归纳极限 $(H^{\#}, (\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$。由于每个可计算表示也是可计算可枚举的，$(H^{\#}, (\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 也是 $(\mathbb{Z}^{n_s}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 在阿贝尔群的可计算可枚举呈示范畴中的一个可计算归纳上极限。设 λ 是 $(G^{\#}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 到 $(H^{\#}, (\mu_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的约化。因此，根据可计算归纳极限的定义，λ 是一个从 $G^{\#}$ 到 $H^{\#}$ 的可计算映射。

另一方面，由引理 5.3，$(H, (\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(\mathbb{Z}^{n_s}, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$的归纳极限，$(G, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 同样如此。因此，λ是 $(G, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 到 $(H, (\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 的约化（因为约化是唯一的）。然而，由此可知 λ 是一个同构。

因此，λ 是从 $G^{\#}$ 到 $H^{\#}$的可计算同构。由于 $H^{\#}$ 是可计算的，由此可知 $G^{\#}$ 是可计算的。□

推论 8.4. 若 $\mathbf{A}^{\#}$ 是含幺 *AF* 代数的可计算可枚举表示，则 $K_0(\mathbf{A}^{\#})$是可计算的。

现在我们转向第三个主要定理的证明。

9. Proof of Main Theorem 3

(1) $\Rightarrow$ (2)：这是主定理 1 与推论 4.5的直接应用。

(2) $\Rightarrow$ (3)：假设 $(\bigoplus_{n\in F_s} M_n(\mathbb{C})\ \psi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是一个可计算归纳序列，其归纳极限与 A $*$-同构。此外，假设每个 ψ_s 都是酉的。根据推论 5.14，$(\bigoplus_{n\in F_s} M_n(\mathbb{C})\ \psi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 在 C*-代数的可计算表示范畴中具有可计算归纳极限 $(\mathrm{B}^{\#}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$。因此，B 与 A $*$- 同构。正如第 3.2 节所述，可计算可表示的

C*-代数类在同构下是闭的。因此，**A** 是可计算可表示的。

(3) ⇒ (4): 这由推论8.4。

(4) ⇒ (5): 设 $(\mathcal{G}, u) = K_0^{sc}(\mathbf{A})$，并假设 $(\mathcal{G}, u)^{\#}$ 是一个可计算可枚举表示。由主定理 2，$(\mathcal{G}, u)^{\#}$ 具有可计算单位维数证书 $(n_s, u_s, \nu_s, \gamma_s)_{s\in\mathbb{N}}$。

我们首先证明**A** 具有可计算可枚举表示。

设 F_s 表示由出现在 u_s 中的整数构成的多重集，其中某一整数在 F_s 中重复的次数等于它在 u_s中重复的次数。令 $\mathrm{B}_s = \bigoplus_{n\in F_s} M_n(\mathbb{C})$。对每个 s，不难计算出一个含幺 $*$-同态 $\psi_s : \mathrm{B}_s \to \mathrm{B}_{s+1}$，使得$\eta_{F_s,F_{s+1}}(K_0(\psi_s)) = \phi_s$。由推论 5.14，$(B_s, \psi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 在具有可计算可枚举表示的 C*-代数范畴中具有可计算归纳极限 $(\mathcal{B}^{\#}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$。

由此可知，$(K_0^{sc}(\mathbf{A}), (\nu_s\circ\zeta_{F_s}^{-1})_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(K_0^{sc}(\mathbf{B}_s)\ K_0(\psi_s))_{s\in\mathbb{N}}$ 的归纳极限，$(K_0^{sc}(\mathbf{B}), (K_0(\mu_s))_{s\in\mathbb{N}})$ 也是如此。因此，$K_0^{sc}(\mathbf{A})$ 和 $K_0^{sc}(\mathbf{B})$ 同构。于是，根据 Elliott 定理，**B** 与**A** $*$-同构。因此，**A** 有一个可枚举表示$\mathbf{A}^{\#}$。

根据主定理 1，$\mathbf{A}^{\#}$ 具有一个可计算 AF 证书 $(G_s, \gamma_s)_{s\in\mathbb{N}}$。构造该证书的一个可计算表示的带标记 Bratteli 图是直接的。

(5) ⇒ (1)：设 $\mathcal{D}^{\#}$ 是一个可计算表示，表示某个 AF 证书 $(F_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的带标记 Bratteli 图，该证书对应于**A**。借助标记，可以从 s计算出 F_s。令$\mathbf{A}_s = \bigoplus_{n\in F_s} M_n(\mathbb{C})$。

借助 $\mathcal{D}$ 的边函数所提供的信息，可以从 $s \in \mathbb{N}$ 计算出一个含幺 $*$-单态 τ_s：$\mathrm{A}_s \to \mathrm{A}_{s+1}$，使得 $K_0(\phi_{s+1}^{-1} \circ\phi_s) = K_0(\tau_s)$。根据推论 5.14，$(\mathbf{A}_s, \tau_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 在可计算可表示的 C*-代数范畴中有一个可计算归纳极限 $(\mathrm{B}^{\#}, (\nu_s)_{s\in\mathbb{N}})$。然而，根据构造，$K_0^{sc}(\mathrm{A}) = K_0^{sc}(\mathrm{B})$。由 Elliott 定理，A 与 B 同构。因此，A 是可计算可表示的。

10. Proof of Main Theorem 4

我们的证明依赖于两个非常技术性的引理：一个针对 AF代数，另一个针对群。

引理*10.1*。设 $(F_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是 A 的一个 *AF* 证书，并令 $G = \bigoplus_{n\in G} M_n(\mathbb{C})$，其中 G 是由正整数组成的有限多重集。此外，假设 $\omega: K_0^{sc}(\bigoplus_{s\in F_0} M_n(\mathbb{C})) \to K_0^{sc}(G)$ 和 $\chi: K_0^{sc}(G) \to K_0^{sc}(A)$ 是同态，且满足 $\chi\circ\omega = K_0(\phi_0)$。那么存在 $s_0 \in \mathbb{N}$ 和一个同态 $h: K_0^{sc}(G) \to K_0^{sc}(\bigoplus_{n\in F_{s_0}} M_n(\mathbb{C}))$，使得 $h\circ\omega = K_0(\phi_{s_0}^{-1}\circ\phi_0)$ 且 $K_0(\phi_{s_0})\circ h = \chi$。

证明。令 $\mathbf{A}_s = \bigoplus_{n\in F_s} M_n(\mathbb{C})$，并设 $\psi_s = \phi_{s+1}^{-1}\circ\phi_s$。由推论 4.5，$(\mathbf{A}, (\phi_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(\mathbf{A}_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$的归纳极限。现在我们应用 [20, 引理 7.3。3]。□

引理 10.2。设 $(n_s, \nu_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{G}^{\#}$的可计算维数证书，并假设 $(m_s, \mu_s, \psi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是

$\mathcal{G}^{\#}$的可计算维数证书。设 $s, r, m_s, m_r \in \mathbb{N}$ 满足 $s > r$, $m_s > n_r$，并令 γ：$\mathbb{Z}^{n_r} \to \mathbb{Z}^{m_s}$为一个有序群同态，使得 $\nu_r = \mu_s\gamma$。则存在 $t > s$，使得$n_t > m_s$，并且存在一个有序群同态 δ： $\mathbb{Z}^{m_s} \to \mathbb{Z}_{n_t}$，使得 $\delta\gamma = \phi_{r,\,t}$ 以及 $\mu_s = \nu_t\delta$。

