arXiv:2602.06906v1 [math.PR] 6 Feb 2026

泊松-拉盖尔镶嵌的极限

Anna Gusakova[a]、Mathias in Wolde-L¨ubke[b]

摘要

对于由 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 中的泊松点过程（η_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 生成的 $\mathbb{R}^d$ 中泊松-拉盖尔镶嵌及其对偶的序列，我们证明了当 $n \to \infty$ 时的极限定理。η_n 的强度测度相对于勒贝格测度具有如下形式的密度：$(v,\ h) \mapsto f_n(h)$，其中 $v \in \mathbb{R}^d$且 $h \in \mathbb{R}$。将镶嵌视为其骨架（所有胞元边界的并集），我们给出关于 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的可验证条件，以确保其收敛至经典的泊松-沃罗诺伊/泊松-德劳内镶嵌，或另一种泊松-拉盖尔镶嵌。我们还讨论相应典型胞腔的收敛。作为推论，我们证明，当 $\beta \to -1$ 时，泊松 - 沃罗诺伊镶嵌和泊松 - 德劳内镶嵌分别是 β- 沃罗诺伊镶嵌和 β- 德劳内镶嵌的极限。

关键词。依概率收敛；泊松-拉盖尔镶嵌；泊松-沃罗诺伊镶嵌；泊松-德劳内镶嵌；泊松点过程；随机闭集；骨架；稳定化；典型胞腔；弱收敛**数学主题分类**。主分类 60D05；60G55；次分类 60B10

1 引言

$\mathbb{R}^d$ 中的镶嵌是凸多面体的一个局部有限族，这些凸多面体的内部非空且两两不交，并覆盖整个空间 $\mathbb{R}^d$。随机镶嵌是随机几何中的经典对象，但它们也自然出现在数学的其他领域，如渗流理论、最优输运、计算几何和高维概率，并在机器学习、蜂窝网络和材料科学中有诸多应用；参见例如 [1, 4, 7, 14, 32, 33, 34, 39]及其中的参考文献。本文研究泊松-拉盖尔镶嵌的骨架（即胞腔边界的并）的收敛性，并给出确保其收敛到经典泊松-沃罗诺伊/泊松-德洛内镶嵌或另一泊松-拉盖尔镶嵌的条件。

模型（泊松-拉盖尔镶嵌）。考虑一个带权点的（随机）集合 $A \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ $(v,\ h)$，其中 $v \in \mathbb{R}^d$ 表示空间坐标，$h \in \mathbb{R}$ 表示权（例如可解释为时间或高度）。对于任意 $(v,\ h) \in A$，将其拉盖尔胞定义为

$$C((v,h),A) := \{w \in \mathbb{R}^d : \|w-v\|^2 + h \le \|w-v'\|^2 + h' \text{ for all } (v',h') \in A\}.$$

[a]德国明斯特大学。电子邮件：gusakova@uni-muenster.de[b]德国明斯特大学。电子邮件：miwluebke@uni-muenster.de

相应的拉盖尔图 $\mathcal{L}(A)$是所有内部非空的拉盖尔胞构成的集合。在常权重的特殊情形下（例如 $h \equiv 0$），$\mathcal{L}(A)$与经典沃罗诺伊图一致。

本文取 A 为 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$中的泊松点过程 η，从而得到泊松-拉盖尔镶嵌。经典的泊松-沃罗诺伊情形也包含在内：若 $\eta = \eta^\gamma$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中强度为 $\gamma > 0$的齐次泊松点过程，则通过嵌入 $v \mapsto (v,0)$，可将其视为 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 中的一个点过程。此时，$\mathcal{L}(\eta^\gamma)$与泊松-沃罗诺伊镶嵌一致，这是最受研究的随机镶嵌 [27]之一。

在 $\mathbb{R}^d$ 中具有取值于 $\mathbb{R}$ 的标记的独立标记齐次泊松过程这一设定，已在 [26]中得到研究。 [16], 进一步提出了推广，作者考虑了 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 中的泊松点过程 $\eta = \eta_f$，其强度测度具有如下形式

$$\Lambda_f(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_E f(h) \mathbb{1}((v,h) \in \cdot)\, \mathrm{d}h\, \mathrm{d}v,$$

其中 $f : E \to \mathbb{R}_+$是某个局部可积的非负函数，且 $E \subset \mathbb{R}$满足某种自然的可积性假设，即 f 是可容许的 [16, 定义 3.4] （另见第 2.2 节）。已有一些特殊情形得到详细研究，具体为 $f_\beta(h) = c_{d+1,\beta} h^\beta$, $h > 0$ 对于 $\beta > -1$; $f'_\beta(h) = c'_{d+1,\beta}(-h)^{-\beta}$, $h < 0$对于 $\beta > d/2+1$; 以及 $\widetilde{f}(h) = (2\pi)^{-d/2-1} e^{h/2}$。这些分别得到所谓的$\beta$-沃罗诺伊、 β'-沃罗诺伊和高斯-沃罗诺伊镶嵌；参见 [17, 18, 19, 20, 21]。

除了 $\mathcal{L}(\eta)$，人们通常还会考虑对偶泊松-拉盖尔镶嵌 $\mathcal{L}^*(\eta)$。它定义为由点 v_1、.....、 v_m 的凸包构成的胞元集合，其中 $(v_i, h_i) \in \eta, 1 \le i \le m$，且相应的拉盖尔胞 $C((v_i, h_i)\ \eta)$ 有一个公共点。对于 $\eta = \eta_f$，当 f 可容许时，以及对于 $\eta = \eta^\gamma$，都有 $m = d+1$ 几乎必然成立，因此 $\mathcal{L}^*(\eta)$ 的每个胞元都是单形。特别地， $\mathcal{L}^*(\eta^\gamma)$ 称为泊松-德劳内镶嵌。

我们注意到，尽管经典的泊松-沃罗诺伊镶嵌 $\mathcal{L}(\eta^\gamma)$ 不属于族$\{\mathcal{L}(\eta_f)\colon\ f$可容许$\}$，但人们猜想它是 β-沃罗诺伊镶嵌的一个极限情形$\beta \to -1$ （见 [17, 备注 2]），并且有大量证据支持这一收敛性（更多详情见第 3.5 节）。我们关于泊松-拉盖尔镶嵌的一般收敛结果证实了这一猜想。

