arXiv:2602.06903v1 [cs.CC] 6 Feb 2026

首个已知关于节点扫描宽度是固定参数可解、但关于树宽不是固定参数可解的问题

JannikSchestag 代尔夫特理工大学，代尔夫特，荷兰
Norbert Zeh 达尔豪斯大学，哈利法克斯，加拿大

摘要

树宽等图的结构参数，在研究图问题的参数化复杂性时发挥着核心作用。受系统发育网络上参数化算法研究的启发，扫描宽度最近被引入，作为一种适用于有向无环图（DAG）的新型类树宽结构参数，它考虑了 DAG 中边的方向。已有研究结果表明，这种宽度度量具有实用价值：对于一些关于树宽和扫描宽度均为固定参数可解的问题，其算法对扫描宽度的依赖比对树宽的依赖更优。更重要的是，这类基于扫描宽度的算法通常比对应的基于树宽的算法简单得多：“扫描宽度”这一名称反映了这样一个事实：遍历 DAG 的树扩展（相当于树分解的扫描宽度版本），就如同按照精心选择的拓扑序对 DAG 进行“扫描”。

尽管这些结果表明，扫描宽度对于解决系统发育网络上的问题尤其有用，但迄今为止，从扫描宽度视角研究的所有问题，要么同时关于扫描宽度和树宽是固定参数可解的，要么对于某个 $\ell \geq 1$，同时关于二者是 W[ℓ]-难的。在本文中，我们通过证明这两种宽度度量之间存在相当明显的复杂性理论分离，表明扫描宽度并不只是树宽的替代指标，它还提供了有关输入图结构的信息，而这些信息无法由树宽提供。具体而言，我们证明，对于所有 $\ell \geq 1$，带依赖的加权系统发育多样性关于食物网的扫描宽度是固定参数可解的，但关于其树宽是 W[ℓ]-难的。据我们所知，此前尚未有任何问题展现出这两种宽度度量之间的这种分离。

2012年ACM主题分类 应用计算 → 计算生物学；计算理论 → 固定参数可解性

关键词和短语 树宽；扫描宽度；系统发育多样性；固定参数可处理性

资助 *Jannik Schestag*：由荷兰研究理事会（NWO）资助，资助编号为 OCENW.GROOT.2019.015，项目名称为“面向机器学习及利用机器学习进行优化（OPTIMAL）”。
Norbert Zeh：研究得到 NSERC 探索基金的支持，资助编号为 RGPIN-2025-06235。

1 引言

参数化复杂性的研究表明，对于许多计算上困难的问题，仅凭输入规模并不能很好地预测在特定输入上求解该问题所需的时间。真正重要的是输入的结构，这种结构由某个参数 k表示，并且该参数 Π独立于输入规模；相比规模本身，它更为重要。如果存在某个算法，能够对任意规模为 n 且参数为 k 的输入，在时间 $f(k) \cdot \text{poly}(n)$内求解该问题，其中 f 是任意可计算函数，而$\text{poly}(n)$是关于 n 的任意多项式，并且 k [9]独立于 $W[\ell]$，则称该问题关于参数 $\ell \geq 1$具有固定参数可解（FPT）性。W层级为那些被认为不是固定参数可解的问题提供了一种分类：对于任意 [9]，任何 $W[\ell]$-困难问题，只要标准的复杂性理论假设成立，就不是固定参数可解的。

在研究图问题时，图的宽度度量在理解输入图的结构方面发挥了重要作用。树宽是最早且最具影响力的宽度度量之一 [23] ，并已成为算法设计和

结构图论 [7,8]的基石。它基于一种图的结构表示 G，称为 G的树分解，它由一棵树组成，树的每个节点都关联着 G 的一些小顶点子集，并且必须满足特定条件。在过去几十年里，已有数百个问题被证明在以树宽为参数时是固定参数可解的，例如 [2,3],，而其他问题仍然是关于树宽的 W[1]-难问题 [12]。大多数基于树宽的固定参数可解算法都在树分解上使用动态规划。

系统发育网络是表示一组物种演化过程的有向无环图（DAG）。已有研究表明，若干系统发育网络上的问题相对于树宽也是固定参数可解的，尤其包括树包含 [6,27], 小简约法 [25], 以及系统发育多样性 [16–18]。其中一些算法相当复杂，因为遍历树分解并不对应于沿着尊重边方向的方式遍历网络。这促使研究者引入扫描宽度 [1]，作为衡量网络具有树状结构程度的另一种指标；不同之处在于，按从上到下或从下到上的顺序遍历树，都对应于沿着同一方向遍历网络。这使得若干问题的算法大为简化 [6,16,18,19,25]。

有向无环图的扫描宽度是其树宽的一个上界 [5],，迄今为止，算法更简单，以及与以树宽为参数相比，算法运行时间对扫描宽度的依赖更优，是扫描宽度仅有的优势。据我们所知，迄今尚无已知问题在这两种宽度度量之间存在显著的复杂性理论分离，即该问题相对于扫描宽度是固定参数可解的，而相对于树宽则是 W[1]-难或更难。

本文通过证明以下结论改变了这一现状：带依赖的加权系统发育多样性（带依赖的加权系统发育多样性s）关于扫描宽度是固定参数可解的，但即使是该问题的一个受限版本，关于树宽也是 W[ℓ]-难的，对所有 $\ell \geq 1$均成立。在这个问题中，给定一个顶点和弧带权的有向无环图，在其生物学解释中称为食物网，以及两个整数 B 和 D。顶点代表物种，顶点权重表示各物种自身的多样性分数，有向弧表示物种之间的捕食者—猎物关系，其权重表示猎物对捕食者存活的重要性。任务是确定是否存在一个至多包含 B 个物种的集合，使其总多样性至少为 D，且每个被选中的物种在被选中的物种中都有“足够多”的猎物。我们将在第 2 节给出形式化定义。

将系统发育多样性与生态约束相结合时，自然会产生这类问题 [14,20,21,24]。系统发育多样性最初是在树上定义的，指连接给定物种集合的最小子树的总权重 [10]。虽然可以在多项式时间内计算出使系统发育多样性最大的 B 物种子集 [22,26],，但纳入生态依赖关系后，寻找最优解会困难得多 [11]。为解决这一难题，人们提出了一种简化的多样性模型，为每个物种赋予一个单独的多样性分数 [11],，由此形成了带依赖的加权系统发育多样性s及其变体 [24]。

我们的第一个结果表明，即使是加权 PDDs 的一个受限版本，相对于树宽而言仍然难以处理。具体来说，我们考虑 1/2-PDDs，其中每条弧 (u,v) 的权重为 $2/\deg^-(v)$，并证明以下定理：

▶ **定理 1.1**。 1/2-PDDs 是 $W[\ell]$-难的，对所有 $\ell \geq 1$ 均成立，参数为食物网的树宽。

该结果补充了此前已知的、针对 1/2-PDDs 以树宽为参数的 XP 算法 [24]，并表明在标准复杂性理论假设下，该问题不存在固定参数可解算法。相比之下，我们证明了加权 PDDs 关于节点扫描宽度是固定参数可解的：