证明。 计算 $n_{t'} > m_s$ 以及一个正群同态 δ'：$\mathbb{Z}^{m_s} \to \mathbb{Z}^{n_{t'}}$，使得 $\nu_{t'}\delta' = \mu_s$。

在 $\mathbb{Z}^{n_r}$ 的标准基中固定一个 g。那么，

$$\nu_r(g) = \nu_r(g) = \mu_s\gamma(g) = \nu_{t'}\delta'\gamma(g).$$

因此，$\nu_{t'}\phi_{r,t'}(g) = \nu_{t'}\delta'\gamma(g)$。因此，$\phi_{r,t'}(g) - \delta'\gamma(g) \in \ker(\nu_{t'})$。因此，存在 $k_g \in \mathbb{N}$，使得 $\phi_{r,t'}(g) - \delta'\gamma(g) \in \ker(\phi_{t',t'+k_g})$。因此，$\phi_{r,t'+k_g}(g) = \phi_{t',t'+k_g}\delta'\gamma(g)$。令 $t = t' + \max_g k_g$，且 $\delta = \phi_{t',t}\delta'$。因此，$\phi_{r,t} = \delta\gamma$，且 $\nu_t\delta = \nu_t\phi_{t',t}\delta' = \nu_{t'}\delta' = \mu_s$。□

主定理 4 的证明。 我们首先证明 (1) 和 (2) 等价。

首先，假设 $\mathbf{A}^{\#}$ 和 $\mathbf{B}^{\#}$ 是 AF代数的可计算可枚举表示，并设ψ 是从 $*$到 $\mathbf{A}^{\#}$ 的可计算含幺 **同构**$^{\#}$。因此，正如第 3.2.2 K_0节所述，ψ是从 $K_0^{\mathrm{sc}}(\mathbf{A}^{\#})$ 到 $K_0^{\mathrm{sc}}(\mathbf{B}^{\#})$ 的可计算同构。

注意，若引理 10.1 中的 AF 证书是可计算可枚举表示 $\mathbf{A}^{\#}$ 的可计算 AF 证书，则 s_0, h 可以由 G, ω, χ 计算得到，因为 h 由有限量的数据决定（参见第 2.3.4 节的讨论）。

假设 α 是从 $K_0^{\mathrm{sc}}(\mathrm{A}^{\#})$到 $K_0^{\mathrm{sc}}(\mathrm{B}^{\#})$的可计算同构。根据主定理 1，$\mathrm{A}^{\#}$ 有一个可计算 AF 证书 $(F_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$，而$\mathrm{B}^{\#}$ 有一个可计算 AF 证书 $(G_s, \psi_s)_{s\in\mathbb{N}}$。令$\mathrm{A}_s = \bigoplus_{n\in F_s} M_n(\mathbb{C})$，并令$\mathrm{B}_s = \bigoplus_{n\in G_s} M_n(\mathbb{C})$。不失一般性，假设$\mathrm{A}_0 = \mathrm{B}_0 = \mathbb{C}$。令 $f_s = \phi_{s+1}^{-1} \circ \phi_s$，并令$g_s = \psi_{s+1}^{-1} \circ \psi_s$。根据推论 4.5，$(\mathrm{A}^{\#}, (\phi_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(\mathrm{A}_s, f_s)_{s\in\mathbb{N}}$的归纳极限，而 $(\mathrm{B}^{\#}, (\psi_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(\mathrm{B}_s, g_s)_{s\in\mathbb{N}}$的归纳极限。

通过反复应用引理10.1，我们计算出递增的自然数序列$(n_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 和$(m_s)_{s\in\mathbb{N}}$，以及序列 $(\alpha_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 和 $(\beta_s)_{s\in\mathbb{N}}$，它们满足以下条件。

(1) $n_0 = 0$. (2) α_s 是从 $K_0^{\mathrm{sc}}(\mathbf{A}_{n_s}^{\#})$到 $K_0^{\mathrm{sc}}(\mathbf{B}_{m_s}^{\#})$的可计算同态，且关于 s一致。(3) β_s 是从 $K_0^{\mathrm{sc}}(\mathbf{B}_{m_s}^{\#})$ 到 $K_0^{\mathrm{sc}}(\mathbf{A}_{n_{s+1}}^{\#})$的可计算同态。(4) $\beta_s \circ \alpha_s = f_{n_s,n_{s+1}}$ 和 $\alpha_{s+1} \circ \beta_s = g_{m_s,m_{s+1}}$。

现在可以根据 s，计算出一个含幺 $*$-同态 σ_s'： $\mathbf{A}_{n_s} \to \mathbf{B}^{m_s}$ 使得 $K_0(\sigma_s') = \alpha_s$（参见第 2.3.4 节中的内容），以及一个含幺 $*$- 同态 τ_s'： $\mathbf{B}_{m_s} \to \mathbf{A}^{n_{s+1}}$使得 $K_0(\tau_s') = \beta_s$。

根据第 2.3.3 节对重数的讨论，可知存在且可计算出序列 $(u_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 和$(v_s)_{s\in\mathbb{N}}$，它们满足以下条件。

(1) v_s 是 $\mathbf{A}^{n_{s+1}}$ 的酉元，u_s 是$\mathbf{B}^{m_s}$的酉元。(2) $f_{n_s,\,n_{s+1}} = \mathrm{Ad}_{v_s} \circ \tau_s' \circ \mathrm{Ad}_{u_s} \circ \sigma_s'$且 $g_{m_s,\,m_{s+1}} = \mathrm{Ad}_{u_{s+1}} \circ \sigma_{s+1}' \circ \mathrm{Ad}_{v_s} \circ \tau_s'$。

令 $\sigma_s = \mathrm{Ad}_{u_s} \circ \sigma_s'$，并令 $\tau_s = \mathrm{Ad}_{v_s} \circ \tau_s'$。于是，对每个 $s \in \mathbb{N}$，$K_0(\sigma_s) = \alpha_s$ 且$K_0(\tau_s) = \beta_s$。此外，$f_{n_s,\,n_{s+1}} = \tau_s \circ \sigma_s$ 和 $g_{m_s,\,m_{s+1}} = \sigma_{s+1} \circ \tau_s$。

由此可知，$(\mathbf{A}^{\#}, (\phi_{n_{s+1}} \circ \tau_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是含幺 C*-代数的可计算可枚举表示范畴中 $(\mathbf{B}^{m_s}, g_{m_s,m_{s+1}})_{s\in\mathbb{N}}$ 的归纳上极限。由引理

4.4 可知，$(\mathbf{B}^{\#},(\psi_{m_s})_{s\in\mathbb{N}})$ 是该范畴中 $(\mathbf{B}^{m_s},g_{m_s,m_{s+1}})_{s\in\mathbb{N}}$ 的归纳极限。因此，令 λ 为 $(\mathbf{B}^{\#},(\psi_{m_s})_{s\in\mathbb{N}})$ 到 $(\mathbf{A}^{\#},(\phi_{n_{s+1}}\circ\tau_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 的约化。于是，$\lambda\circ\psi_{m_s}=\phi_{n_{s+1}}\circ\tau_s$。