随机镶嵌的收敛。 为了给镶嵌建立极限定理，我们首先需要明确一个恰当的收敛概念。这并非易事，因为目前尚不清楚镶嵌空间是否为波兰空间（参见 [22, 第 2.3]节和第 3.1 节）。镶嵌 X 可以用几种自然的方式表示：作为粒子过程（由其胞元构成的集合）、作为通过其骨架定义的随机闭集

$$\mathrm{skel}(X) := \bigcup_{c \in X} \mathrm{bd}\, c;$$

或作为随机图 [5, 6]。这些表示方式导出了不同的收敛概念。本文采用骨架表示，并研究骨架作为随机闭集时的收敛。

关于镶嵌收敛的研究成果相对较少。例如，已有研究考察了 STIT 镶嵌的骨架收敛 [29, 30],，并在 [20] 中得到了 $\mathcal{L}^*(\eta_{f_\beta})$ 和 $\mathcal{L}^*(\eta_{f'_\beta})$ 的重标度极限 $\beta \to \infty$。另一方面，关于泊松–沃罗诺伊

镶嵌在双曲空间及其他非欧几里得空间中的分布强度极限，近期已在[12, 13, 15]中得到研究。

本文给出了高度密度序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的条件，这些条件确保相应的泊松-拉盖尔镶嵌及其对偶泊松-拉盖尔镶嵌的骨架收敛，其中包括极限为经典泊松-沃罗诺伊/泊松-德劳内镶嵌的情形。

主要结果。我们的主要结果涵盖两种不同的情形。

泊松-拉盖尔类中的极限： 设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列可容许函数，它在局部 L^1 意义下收敛于一个可容许函数 f，并满足一致的尾部/矩界

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{-\infty}^{x_0}|h|^{\frac{d}{2}+\delta}f_n(h)\mathrm{d}h<\infty,$$

对某些 $x_0\in\mathbb{R}$ 和 $\delta>0$ 成立（见条件（C1））。那么我们将在定理 3.3 中证明，存在点过程 η_f 与 $(\eta_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个耦合，使得对于任意半径为 $R>0$ 的球 B_R，有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\big(\operatorname{skel}(\mathcal{L}(\eta_{f_n}))\cap B_R=\operatorname{skel}(\mathcal{L}(\eta_f))\cap B_R\big)=1,$$
$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\big(\operatorname{skel}(\mathcal{L}^*(\eta_{f_n}))\cap B_R=\operatorname{skel}(\mathcal{L}^*(\eta_f))\cap B_R\big)=1.$$

在这种情况下，我们称收敛以高概率局部收敛的方式成立；这尤其意味着两个骨架都作为随机闭集弱收敛（更多细节见第 3.1 节和定理 3.5）。此外，正如第 3.5 节所示，这些判据还得到了 [20] 中的结果。

定理 3.3 的证明依赖于稳定化和耦合论证。从点过程 $(\eta_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ 的收敛过渡到骨架的收敛是一个微妙的问题，因为点过程构型的微小变化可能会在任意远处生成或移除胞元，从而导致本质上的非局部依赖。这给证明带来了新的障碍。

齐次极限： 设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列非负的局部可积函数，使得高度强度测度 $f_n(h)\mathrm{d}h$ 弱收敛到加权狄拉克测度$\gamma\delta_0$，或者等价地，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(h)\mathrm{d}h=\gamma\in(0,\infty)\quad\text{ for all }x>0$$

（见条件（C2））。从几何上看，这意味着 η_{f_n} 中的点集中在超平面 $\{(v,\ h):\ h=0\}$ 附近，当 $n\to\infty$ 时。接着，在定理 3.6 中，我们证明存在 η^γ 与 $(\eta_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个耦合，使得对任意半径为 $R>0$ 的球 B_R，都有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\big(\operatorname{skel}(\mathcal{L}^*(\eta_{f_n}))\cap B_R=\operatorname{skel}(\mathcal{L}^*(\eta^\gamma))\cap B_R\big)=1,\tag{1.1}$$

并且，随机闭集序列 $\operatorname{skel}(\mathcal{L}(\eta_{f_n}))$ 依概率收敛于 $\operatorname{skel}(\mathcal{L}(\eta^\gamma))$，当$n\to\infty$时成立。特别地，这两个序列作为随机闭集均弱收敛（见定理 3.8）。作为应用，我们得到经典的泊松-沃罗诺伊镶嵌和泊松-德洛内镶嵌分别是 β-沃罗诺伊镶嵌和 β-德劳内镶嵌在 $\beta\to-1$ 时的弱极限；见第 3.5 节。需要强调的是，这种情形与前一种情形有本质区别，因为η_{f_n}

是 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ 中的一个点过程，而 η^γ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个点过程。这使得耦合步骤复杂得多，也阻碍了我们证明关于 skel($\mathcal{L}(\eta_{f_n})$) 的 (1.1) 型结论（更多细节见备注 3.7）。

典型胞腔：可以将骨架层面的收敛视为镶嵌边界结构的“全局”收敛，而典型胞腔的收敛则具有“局部”性质，描述的是以平均（典型）胞腔为依据的镶嵌相似性。尽管直观上如此，仅有骨架收敛——即使是以高概率局部收敛——通常也不能推出典型胞的弱收敛；参见第 3.4 节。原因在于，对骨架的微小扰动可能产生大量额外的微小胞元，从而显著改变典型胞腔的分布。然而，[19, 命题 6.4]，证明，以高概率局部收敛与胞元强度收敛相结合，确实可以推出典型胞的弱收敛；我们将这一结果应用于泊松-拉盖尔镶嵌（见定理 3.13）。

本文结构。本文其余部分安排如下。第 2 节介绍全文所用的记号以及随机拉盖尔镶嵌的必要背景。第 3 节讨论随机闭集的概念和随机镶嵌的收敛，随后陈述主要结果，即定理 3.3 和定理 3.6。第 3.4 节专门讨论典型胞腔的收敛，其中包括定理 3.13；第 3.5 节则探讨一般收敛判据的若干应用。第 4 节汇集证明所需的稳定化引理。第 5 节给出定理 3.3 和定理 3.13 的证明，第 6 节证明定理 3.6。最后，第 7 节证明技术引理。

2 预备知识

2.1 常用记号

设 $d \geq 2$ 和 $A \subset \mathbb{R}^d$。我们用 int A 表示 A 的内部，用 bd A 表示其边界，用 cl A 表示其闭包，并用 $A^c = \mathbb{R}^d \setminus A$ 表示其补集。此外，我们用 conv(A) 表示 A 的凸包。如果 A 是一个可数集，我们用 $\#A$ 表示其基数。对于任意 $a > 0$，我们还记 $aA := \{ax\colon\ x \in A\}$；对于 $A,\ B \subset \mathbb{R}^d$，我们用 $A + B := \{a + b\colon\ a \in A,\ b \in B\}$ 表示它们的闵可夫斯基和。