▶ **定理 1.2**。 加权 PDDs 可以在 $O\left(2^{\mathrm{nsw}(\mathcal{F})} \cdot n^3\right)$ 时间内求解，前提是给定食物网 F 的一个节点扫描宽度为$\mathrm{nsw}(F)$ 的树扩展。其中， n 表示物种数量，即 F 中的顶点数量。

2 预备知识

图与函数。 我们采用 [8]中的标准图术语$_G^-(v)$ v 表示顶点 v 在图 G 中的入度；若上下文已明确图是哪一个，则省略下标。此外，顶点和物种这两个术语可以互换使用，因为食物网中的顶点代表物种。

给定函数 $f\colon A \to \mathbb{R}$ 和子集 $B \subseteq A$，我们定义 $f(B) \colon = \sum_{b \in B} f(b)$。

食物网、可存续性与系统发育多样性。 集合物种的食物网$\mathcal{F} = (X, A)$ X 是一个有向无环图（DAG）。若物种 x 是物种 y的猎物，且 y 是 x的捕食者，则有（x, y） $\in A$。源点是不具有猎物的物种。

给定食物网$\mathcal{F} = (X, A)$，我们定义弧权重函数 $\gamma\colon A \to (0, 1],$，其中 $\gamma(u, v)$表示 u 对 v 存活的重要性。物种集合 $S \subseteq X$ 是-可存续的，如果对于每个非源点顶点 $v \in S$，都有 $\gamma_v(S) \colon = \gamma\{(u, v) \in A \mid u \in S\} \geq 1$。若上下文明确 γ 的含义，我们就称 S 是可存续的。直观地说，这意味着，如果我们努力拯救 S 中的物种，使其免于灭绝，那么对于每个我们拯救的物种，也要拯救足够多的猎物，使其能够存活。

系统发育多样性用于衡量一组物种遗传物质的多样性。通常，通过为代表这组物种演化过程的系统发育树的边赋予权重来表示。在我们研究的系统发育多样性问题版本中，系统发育树是一棵星形树，这意味着我们可以用顶点权重函数 $d\colon X \to \mathbb{N}^+$ 表示 X 子集内每个物种对总多样性的贡献。

带依赖的加权系统发育多样性（Weighted PDDs）**输入：** 一个食物网 $\mathcal{F} = (X, A)$、一个多样性函数 $d\colon X \to \mathbb{N}^+$、一个弧权重函数 $\gamma\colon A \to (0, 1]$, 以及整数 B 和 D。 **问题：** 是否存在一个 γ-可行集 $S \subseteq X$，使得 $\lvert S\rvert \leq B$ 且 $d(S) \geq D$?

α-PDDs，对于 $\alpha \in (0, 1],$，是带依赖的加权系统发育多样性（Weighted PDDs ）的一个特例，其中没有弧权重函数，并且当集合 S 包含每个物种 $v \in S$ 的至少 $\alpha \cdot \deg^-(v)$ 个猎物时，该集合就是可行集。这等价于对每条弧 $(u, v) \in \mathcal{F}$，令 $\gamma(u, v) = 1/(\alpha \cdot \deg^-(v))$。

树宽与扫描宽度。 无向图 G 的树分解 由一棵有根树 T以及每个节点 $t \in T$对应的一个袋 $Q_t \subseteq V(G)$构成，并满足：对于每条边$\{u, v\} \in E(G)$，都存在一个袋 Q_t，使得 $u, v \in Q_t$；对于每个顶点 $v \in V(G)$，所有满足 $v \in Q_t$ 的节点 $t \in T$ 在 T中诱导出一棵子树。树分解的宽度 为其最大袋的大小减一。无向图 G 的树宽 $\mathrm{tw}(G)$是其所有树分解的最小宽度。有向图的树宽等于其底层无向图的树宽。

DAG $G = (V, A)$ 的树扩展 是一个以 G 的顶点集为顶点集的有根树 $T = (V, A')$，满足对于每条弧 $(u, v) \in A$， u 都是 T [1]中 v 的（真）祖先。顶点 $v \in T$ 的节点宽度是指在 T 中，其真祖先中至少有一个出邻居属于 T 中 v 的后代（包括 v 本身）的祖先数量。 T 的节点宽度是其所有顶点的节点宽度的最大值

所有顶点的节点宽度。类似地，节点 $v \in T$ 的边宽度是指满足 u 是 v 的真祖先且 w 是 T 中 v 的后代的弧 $(u,w) \in G$ 的数量，而 T 的边宽度是其所有顶点的边宽度的最大值。DAG G 的扫描宽度 sw(G) 和节点扫描宽度 nsw(G) 分别是 G [1,13,15] 的所有树扩展中边宽度和节点宽度的最小值。根据定义可立即得出，对于任意 DAG G，nsw(G) $\leq$ sw(G)。此外，由引理 3.3]，tw(G) $\leq$nsw(G) [5, 。

参数化复杂性。形式语言（判定问题）L $\subseteq \Sigma^*$ 在字母表 Σ 上的一种参数化是函数 $\kappa : \Sigma^* \to \mathbb{N}$。若存在一种算法，能够在 $f(\kappa(\sigma)) \cdot p(|\sigma|)$ 时间内判定 $\sigma \in$ L，则称 L 关于 κ 是固定参数可解的（FPT）；其中 $f(\cdot)$ 是任意可计算函数，$p(\cdot)$ 是多项式。详细介绍请参见 [7] 。对于 $\ell \geq 1$，人们认为 W[ℓ]-困难问题不是固定参数可解的 [9]。本文关注以食物网的树宽或节点扫描宽度为参数的加权 PDDs，即对于加权 PDDs的每个实例 (F d, γ, B, D)，分别采用 κ((F d, γ, B, D)) =tw(F) 或 κ((F d, γ, B, D)) =nsw(F) 作为参数。

3 1/2-PDDs 按树宽参数化

在本节中，我们证明定理 1.1： 1/2-PDDs 是 W[ℓ]-难的（以树宽为参数），对所有 $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$均成立。我们注意到，只需稍作调整此证明，就可以证明 α-PDDs对于任意 $\alpha \in (0,1)$均为难解问题。相比之下，1-PDDs 以树宽为参数时是固定参数可解的 [24]。

我们的证明采用了从容量支配集问题出发的归约，下面给出该问题的定义：

> 容量支配集（连通支配集）**输入：** 一个无向图 $G = (V, E)$、一个容量函数 $c : V \to \mathbb{N}$，以及一个整数 $k \in \mathbb{N}$。**问题：** 是否存在一对 (S, f)，其中 $S \subseteq V$是一个至多包含 k 个顶点的集合，且f：$V \setminus S \to S$是一个满足以下条件的函数：$|f^{-1}(v)| \leq c(v)$ 对所有 $v \in S$ 均成立?