与此同时，$(\mathbf{B}^{\#},\ (\psi_{m_s}\circ\sigma_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(\mathbf{A}s,\ f_{n_s,\ n_{s+1}})_{s\in\mathbb{N}}$ 的上归纳极限，而 $(\mathbf{A}^{\#},\ (\phi_{n_s})_{s\in\mathbb{N}})$ 是该归纳序列的归纳极限。因此，令 λ' 为从 $(\mathbf{A}^{\#},\ (\phi_{n_s})_{s\in\mathbb{N}})$ 到 $(\mathbf{B}^{\#},\ (\psi_{m_s}\circ\sigma_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 的约化。于是，$\lambda'\circ\phi_{n_s}=\psi_{m_s}\circ\sigma_s$。因此，

$$\lambda\lambda'\phi_{n_s}=\lambda\psi_{m_s}\sigma_s=\phi_{n_{s+1}}\tau_s\sigma_s=\phi_{n_{s+1}}f_{n_s,n_{s+1}}=\phi_{n_s}.$$

因此，$\lambda\lambda'$ 在 $\bigcup_{s\in\mathbb{N}}\mathrm{ran}(\phi_{n_s})$ 上是单位元；因此，它在$\mathbf{A}$ 上也同样是单位元。同理，$\lambda'\lambda$ 在$\mathbf{B}$上是单位元，而 λ 是一个同构。根据K_0 的连续性（参见例如 [20, 第 6 节。3]），$\lambda=K_0(\alpha)$。

现在我们证明 (1) 与 (3) 等价。对于一个方向，只需证明：如果 $\mathcal{C}_0=(F_s,\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 和 $\mathcal{C}_1=(G_s,\psi_s)_{sin\mathbb{N}}$ 是 A$^{\#}$ 的可计算 AF 证书，那么 $\mathcal{C}_0$ 的任意 Bratteli 图都与 $\mathcal{C}_1$ 的任意 Bratteli 图可计算等价。令 $\mathrm{A}_s=\bigoplus_{n\in F_s}M_n(\mathbb{C})$，并令 $\mathrm{B}_s=\bigoplus_{n\in F_s}M_n(\mathbb{C})$。此外，令 $\sigma_s=\phi_{s+1}^{-1}\circ\phi_s$，并令 $\tau_s=\psi_{s+1}^{-1}\circ\psi_s$。只需证明 $(\mathrm{A}s,\sigma_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的标准Bratteli图与 $(\mathrm{B}s,\tau_s)$ 的标准Bratteli图可计算等价；分别将这两个 Bratteli 图记为 $\mathcal{D}_0$ 和 $\mathcal{D}_1$。

令 $(\mathbb{Z}^{m_s},u_s)$ 表示 ζ_{F_s} 的陪域，并令 $(\mathbb{Z}^{n_s},v_s)$ 表示 ζ_{G_s} 的陪域。令 $\gamma_s=\eta_{F_s,F_{s+1}}(K_0(\sigma_s))$，并令 $\tau_s=\eta_{G_s,G_{s+1}}(\tau_s)$。令 $\mu_s=K_0(\phi_s)\circ\zeta_{F_s}^{-1}$，并令 $\nu_s=K_0(\psi_s)\circ\zeta_{G_s}^{-1}$。因此，$(m_s,u_s,\mu_s,\gamma_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是 $K_0^{\mathrm{sc}}(\mathrm{A}^{\#})$ 的可计算单位维数证书，$(n_s,v_s,\nu_s,\kappa_s)_{S\in\ N}$ 也是如此。

现在我们构造可计算递增序列 $(k_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 和 $(\ell_s)_{s\in\mathbb{N}}$（其项为自然数），以及归纳序列 $((\mathbb{Z}^{x_s},w_s)\ \rho_s)_{s\in\mathbb{N}}$，使其满足以下条件。

(1) $x_{2s}=m_{k_s}$ 和 $x_{2s+1}=n_{\ell_s}$。(

2) $w_{2s}=u_{k_s}$ 和 $w_{2s+1}=v_{\ell_s}$。

(3) $\sigma_{m_{k_s},m_{k_{s+1}}}=\rho_{2s,2(s+1)}$。 (4) $\tau_{n_{\ell_s},}$

$_{n_{\ell_{s+1}}}=\rho_{2s+1,2s+3}$。

不失一般性，设 $m_0=n_0=u_0=v_0=1$。因此，$u_s=\sigma_{0,s}(1)$，且 $v_s=\tau_{0,s}(1)$。令 $k_0=0$。取 $\ell_0=1$并令 $x_0=1$。取 $x_1=n_1$。令$\delta_0(n)=nv_1$。现在通过反复应用引理10.2来定义所需序列的其余各项。由于 σ_s 和 ψ_s 均为保单位映射，所构造的映射$\rho_0,\rho_1,\ldots$也都是保单位映射。

由此相当直接地可得，$\mathcal{D}_0$ 是$((\mathbb{Z}^{m_s},u_s)\ \gamma_s)_{s\in\mathbb{N}}$的Bratteli图，且 $\mathcal{D}_1$ 是$((\mathbb{Z}^{n_s},v_s)\ \kappa_s)_{s\in\mathbb{N}}$的Bratteli图。我们所构造的序列表明，$((\mathbb{Z}^{m_s},u_s)\ \gamma_s)_{s\in\mathbb{N}}$、$((\mathbb{Z}^{x_s},w_s)\ \rho_s)_{s\in\mathbb{N}}$与$((\mathbb{Z}^{n_s},v_s)\ \kappa_s)_{s\in\mathbb{N}}$的标准 Bratteli 图是可计算等价的。因此，$\mathcal{D}_0$与 $\mathcal{D}_1$是可计算等价的。

反之，设 $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ 是$\mathbf{A}^{\#}$的可计算 AF 证书$(F_s,\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的带标记的 Bratteli 图，并假设 $\mathcal{D}_{\mathbf{B}}$ 是$\mathbf{B}^{\#}$的可计算 AF 证书$(G_s,\psi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的带标记的 Bratteli 图。此外，假设 $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ 与 $\mathcal{D}_{\mathbf{B}}$是可计算等价的。

根据定义 5.18，存在带标记的Bratteli图的有限序列 $\mathcal{D}_0=\mathcal{D}_{\mathbf{A}},\ \ldots,\ \mathcal{D}_m=\mathcal{D}_{\mathbf{B}}$，使得对每个 $j<m$，$\mathcal{D}_j$ 与 $\mathcal{D}_{j+1}$ 二者之一是另一个的可计算归约，或者它们同构。从 $\mathcal{D}_0$开始，这些归约中的每一个都为 $\mathbf{A}^{\#}$ 产生另一个可计算 AF 证书，而同构

产生同一个 AF 证书；设 $\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_m$ 为由此得到的、关于 $\mathbf{A}^{\#}$ 且带有 $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_A$ 的可计算 AF 证书序列。由于 $\mathcal{D}_m = \mathcal{D}_{\mathbf{B}}$，可知 $\mathcal{C}_m$ 具有形式 $(G_s, \gamma_s)_{s\in\mathbb{N}}$。令 $C_s = \bigoplus_{n\in G_s} M_n(\mathbb{C})$。由于 $\mathcal{D}_m = \mathcal{D}_{\mathbf{B}}$，进而可知$K_0(\gamma_{s+1}^{-1} \circ \gamma_s) = K_0(\psi_{s+1}^{-1} \circ \psi_s)$。因此，可知 $K_0^{\mathrm{sc}}(\mathbf{A}^{\#})$ 与 $K_0^{\mathrm{sc}}(\mathbf{B}^{\#})$ 可计算同构。于是，由刚刚所证明的，$\mathbf{A}^{\#}$ 可计算地