$\mathbb{R}^d$ 中以 $r > 0$ 为半径的中心闭欧几里得球记作 B_r^d，并令 $\mathbb{B}^d := B_1^d$。在上下文明确时，我们可能省略上标 d，而只写作 B_r。$\mathbb{B}^d$ 的体积为

$$\kappa_d := \lambda_d(\mathbb{B}^d) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)},$$

其中，我们用 λ_d 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的勒贝格测度。我们用 $\tilde{\sigma}_{d-1}$ 表示单位球面 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的均匀分布；这是 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上唯一的旋转不变概率测度（如 [37, 第 584] 页所述）。

我们分别用 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{C}$ 表示 $\mathbb{R}^d$的闭子集和紧子集。这里总是包含空集；如果明确要排除 $\varnothing$，则记作 $\mathcal{F}'$ 和 $\mathcal{C}'$。$\mathcal{F}$上有一种自然的拓扑，称为 Fell 拓扑（见 [37, 定义 2.1.1]）。$\mathbb{R}^d$ 中的凸体是指 $\mathbb{R}^d$ 的紧凸子集。$\mathbb{R}^d$ 中所有凸体的集合记作 $\mathcal{K}$；同样，如果要排除空集，则记作 $\mathcal{K}'$。

下文将点 $x \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 表示为 $x = (v,\ h)$ 的形式，其中 $v \in \mathbb{R}^d$ 称为空间 坐标，$h \in \mathbb{R}$ 称为权、高度 或时间 坐标。我们用 $\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^d} : (v,\ h) \mapsto v$ 表示从 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^d$的正交投影算子。

2.2 随机拉盖尔镶嵌

本小节回顾随机镶嵌的概念，并介绍泊松-拉盖尔镶嵌这一类。关于一般随机镶嵌的更多详细讨论，请参阅 [37, 第 2 章、第 10] 章。

镶嵌。我们将 $\mathbb{R}^d$ 中的镶嵌 T 理解为一个局部有限的凸多面体（胞元）系统，它们覆盖整个空间，内部非空且两两不相交，并且对于任意不同的$t,\ t' \in T$，其交集 $t \cap t'$ 要么为空，要么是 t 和 t' 的一个面。根据面性质，我们可以将镶嵌 T 的 k 维面的集合定义为其所有胞元的 k 维面的集合。若任意 k维面恰好包含于 $d+1-k$ 个胞元中（对所有 $k \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ 均成立），则称 T 为正规 。我们用 $\mathbb{T}$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中所有镶嵌的集合，并将满足条件 $X \in \mathbb{T}$ 几乎必然成立的粒子过程 X （即 $\mathcal{C}'$ 中的点过程）称为随机镶嵌 （更多详情见 [37,第 4.1] 节）。

拉盖尔镶嵌及其对偶的构造。接下来我们介绍拉盖尔镶嵌，并给出一种基于所谓幂函数的构造。给定两点 $v, w \in \mathbb{R}^d$与 $h \in \mathbb{R}$，我们将 w 相对于点对 (v, h) 的幂 定义为

$$\mathrm{pow}\,(w, (v, h)) := \|w - v\|^2 + h.$$

设 A 为形如 $(v, h) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 的可数点集。我们将 $(v, h) \in A$ 的拉盖尔胞 定义为

$$C\,((v, h), A) := \big\{w \in \mathbb{R}^d : \mathrm{pow}(w, (v, h)) \le \mathrm{pow}(w, (v', h')) \text{ for all } (v', h') \in A\big\}.$$

A 的所有拓扑内部非空的拉盖尔胞的集合称为拉盖尔图

$$\mathcal{L}(A) := \{C((v, h), A) \colon (v, h) \in A,\, \mathrm{int}\, C((v, h), A) \neq \varnothing\}.$$

拉盖尔胞作为闭半空间之交的另一种描述（后文将会用到）可按如下方式得到。给定两个不同点 $(v_1, h_1), (v_2, h_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$，方程 $\mathrm{pow}(z, (v_1, h_1)) = \mathrm{pow}(z, (v_2, h_2))$ 的解集为一个超平面

$$H\big((v_1, h_1), (v_2, h_2)\big) := \{z \in \mathbb{R}^d : 2\langle z, v_1 - v_2\rangle = \|v_1\|^2 - \|v_2\|^2 + h_1 - h_2\}$$

它垂直于经过 v_1 和 v_2的直线。我们记

$$H^+\big((v_1, h_1), (v_2, h_2)\big) := \{z \in \mathbb{R}^d : 2\langle z, v_1 - v_2\rangle \ge \|v_1\|^2 - \|v_2\|^2 + h_1 - h_2\}$$

对于闭半空间。(v, h) 的拉盖尔胞 $\in A$ 随后可表示为

$$C((v, h), A) = \bigcap_{(v', h') \in A} H^+\big((v, h), (v', h')\big). \tag{2.1}$$

应当指出，根据（2.1），任何非空的拉盖尔胞都是凸且闭的，但不一定有界。此外，拉盖尔图不一定是整个空间的局部有限覆盖。因此， $\mathcal{L}(A)$ 是否为镶嵌，强烈取决于点集 A 的几何性质；已知 [36, 命题 1] ，在对 A 作温和正则性假设的条件下，有 $\mathcal{L}(A) \in \mathbb{T}$。如果 $\mathcal{L}(A)$ 是正规镶嵌，则记 $\mathcal{L}^*(A)$ 为对偶拉盖尔镶嵌。该镶嵌由 $\mathcal{L}(A)$ 如下得到：对于不同点 $(v_1, h_1) \dots ,(v_{d+1}, h_{d+1})$，单形 $\operatorname{conv}(v_1, \dots , v_{d+1})$ 属于 $\mathcal{L}^*(A)$，当且仅当

$$\bigcap_{i=1}^{d+1} C((v_i, h_i), A) \neq \varnothing.$$

注意，由于 $\mathcal{L}(A)$是正规镶嵌，上述交集（若非空）只包含一个点，该点是 $\mathcal{L}(A)$的顶点。由 [36,命题 2] 可知， $\mathcal{L}^*(A)$是一个镶嵌。
一种有趣的特殊情形是，所有点（v， h） $\in A$ 具有相同的权 $h \equiv h_0 \in \mathbb{R}$。此时，图 $\mathcal{L}(A)$与集合 $A' := \{v\colon (v,\ h) \in A\}$的著名沃罗诺伊图 $\mathcal{V}(A')$重合。同样，如果 $\mathcal{V}(A')$是正规镶嵌，那么对偶镶嵌 $\mathcal{D}(A')$称为德劳内镶嵌。