直观地说，若 $f(v) = u$，则 $u \in S$“用于支配” $v \in V \setminus S$，而容量约束限制了 S 中每个顶点可用于支配的顶点数量。对所有 $\ell \geq 1$ [4]，连通支配集关于图的路径宽度是W[ℓ]-困难的，因此关于其树宽也是如此。给定连通支配集的一个实例I := (G, c, k)，我们在多项式时间内构造 1/2-PDDs 的一个实例I′ := (F d, B, D)，使得 |F| $\in$ poly(|G|)，tw(F) $\in$ O(tw(G))，并且I是连通支配集的 yes-实例当且仅当I′ 是 1/2-PDDs的 yes-实例。这证明了定理 1.1。

我们使用两类组件构造 F，如图1所示：选择器组件和配额组件。在概述归约之后，我们给出它们的形式化定义。每个组件都是一棵树，且其所有弧都朝向根。每个组件中唯一与组件外邻居相连的顶点是根。对于每个顶点 $v \in V(G)$，F 包含一个根为 v_0 的选择器组件 S_v，以及两个根分别为 v_1 和 v_2 的配额组件 Q_v^1 和 Q_v^2。对于每条边 $\{u, v\} \in E(G)$，F 包含两个配额组件 $Q_{u,v}$ 和 $Q_{v,u}$，其根分别为 $e_{u,v}$ 和 $e_{v,u}$。对于每个顶点 $v \in V(G)$，我们添加一条弧 (v_0, v_2)；对于每条边 $\{u, v\} \in E(G)$，我们添加弧 $(u_0, e_{u,v})$、$(e_{u,v}, u_1)$ 和 $(e_{v,u}, u_2)$。我们为 F 中的顶点分配多样性分数，并选择一个目标多样性 D，使得 I′ 上的 1/2-PDDs 的任意解都必须包含 v_1 和 v_2（对每个顶点 $v \in G$ 而言），并且至少包含 $X = \{v_0 \mid v \in G\}$ 中的 k 个顶点。选择器组件确保，当我们将顶点 v_0 加入 F 中的可行集时，还需要加入 S_v 中一定数量的顶点。再结合精心设定的

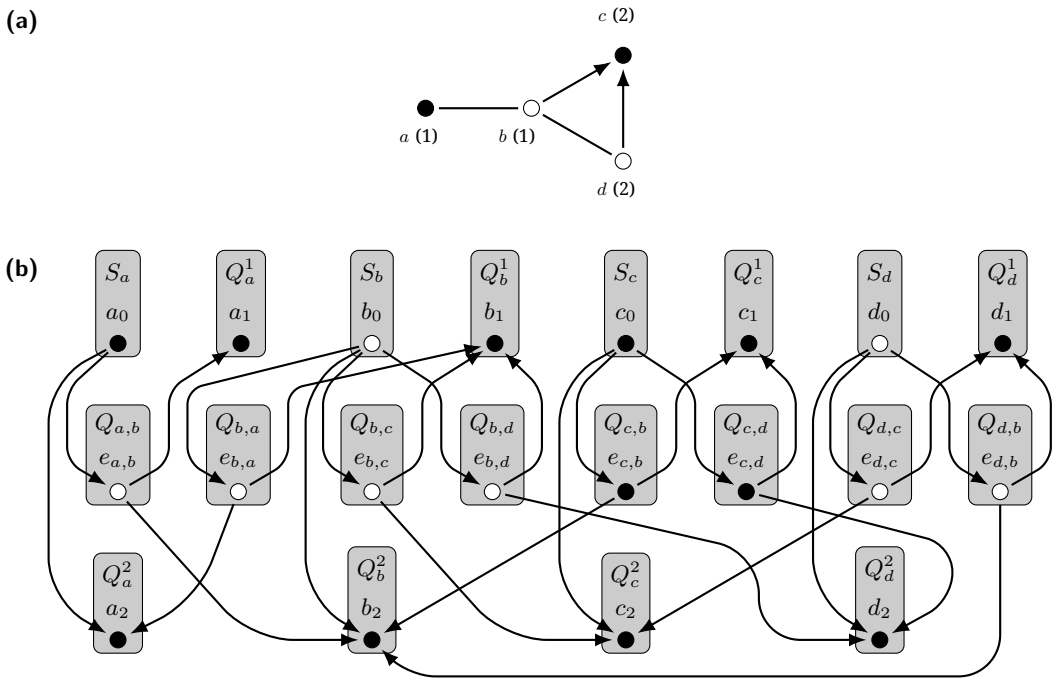

图1 从连通支配集到 $^1/_2$-PDD$_s$ 的归约。(a) 连通支配集的输入图 G。每个顶点旁标出了其容量。实心顶点属于支配集 S；空心顶点则不属于。边上的箭头表示从 $V \setminus S$ 中的顶点到 S的映射 f。(b) 由 G构造的食物网 $\mathcal{F}$。每个组件只显示其根。实心顶点属于与 (S, f) 对应的可行集 S'；空心顶点则不属于。

预算，这保证了解中至多有 k 个顶点属于 X；也就是说，我们恰好选择 X 中的 k 个顶点，它们表示一个大小为 k 的支配集 S。配额组件旨在确保：将此类组件的根加入可行集时，需要在组件内部额外加入一定数量的顶点；如果我们在配额组件外加入根的某些猎物，则需要加入的配额组件内部顶点数量会减少。对于每个顶点 v_2，我们选择配额组件 Q_v^2 的参数，使得在不从 Q_v^2 外部加入其任何猎物的情况下加入 v_2，在我们的预算内是不可能的。因此，只有在加入 v_0 或者加入与 v 相 incident 的某条边 $\{u, v\}$ 的某个顶点 $e_{u,v}$ 时，才能加入 v_2。配额组件 $Q_{u,v}$ 的参数经过选择，使得这还要求加入 u_0。因此，每个顶点 v 要么属于 S，要么具有一个邻居 $f(v) = u$ 属于 S；换言之，S 是一个支配集。最后，对于所有 $u \in G$，加入顶点 u_1 而不加入与 G 的边相对应的任何顶点 $e_{u,v}$，将要求我们从所有 $u \in G$ 对应的配额组件 Q_u^1 中加入某个固定数量的顶点。每当我们加入顶点 $e_{u,v}$ 时，Q_u^1 中所需加入的顶点数量就会减少；并且配额组件的参数经过选择，使得加入 u_1 所节省的成本完全抵消加入 $e_{u,v}$ 的成本。然而，配额组件的结构确保，加入边顶点 $e_{u,v}$ 所获得的这种成本抵消，仅对至多 $c(u)$ 个“边顶点”有效，这些边顶点对应于与 u 相 incident 的边。保护更多边顶点将迫使我们超出预算。这保证了对于每个顶点 $u \in G$，至多加入 $e_{u,v}$ 个边顶点 $c(u)$；也就是说，u 被用于支配 G 中至多 $c(u)$ 个顶点。

接下来，我们将正式定义选择器组件和配额组件，并对这一构造进行形式化处理。首先定义以下数值，其中 n 和 m 分别表示顶点数和

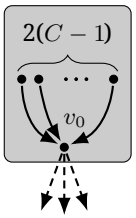

图2 一个选择器组件 S_v。虚线弧表示 v_0 在 S_v之外的捕食者。与 S_v之外的顶点之间没有其他弧。

G中的边数：

$$
\begin{aligned}
C &:= 3m+1, && \text{(parameter used to define the other values)}\\
B &:= C\cdot k + C\cdot\sum_{v\in G} c(v) + 2n + 4m, && \text{(the budget)}\\
D_0 &:= 2n\cdot(C+B) + 2m\cdot(2C+5), && \text{(diversity of vertices in dominating set)}\\
D_1 &:= (n+1)\cdot D_0, && \text{(diversity of dominated vertices)}
\end{aligned}
$$

