arXiv:2602.06894v1 [math.NT] 6 Feb 2026

具有恰好2-秩1类群的三次域有无穷多个

MA恩朱尔·巴尔加瓦、阿鲁尔·尚卡尔、ARTANE SIAD 和阿什温·斯瓦米纳坦

Abstract. 我们证明，具有 2-秩为 1 的类群的三次域有无穷多个。

1. Introduction

对于任意素数 $p \neq 3$ 和有限阿贝尔 p-群 A，Cohen–Lenstra–Martinet–Malle 启发式预测，对于无穷多个三次域 K，$\mathrm{Cl}_K[p^\infty] = A$。特别地，他们提出 $\mathrm{rk}_p \mathrm{Cl}_K$（即类群中 p-部分的非平凡循环因子个数）会无穷多次取值为 $r = 0$，1，2，3，.....。这一后续预测唯一已获证明的情形是 $(p,\ r) = (2,\ 0)$，该结果由第一作者在其关于四次环判别式密度的工作 [Bha05，定理 5] 中证明。

本札记解决了 $(p, r) = (2,1)$ 的情形。

定理 1。存在无穷多个类群的精确2秩为1的三次域。

定理 1 的两种不同证明所需的要素基本上都已包含在先前的工作 [SSS25b] 和 [BSS25]，中；结合有利的数值关系、单生成元的重数论证，以及（对于第二种证明）对 $\{(2^n, 2^{2n}) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ 详见 §2。在 [SSS25b]，所确定的九个不同的 (a, d)-单生成元三次域稳定族中，只有一个族具备如下配置：$|\mathrm{Cl}[2]|$ 的一致下界足够大，且 $|\mathrm{Cl}[2]|$ 的平均值上界足够小，从而满足我们的论证所需；而在 [BSS25]，中，只有实单生成元域的第一/第二 $|\mathrm{Cl}[2]|$ 矩向量足够接近 $\mathrm{co}\{(2^n, 2^{2n}) : n \in \mathbb{N}^+\}$ 的边界；复单生成元域则不然。 —

在缺乏属理论[2]，的情况下构造具有大 p-秩类群的数域，尤其是构造具有大 $\mathrm{rk}_2\mathrm{Cl}$ 的三次域，是一个古老而活跃的领域，至少自 20 世纪 20 年代以来便一直为数学家所关注。1922年，Nagell 证明了无穷多个二次域的类群中含有 $\mathbb{Z}/n$ 的一个拷贝，由此开启了一系列延续至今的成果 [Nag22]，[AC55]，[Coh56]，[Hon68]，[Uch74]，[Nak85]，[Nak86]，[Was87]，[Lou01]，[Lee10]，[Kul18]，[GL19]，，每一项都利用了稀疏族中的特殊结构。就与定理 1 最为相关的三次域类群的 2- 秩而言，Nakano [Nak88] 证明无穷多个三次域具有 $\mathrm{rk}_2\mathrm{Cl} \geq 6$，Kulkarni[Kul18]表明这可以推进至 $\mathrm{rk}_2\mathrm{Cl} \geq 8$，而 Gillibert–Levin [GL19]则推进至 $\mathrm{rk}_2\mathrm{Cl} \geq 11$。三次域类群的 2-秩还已知通过 [EFO78] 和 [Sch97]与椭圆曲线的 2-Selmer 群相关联。相比之下，构造无穷多个类群具有精确 2-秩为 $1, 2, 3, \ldots$ 的三次域要微妙得多，因为

日期：2026年2月9日。[1]对于 $a, d \in \mathbb{Z}$ 的 (a, d)-单生成三次域，我们指形如 $K = \mathbb{Q}[x]/(f(x))$ 的域，其中 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$，且 $b, c \in \mathbb{Z}$，并且阶 $R_f = \langle 1, ax, ax^2 + bx \rangle_{\mathbb{Z}}$ 在 K 中是极大的。后文提到的单位元生成域对应于 $(a, d) = (1, 1)$ 的情形。[2]属理论使这类问题变得简单。以虚二次域为例，其间，当 $d < 0$ 为无平方因子时，$\mathrm{rk}_2\,\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 完全由 d 决定：若 $d \equiv 1$ 分别为 1 或 2、3（模 4），则其值为 $\omega(\Delta_d) - 1$，其中为 $\Delta_d = d$ 或 $4d$；而 $\omega(\cdot)$ 是不同的素因子个数。