随机镶嵌模型。接下来我们将关注随机拉盖尔镶嵌，它们是通过令 A 为 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$中的泊松点过程而得到的。更确切地说，对于区间 $E \subset \mathbb{R}$ ，我们考虑以下类别

$$L^{1,+}_{\mathrm{loc}}(E) := \Big\{ f\colon \operatorname{int} E \to \mathbb{R}_+ \colon \int_K f(x) \mathrm{d}x < \infty \, \forall K \subset E,\, K \text{ compact} \Big\},$$

定义在 E 上的非负局部可积函数；给定函数 $f \in L^{1,\,+}{}_{\mathrm{loc}}(E)$，我们选择令 A 为强度测度具有如下形式的泊松点过程 η_f

$$\Lambda_f(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_E f(h) \mathbb{1}((v, h) \in \cdot) \, \mathrm{d}h \, \mathrm{d}v, \tag{2.2}$$

它是 $\mathbb{R}^d \times E$ 上的局部有限弥散测度。此外，我们假设 Λ_f 非平凡，即 $\Lambda_f([0,1]^d \times \mathbb{R}) > 0$。这些设定最早在 [16], 中提出，其中证明了，只要 f 满足某些自然的可积性条件，图示 $\mathcal{L}(\eta_f)$ 就是几乎必然正规随机镶嵌。为描述这些条件，我们需要引入分数阶积分的概念。对于 $\alpha > 0$ 和可测函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ，我们记

$$\big(\mathrm{I}^\alpha f\big)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} f(t)(x-t)^{\alpha-1} \mathrm{d}t, \qquad x > 0,$$

f 的 α 阶分数阶积分 。我们还指出，任意非负可测函数 f 都满足半群性质，即对于 α， $\beta > 0$ ，有

$$\mathrm{I}^\alpha \, \mathrm{I}^\beta f = \mathrm{I}^\beta \, \mathrm{I}^\alpha f = \mathrm{I}^{\alpha+\beta} f. \tag{2.3}$$

如果满足定义 3，.，我们就称函数 $f \in L^{1,+}{}_{\mathrm{loc}}(E)$ 可容许 [16, :

- (i) $E=[a,\infty)$ 对某个 $a\in\mathbb{R}$；(ii) $E=(-\infty,b)$ 对某个 $b\in\mathbb{R}$；或 (iii) $E=\mathbb{R}$,
- $\big(\mathrm{I}_{-}^{\frac{d}{2}+1}f\big)(t)<\infty$ 对所有 $t\in E$,

- 若 E 属于类型 (ii)，则存在 $\varepsilon>0$ 和 $n_0\in\mathbb{N}$，使得对所有 $n>n_0$，均有

$$\big(\mathrm{I}^{\frac{d}{2}+1}f\big)(b-1/n)\geq n^{\varepsilon}.$$

若 f 是可容许的，则 $\mathcal{L}(\eta_f)$ 是几乎必然正规随机镶嵌，其对偶镶嵌 $\mathcal{L}^*(\eta_f)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的几乎必然单纯随机镶嵌（见 [16, 定理 3.3]）。还应注意，若 $E=[a,\infty)$，则任意函数 $f\in L^1_{,\ \text{局部}}(E)$ 都是可容许的 [16, 命题 3.6]。我们将具有可容许密度 f 的拉盖尔镶嵌类 $\mathcal{L}(\eta_f)$ 称为具有密度的泊松-拉盖尔镶嵌。以下有用的恒等式描述了泊松-拉盖尔镶嵌 $\mathcal{L}(\eta_f)$ 在密度 f 的线性变换下的行为（见 [16, 命题 3.12]）：对于函数 $\varphi\colon\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\lambda x+c$，若满足 $\lambda>0$ 和 $c\in\mathbb{R}$，则有

$$\mathcal{L}(\eta_f)\overset{d}{=}\sqrt{\lambda}\,\mathcal{L}\Big(\eta_{\lambda^{\frac{d}{2}+1}(f\circ\varphi)}\Big),\tag{2.4}$$

其中，对于 $T\in\mathbb{T}$和 $a>0$，我们记 $aT:=\{at\colon\ t\in T\}$。
我们将要研究的另一个模型构造如下。设 η^γ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的强度为 $\gamma>0$的齐次泊松点过程。通过将每个点 $v\in\eta^\gamma$ 与点 $(v,0)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$对应起来，我们将 η^γ 视为 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ 中的点过程。随机镶嵌 $\mathcal{L}(\eta^\gamma)$称为 泊松-沃罗诺伊镶嵌，其对偶镶嵌 $\mathcal{L}^*(\eta^\gamma)$称为泊松-德劳内镶嵌。这些是经典的随机镶嵌模型，已得到详细研究，参见 [37,第 10.2] 节。需要注意的是，泊松-沃罗诺伊镶嵌不属于带密度的泊松-拉盖尔镶嵌这一类。

由于通常将简单平稳点过程 η与其支撑集等同起来，我们将 $\eta\cap K$ 记作 η在 K上的限制，其中 $K\subset\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$。当 K 有界时，我们有 $\eta\cap K$ 几乎必然是有限的。我们注意到，如果 $\mathcal{L}(\eta)$ 是一个镶嵌，那么仍然可以构造拉盖尔图 $\mathcal{L}\big(\eta\cap K\big)$，并且它同样是由凸集组成的局部有限系统，覆盖 $\mathbb{R}^d$，但这些集合不一定再是紧集。构造对偶图 $\mathcal{L}^*\big(\eta\cap K\big)$ 仍然是可能的，但现在得到的是由凸紧集组成的局部有限系统，它们并不覆盖整个空间。

3 随机拉盖尔镶嵌的极限定理

本节介绍本文关于泊松-拉盖尔镶嵌收敛的主要结果。首先，我们将介绍全文中使用的随机镶嵌收敛概念。

3.1 随机镶嵌与随机闭集的收敛

需要指出的是，镶嵌空间 $\mathbb{T}$ 不具有自然的拓扑结构，而且目前尚不清楚该空间是否为波兰空间（参见 [22, 第 2.3] 节中的讨论）。为了

克服这一困难，通常可以方便地将平稳随机镶嵌 X与其骨架等同起来，即

$$\mathscr{X} = \operatorname{skel}(X) := \bigcup_{c\in X} \operatorname{bd} c.$$