值 C 和 B 也用于定义$\mathcal{F}$中某些顶点的入度。

每个选择器组件 S_v 由其根 v_0 以及$2(C-1)$ 个额外顶点组成，它们是 v_0的猎物。这如图2所示。

▶ **观察3.1**。类型为 $S(C)$ 的选择器组件有 $2C-1$ 个顶点和 $2C-2$ 条弧。

▶观察*3.2*。*</style}F* 中任何包含 v_0 的可行集 P 至少包含 C 个 S_v 中的顶点。反过来，对于任意可行集 P，都存在一个可行集 P'，它在 S_v 之外包含与 P 相同的顶点，并且还包含 S_v 中的 v_0 和 $C-1$ 个额外顶点。

每个以 x 为根的配额组件 Q 都有一个类型 $Q(\delta,\ell,r,M)$；δ 是 x 在 Q 之外的猎物数量，r 是一个参数，确保任何包含 x 的可行集也必须包含至少 $\max(\delta,r)$ 个 x 的猎物；ℓ 指定其中必须位于 Q 之外的猎物数量，而将 x 的一部分“中型”猎物加入可行集时，每加入一个都需要在该集合中加入 Q 中的 M 个顶点。此外，Q 中还有 x 的“大型”猎物，不能将它们加入包含 x 且大小至多为 B 的可行集。它们的作用是增加 x 的猎物数量，从而迫使任意可行集包含一定数量的 x 的猎物。具体而言，类型为 $Q(\delta,\ell,r,M)$ 的配额组件由 x、$\max(0,r-\delta)$ 个“大型”顶点 $\ell+$、$r-\ell$ 个“中型”顶点以及 $\max(0,\delta-r)$ 个“小型”顶点组成，这些顶点全都是 x 的猎物。小型顶点没有自己的猎物。中型顶点有 $2(M-1)$ 个猎物，因此，将这样的顶点加入可行集时，我们必须至少加入其 $M-1$ 个猎物。大型顶点有 $2(B-1)$ 个猎物，因此，任何包含 x 和至少一个此类顶点的可行集都会超出预算 B。图3展示了这一构造。

▶ **观察3.3**。一个类型为 $Q(\delta,\ell,r,M)$ 的配额组件 Q 包含

$$|V(Q)| := (2B-1)\cdot(\ell+\max(0,r-\delta)) + (2M-1)\cdot(r-\ell) + \max(0,\delta-r) + 1$$

个顶点和 $|V(Q)|-1$ 条弧。计入 Q之外的猎物后，Q 的根有 $2\cdot\max(\delta,r)$个猎物。

▶ **引理3.4**。设 Q 是 F 中类型为 $Q(\delta,\ell,r,M)$的一个配额组件，且 x 是其根。F 中任何包含 x、大小为 $|P|\le B$ 的可行集 P，都包含 $\ell'\ge\ell$ 个位于 x 之外的猎物

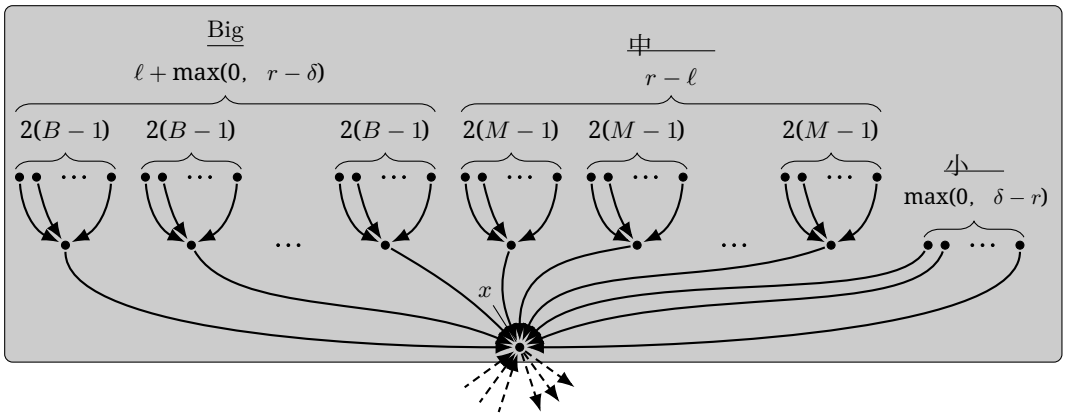

图3 类型为 $Q(\delta,\ \ell,\ r,\ M)$、根为 x 的配额组件 Q。虚线弧表示与 x 中 Q 外部邻居的连接。没有其他弧连接到 Q 外部的顶点或从这些顶点引出。

属于 Q，并且在 Q中至少包含 $1+\max(\delta,r)\ -\ell'+(M-1)\cdot\max(0,r-\ell')$ 个顶点。反过来，对于任何包含 x 的猎物中位于 Q之外的 $\ell' \geq \ell$ 的可行集 P，都存在一个可行集 P'，它在 Q之外包含与 P 相同的顶点，同时还包含 x，并且在 Q中恰好额外包含$\max(\delta,r)\ -\ell'+(M-1)\cdot \max(0,r-\ell')$ 个顶点。

证明。我们先证明第二个断言。设 P 是一个可行集，其中包含 x 在 Q 外部的 x 和 $\ell' \geq \ell$ 个猎物。由于 x 总共有 $2\cdot\max(\delta,r)$ 个猎物，P 至少包含其 $t := \max(\delta,r)$ 个猎物。为构造 P'，我们从 P 中移除 $V(Q)$ 内的所有顶点。然后，将 x、$s=$ 个小型顶点中的 $\min(s,$ $t-\ell')$ 个，以及 $\max(0,r-\ell')$ 个中顶点加入 P'，并为每个加入的中顶点一并加入 $M-1$ 个猎物。由于 Q 外的每个顶点在 P' 中的猎物与在 P 中相同，而且容易验证 $P'\cap V(Q)$ 中的每个顶点都至少有一半猎物位于 P' 中，因此 P' 是可行的。$P'\cap V(Q)$ 中的顶点总数（包括 x）为 $1+\min(s,t-\ell')\ +M\cdot\max(0,r-\ell')\ =1+\max(\delta,r)\ -\ell'+(M-1)\cdot\max(0,r-\ell')$。

为证明第一个结论，注意到，任何大小至多为 B 且包含 x的可行集 P 都不包含任何大顶点，因为若包含这样的顶点，就必须同时包含其猎物中的至少 $B-1$，也就是说，P 至少会包含 $B+1$ 个顶点。由于 Q中只有 $\max(\delta,r)$ 个小型和中型顶点，而 P必须包含 x 的 $\max(\delta,r)$ 个猎物，因此它必须包含 Q 之外的 x 的猎物，以及 Q中的 $\max(\delta,r)$ 个小型和中型顶点。由于小型顶点只有 $s=\max(0,\delta-r)$ 个，P至少包含 $\max(0,t-\ell'-s)$ 个 $\max(0,r-\ell')$ 中型顶点。对于每个中型顶点，其猎物中至少有 $M-1$ 必须属于 P。也就是说，P在 Q中至少包含 $1+t-\ell'+(M-1)\cdot\max(0,r-\ell')\ =1+\max(\delta,r)\ -\ell'+($ $M-1)\cdot\max(0,r-\ell')$ 个顶点。◀