$*$同构于 $\mathbf{B}_{\#}$。□

我们注意到，上述证明的所有部分都是一致的，因此可以如下加以利用。回顾一下，若一个结构的所有可计算表示都可计算同构，则称该结构是可计算范畴化 的。以下结论与我们在 [9]中的结果形成对照：所有 UHF 代数都是可计算范畴化的。

推论 10.3。

(1) *AF*代数 $C(\omega+1)$ 不是可计算范畴化的。(2) 存在一个含单位元维数群，它有两个不可计算同构的可枚举表示。(3) 存在两个可计算可表示的 *Bratteli* 图，它们等价但不可计算等价。

证明概要。 只需证明第一项。众所周知，线性序（$\mathbb{N}$, $<$）不是可计算范畴化的。通过详述这一结果的证明，我们可以得到 $\omega+1$ 的可计算紧表示，它们彼此不可计算同胚。由 [19] 中的结果可知，$C(\omega+1)$ 不是可计算范畴化的。由于 $\omega+1$ 全不连通， $C(\omega+1)$ 是一个 AF代数。□

11. Proof of Main Theorem 5

11.1. **一个预备引理**。 我们先证明以下结论，这得益于主定理1。

引理 11.1。 设 $\mathbf{A}^{\#}$ 和 $\mathbf{B}^{\#}$ 是含幺 *AF* 代数的可计算可枚举表示，并设 ρ 是从 $K_0^{\mathrm{sc}}(\mathbf{A}^{\#})$ 到 $K_0^{\mathrm{sc}}(\mathbf{B}^{\#})$ 的一个可计算同态。那么存在一个可计算的含幺 $*$- 同态 τ，从 $\mathbf{A}^{\#}$ 到 $\mathbf{B}^{\#}$，使得 $K_0(\tau) = \rho$。

证明。 设 $(F_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbf{A}^{\#}$的一个可计算 AF 证书，并设 $(G_s, \sigma_s)_{s\in\mathbb{N}}$是 $\mathbf{B}^{\#}$的一个可计算 AF 证书。令 $\mathbf{A}_s = \bigoplus_{n\in F_s} M_n(\mathbb{C})$，并令 $\mathbf{B}_s = \bigoplus_{n\in G_s} M_n(\mathbb{C})$。令 $\psi_s = \phi_{s+1}^{-1} \circ \phi_s$。

固定 $s \in \mathbb{N}$。由引理 4.2，存在 $s_0 \in \mathbb{N}$，使得 $\mathrm{ran}(\rho \circ K_0(\phi_s)) \subseteq \mathrm{ran}(K_0(\sigma_{s_0}))$。可以根据 s计算出 s_0。令 $\mathsf{C} = \mathrm{ran}(\sigma_{s_0})$，并令$\kappa = \rho \circ K_0(\phi_s)$。因此， κ 是从 $K_0(\mathsf{A}_s)$ 到 $K_0(\mathsf{C})$ 的同态。由于 σ_{s_0}是单射，根据引理 7.1，可以计算出 C 的一个矩阵生成系统。由第 2.3.3 节的内容可知，现在可以计算出一个含幺 $*$-同态 τ_s，使得 $K_0(\tau_s) = \kappa$。

现在可得，$(\mathbf{B}^{\#}, (\tau_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(\mathbf{A}_s, \psi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的归纳上极限。因此，我们可以计算 $(\mathbf{A}^{\#}, (\phi_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 到 $(\mathbf{B}^{\#}, (\tau_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 的约化 τ。于是，$\tau \circ \phi_s = \tau_s$。由于 $\rho \circ K_0(\phi_s) = K_0(\tau_s)$，现在可得 $K_0(\tau) \circ K_0(\phi_s) = \rho \circ K_0(\phi_s)$，因此 $K_0(\tau) = \rho$。□

11.2. **可计算函子与等价**。 为了证明最后一个主要定理，我们先说明范畴的可计算等价的含义。设$\mathbf{Cat}_0$ 和$\mathbf{Cat}_1$ 是范畴，并且我们已为它们固定了可计算编号。

定义 11.2。 设 F 是从$\mathbf{Cat}_0$ 到$\mathbf{Cat}_1$的一个多值函子。若存在可计算函数 α：$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 和 α'：$\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$满足以下条件，则称$F$ 是可计算的：

(1) 若 $e \in \mathbb{N}$ 为 $\mathbf{Cat}_0$，中某个对象 A 的指标，则 $\alpha(e)$ 为 $F(A)$ 某个值的指标。(2) 若 (e_0, e_1, e) 为 $\mathbf{Cat}_0$，中某个态射 f：$A \to B$ 的指标，则 $(\alpha(e_0)\ \alpha(e_1)\ \alpha'(e_0, e_1, e))$ 为 $F(f)$ 某个值的指标。

我们称 (α, α') 见证 F 是可计算的。

注意，每个可计算多值函子都是有效地本质单值的，其含义是：给定对象 A 的指标 e, e'，可以计算出一个指标，该指标对应于由 $\alpha(e)$ 和 $\alpha(e')$ 所指标表示的对象之间的可计算同构。因此，我们有时将它们视为单值的。

定义 11.3。 Cat_0 与 $\mathbf{Cat}_1$ 的可计算等价是一个四元组 $(F, G, \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$，其中存在 α, α', β, β', γ_0, γ_1，满足以下条件:

(1) (α, α') 证明 F 是从 Cat_0 到 Cat_1 的可计算函子。(2) (β, β') 证明 G 是从 Cat_1 到 Cat_0 的可计算函子。(3) $\mathcal{E}_0$ 是 GF 与 IdCat_0，之间的自然多值同构，并且对于每个$e \in \mathbb{N}$，如果 e 为 Cat_0，中对象 A 编码，那么 $(e, \beta(\alpha(e))\ \gamma_0(e))$ 为 $\mathcal{E}_0(A)$ 的一个值编码。(4) $\mathcal{E}_1$ 是 FG 与 IdCat_1，之间的自然多值同构，并且对于每个$e \in \mathbb{N}$，如果 e 为 Cat_1，中对象 B 编码，那么 $(e, \alpha(\beta(e))\ \gamma_1(e))$ 为 $\mathcal{E}_1(B)$ 的一个值编码。

如果这些条件都满足，那么我们称 $(\alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta',\ \gamma_0,\ \gamma_1)$ 证明 $(F,\ G,\ \mathcal{E}_0,\ \mathcal{E}_1)$ 是范畴的可计算等价。

再次可知，这些可计算的自然同构是有效地本质单值的。

11.3. **这些范畴**。 现在我们给出主定理 5 中所考虑范畴及其标记的正式定义。

11.3.1. 含幺 *AF* 代数的可计算可枚举表示范畴。 该范畴中的对象是含幺 AF 代数的可计算可枚举表示；我们已经定义了这些对象的标记。

设 $\mathbf{A}_0^{\#}$ 和 $\mathbf{A}_1^{\#}$ 是含幺 AF 代数的可计算可枚举表示。该范畴中从 $\mathbf{A}_0^{\#}$ 到$\mathbf{A}_1^{\#}$ 的一个态射，是从 $\mathbf{A}_0^{\#}$ 到 $\mathbf{A}_1^{\#}$ 的一个可计算含幺 $*$- 同态的近似酉等价类。若 (e_0, e_1, e) 标记了从 $\mathbf{A}_0^{\#}$ 到 $\mathbf{A}_1^{\#}$ 的一个态射 Ψ，则称 e_j 标记了 $\mathbf{A}_j^{\#}$，且 e 是 Ψ 中某个元素的 $(\mathbf{A}_0^{\#}, \mathbf{A}_1^{\#})$ 指标。