根据 [37, 第 464] 页的讨论，可知 $\mathscr{X}$ 是一个平稳的随机闭集，即从某个概率空间 Ω 到配备 Fell 拓扑的 $\mathcal{F}$ 的可测映射。特别地，已知 $\mathcal{F}$ 是一个波兰空间 [28, 第 567] 页，其可能的度量由 [28, 式 (C.1)] 给出。下文中，我们将随机泊松-拉盖尔镶嵌 $\mathcal{L}(\eta)$ 的骨架记为$\mathscr{L}(\eta)$，将对偶泊松-拉盖尔镶嵌 $\mathcal{L}^*(\eta)$ 的骨架记为 $\mathscr{L}^*(\eta)$。

本文中，随机镶嵌的收敛指相应骨架的收敛。对于随机闭集序列 $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$，有几种不同的收敛概念（更多详情见 [28]）。第一个自然的概念是弱收敛 [28, 定义 1.7.1]。我们不采用定义，而是依赖以下一个实用判据 [28, 定理 1.7.7]，该判据以相应容量泛函的逐点收敛来表述。随机闭集 Z 的容量泛函T_Z 定义为 $T_Z(C) := \mathbb{P}(Z \cap C \neq \varnothing)$，其中 $C \in \mathcal{C}$。于是，随机闭集族 $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 弱收敛到随机闭集 Z，当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} T_{Z_n}(C) = T_Z(C) \tag{3.1}$$

对所有满足 $T_Z(\operatorname{int} C) = T_Z(\operatorname{cl} C)$ 的 $C \in \mathcal{C}$ 均成立。另一种概念是依概率收敛 [28,定义 1.7.25]。我们称随机闭集族 $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 依概率收敛到随机闭集 Z，如果对于任意 $\varepsilon > 0$ 和 $C \in \mathcal{C}$，都有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big([(Z_n \setminus Z^{\varepsilon-}) \cup (Z \setminus Z_n^{\varepsilon-})] \cap C \neq \varnothing\big) = 0, \tag{3.2}$$

其中，对于闭集 F，集合 $F^{\varepsilon-}$ 是 F 的开 ε 邻域，即

$$F^{\varepsilon-} = \{z \in \mathbb{R}^d \colon \inf_{x\in F} \|z - x\| < \varepsilon\}.$$

这种收敛概念比弱收敛更强，参见 [28,推论 1.7.29]。
我们注意到，Fell 拓扑及其对应的弱收敛在随机闭集理论中得到了广泛应用。与此同时，将其应用于随机镶嵌的骨架时，弱收敛并不能保证许多有趣量的收敛，尤其不能保证典型胞腔收敛（进一步讨论见第 3.4 节）。这促使我们引入另一种强得多的收敛概念。

定义 3.1. 我们称一族随机闭集 $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 以高概率局部收敛到一个随机闭集 Z，如果对于每个 $R > 0$，都有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \cap B_R \neq Z \cap B_R) = 0.$$

命题 3.2。 若$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 以高概率局部收敛到 Z，则$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 Z，且依概率收敛并弱收敛。

证明。 任取 $C \in \mathcal{C}$，并令 $R > 0$ 满足 $C \subset B_R$。此外，令 $\varepsilon > 0, Y_n := Z_n \cap B_R$ 且 $Y := Z \cap B_R$。注意到

$$(Z_n \setminus Z^{\varepsilon-}) \cap C = (Z_n \cap C) \setminus (Z^{\varepsilon-} \cap C) = (Y_n \cap C) \setminus (Z^{\varepsilon-} \cap B_R \cap C) = (Y_n \setminus (Z^{\varepsilon-} \cap B_R)) \cap C.$$

类似地

$$(Z \setminus Z_n^{\varepsilon-}) \cap C = (Y \setminus (Z_n^{\varepsilon-} \cap B_R)) \cap C.$$

假设 $Y_n = Y$，则 $(Y_n \setminus (Z^{\varepsilon-} \cap B_R)) \cup (Y \setminus (Z_n^{\varepsilon-} \cap B_R)) = \varnothing$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 均成立。因此，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big([(Z_n \setminus Z^{\varepsilon-}) \cup (Z \setminus Z_n^{\varepsilon-})] \cap C \neq \varnothing\big) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n \neq Y) = 0,$$

这意味着 $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 依概率收敛到 Z，并且根据 [28, 推论 1.7，29]也弱收敛。

□

在下文中，为简便起见，我们有时会滥用记号，称随机镶嵌序列 $(\mathcal{T})_{n\in\mathbb{N}}$ 弱收敛、依概率收敛或以高概率局部收敛，如果其相应骨架序列也以相同方式收敛。

3.2 Con具有密度的泊松-拉盖尔镶嵌类中的收敛

我们首先为带密度的泊松-拉盖尔镶嵌序列确立充分条件，以确保其收敛到另一个带密度的泊松-拉盖尔镶嵌。设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一列满足下列条件的可容许函数:

(C1) (i) 对任意 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $f_n \in L^{1,+}{}_{\mathrm{loc}}(E_n)$，其中当 $n \to \infty$ 时有 $E_n \uparrow E$；(ii) 对所有 $x \in E$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{x} |f_n(h) - f(h)| \mathrm{d}h = 0,$$

其中某个可容许函数 $f \in L^{1,+}{}_{\mathrm{loc}}(E)$ 满足 $(\mathrm{I}^1 f)(1/2) > 0$;

(iii) 并且对某个固定的 $x_0 \in \mathbb{R}$ 以及某个 $\delta > 0$，成立

$$M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{-\infty}^{x_0} |h|^{\frac{d}{2}+\delta} f_n(h) \mathrm{d}h < \infty.$$

我们注意到，条件 $(\mathrm{I}^1 f)(1/2) > 0$ 并不具有限制性，因为 $\lim_{x\to\infty}(\mathrm{I}^1 f)(x) > 0$，且 $\mathrm{I}^1 f$ 是单调的。因此，存在 $a \in \mathbb{R}$，使得 $(\mathrm{I}^1 f)(a) > 0$。由于根据 (2.4)，在对 f 施加变换 $\varphi(x) = x + (1/2 - a)$ 时，$\mathcal{L}(f)$ 的分布不变，我们不失一般性可以假设 $a = 1/2$。这一选择将便于证明。Th

e main 本小节的结果如下定理，将在第 5 节中证明 .