为了完成对 $1/2$-PDDs 实例 $\mathrm{I}'=(\mathrm{F}\ d,B,D)$ 的定义，我们需要指定 F 中配额组件的类型，以及多样性函数 d 和多样性阈值 D。预算 B 是前面定义的值。对于所有 $v\in G$，我们定义 $d(v_0)$ $=D_0$ 和 $d(v_1)=d(v_2)=D_1$。F 中的其他每个顶点 $x\in$ 都具有多样性 $d(x)=1$。多样性阈值 D为 $2nD_1+kD_0$。每个配额组件 $Q_{u,v}$的类型为 $Q(1,1,2,C)$。每个配额组件 Q_v^1的类型为 $Q(\deg_G(v)\ 0,c(v)\ C+1)$。每个配额组件 Q_v^2的类型为 $Q(\deg_G(v)\ +1,1,1,1)$。

从 $\mathcal{I}'$ 构造 $\mathcal{I}$ 需要多项式时间，因为 G 中的每个顶点和边都会被替换为一个规模为多项式的子图，并根据 G中顶点与边的关联关系，仅在这些子图之间添加相应的边。因此，为完成 定理 1.1的证明，我们需要证明 $\mathrm{tw}(\mathcal{F})\ \in O(\mathrm{tw}(G))$，并且 $\mathcal{I}'$ 是$1/2$-PDDs 的一个是实例，当且仅当$\mathcal{I}$ 是连通支配集的一个是实例。

▶ **引理 3.5**。$\mathrm{tw}(\mathcal{F}) \leq 3\mathrm{tw}(G) + 2$。

证明。 我们考虑 $U(\mathcal{F})$ 的底层无向图 $\mathcal{F}$，因为弧方向对树宽并不重要。

给定函数 $\phi : V(G) \to \mathbb{N}_{\geq 1}$， ϕ-扩张的 G 是一个图 G'，其中 G 的每个顶点 v 都被替换为一个大小为 $\phi(v)$ 的团 C_v；并且对于 G 中的每条边 $\{u, v\}$， C_u 中的每个顶点与 C_v 中的每个顶点之间都存在一条边。令 $a = \max_{v \in G} \phi(v)$，则 $\mathrm{tw}(G') \leq a(\mathrm{tw}(G) + 1) - 1$：给定 G 的一个宽度为 $\mathrm{tw}(G)$ 的树分解 (T, B)，将每个袋 $B_x \in \mathrm{B}$ 替换为袋 $B'_x = \bigcup_{v \in B_x} C_v$ 后得到的树分解 (T, B')，是 G' 的一个具有所需宽度的树分解。

我们可以通过以下步骤从 G 得到 $U(\mathrm{F})$ 的一个超图 G'：(1) 用顶点 $e_{\{u,v\}}$ 对 G 中的每条边 $\{u, v\}$ 进行细分；(2) 应用一个 ϕ-扩张，将每个顶点 $e_{\{u,v\}}$ 替换为两个顶点 $e_{u,v}$ 和 $e_{v,u}$，并将每个顶点 $v \in V(G)$ 替换为三个顶点 v_0, v_1 和 v_2；(3) 将相应的选择器组件或配额组件附加到所得图中的每个顶点上，使其作为根。删除边不会增加图的树宽，因此 $\mathrm{tw}(\mathrm{F}) = \mathrm{tw}(U(\mathrm{F})) \leq \mathrm{tw}(G')$。类似地，对边进行细分不会增加图的树宽 [7]，，因此步骤 (1) 后得到的图的树宽为 $\mathrm{tw}(G)$。由此，根据上一段的讨论，步骤 (2) 后得到的图的树宽至多为 $3\,\mathrm{tw}(G) + 2$。在步骤 (3) 中附加树不会增加树宽至少为 1 的图的树宽。因此，$\mathrm{tw}(G') \leq 3\mathrm{tw}(G) + 2$。◀

▶**引理 3.6**。I 是 yes-实例的 连通支配集 当且仅当 I' 是 yes-实例的 $1/2$-PDDs .

证明。 首先，假设 $\mathcal{I}$ 是连通支配集的一个是实例，并令 (S, f) 为 I 上连通支配集的一个解。我们可以假设 $c(v) \leq \deg_G(v)$，对所有 $v \in G$ 都成立，因为 $|f^{-1}(v)| \leq \deg_G(v)$，对所有 $v \in G$ 都成立。我们还可以假设 $|S| = k$；否则，对于任意大小为 $|S'| = k$ 的超集 $S' \supsetneq S$，$(S', f|_{V \setminus S'})$ 也是 I 上连通支配集的一个可行解。为了定义 I 上 $1/2$-PDDs 的一个解 P，我们首先定义一个可行超集 $P' \supseteq P$，其中包含以下顶点:

- 对于每个 $v \in S$， S_v 中的所有顶点。对于每
- 个 $v \notin S$，$Q_{f(v),v}$ 中的所有顶点。对于每个
- $v \in V$， Q_v^1 和 Q_v^2 中的所有顶点。

要验证这个集合是可行集，我们只需验证 P' 中每个配额组件的根在 P' 中都有所需数量的外部猎物，因为该配额组件中的所有顶点都属于 P'。对于每个顶点 $v_1 \in P'$，这显然成立，因为 Q_v^1 的类型为 $Q(\deg_G(v)\ 0, c(v)\ C + 1)$，也就是说，任何可行集都不需要包含 v_1 的外部猎物。若 $e_{u,v} \in P'$，对于某条边 $\{u, v\}$，则 $u = f(v)$，因此 $u \in S$，也就是说， $u_0 \in P'$。由于 u_0 是 e_u 的猎物，这表明 $e_{u,v}$ 在 P' 中有一个类型 $Q(1, 1, 2, C)$ 所要求的外部猎物，其中 $Q_{u,v}$。最后，每个顶点 $v \in V$ 要么属于 S，此时 $v_0 \in P'$；要么不属于，此时 $e_{f(v),v} \in P'$。由于二者都是 v_2 的猎物，这表明 v_2 在 P' 中至少有一个外部猎物，正如 Q_v^2 的类型 $Q(\deg_G(v) + 1, 1, 1, 1)$ 所要求的那样。

对于所有 $v \in V(G)$，令 k_v 表示 v 选择支配的顶点数，即，当 $v \notin S$时为$k_v = 0$，而当 $v \in S$时为 $k_v = |f^{-1}(v)|$。那么 $k_v \leq c(v)$，因为 (S, f) 是 I 上连通支配集问题的一个解，而 k_v 表示满足 $u = v$ 的顶点 $e_{u,w} \in P'$ 的数量。特别地，$\sum_{v \in V} k_v = n - k$。根据观察3.2和引理3.4，F 中存在一个 $1/2$-可行集 P，它包含与 P' 相同的选择器和配额组件的根，并且总共包含