11.3.2. 含幺维数群的可计算可枚举表示范畴。 该范畴的对象是含幺维数群的可计算可枚举表示。态射是可计算同态。我们已经描述了该范畴中对象的标记。

11.4. **可计算等价的证明**。 在本节余下部分，$\mathbf{Cat}_0$ 表示含幺维数群的可计算可枚举表示范畴，而$\mathbf{Cat}_1$ 表示含幺 AF 代数的可计算可枚举表示范畴。

我们设定 $G = K_0^{\mathrm{sc}}$。存在 $(\beta,\ \beta')$，可证明 G 是一个可计算函子。

我们构造 F、$\mathcal{E}_0$、$\mathcal{E}_1$，使得 $(F,\ G,\ \mathcal{E}_0,\ \mathcal{E}_1)$ 是 $\mathbf{Cat}_0$ 与 $\mathbf{Cat}_1$ 之间的范畴的可计算等价。同时，我们构造 α、α'、γ_0、γ_1，使得 $(\alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta',\ \gamma_0,\ \gamma_1)$ 证明 $(F,\ G,\ \mathcal{E}_0,\ \mathcal{E}_1)$ 是范畴的可计算等价。

11.4.1. F, α, α'的构造。设 $A=(\mathcal{G},u)^{\#}$ 是 Cat_0, 中的一个对象，并令 x为 A的一个指标。根据引理8.2的一致性，可以计算出 A的一个可计算单位维数证书$(m_s,u_s,\epsilon_s,\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$的指标 $\alpha_0(x)$ 。

对每个 $s\in\mathbb{N}$，令 H_s 为正整数的多重集，使得某个整数在 H_s 中出现的次数等于它在 u_s中出现的次数。令 $\mathsf{A}_s=\bigoplus_{n\in H_s}M_n(\mathbb{C})$。现在可以对每个 s 计算一个含幺 $*$-同态$\sigma_s:\mathsf{A}_s\to\mathsf{A}_{s+1}$，使得$\eta_{H_s,H_{s+1}}(K_0(\sigma_s))=\phi_s$。根据 x，可以计算出$(\mathsf{A}_s,\sigma_s)_{s\in\mathbb{N}}$的一个指标 $\alpha_1(x)$。根据推论 5.14的一致性，现在可以计算出$(\mathsf{A}_s,\sigma_s)_{s\in\mathbb{N}}$的一个可计算归纳极限$(\mathsf{A}^{\dagger},(\psi_s)_{s\in\mathbb{N}})$的指标 $\alpha_2(x)$。根据 $\alpha_2(x)$，我们可以计算出 $\mathsf{A}^{\dagger}$的一个指标 $\alpha(x)$。我们将 $\mathsf{A}^{\dagger}$声明为 $F(A)$的一个值。

现在，对于每个 $j\in\{0,1\}$，假设 $A_j=(\mathcal{G}_j,u_j)^{\#}$ 是 Cat_0, 的一个对象，并令x_j 为 A_j的一个指标。假设 (x_0,x_1,y) 是从 A_0 到 A_1 的态射 δ 的一个指标。因此，x_j 是 A_j的一个指标，而 y 是 δ的一个 (A_0,A_1) 指标。假设对于 $j\in\{0,1\}$，$\alpha_0(x_j)$ 为 $(m_{j,s},u_{j,s},\epsilon_{j,s},\phi_{j,s})_{s\in\mathbb{N}}$ 编号。因此，$((\mathcal{G}_j,u_j)^{\#},(\epsilon_{j,s})_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $((\mathbb{Z}^{m_{j,s}},u_{j,s})\phi_{j,s})_{s\in\mathbb{N}}$ 的一个可计算归纳极限。假设 $\alpha_1(x_j)$ 为 $(\mathsf{A}_{j,s},\sigma_{j,s})_{s\in\ N}$ 编号，并假设 $\alpha_2(x_j)$ 为 $(\mathsf{A}_j^{\dagger},(\psi_{j,s})_{s\in\mathbb{N}})$ 编号。因此，对于 $j\in\{0,1\}$，$\mathsf{A}_j^{\dagger}$由 $\alpha(x_j)$ 编号。

暂且固定 $j\in\{0,1\}$。我们注意到，$((\mathcal{G}_j,u_j)^{\#},(\epsilon_{j,s}\circ\zeta_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $(K_0^{\mathrm{sc}}(\mathsf{A}_{j,s})\ K_0(\sigma_{j,s}))_{s\in\mathbb{N}}$ 的一个可计算归纳极限，$(K_0^{\mathrm{sc}}(\mathsf{A}_j^{\dagger}),(K_0(\psi_{j,s}))_{s\in\mathbb{N}})$ 也是如此。因此，现在可以计算从 $(K_0^{\mathrm{sc}}(\mathsf{A}_j^{\dagger}),(K_0(\psi_{j,s}))_{s\in\mathbb{N}}$ 到 $((\mathcal{G}_j,u_j)^{\#},(\epsilon_{j,s}\circ\zeta_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 的约化 λ_j 的指标 $\gamma_0(x_j)$；该约化是从$K_0^{\mathrm{sc}}(\mathsf{A}^{\dagger})$ 到 $(\mathcal{G}_j,u_j)^{\#}$ 的一个同构。现在可以计算 $\rho:=\lambda^{-2}\delta\lambda_1$ 的一个 $(K_0^{\mathrm{sc}}(\mathsf{A}_0^{\dagger})\ K_0^{\mathrm{sc}}(\mathsf{A}_1^{\dagger}))$ 指标 $\alpha_0'(x_0,x_1,y)$。由引理 11.1，现在可以计算一个含幺 $*$-同态 τ 的 $(\mathsf{A}_0^{\dagger},\mathsf{A}_1^{\dagger})$ 指标 $\alpha'(x_0,x_1,y)$，使得 $K_0(\tau)=\rho$。我们将 τ 声明为 $F(\delta)$ 的一个值。

11.4.2. 构造 $\mathcal{E}_j$ 和 γ_j。在上述过程中，我们构造了 γ_0 和 $\mathcal{E}_0$，使得 $\mathcal{E}_0$ 是从 GF 到 $\mathbf{IdCat}_0$的自然同构；也就是说，声明 λ_j 为 $\mathcal{E}_0(A_j)$的一个值。

现在我们构造 γ_1 和 $\mathcal{E}_1$。采用第 11.4.1 节中的记号。首先，设 z 是一个含幺 AF 代数 $\mathsf{A}^{\#}$ 的可计算可枚举表示的含幺指标。令$B=\mathsf{A}^{\#}$。设 $x=\beta(z)$，并设 $A=(\mathcal{G},u)^{\#}=G(B)=K_0^{\mathrm{sc}}(\mathsf{A}^{\#})$。现在考虑 $\mathsf{A}^{\dagger}=F(A)$，其指标为 $\alpha(x)=\alpha(\beta(z))$。我们作两个观察。首先，根据构造，$(A,(\epsilon_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 是 $((\mathbb{Z}^{m_s},u_s)\ \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的一个可计算归纳极限。其次，同样根据构造，$(K_0^{\mathrm{sc}}(\mathsf{A}^{\dagger}),(K_0(\psi_s)\circ\zeta_{F_s}^{-1})_{s\in\mathbb{N}})$ 也是这个归纳序列的一个可计算归纳极限。因此，我们可以计算 $(K_0^{\mathrm{sc}}(\mathsf{A}^{\dagger}),(K_0(\psi_s)\circ\zeta_{F_s}^{-1})_{s\in\mathbb{N}})$ 到 $(A,(\epsilon_s)_{s\in\mathbb{N}})$ 的约化 λ，它同时也是从$K_0^{\mathrm{sc}}(\mathsf{A}^{\dagger})$ 到 $K_0^{\mathrm{sc}}(\mathsf{A}^{\#})$ 的同构。根据主定理 4 的一致性，现在可以计算一个指标 $\gamma_1(z)$，它对应一个含幺 $*$-同构 τ，将 $\mathsf{A}^{\dagger}$ 映到 $\mathsf{A}^{\#}$，并将 τ 声明为 $\mathcal{E}_1(B)$ 的一个取值。