定理 3.3。 设 $\eta_n := \eta_{f_n}$, $n \in \mathbb{N}$ 是一列密度$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 *(C1)* 的泊松点过程，并设 $\eta := \eta_f$。那么，存在定义在共同概率空间上的点过程 $\widetilde{\eta}$ 和 $(\widetilde{\eta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $\widetilde{\eta} \stackrel{d}{=} \eta$ 和 $\widetilde{\eta}_n \stackrel{d}{=} \eta_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立，并且

(i) $\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_n)$ 以高概率局部收敛至 $\mathscr{L}(\widetilde{\eta})$，当 $n \to \infty$;

(ii) $\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_n)$ 以高概率局部收敛于 $\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta})$，当 $n \to \infty$ 时。

备注 3.4。 我们相信，我们的方法可以推广到泊松点过程的强度测度 η_n 具有如下形式 $\lambda_d \otimes \Lambda_n$ 的情形，其中某个局部有限测度 Λ_n 定义在 $\mathbb{R}$ 上，并满足额外的可积性假设。首先需要按照 [16, 定理 3.3]中的步骤，确保相应的拉盖尔镶嵌 $\mathcal{L}(\eta_n)$ 是定义良好的。为使文章简洁并便于处理，本文不考虑这一更一般的设定，而是专注于 [16] 中引入的模型。

作为定理 3.3 和命题 3.2 的直接推论，我们得到。

定理 3.5。 设 $\eta_n := \eta_{f_n}$, $n \in \mathbb{N}$ 是一列具有密度$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 并满足 *(C1)* 的泊松点过程，且设 $\eta := \eta_f$。则随机闭集 $\mathscr{L}(\eta_n)$ 和 $\mathscr{L}^*(\eta_n)$ 分别弱收敛于 $\mathscr{L}(\eta)$ 和 $\mathscr{L}^*(\eta)$，当 $n \to \infty$ 时。

3.3 泊松-沃罗诺伊镶嵌作为泊松-拉盖尔镶嵌的弱极限

本节将证明，对于满足以下条件的函数序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$，经典泊松-沃罗诺伊镶嵌和泊松-德劳内镶嵌的骨架分别是 $\mathscr{L}(\eta_{f_n})$ 和 $\mathscr{L}^*(\eta_{f_n})$ 的弱极限:

(C2) 设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^{1,+}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ 是满足下列条件的函数序列

$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{I}^1 f_n)(x) = \gamma \in (0,\infty) \text{ for all } x > 0.$$

请注意，这种设定不同于上一节所考虑的设定，因为泊松-沃罗诺伊镶嵌不属于具有密度的泊松-拉盖尔镶嵌类。

本节的主要结果是下面的定理，该定理将在第 6 节中证明。

定理 3.6。 设 $\eta_n := \eta_{f_n}$, $n \in \mathbb{N}$ 是具有密度$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 、满足 *(C2)* 且具有 $\gamma > 0$ 的泊松点过程序列，并设 η^γ 是 $\mathbb{R}^d$ 上强度为 γ 的齐次泊松点过程。那么存在定义在共同概率空间上的点过程 $\widetilde{\eta}^\gamma$ 和$(\widetilde{\eta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $\widetilde{\eta}^\gamma \stackrel{d}{=} \eta^\gamma$，且对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\widetilde{\eta}_n \stackrel{d}{=} \eta_n$，满足

(i) $\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_n)$ 当 $n \to \infty$ 时，以高概率局部收敛到 $\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}^\gamma)$;

(ii) $\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_n)$ 当 $n \to \infty$ 时依概率收敛到 $\mathscr{L}(\widetilde{\eta}^\gamma)$。

注记 3.7. 我们指出，定理 3.6 的第 (ii) 部分无法借助我们的方法推广到更强的“以高概率局部收敛”这一概念。障碍在于镶嵌 $\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_n)$ 的构造。证明背后的直观想法如下。我们找到泊松点过程 $((\widetilde{\eta}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \widetilde{\eta}^\gamma)$ 的一个耦合，使得（局部地）当 n 足够大时，可以把点过程 $\widetilde{\eta}_n$ 视为点过程 $\widetilde{\eta}^\gamma$，其中每个点 $(v,0) \in \widetilde{\eta}^\gamma$ 沿高度轴被独立且随机地抬升，并且这种“畸变”随着 $n \to \infty$ 而变小。

注意，对偶拉盖尔镶嵌 $\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_n)$ 的顶点由点 $(v,h) \in \widetilde{\eta}_n$ 的空间坐标v构成，尽管并非每个点 (v,h) 都会产生一个顶点。这意味着，点过程 $\widetilde{\eta}^\gamma$ 的微小“畸变”要么完全不改变镶嵌，要么导致某些顶点消失。因此，在我们的构造下，$\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_n)$ 与 $\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}^\gamma)$ 仅当并非每个 $(v,h) \in \widetilde{\eta}_n$ 都产生 $\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_n)$ 的一个顶点时，才不会（局部）重合。随着“畸变”变小，该事件的概率也变小。

与此同时，对于拉盖尔镶嵌，点过程 $\widetilde{\eta}^\gamma$ 的每一次微小“扰动”都会导致胞元边界发生微小“扰动”；这意味着，在我们的构造中，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，$\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_n)$ 与 $\mathscr{L}(\widetilde{\eta}^\gamma)$ 在局部重合的概率始终为 0。

作为直接的 由上述定理和命题 3.2 可得以下结果 lt.