- C 个顶点来自每个选择器组件 S_v，使得 $v_0 \in P'$，$C + 1$ 个顶点来自每个配
- 额组件 $Q_{u,\ v}$ 使得 $e_{u,\ v} \in P'$，$1 + \deg_G(v) + C \cdot c(v) - (C + 1) \cdot k_v$ 个顶点来自
- 每个配额组件 Q_v^1，并且$1 + \deg_G(v)$个顶点来自每个配额组件 $Q_{v^\circ}^2$
-

因此，

$$|P| \leq C \cdot k + (C+1)(n-k) + \sum_{v \in V}(2 + 2\deg(v) + C \cdot c(v) - (C+1)k_v))$$
$$= C \cdot k + 4m + 2n + C \cdot \sum_{v \in V} c(v) = B.$$

由于 P 包含 v_1 和 v_2（对所有 $v \in V$均成立），且 v_0对所有 $v \in S$均成立， P 的多样性至少为 $2n \cdot D_1 + k \cdot D_0 = D$。因此，$\mathcal{I}'$ 是一个 yes-PDD 的 $1/2$-实例。

现在，假设 $\mathcal{I}'$ 是一个带有解 P的 yes-PDD 的 $1/2$-实例。简单计算可得，$\mathcal{F}$ 至多有 D_0 个顶点。此外，$\mathcal{F}$ 有 n 个多样性为 D_0 的顶点，以及 $2n$个多样性为 D_1的顶点。因此，如果 P 包含 $X = \{v_1, v_2 \mid v \in V\}$中的 $q < 2n$ 个顶点，则 $d(P) < q \cdot D_1 + (n+1) \cdot D_0 \leq 2D_1 n \leq D$。因此， P必须包含 X中的所有顶点。类似地， P包含 $Y = \{v_0 \mid v \in V\}$中的 $n_Y \geq k$ 个顶点。

对于每个 $v \in V$，令 k_v 为满足$e_{u\text{的顶点数，}} {}_w \in P$满足 $u = v$。于是，根据观察3.2和引理3.4，P至少包含

- C 个来自每个选择器组件 S_v 的顶点，满足 $v_0 \in P$；$C+1$ 个来自每个配额组件Q_u的顶
- 点，满足e_u；$_v \in P$、$1 + \deg_G(v) + C \cdot \max(c(v)\ k_v) - (C+1) \cdot k_v$ 个来自每个配额组
- 件 Q_v^1的顶点，以及$1 + \deg_G(v)$个来自每个配额组件 Q_v^2的顶点。

因此，

$$|P| \geq Cn_Y + \sum_{v \in V}(C+1)k_v + \sum_{v \in V}(2 + 2\deg_G(v) + C \cdot \max(c(v), k_v) - (C+1) \cdot k_v)$$
$$= C\left(n_Y + \sum_{v \in V} \max(c(v), k_v)\right) + 2n + 4m.$$

由于 $|P| \leq B = C \cdot k + 4m + 2n + C \cdot \sum_{v \in V} c(v)$，这意味着 $n_Y \leq k$。我们已经观察到 $n_Y \geq k$，因此 $n_Y = k$，从而 $\sum_{v \in V} \max(c(v)\ k_v) \leq \sum_{v \in V} c(v)$，这意味着对于所有 $v \in V$，均有 $k_v \leq c(v)$。

现在，令 $S = \{v \in V \mid v_0 \in P\}$。于是 $|S| = n_Y = k$。对于每个顶点 $v \notin S$， $v_0 \notin P$但 $v_2 \in P$。根据引理 3.4， P 至少包含一个不在 Q_v^2 中的 v_2 的猎物。因此，由于 $v_0 \notin P$，存在至少一条边 $\{u, v\} \in E(G)$，使得 $e_{u,v} \in P$。再次根据引理3.4，这意味着 $u_0 \in P$，因而 $u \in S$。因此，我们可以将 $f(v)$ 设为 $= u$。（如果有多个顶点 u 满足这一条件，我们可以任选其中一个作为 $f(v)$。）由于有 $k_u \leq c(u)$ 个顶点 e_u，对于所有 $u \in S$，这一 f 构造确保$|f^{-1}(u)| \leq k_u \leq c(u)$，对于所有 $u \in S$。因此，(S, f) 是 I 上 CDS 的一个可行解。◀

我们已经证明，可以在多项式时间内，从 CDS 的一个实例 $\mathrm{I} = (G, k, c)$ 构造出一个 $1/2$-PDDs 的实例 $\mathrm{I}' = (\mathrm{F}\ d, B, D)$，使得 I' 是一个 yes-实例当且仅当 I 是，并且 $\mathrm{tw}(\mathrm{F}) \in \mathrm{O}(\mathrm{tw}(G))$。由于 CDS 是 $W[\ell]$-难的，对于所有 $\ell \geq 1$，这表明 $1/2$-PDDs 也具有同样的性质，从而证明了定理 1.1。

4 按节点扫描宽度参数化的加权 PDD

在本节中，我们证明定理 1.2。设$\mathcal{I} = (\mathcal{F}\ d,\ B,\ D)$是WeightedPDDs的一个实例，并设 T 是$\mathcal{F}$ 的一个节点扫描宽度为$\mathrm{nsw}(\mathcal{F})$的树扩展。设 Z_v 是 v 在 T中的所有后代构成的集合，包括 v 自身。我们为每个顶点 $v \in T$ 关联一个集合 A_v

的所有真祖先 u，这些 v 在 T 中，在$\mathcal{F}$中都有一条弧指向 Z_v。[1] 这些集合满足 $|A_v| \leq \mathrm{nsw}(\mathcal{F})$，对所有 $v \in T$均成立。对于任意子集 $A' \subseteq A_v$ 以及任意 $\ell \in [B]_0$，集合 $P \subseteq Z_v$是$(v,\ A',\ \ell)$-相容的，当且仅当若

1. $|P| = \ell$，且**2.** 每个顶点 $w \in P$ 都是$\mathcal{F}$ 中的源点，或满足 $\gamma_w(P \cup A') \geq 1$。换句话说，$P \cup A'$ 是可行的，只是 A' 中的顶点可能没有足够的猎物 A'

我们对 T 使用动态规划，以在$\mathcal{I}$上求解加权 PDDs 。该算法构造一个表 S，其索引由三元组（$v,\ A',\ \ell$）组成，其中 $v \in T$、$A' \subseteq A_v$和 $\ell \in [B]_0$。表项 $S[v, A', \ell]$ 存储所有（$v,\ A',\ \ell$）-兼容集合 $P \subseteq Z_v$的最大多样性。若不存在这样的集合，则 $S[v, A', \ell] = -\infty$。

对于 T的根 ρ，我们有 $A_\rho = \emptyset$ 和 $Z_\rho = V$（$\mathcal{F}$）。因此，我们立即得到以下引理:

▶ **引理 4.1**。F 中任何大小至多为 B 的可行集 P 的最大多样性为 $S[\rho, \emptyset, B]$。特别地，I 是一个 yes-实例，当且仅当 $S[\rho, \emptyset, B] \geq D$。