负责产生大 $\mathrm{rk}_2\mathrm{Cl}$ 的额外结构必须被证明不会衍生出超出所需的更多秩。在定理 1 之前，对于类群具有大于秩 0 的固定精确 2-秩的三次域是否无穷多，人们一无所知。

上文提到的定理 1 的两种证明思路，可分别称为基于 [BSS25] 的**矩方法** 和基于 [SSS25b] 的**异常方法** 。下面我们将详细说明这两种方法。

科恩–伦斯特拉分布往往由其矩决定。矩方法的基本思路是，掌握有限个矩或许就足以证明定理 1。正如我们在 §2.2 中所解释的，只要获得关于向量 $(|\mathrm{Cl}[2]|,\ |\mathrm{Cl}[2]|^2)$ 的平均值的足够信息，使其位于闭凸包 $\mathrm{co}(\{(2^n,\ 2^{2n}) : \mathbb{N}\} \setminus \{(2,\ 4)\})$ 之外，定理 1 即可得证。 [BHS20, 定理 4] 和 [BSS25, 定理 1.2]对于单生成的 三次域这一族已足以得出此结论，这类域的整数环为 $\mathbb{Z}[\alpha]$。

在通过 [SSS25b], 开展的异常方法中，我们的想法是利用一个稀薄的三次域族中异常的类群行为；该三次域族由我们称为**单位-单生成**的域组成，其特征是整数环 $\mathbb{Z}[\alpha]$ 具有 α 一个单位。在[SSS25b], 中，这些域被分为六个不同的同余子族，我们证明了对[3] $\mathrm{Cl}[2]|$ 的平均值的上界 |，并且这些上界在施加进一步的同余条件后仍保持稳定。通过科恩–伦斯特拉启发式的视角来看，这些稳定族中的一些上界异常地大。其中一个稳定族，即我们称为$+B_{1,1}^2$的族，对于除可忽略不计的成员之外的所有成员，都有 $|\mathrm{Cl}[2]| \geq 2$ 。我们证明，$+B_{1,1}^2$ 中 $|\mathrm{Cl}[2]|$ 的平均值上界为 3，从而得到$+B_{1,1}^2$ 中具有精确 2-秩为 1 的类群的元素占正比例，并因此根据 §2.1 的论证得到定理 1。由于$+B_{1,1}^2$ 是稀薄的， [Bha05]中引入的数论几何方法并不适用，因此我们以一种非正统的方式获得上界 3：我们采用其框架，但用有效动力系统[BO12]替代了其主要引擎达文波特引理。

这两种方法都给出了判别式至多为X 且类群精确 2-秩为 1 的三次域的渐近下界：对于 [SSS25b]为 $X^{1/2}$ ，对于 [BSS25]为 $X^{5/6}$ ；两者都完全由实三次域组成。

定理 2。 我们有 $\#\{K :\ \ |\text{判别式 } K| < X \text{ 且 秩}_2 \text{类群}_K = 1\} \gg X^{5/6}$。

我们指出，该 $X^{5/6}$ 小于 Cohen–Lenstra–Martinet–Malle 所预测的 X ，并且通过考察并求和所有（a，d）-单生成化域中的族$+B_{1,\ 1}^2$ ，可以改进来自 [SSS25b] 的 $X^{1/2}$ 。

利用异常类群行为这一思想，代表了旨在确立 Cohen–Lenstra 存在性形式的主流策略的一种概念性转变。它具有明显的优势：通过对一阶矩给出一个上界，我们便能达到在采用 [BSS25], 的方法中需要一阶矩下界和二阶矩上界才能达到的结果。