定理 3.8。设 $\eta_n :=^{\eta_{f_n}}$，$n \in \mathbb{N}$ 是一列密度$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足条件 *(C2)*，其中 $\gamma > 0$；设 η^γ 是 $\mathbb{R}^d$ 中强度为 γ 的齐次泊松点过程。那么，随机闭集 $\mathscr{L}(\eta_n)$ 与 $\mathscr{L}^*(\eta_n)$ 分别弱收敛于 $\mathscr{L}(\eta^\gamma)$ 和 $\mathscr{L}^*(\eta^\gamma)$，当 $n \to \infty$ 时。

注记 3.9。 注意，泊松点过程 η^γ（通过将 $v \in \eta^\gamma$与 $(v,0)$ 等同而嵌入 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$）的强度测度为 $\gamma\lambda_d \otimes \delta_0$，其中 δ_0 表示位于 0 处的狄拉克质量，它不具有 (2.2) 的形式。因此，泊松-沃罗诺伊镶嵌 $\mathcal{L}(\eta^\gamma)$ 不属于具有密度的泊松-拉盖尔镶嵌这一族。另一方面，根据定理 3.8，经典的泊松-沃罗诺伊镶嵌和泊松-德劳内镶嵌可作为极限情形纳入这一族。

3.4 典型胞的收敛

本节设 $\mathcal{T}$ 为平稳随机镶嵌。 $\mathcal{T}$ 的一个重要特征是其典型胞腔，直观上可将其视为一个随机多面体，代表从 $\mathcal{T}$ 的胞元中“均匀随机”选取的一个胞元。更确切地说，设 $z\colon \mathcal{C}' \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}^d$ 是满足以下条件的可测函数：对于任意 $x \in \mathbb{R}^d$、$C \in \mathcal{C}'$ 和 $T \in \mathbb{T}$，$z(C+v, T+v) = z(C,T)$。这样的函数称为（广义）中心函数。平稳随机镶嵌 $\mathcal{T}$ 的胞元强度定义为

$$\gamma_d(\mathcal{T}) := \mathbb{E}\sum_{t\in\mathcal{T}} \mathbb{1}(z(t,\mathcal{T}) \in [0,1]^d).$$

对于 $\gamma_d(\mathcal{T}) \in (0, \infty)$，$\mathcal{T}$ 的典型胞腔 $Z(\mathcal{T})$ 定义为具有如下分布的随机多面体

$$\mathbb{P}^0_{\mathcal{T}}(\cdot) := \frac{1}{\gamma_d(\mathcal{T})}\mathbb{E}\sum_{t\in\mathcal{T}} \mathbb{1}(t - z(t,\mathcal{T}) \in \cdot)\mathbb{1}(z(t,\mathcal{T}) \in [0,1]^d).$$

更多详情请参见 [37, 第 10] 章。已知胞元强度 $\gamma_d(\mathcal{T})$ 不依赖于中心函数 z 的选择，而典型胞腔 $\mathbb{P}^0_{\mathcal{T}}$ 的分布对 z 的依赖仅体现为平移操作 $C \mapsto C - z(C)$（见 [37, 定理 4.2.1]）。

下面自然会产生这样一个问题。设 $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是平稳随机镶嵌序列，它以弱收敛／依概率收敛／以高概率局部收敛的方式收敛到平稳随机镶嵌 $\mathcal{T}$，当 $n \to \infty$ 时，典型胞腔 $\mathbb{P}^0_{\mathcal{T}_n}$ 的分布是否弱收敛到 $\mathbb{P}^0_{\mathcal{T}}$，当 $n \to \infty$ 时？反过来，典型胞的弱收敛是否意味着相应镶嵌的弱收敛？当序列 $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 以高概率局部收敛到 $\mathcal{T}$ 时，[19] 中证明了以下结果。

命题 3.10（命题 6.4，见 [19]）。设 $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的平稳随机镶嵌序列，该序列以高概率局部收敛到平稳随机镶嵌 $\mathcal{T}$，当 $n\to\infty$ 时。此外，假设 $\lim_{n\to\infty}\gamma_d(\mathcal{T}_n)=\gamma_d(\mathcal{T})$，且这些强度均有限。那么

$$\mathbb{P}^0_{\mathcal{T}_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mathbb{P}^0_{\mathcal{T}},\qquad weakly\ on\ \mathcal{C}'.$$

注 3.11。我们猜想，在对随机镶嵌的收敛性作较弱假设的条件下，上述命题仍然成立；也就是说，可以将以高概率局部收敛替换为依概率收敛，甚至弱收敛。本文不再进一步探讨这一方向，而将其留待未来研究。

我们注意到，关于胞元强度收敛性的额外条件确实是必要的（见注 3.14）。与此同时，该条件可能很难验证，因为我们通常无法获得 $\gamma_d(\mathcal{T})$ 的精确公式。即使对于 $\mathcal{T}=\mathcal{L}(\eta_f)$ 或 $\mathcal{T}=\mathcal{L}^*(\eta_f)$，只有在非常特殊的 f 取值下才能得到此类公式（见 [17,第 6 节3], [20, 第 5 节2]以及 [16,定理 5.1]）。

利用对偶关系，我们可以不考虑 $\mathcal{T}$ 的胞元强度，而考虑对偶镶嵌 $\mathcal{T}^*$ 的顶点强度，后者通常更易于分析。更准确地说，给定一个平稳随机镶嵌 $\mathcal{T}$，记 $\mathcal{F}_0(\mathcal{T})$ 为其所有胞元的全部顶点所组成的集合，并记 $\gamma_0(\mathcal{T}):=\mathbb{E}[\#(\mathcal{F}_0(\mathcal{T})\cap[0,1]^d)]$ 为 $\mathcal{T}$ 的顶点强度。则有 $\gamma_d(\mathcal{T})=\gamma_0(\mathcal{T}^*)$。下面的引理给出了顶点强度收敛的一个简单充分条件。

引理 3.12。设$(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$上的一列平稳随机镶嵌，并且当 $n\to\infty$时，以高概率局部收敛到平稳随机镶嵌 $\mathcal{T}$。假设对任意 $n\in\mathbb{N}$，$\gamma_0(\mathcal{T})$和 $\gamma_0(\mathcal{T}_n)$ 均为有限值。此外，假设存在某个 $p>1$ 使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\Big[\#(\mathcal{F}_0(\mathcal{T}_n)\cap[0,1]^d)^p\Big]<\infty.$$

那么 $\lim_{n\to\infty}\gamma_0(\mathcal{T}_n)=\gamma_0(\mathcal{T})$。

证明。令 $p>1$并设 $N_n:=\#(\mathcal{F}_0(\mathcal{T}_n)\cap[0,1]^d)$，且 $N:=\#(\mathcal{F}_0(\mathcal{T})\cap[0,1]^d)$。首先注意到，对于 $n\in\mathbb{N}$，事件 $\mathcal{D}_n:=\{\mathcal{T}_n\cap[0,1]^d=\mathcal{T}\cap[0,1]^d\}$ 蕴含 $N_n=N$，根据定义 3.1，我们有 $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\mathcal{D}_n^c)=0$。于是

$$\mathbb{P}(N\neq N_n)\le\mathbb{P}(\mathcal{D}_n^c)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