证明。若 P^* 是所有大小至多为 B的可行集中多样性最大的集合，则 P^*是 $(\rho, \emptyset, |P^*|)$-相容的。若 $|P^*| < B$，我们可以将所有猎物都在 P^* 中的顶点加入 P^*，直至 $|P^*| = B$。这不会降低 P^* 的多样性，并且保持 P^* 可行。因此，$d(P^*) \leq S[\rho, \emptyset, B]$。

反过来，存在一个 $(\rho, \emptyset, B)$-相容集 P，使得 $d(P) = S[\rho, \emptyset, B]$。由于 $A_\rho = \emptyset$,P 是可行的。由于 $|P| = B$，这说明 $d(P^*) \geq d(P) = S[\rho, \emptyset, B]$。◀

下面仍需说明如何填充表 S。我们在 T 中自底向上进行，即从叶节点到根。

4.1 叶节点

设 v 是 T 的一个叶节点。那么，$Z_v = \{v\}$。因此，唯一可能的表项 $S[v, A', \ell] \neq -\infty$ 满足 $\ell \in \{0,1\}$。对于 $\ell = 0$，我们有 $S[v, A', 0] = 0$，对所有 $A' \subseteq A_v$ 均成立，因为空集对于所有顶点 v 和所有 $A' \subseteq A_v$ 都是 $(v, A', 0)$-相容的。对于 $\ell = 1$，如果 v 是 $\mathcal{F}$ 中的源点，或者 $\gamma_v(A') \geq 1$，则有 $S[v, A', 1] = d(v)$。否则，$S[v, A', 1] = -\infty$。

4.2 内部节点

设 v 是 T 的一个内部节点，其子节点为 $w_1, \ldots, w_t$，且均属于 T。对于满足 $A' \subseteq A_v$ 和 $\ell \in [B]_0$ 的每一对 (A', ℓ)，集合 $P \subseteq Z_v$ 是 (v, A', ℓ)-相容的，当且仅当它可以划分为互不相交的集合 $P_0, P_1, \ldots, P_t$，使得

- $P_0 \subseteq \{v\}$,$P_i \subseteq Z_{w_i}$，对所有 $i \in [t]$，若 $P_0 = \{v\}$，则 v
- 是 $\mathcal{F}$ 或 $\gamma_v(A') \geq 1$的源点，且對所有 $i \in [t]$，P_i 是 $(v,$
- $A_{w_i} \cap (A' \cup P_0)$ $|P_i|$)-相容的。

這是因為，根據 $\mathcal{F}$ 的樹擴展的性質以及集合 A_u 的定義，對所有 $u \in T$，我們有 $N^-(v) \subseteq A_v$，且對每個 $i \in [t]$，都有 $A_{w_i} \subseteq A_v \cup \{v\}$。

令 $\mathcal{P}_0(A')$ 表示 P_0 的可能选择集合，即当 v 是 $\mathcal{F}$ 中的源点或 $\gamma(N^-(v) \cap A') \geq 1$ 时，$\mathcal{P}_0(A') = \{\emptyset, \{v\}\}$；否则为 $\mathcal{P}_0(A') = \{\emptyset\}$。那么，刚才给出的 $(,A',)$-兼容集合的刻画意味着

[1] T連同袋的集合 $\mathcal{B} = \{A_v \cup \{v\} \mid v \in T\}$ 構成 $\mathcal{T} = (T,\ \mathcal{B})$ 的樹分解，該樹分解是 $\mathcal{F}$的，寬度為 $\mathrm{nsw}(\mathcal{F})$ [5]。我們在此不使用這一點。

刚刚给出的 $(v,\ A',\ \ell)$-兼容集合意味着，

$$S[v,A',\ell]=\max\Big\{d(P_0)+\sum_{i\in[t]}S[w_i,A_{w_i}\cap(A'\cup P_0),\ell_i]\ \Big|\ P_0\in\mathcal{P}_0(A');\ell_1,\dots,\ell_t\in[\ell]_0;|P_0|+\sum_{i\in[t]}\ell_i=\ell\Big\},\quad(1)$$

为了高效计算公式 (1)对所有 $\ell\in[B]_0$ 的值，我们使用一个辅助表 $S_{v,\ A'}$该表按三元组 $(j,\ \ell',\ P_0)$ 索引，其中 $j\in[t]$、$\ell'\in[B]_0$ 和 $P_0\in\mathcal{P}_0(A')$，并满足

$$S_{v,A'}[j,\ell',P_0]=\max\Big\{\sum_{i\in[j]}S[w_i,A_{w_i}\cap(A'\cup P_0),\ell_i]\ \Big|\ \ell_1,\dots,\ell_j\in[\ell']_0,\sum_{i\in[j]}\ell_i=\ell'\Big\}.\quad(2)$$

Then

$$S[v,A',\ell]=\max_{P_0\in\mathcal{P}_0(A')}(d(P_0)+S_{v,A'}[t,\ell-|P_0|,P_0]),\quad(3)$$

我们可以使用该递推关系计算这些辅助表条目

$$S_{v,A'}[1,\ell',P_0]=S[w_1,A_{w_1}\cap(A'\cup P_0),\ell'],\quad(4)$$

$$S_{v,A'}[j,\ell',P_0]=\max_{\ell_j\in[\ell']_0}(S_{v,A'}[j-1,\ell'-\ell_j,P_0]+S[w_j,A_{w_j}\cap(A'\cup P_0),\ell_j,P_0])\ \forall j>1.\quad(5)$$

给定这些辅助表，S 中的每个条目都可以使用公式 (3)在常数时间内计算。由于 $|A_v|\le\mathrm{nsw}(\mathcal{F})$ 和 $\ell\le B\le|V(\mathcal{F})|$，因此至多需要计算 $n^2\cdot2^{\mathrm{nsw}(\mathcal{F})}$ 个此类条目，其中 $n=|V(\mathcal{F})|$。因此，填充 S 需要 $O\left(n^2\cdot2^{\mathrm{nsw}(\mathcal{F})}\right)$ 时间。

总共有 $O\left(n^2\cdot\ 2^{\mathrm{nsw}(\mathcal{F})}\right)$ 个辅助表条目：对于每一对 (v,j) 和每个子集 $A'\subseteq A_v$，至多有 $2(B+1)\ \le2(n+1)$ 个辅助表条目。每一对 (v,j) 对应于 v 的一个子节点，因此对于 T 中的所有节点，共有 $n-1$ 对这样的节点对。对于每一对 (v,j)，A' 有 $2^{|A_v|}\le2^{\mathrm{nsw}(\mathcal{F})}$ 种选择。由于使用公式 (4) 和 (5) 可以在 $O(n)$ 时间内计算每个辅助表条目，因此填充所有辅助表需要 $O\left(n^3\cdot\ 2^{\mathrm{nsw}(\mathcal{F})}\right)$ 时间。定理 1.2 得证。

5 讨论

本文从固定参数可处理性的角度，首次明确揭示了树宽与扫描宽度之间的差异。尽管扫描宽度已被认为是系统发育学及相关生物学领域中获得高效算法的一种良好参数化方式，但相较于树宽，其算法能力此前仍是一个悬而未决的问题。我们的结果证明，扫描宽度并非只是树宽的一种更大变体；即使在基于树宽的方法无法奏效的情形下，它也能支持高效算法。