由于$\mathbf{Cat}_1$中的态射是 $\mathcal{E}_1$ 的近似酉等价类，因此 FG 和 $\mathbf{IdCat}_1$ 是自然同构的（例如，参见 [20, 练习 7。6]）。

12. Applications to index set and isomorphism problems

现在，我们运用主要定理，解决有关 AF 代数和 UHF 代数的指标集问题与同构问题的一些问题。我们首先讨论这类问题的含义，以及它们与数学中的分类问题有何关联。

假设 $\mathcal{C}$ 是某类数学结构。指标集问题 对$\mathcal{C}$ 而言，是指确定某个自然数是否为 $\mathcal{C}$ 中某个结构的可计算（或可枚举）表示的指标所具有的复杂性。这刻画了判断给定结构是否属于 $\mathcal{C}$的难度。这里，集合的复杂性由其在算术层级中的位置来衡量；算术层级衡量定义该集合所需的交替量词数量。例如， Π^0_2 集合可以用形如 $\forall y \exists z R(x, y, z)$的表达式来定义，其中 R是一个可计算谓词。 Π^0_2完备集是“尽可能难”的 Π^0_2 集合。关于更精确的定义（也可以从下文的证明中推知），请参阅标准参考资料，例如 [5] 。

令 $(\phi_e)_{e\in\mathbb{N}}$ 为从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$的所有可计算偏函数的有效枚举。集合$\mathbf{Tot}$ 定义为 $\{e \in \mathbb{N} : \mathrm{dom}(\phi_e) = \mathbb{N}\}$。众所周知，$\mathbf{Tot}$ 是 Π^0_2 完备的。令$\phi_{e,s}(x) = \phi_e(x)$，当 ϕ_e在 x 上的计算在至多 s 步内停机时；否则$\phi_{e,s}(x)$未定义。

我们先讨论所有C*-代数的指标问题。以下结论的证明与 [3, 定理 2.6]的证明非常相似；细节留给读者。

定理12.1. 所有*C.E.*表示的C*-代数的指标所成的集合是 Π^0_2完备的；所有可计算表示的C*-代数的指标所成的集合也如此。

定理 12.2. *AF*代数的指标集问题是Π^0_2 完备的。

证明。 我们称 $(a^s_{i,j})_{s,i,j}$为一个类型-$(n_1, \dots, n_m)$ 系统，如果对每个 $s \in \{1, \dots, m\}$，$(a^s_{i,j})_{i,j}$ 都是一个 $n_s \times n_s$ 数组。

设 e 是一个 C*-代数 $\mathrm{A}^{\#}$ 的可计算可枚举表示的指标。令 $m,n_1, \dots, n_m$为正整数。当 $m, n_1, \dots, n_m$为正整数时，令$\mathcal{S}_{(k,n_1,\dots,n_m)}[\mathrm{A}^{\#}]$表示 $\mathrm{A}^{\#}$中所有类型-$(n_1, \dots, n_m)$数组 $(g^s_{i,j})_{s,i,j}$所生成点的集合，其中存在 A 的一个类型-$(n_1, \dots, n_m)$矩阵生成系统，使得对所有 s, i, j，$\left\|g^s_{i,j} - f^s_{i,j}\right\| < 2^{-k}$。由命题 5.12 可知，$\mathcal{S}_{(k,n_1,\dots,n_m)}[\mathrm{A}^{\#}]$ 关于 $e, k, m, n_1, \dots, n_m$一致可枚举。

现在，当 $M \in \mathbb{N}$时，令 $\mathcal{S}'_{k,M,n_1,\dots,n_m}[\mathrm{A}^{\#}]$ 表示 $\mathrm{A}^{\#}$ 中所有由生成点组成的有限集 F 的集合，使得对每个 $a \in F$，都存在一个有理标量的类型-$(n_1, \dots, n_m)$ 系统 $(\alpha^s_{i,j})_{s,i,j}$，满足 $\sum_{s,i,j} |\alpha^s_{i,j}| < 2^{-k}$，并且 $\left\|a - \sum_{s,i,j} \alpha^s_{i,j} g^s_{i,j}\right\| < 2^{-k}$。由此可得，$\mathcal{S}'_{k,M,n_1,\dots,n_m}[\mathrm{A}^{\#}]$ 关于 $e, k, M, n_1, \dots, n_m$ 一致可枚举。

现在由 [20, 命题 7.2.2] 可知，$\mathbf{A}^{\#}$ 是 AF代数，当且仅当对于任意由$\mathbf{A}^{\#}$ 的生成点构成的有限集 F 以及任意 $k \in \mathbb{N}$，都存在 M，$k_1 \in \mathbb{N}$，使得 $F \in \mathcal{S}'_{k_1, M, n_1, \dots, n_m}[\mathbf{A}^{\#}]$，且 $2^{-k_1}(1 + M) < 2^{-k}$。因此，AF代数的指标集问题是一个 Π^0_2 集。

对于下界，我们构造一个从$\mathbf{Tot}$ 到AF代数的指标集问题的可计算归约。设 f 为一个部分可计算函数。对于每个

$n \in \mathbb{N}$，设 I_n 为康托集的中间三分构造中在第 n 步被移除的区间之并。我们现在执行以下程序。从 $A_0 = [0,1]$开始。在第 n步，开始 $f(n)$的计算，并对每个 $m < n$将 $f(m)$的计算推进一步。若计算 m_1，.....， m_k在第 n步终止，则令 $A_n = A_{n-1} \setminus \bigcup_{j=1}^{k} I_{m_j}$（若在第 N步没有计算终止，则令 $A_n = A_{n-1}$）。设 $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$。则 A 是一个可计算紧致空间（见 [7, 定义2.5]），因此交换C*-代数 $C(A)$具有可计算表示 [12]。不难看出（例如基于 [20, 命题7.2.2]）， $C(A)$是AF代数当且仅当 A 是全不连通的。由构造， A 是全不连通的当且仅当 f 是全函数。□

CAR 代数 是通过对 $(M_{2^n}(\mathbb{C})\ \phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 取归纳极限得到的 C*-代数，其中 ϕ_n 是将 $M_{2^n}(\mathbb{C})$ 对角嵌入到 $M_{2^{n+1}}(\mathbb{C})$ 的映射。若 C*-代数没有非平凡的真闭双边理想，则称其为单 代数。

引理 12.3。 </style}由，可以计算 AF 代数的一个可计算可枚举表示A$^{\#}$ 的指标，使得以下条件等价:

(1) $e \in$**Tot**。(2) **A**与 *CAR* 代数同构。

(3) **A**是 *UHF* 代数。(4) *A</style}*是单代数。

证明。 设 $e \in \mathbb{N}$。对于每个 $s \in \mathbb{N}$，令 $m_{e,s} = \max\{y \in \mathbb{N} : \forall x < y\ x \in \mathrm{dom}(\phi_{e,s})\}$。因此，$m_{e,0} = 0$。令:

$$\mathfrak{p}_0 = \{0\}$$

$$\mathfrak{p}_{s+1} = \begin{cases} \{0\} & m_{e,s} < m_{e,s+1} \\ \{0,1\} & m_{e,s} = m_{e,s+1} \end{cases}$$

我们如下定义一个带标记的 Bratteli 图 $\mathcal{D}_e$。令$V_{\mathcal{D}_e} = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \{s\} \times \mathfrak{p}_s$，并设 $L_{\mathcal{D}_e}(s,t) = s$。若$(s,1) \notin V_{\mathcal{D}_e}$，则令 $E_{\mathcal{D}_e}((s,0)\ v) = 1$对所有 $v \in L^{-1}[\{s+1\}]$。假设$(s,1) \in V_{\mathcal{D}_e}$。令 $E_{\mathcal{D}_e}((s,0),(s+1,0)) = E_{\mathcal{D}_e}((s,1),(s+1,j) = 1$，其中 j 是使得 $(s+1,j) \in V_{\mathcal{D}_e}$ 的最大数。对于所有其他顶点对(v,v')，我们令$E_{\mathcal{D}_e}(v,v') = 0$。我们令$\Lambda_{\mathcal{D}_e}(0,0) = 1$。对于所有其他顶点 v，我们令$\Lambda_{\mathcal{D}_e}(v) = \sum_{v'} \Lambda_{\mathcal{D}_e}(v')$，其中 v' 遍历所有使得 $E_{\mathcal{D}_e}(v',v) > 0$的顶点。

现在可以直接构造一个可计算表示 $\mathcal{D}_e^{\#}$ 的 $\mathcal{D}_e$。此外，可以直接构造一个AF代数**A** ，其带标记的 Bratteli图为 $\mathcal{D}_e$。根据主定理3的一致性，现在可以计算出一个可枚举表示**A**$^{\#}$ 的**A**的指标。

假设 ϕ_e 是全函数。在这种情况下，通过对图 $\mathcal{D}_e$ 进行适当的望远镜化，我们得到一个图，其中每一层恰有一个顶点，且每对相邻层之间恰有两条边。这个Bratteli图对应于 CAR 代数（见 [6, 例 III.2。4]），它是 UHF，因此是单的（[6,推论 III.5。3]）。

另一方面，假设 ϕ_e 不是全函数，并令 s_0 为满足以下条件的最小数：$m_{e,s_0} = m_{e,s}$对所有 $s \geq s_0$ 均成立。这意味着对于所有 $s > s_0$， $P_{\mathcal{D}_e}$（（s_0+1，0），（s，1））=0。这表明相应的 AF代数不是单的（见 [6, 推论 III.4.3]），因此不是 UHF 代数（所以不与 CAR 代数 $*$-同构）。□

定理12.4. *UHF* 代数的指标集问题是 Π_2^0 完备的。

证明. 为看出 UHF 代数的指标集问题是一个 Π^0_2-集，可仿照定理12.2的证明进行论证，并利用：可分含幺 C*-代数是 UHF 当且仅当它是局部矩阵化的（见 [15, 定理1.13]）。

对于下界，引理 12.3 给出了从 **Tot**到 UHF 代数指标集问题的多对一归约。□

定理 12.5。 简单 *AF* 代数的指标集问题是 Π^0_2 完全的。

证明。 对于上界，根据定理 12.2，说明一个代数是 AF 代数这一性质是 Π^0_2。设 e 是可计算可枚举表示 $\mathbf{A}^{\#}$ 的指标，其中 -代数。根据主定理 3，可以从 e 计算出一个带标记的 Bratteli 图的可计算表示 $\mathcal{D}^{\#}$，该图对应于 $\mathbf{A}^{\#}$。根据 [6, 推论 III.4。3] $\mathbf{A}$ 是单的，当且仅当对每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及每个 $v \in L^{-1}[\{n\}]$，都存在一个 $m > n$，使得从 v 到 $L^{-1}[\{m\}$中的每个顶点都存在一条路径。这显然是一个 Π^0_2 断言。

对于下界，引理 12.3 给出了从**Tot**到简单 AF 代数的指标集问题的可计算归约。□

现在我们转向同构问题。类 $\mathcal{C}$ 中结构的同构问题，是确定两个自然数是否为该类中同构结构的表示的指标问题。因此，同构问题对应于自然数对的集合，其复杂性仍由它们在算术层级中的位置来衡量。这些问题刻画了 $\mathcal{C}$分类问题的复杂性。我们从 UHF 代数的同构问题开始。

定理 12.6。 *UHF* 代数的同构问题是 Π^0_2 完全的。

证明。 设 $\mathbf{A}^{\#}$ 和 $\mathbf{B}^{\#}$ 是 UHF 代数的可计算表示。对于上界，首先计算它们的可枚举表示 K_0 群。然后计算它们的 K_0 群的维数证书。接着根据这些证书从下方半计算它们的超自然数。容易看出，检验超自然数相等是 Π^0_2。

对于下界，我们证明 Tot 可多对一归约到 UHF 代数的同构问题。设 $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为素数的递增枚举。对于每个 $n \in \mathrm{dom}(\phi_e)$，令 $\mathcal{E}_0(n) = \mathcal{E}_1\, n =$ 最小的 $s \in \mathbb{N}$，使得 $n \in \mathrm{dom}(\phi_{e,s})$。当 $n \notin \mathrm{dom}(\phi_e)$ 时，令 $\mathcal{E}_0(n) = \infty$，并令 $\mathcal{E}_1(n) = 0$。由此可知，$\mathcal{E}_0$、$\mathcal{E}_1$ 关于 e 一致地为下半可计算的。根据 [9], 中的结果，现在可以对每个 $j \in \{0, 1\}$ 计算出一个 UHF 代数的可计算可枚举表示 $\mathbf{A}^{\#}_j$，其超自然数为 $\mathcal{E}_j$。现在注意到，当且仅当 $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1$ 时，$\mathbf{A}_0$ 与 $\mathbf{A}_1$ $*$-同构（例如参见 [20, 第 7.4] 节）。然而，根据构造，当且仅当 ϕ_e 为全函数时，$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1$。□

虽然 AF代数的指标集问题的复杂性相当低，但这一类代数的同构问题的复杂性却达到了可能的最高程度，即它是 Σ^1_1 完全的。Σ^1_1 集是指能够由如下形式的表达式定义的集合：$\exists f \forall y R(x,\ f,\ y)$，其中 f遍历从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的所有函数（即遍历贝尔空间），而 R 是一个可计算谓词。任何同构问题至多是 Σ^1_1 的（搜索所有可能的函数，并检查其中是否有同构）。如果一个同构问题是 Σ^1_1 完全的，这意味着不可能进行有效分类。