我们指出，定理 1 在类群方面也呼应了近期关于 $\mathbb{Q}$ 上小正秩椭圆曲线无穷多性的研究，这些研究由 Zywina [Zyw25]开展。人们或许可以推测，通过研究反常族，解决具有固定精确 2-秩 >1 的类群的三次域无穷多性问题可能会更加容易。事实上，正如 [SSS25a], 中所解释的，我们预期在 $+B_{1,1}^2$ 中，平均 $|\mathrm{Cl}[2]|^2$ 为 12：考虑 $\mathrm{co}\{(2^n, 2^{2n}) : \neg\pi \in \mathbb{N}^+\}$，若能得到如此强的上界，并且在 $+B_{1,1}^2$ 中平均$|\mathrm{Cl}[2]|$ 的下界为 3，那么便可得到定理 1 对精确 2-秩 2 的对应结论。

[3]在尾部估计 [SSS25b，注 5.5]成立的条件下取等号的上界 .

2. Proofs

2.1. 通过 [SSS25b] 证明。令 $+B_{1}^{2}$,1 表示形如$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ 的三次多项式族；这些多项式是极大的，并且满足 (a,b)（模 4） $\in$(4, 4)、(1, 2)、(2, 1)}，以及 $a, b > 0$。我们将 $f(x)$ 的判别式记为 $\Delta(a,b)$，并交替地将 $+B_{1}^{2}$,1 中的形式及其对应的三次域 $\mathbb{Q}[x]/(f(x))$ 称为相应对象。下文讨论平均值和比例时，可以按对称高度 $\max\{|a|,|b|\}$ 或加权高度 $\max\{|a|,|b|^{1/2}\}$ 对 $+B_{1}^{2}$,1 进行排序。

证明定理1和定理2需要用到两个引理。

引理 1. 在同构意义下，一个三次域至多能以与形如 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 且满足 $a, b \in \mathbb{Z}$ 的极大多项式相关联的域$\mathbb{Q}[x]/(f(x))$的形式出现60 次。

证明. 经过平移 $x \mapsto x + n$，形如 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 的三次多项式至多有三次常数项为 1。根据 Bennett 对 Birch–Merriman 定理的有效化结果[Ben01][EG24, 定理 A.1] [BM72], ，一个三次域在平移 $x \mapsto x + n$ 意义下至多有 20 个单生成元。由此得证。□

引理 2. 该族 $+B_{1,1}^{2}$ 中有无穷多个成员满足 $\mathrm{rk}_2\mathrm{Cl} = 1$.

证明。 根据希尔伯特不可约性的任一有效形式、 [SSS25b 定理 5] 以及 [SSS25b 定理 2.8], 中的论证，$+B_{1,1}^{2}$ 中至少有 50% 的域满足 $|\mathrm{Cl}[2]| = 2$。□

定理 *1* 的证明。 根据引理 2，$+B_{1,1}^{2}$ 中有无穷多个成员的类群精确 2-秩为 1；又根据引理 1，任一三次域作为 $+B_{1,1}^{2}$ 中的成员至多重复有限次，因此存在无穷多个全实单位单生成三次域，其类群精确 2-秩为 1，定理 1 得证。□

定理 *2* 的证明（取 $X^{1/2}$）。 x^3+ax^2+bx+1的判别式为 $a^2b^2-4a^3-4b^3+18ab-27$。因此， $H_{\mathrm{bal}}(a,b) < X^{1/4}$意味着 $|\Delta(a,b)| < X$。由于平衡高度至多为 $X^{1/4}$ 的极大形式的数量按 $X^{1/2}$ 的常数倍增长（根据 [SSS25b 定理 5.1], ），其中正比例属于 $+B_{1,1}^{2}$, 且其中至少 50% 满足 $\mathrm{rk}_2\mathrm{Cl} = 1$，故定理 2 得证。□

2.2. **通过** [BSS25]。 令 $\mathcal{F}_{1,+}$ 表示形如$f(x) = x^3+ax^2+bx+c \in \mathbb{Z}[x]$的三次多项式族, 这些多项式是极大的且全实的，并按替换$x \mapsto x + n$取等价类。我们按 $\max\{|a^2 - 3b|^3, |-2a^3 + 9ab - 27c|^2/4\}$对 $\mathcal{F}_{1,+}$ 排序。文献[BHS20，定理 4] 证明了平均值 $|\mathrm{Cl}[2]|$等于 $3/2$；而文献 [BSS25，定理 1.2]证明了 $\mathcal{F}_{1,+}$ 上的平均值 $|\mathrm{Cl}[2]|^2$ 至多为 3。