仍有一些尚未解决的问题。首先，找出更多能够在这两种宽度度量之间形成类似分离的问题，将会很有意义。其次，虽然我们的算法假设已给定一个节点扫描宽度有界的树扩展，但如何高效地找到这样的树扩展，其计算复杂性对于节点扫描宽度而言仍未解决；而计算最优（边）扫描宽度的树扩展，目前已知只能在以扫描宽度为参数时属于 XP。探索扫描宽度与其他有向宽度度量之间的关系，或许能进一步揭示有向无环图上问题的参数化复杂性。

参考文献

1 Vincent Berry、Celine Scornavacca 和 Mathias Weller。《扫描系统发育网络是 NP难问题》。载于第 46 届理论与实践计算机科学当前趋势国际会议（SOFSEM 2020）论文集，第 519–530 页。施普林格，2020 年。doi:10.1007/978-3-030-38919-2_42。2 Hans L. Bodlaender。《有界树宽图上的动态规划》。载于第 15 届自动机、语言与编程国际研讨会（ICALP 1988）论文集，第 105–118 页，1988 年。 doi:10.1007/3-540-19488-6_110。3 Hans L. Bodlaender。《树宽：结构与算法》。载于第 14 届结构信息与通信复杂性国际会议（SIROCCO 2007）论文集，第 11–25 页，2007 年。 doi:10.1007/978-3-540-72951-8_3。4 Hans L. Bodlaender、Carla Groenland、Hugo Jacob、Lars Jaffke 和 Paloma T. Lima。《具有线性结构的图上参数化问题的 XNLP 完备性》。Algorithmica，87(4):465–506，2025 年。 doi:10.1007/s00453-024-01274-9。5 Sebastian Bruchhold。《关于（节点）扫描宽度及其算法应用》。硕士论文，柏林工业大学，2024 年。 doi:10.14279/depositonce-21448。6 Sebastian Bruchhold 和 Mathias Weller。《利用低扫描宽度解决软多分枝问题》。载于第 51 届理论与实践计算机科学当前趋势国际会议（SOFSEM 2026）论文集。施普林格，2026 年。 arXiv:2511.20771。7 Marek Cygan、Fedor V. Fomin、Lukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、Dániel Marx、Marcin Pilipczuk、Michal Pilipczuk 和 Saket Saurabh。《参数化算法》。施普林格，2015 年。doi:10.1007/978-3-319-21275-3。8 Reinhard Diestel。《图论》，第 173 卷。施普林格·自然，2025 年。 doi:10.1007/978-3-662-70107-2。9 Rodney G. Downey 和 Michael R. Fellows。《参数化复杂性的基础》。计算机科学丛书。施普林格，2013 年。 doi:10.1007/978-1-4471-5559-1。10 Daniel P. Faith。《保护评估与系统发育多样性》。生物保护，61(1):1–10，1992 年。 doi:10.1016/0006-3207(92)91201-3。11 Beáta Faller、Charles Semple 和 Dominic Welsh。《具有生态约束的系统发育多样性优化》。组合学年鉴，15(2):255–266，2011 年。 doi:10.1007/s00026-011-0093-6。12 Michael R. Fellows、Fedor V. Fomin、Daniel Lokshtanov、Frances Rosamond、Saket Saurabh、Stefan Szeider 和 Carsten Thomassen。《关于若干以树宽为参数的彩色问题的复杂性》。信息与计算，209(2):143–153，2011 年。 doi:10.1016/j.ic.2010.11.026。13 Niels Holtgrefe。《有向无环图扫描宽度的计算》。硕士论文，代尔夫特理工大学，2023 年。网址： https://resolver.tudelft.nl/uuid:9c82fd2a-5841-4aac-8e40-d4d22542cdf5。14 Niels Holtgrefe、Jannik Schestag 和 Norbert Zeh。《依赖关系约束下系统发育多样性核化与参数化的局限》。载于第 17 届拉丁美洲理论信息学研讨会（LATIN 2026）论文集。施普林格，2026 年。15 Niels Holtgrefe、Leo van Iersel 和 Mark Jones。《有向无环图扫描宽度的精确计算与启发式计算》。arXiv 预印本 arXiv:2403.12734，2024 年。 arXiv:2403.12734。16 Niels Holtgrefe、Leo van Iersel、Ruben Meuwese、Yukihiro Murakami 和 Jannik Schestag。《PaNDA：网络中系统发育多样性的高效优化》。bioRxiv：10.1101/2025.11.14.688467，2025 年。 doi:10.1101/2025.11.14.688467。17 Mark Jones 和 Jannik Schestag。《如何最大化系统发育多样性？面向网络的参数化方法》。载于第 18 届国际参数化与精确计算研讨会（IPEC 2023）论文集，第 30:1–30:12 页。施洛斯·达格施图尔—莱布尼茨信息学中心，2023 年。 doi:10.4230/LIPIcs.IPEC.2023.30。

18 Mark Jones 和 Jannik Schestag。具有生态依赖关系的网络多样性参数化算法。载于第 20 届国际参数化与精确计算研讨会（IPEC 2025）论文集，第 11:1–11:21 页。Schloss-Dagstuhl-Leibniz 信息学中心，2025 年。 doi:10.4230/LIPIcs.IPEC.2025.11。19 Mark Jones 和 Mathias Weller。以扫描宽度为参数的树包含问题。准备中的手稿，2026 年。20 Christian Komusiewicz 和 Jannik Schestag。生态约束下最大化系统发育多样性：参数化复杂性研究。载于第 44 届 IARCS 软件技术与理论计算机科学基础年会（FSTTCS 2024）论文集，第 28:1–28:18 页。Schloss-Dagstuhl-Leibniz 信息学中心，2024 年。doi:10.4230/LIPIcs.FSTTCS.2024.28。21 Vincent Moulton、Charles Semple 和 Mike Steel。约束下优化系统发育多样性。《理论生物学杂志》，246(1):186–194，2007 年。 doi:10.1016/j.jtbi.2006.12.021。22 Fabio Pardi 和 Nick Goldman。比较基因组学的物种选择：贪心策略有效。《公共科学图书馆·遗传学》，1，2005 年。 doi:10.1371/journal.pgen.0010071。23 Neil Robertson 和 Paul D. Seymour。图小子。II. 树宽的算法方面。《算法杂志》，7(3):309–322，1986 年。 doi:10.1016/0196-6774(86)90023-4。24 Jannik Schestag。加权食物网使系统发育多样性的计算变得更加困难。载于第 51 届理论与实践计算机科学当前趋势国际会议（SOFSEM 2026）论文集。施普林格，2026 年。 arXiv:2510.05911。25 Celine Scornavacca 和 Mathias Weller。基于树宽的网络小简约问题算法。《分子生物学算法》，17(1):15，2022 年。 doi:10.1186/s13015-022-00216-w。26 Mike Steel。系统发育多样性与贪心算法。《系统生物学》，54(4):527–529，2005 年。 doi:10.1080/10635150590947023。27 Leo van Iersel、Mark Jones 和 Mathias Weller。将系统发育树嵌入低树宽网络。《离散数学与理论计算机科学》，45:2，2023 年。 doi:10.46298/dmtcs.10116。