定理 12.7。 交换 *AF* 代数的同构问题是 Σ_1^1完全的。

证明。对于每个布尔代数 B，令 X_B 表示 B的 Stone 空间。从一个布尔代数的可计算表示 $B^{\#}$ 的指标，可以计算出 X_B 的可计算紧致表示的指标，其中 X_B 是B 的 Stone 空间（见 [1]）。根据这个指标，可以计算出 $C(X_B)$ 的一个表示的指标（见 [4], [12]）。根据 Gelfand 对偶，$C(X_{B_0})$ 与 $C(X_{B_1})$ $*$-同构，当且仅当 X_{B_0} 与 X_{B_1}同胚。根据 Stone 对偶定理，X_{B_0} 与 X_{B_1} 同胚，当且仅当 B_0 与 B_1同构。

因此，我们定义了从布尔代数同构问题到交换 AF 代数同构问题的多对一归约；由于前一个问题已知是 Σ_1^1 完全的（见 [17, 定理 4.4(d)]），后一个问题也如此。□

推论 12.8。 含幺维数群的同构问题是 Σ_1^1 完全的。

推论 12.9。 带标记的 *Bratteli* 图的等价问题是 Σ_1^1 完全的。

证明。 设 e 是一个含幺维数群的可枚举表示$(\mathcal{G}, u)^{\#}$ 的指标。由引理 8.2的一致性，可以从 e 计算出一个含单位元维数证书$(n_s, u_s, \mu_s, \phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的指标，该证书对应于$(\mathcal{G}, u)^{\#}$。定义 Bratteli 图 $\mathcal{D}_e$ 如下：

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{D}_e} &= \{(s+1,j) : s\in\mathbb{N} \wedge j\in\{1,\dots,n_s\}\}\cup\{(0,1)\} \\ L_{\mathcal{D}_e}(s,j) &= s \\ E_{\mathcal{D}_e}((s+1,j),(s+2,j')) &= \phi_s(e_j^{n_s})(j') \\ E_{\mathcal{D}_e}((0,1),(1,j)) &= u_1(j) \end{aligned}$$

很容易从 e 计算出 $\mathcal{D}_e^{\#}$ 的一个可计算表示的指标。

现在，设对每个 $j\in\{0,1\}$，e_j 都是一个含幺维数群的可枚举表示$(\mathcal{G}_j, u_j)^{\#}$的指标。众所周知，$(\mathcal{G}_0, u_0)$ 与 $(\mathcal{G}_1, u_1)$ 同构，当且仅当 $\mathcal{D}_{e_0}$ 与 $\mathcal{D}_{e_1}$ 等价（见 [8]）。由推论 12.8即可得出该推论。□

前两个定理表明，AF代数的同构问题远比 UHF 代数的同构问题困难，这证实了我们的直觉：前一类确实比后一类复杂。话虽如此，由于 UHF 代数是单的，而交换代数不是，因此，要更令人信服地证实上述直觉，就需要证明简单 AF代数这一类的同构问题也是 Σ_1^1完全的。这引出了以下问题：

问题 12.10。 简单 *AF* 代数的同构问题具有怎样的复杂性？

ACKNOWLEDGMENTS

本文中的部分结果是在美国数学研究所举办的 SQuaRE 期间获得的。感谢 AIM 提供了支持性强且

数学氛围浓厚的合作环境。我们还要感谢 Russell Miller 进行的几次有益讨论。

References

1. Nikolay Bazhenov、Matthew Harrison-Trainor 与 Alexander Melnikov, *Computable Stone spaces* **174** 2023 9, 103304, 25 , 《纯粹与应用逻辑年刊》（），第 期，文章编号 。2. Ola Bratteli, *Inductive limits of finite dimensional C*-algebras*, 《美国数学会汇刊》171（1972），195–234。3. Tyler A. Brown、Timothy H. McNicholl 与 Alexander G. Melnikov, *On the complexity of classifying Lebesgue spaces*, 《符号逻辑杂志》85（2020），第3期，1254–1288。4. Peter Burton、Christopher J Eagle、Alec Fox、Isaac Goldbring、Matthew Harrison-Trainor、Timothy H McNicholl、Alexander Melnikov 与 Teerawat Thewmorakot, *Computable Gelfandduality*, 即将发表于《美国数学会论文集》; arXiv 预印本 arXiv:2402.16672。5. S. Barry Cooper, *Computability theory*, Chapman & Hall/CRC, 佛罗里达州博卡拉顿, 2004。6. Kenneth R. Davidson, C*-*algebras by example*, 菲尔兹研究所专著，第6卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1996。7. Rodney G. Downey 与 Alexander G. Melnikov, *Computably compact metric spaces*, 《符号逻辑通报》29 4616053 8 2023 2，170 263（），第–期。MR 。Fabien Durand 与 Dominique Perrin, *Dimension groups and dynamical systems—substitutions, Bratteli diagrams and Cantor systems*, 剑桥高等数学研究，剑桥大学出版社，剑桥，2022。9. C.J. Eagle、I. Goldbring、T.H. McNicholl 与 R. Miller, *Computable K-theory for C*-algebras: UHF algebras*, 即将发表于《美国数学会汇刊》。预印本见 https://arxiv.org/abs/2501.08526。10. George A. Elliott, *On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite-dimensional algebras* **38** 1976 1, 29 44 , 《代数杂志》（），第–期。11. Ilijas Farah、Bradd Hart、Martino Lupini、Leonel Robert、Aaron Tikuisis、Alessandro Vignati 与 Wilhelm Winter, *Model theory of* C*-*algebras*, 《美国数学会回忆录》271（2021），第1324期，viii+127。12. Alec Fox, *Computable presentations of* C*-*algebras*, 《符号逻辑杂志》89（2024），第3期，1313–1338。13. Alec Fox、Isaac Goldbring 与 Bradd Hart, *Locally universal* *-*algebras with computable presentations* C , 预印本见 https://arxiv.org/pdf/2303 02301 。。14. Johanna F. Franklin、Isaac. Goldbring 与 Timothy H. McNicholl, *Effective metric structuretheory*, 即将发表。15. James G. Glimm, *On a certain class of operator algebras*, 《美国数学会汇刊》95（1960），318–340。16. Isaac Goldbring, *Computably strongly self-absorbing* C*-*algebras*, arXiv 预印本 arXiv:2409.18834, 2024。17. Sergey S. Goncharov 与 Julia F. Knight, *Computable structure and non-structure theorems*, 《代数与逻辑》41（2002），351–373。18. K. R. Goodearl, *Partially ordered abelian groups with interpolation*, 数学调查与专著，第20卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1986。19. Timothy H. McNicholl, *Evaluative presentations*, 《逻辑与计算杂志》35（2025），第5期，文章编号 exaf036，11。20. M. Rørdam、F. Larsen 与 N. Laustsen, *An introduction to K-theory for* C*-*algebras*, 伦敦数学会学生读物，第49卷，剑桥大学出版社，剑桥，2000。21. Karen R. Strung, *An introduction to* C*-*algebras and the classification program*, 数学高级课程：巴塞罗那 CRM，Birkh¨auser/Springer，尚， [2021]©2021，由 Francesc Perera 编辑并作序。

(C.J. Eagle)

Department of Mathematics and Statistics University of Victoria. PO , , , , BOX 1700 STN CSC Victoria British Columbia Canada. V8W 2Y2
Email address: eaglec@uvic.ca*URL*: http://www.math.uvic.ca/~eaglec

(I. Goldbring) University of California, Irvine
Email address: igoldbri@uci.edu*URL*:
https://www.math.uci.edu/~isaac

(T. 麦克尼科尔) Iowa State University*Email address*:
mcnichol@iastate.edu*URL*:
https://faculty.sites.iastate.edu/mcnichol/