定理 *1* 和定理 *2* 的证明。 假设 $\mathcal{F}_{1,+}$ 中有 0% 的成员满足 $|\mathrm{Cl}[2]| = 2$。那么我们就会得到无限方程组的一个解[4] $(p_1, p_4, p_8, \ldots)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 16 & \cdots \\ 1 & 4^2 & 8^2 & 16^2 & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_4 \\ p_8 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ \beta \end{pmatrix}$$

以及 $p_1 + p_4 + p_8 + \ldots = 1$和 $\beta \le 3$。从几何角度来看：闭凸包 $\mathrm{co}(\{(2^n,\ 2^{2n}) : \mathbb{N}\} \setminus \{\overline{(2,\ 4)}\})$ 包含点 $(3/2,\ \beta)$。这是不可能的，因为 $(1,\ 1)$ 与 $(3/2,\ \beta)$ 之间的斜率严格小于 $(1,\ 1)$ 与 $(4, 4^2)$ 之间的斜率。由此我们得出，$\mathcal{F}_{1,\ +}$ 的成员中有正比例满足 $|\mathrm{Cl}[2]| = 2$，从而由 Birch–Merriman [BM72] 得到定理 1，由 [BSS25] 得到定理 2。□

[4]在此论证中， p_i 是常数还是随 $H \to \infty$ 振荡并不重要。

对于复单生成域族 $\mathcal{F}_{1,-}$，我们无法排除 $\mathcal{F}_{1,-}$ 的成员中有 0% 满足 $|\mathrm{Cl}[2]| = 2$。事实上，[BSS25] 和 [BHS20] 给出了形式为 $\binom{2}{\beta'}$ 的矩向量，其中 $\beta' \le 6$，它可能位于 (1，1) 与 $(4, 4^2)$ 之间的斜率上。

不过，这个矩向量排除了 $|\mathrm{Cl}[2]| = 2$ 和 $|\mathrm{Cl}[2]| = 4$ 同时为 0% 的可能性，并且我们发现了一个在 $-B_{1,1}^2$ 中同样成立的二分，这基于一些简单的理由。

Theo第 3 节。 无穷多个复三次域的类群具有 2-秩 1 或2 .[5]

Acknowledgements

我们不再重复列出 [SSS25b] 和 [BSS25], 致谢部分中的姓名；这些人理应再次得到感谢。不过，我们要特别感谢 Iman Setayesh：他曾就 [EM93], 的核心问题与第一、第二作者进行过多次关键讨论，但选择不作为 [SSS25b], 的作者署名；我们也感谢 [SSS25b], 的匿名审稿人，其意见促使我们将单位单生成三次域划分为稳定族。我们还感谢 Jordan Ellenberg 提出的富有洞察力的问题。

References

[AC55] N. C. Ankeny 和 S. Chowla，关于二次域类数的整除性，Pacific J. Math. 5（1955年），321–324。MR 85301[Ben01] M. A. Bennett，关于二元三次型表示单位元，Trans. Amer. Math. Soc. 353（2001年），第4期，1507–1534。MR 1806730[Bha05] M. Bhargava，四次环和域的判别式密度，Ann. of Math. (2) 162（2005年），第2期，1031–1063。MR 2183288[BHS20] M. Bhargava、J. Hanke 和 A. Shankar，单生成三次域类群中2-挠元平均数，arXiv 预印本 arXiv:2010.15744（2020年）。[BM72] B. J. Birch 和 J. R. Merriman，给定判别式的二元型的有限性定理，Proc. London Math. Soc. (3) 24（1972年），385–394。MR 0306119[BO12] Yves Benoist 和 Hee Oh，对称簇上 S整点的有效等分布，Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 62（2012年），第5期，1889–1942。MR 3025156[BSS25] 曼朱尔·巴尔加瓦、阿鲁尔·尚卡尔和阿什温·斯瓦米纳坦，单生成三次域2-类群大小的二阶矩，2025年。[Coh56] Harvey Cohn，生成偶类数域的一种方法，Proc. Amer. Math. Soc. 7（1956年），595–598。MR 79613[EFO78] H. Eisenbeis、G. Frey 和 B. Ommerborn，纯三次域2-秩的计算，Math. Comp. 32（1978年），第142期，559–569。MR 480416[EG24] Jan-Hendrik Evertse 和 K´alm´an Gy″ory，给定非零判别式的整系数多项式的一般有效约化理论及其应用，2024年。[EM93] Alex Eskin 和 Curt McMullen，李群中的混合、计数与等分布，Duke Math. J. 71（1993年），第1期，181–209。MR 1230290[GL19] Jean Gillibert 和 Aaron Levin，$\mathbb{P}^1$ 上的椭圆曲面与数域的大类群，Int. J. Number Theory 15（2019年），第10期，2151–2162。MR 4033251[Hon68] Taira Honda，关于类数是3的倍数的实二次域，J. Reine Angew. Math. 233（1968年），101–102。MR 236144[Kul18] Avinash Kulkarni，具有大2-秩类群的三次数域的一个显式族，Acta Arith. 182（2018年），第2期，117–132。MR 3749365[Lee10] Jungyun Lee，非正规全实三次数域类数的整除性，Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 86（2010年），第2期，38–40。MR 2590188[Lou01] St´ephane Louboutin，某些非正规全实三次数域的类数与类群问题，Manuscripta Math. 106（2001年），第4期，411–427。MR 1875340[Nag22] Trygve Nagel，关于虚二次数域的类数，Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 1（1922年），第1期，140–150。MR 3069394

[5] §2.2 的推理以及 [SV25] 的猜想表明，对于非均匀分歧的 n 单生成三次域，二阶矩应存在界限，由此可证明定理 1 对两种符号型均成立。事实上，[SV25] 预测此类虚三次域的矩向量为 $(3/2,\ 3)$。

[Nak85] Shin Nakano，代数数域的理想类群，J. Reine Angew. Math.**358**（1985），61–75。MR 797674[Nak86] ，三次循环域的理想类群，Acta Arith. **46** （1986），第3期，297–300。MR 864264[Nak88] ，具有大2-类群的纯三次域的构造，Osaka J. Math. **25**（1988），第1期，161–170。MR 937193[Sch97] Ursula Schneiders，利用椭圆曲线的塞尔默群估计三次域的2-秩，J. Number Theory **62**（1997），第2期，375–396。MR 1432782[SSS25a] Arul Shankar、ARTANE SIAD 和 Ashvin Swaminathan，单位元生成域类群的猜想与数值研究，准备中（2025年）。[SSS25b] Arul Shankar、ARTANE SIAD 和 Ashvin A. Swaminathan，计数对称簇上的整点及其在算术统计中的应用，Proc. Lond. Math. Soc. (3)**130** （2025年），第4期，论文编号 e70039，共55页。MR 4891959[SV25] ARTANE SIAD 和 Akshay Venkatesh，自旋结构、双扩张与类群， 2025+，准备中。[Uch74] Kˆoji Uchida，三次循环域的类数，J. Math. Soc. Japan**26**（1974），447–453。MR 360518[Was87] Lawrence C. Washington，最简单三次域的类数，Math. Comp. **48** （1987），第177期，371–384。MR 866122[Zyw25] David Zywina，有理数域上存在无穷多个秩为*2*的椭圆曲线，2025年。

Department of Mathematics, Princeton University, Princeton, NJ, USA电子邮箱地址: bhargava@math.princeton.edu

Department of Mathematics, University of Toronto, Toronto, ON, Canada电子邮箱地址: ashankar@math.toronto.edu

Yau Mathematical Sciences Center, Tsinghua University, Beijing, China电子邮箱地址: ajsiad@mail.tsinghua.edu.cn

Department of Mathematics, Harvard University, Cambridge, MA, USA电子邮箱地址: swaminathan@math.harvard.edu