因此，当 $n\to\infty$ 时，$N_n\to N$ 依概率收敛。于是存在一个子序列 $(N_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $N_{n_k}\to N$ 当 $k\to\infty$ 时几乎必然成立，并由法图引理

$$\mathbb{E}[N^p]\le\liminf_{k\to\infty}\mathbb{E}[N_{n_k}^p]\le\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}[N_n^p]<\infty.$$

然后令 $C:=\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}[N_n^p]<\infty$，并利用 H¨older不等式，我们得到

$$\begin{aligned}|\gamma_0(\mathcal{T}_n)-\gamma_0(\mathcal{T})|&=\mathbb{E}\Big[\big|\#(\mathcal{F}_0(\mathcal{T}_n)\cap[0,1]^d)-\#(\mathcal{F}_0(\mathcal{T})\cap[0,1]^d)\big|\mathbb{1}(\mathcal{D}_n^c)\Big]\\&\le 2C^{1/p}\left(\mathbb{P}(\mathcal{D}_n^c)\right)^{1-1/p}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

现在，利用定理 3.3、命题 3.10 和引理 3.12，我们可以给出一列满足 (C1) 的密度 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得相应拉盖尔镶嵌的典型胞元收敛的充分条件。该定理的证明将在第 5 节给出。

定理 3.13。令 $d \geq 2$。令 $\eta_n := \eta_{f_n}$，$n \in \mathbb{N}$ 为一列密度为 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$、满足 *(C1)* 的泊松点过程，并令 $\eta := \eta_f$。此外，我们假设以下两个条件之一成立：

(i) 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$、常数 $C \in (0,\infty)$、$\alpha > 0$、$\varepsilon > 0$ 和 $x_0 \in E$，使得对于所有 $n \geq n_0$ 以及所有 $x \geq x_0$，均有

$$\big(\mathrm{I}^1 f_n\big)(x + 4d + 2) \leq C\big(\mathrm{I}^1 f_n\big)(x), \qquad \big(\mathrm{I}^1 f_n\big)(x) \geq \alpha x^{\varepsilon};$$

(ii) 对某个 $p > 1$，有 $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n^p < \infty$，其中 $a_n = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x$。

则有

$$\mathbb{P}^0_{\mathcal{L}(\eta_n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}^0_{\mathcal{L}(\eta)}, \qquad \textit{weakly on } \mathcal{C}'.$$

接下来我们将证明，胞元强度的收敛是命题 3.10 中的必要条件，并且典型胞腔的弱收敛并不意味着骨架的弱收敛。

注 3.14（胞元强度收敛是必要条件）。考虑以下例子。令 $U_n \sim \mathrm{unif}([0,2^{-n}]^d)$、$n \in \mathbb{N}_0$ 为一列相互独立的随机向量，并令 $\mathcal{T}^{(n)} := \{U_n + 2^{-n}z + [0,2^{-n}]^d\colon z \in \mathbb{Z}^d\}$ 为一个平稳随机镶嵌，即尺度为 2^{-n} 的均匀平移格。我们定义平稳随机镶嵌序列 $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如下：

$$\mathcal{T}_n := \begin{cases} \mathcal{T}^{(n)} \text{ with probability } p_n = 2^{-nd/2}, \\ \mathcal{T}^{(0)} \text{ with probability } 1 - p_n, \end{cases}$$

并设 $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{(0)}$ 几乎必然成立。那么，对于任意 $R > 0$，我们有

$$\mathbb{P}(\mathrm{skel}(\mathcal{T}_n) \cap B_R \neq \mathrm{skel}(\mathcal{T}) \cap B_R) \leq \mathbb{P}(\mathcal{T}_n = \mathcal{T}^{(n)}) = p_n \to 0,$$

当 $n \to \infty$ 时，这意味着 $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 随着 $n \to \infty$ 趋于 $\mathcal{T}$，以高概率局部收敛。与此同时，$\gamma_d(\mathcal{T}) = 1$，而

$$\gamma_d(\mathcal{T}_n) = (1 - p_n) + 2^{nd}p_n = 1 - 2^{-nd/2} + 2^{nd/2} \to \infty,$$

当 $n \to \infty$ 时。现在我们将证明 $\mathbb{P}^0_{\mathcal{T}_n}$ 不弱收敛到 $\mathbb{P}^0_{\mathcal{T}}$。事实上，为简单起见，我们取中心函数 z 为字典序最小顶点。那么 $Z(\mathcal{T}) = [0,1]^d$ 几乎必然成立，而对于 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\mathbb{P}^0_{\mathcal{T}_n}(\cdot) = \mathbb{1}\{[0,2^{-n}]^d \in \cdot\}\frac{2^{nd/2}}{1 - 2^{-nd/2} + 2^{nd/2}} + \mathbb{1}\{[0,1]^d \in \cdot\}\frac{1 - 2^{-nd/2}}{1 - 2^{-nd/2} + 2^{nd/2}},$$

这意味着，随着 $n \to \infty$，$Z(\mathcal{T}_n)$ 在分布上收敛到单点集 $\{o\}$。
根据命题 3.2，这也意味着，镶嵌的弱收敛和依概率收敛并不蕴含相应典型胞腔的弱收敛。

注 3.15（典型胞腔的弱收敛并不蕴含相应镶嵌的弱收敛）。只需证明存在两个不同的平稳随机镶嵌，使得它们的典型胞腔具有相同的分布。我们考虑区间

$$I_1^{(1)} := [0,1/6],\, I_2^{(1)} := [1/6,1/3],\, I_3^{(1)} := [1/3,2/3],\, I_4^{(1)} := [2/3,1],$$
$$I_1^{(2)} := [0,1/3],\, I_2^{(2)} := [1/3,1/2],\, I_3^{(2)} := [1/2,5/6],\, I_4^{(2)} := [5/6,1],$$

并定义 $[0,1]^2$ 的两种不同铺砌

$$C_{j,k}^{(i)} := I_j^{(i)} \times I_k^{(i)}, \quad i = 1,2,\, j,k = 1,2,3,4.$$

进一步令 $U \sim \mathrm{unif}([0,1)^2)$，并定义 $\mathbb{R}^2$ 中的平稳随机镶嵌

$$\mathcal{T}_i := \big\{C_{j,k}^{(i)} + z + U \colon j,k = 1,2,3,4,\, z \in \mathbb{Z}^2\big\}, \qquad i = 1,2.$$

令中心函数 z 为字典序最小顶点。注意，$\gamma_2(\mathcal{T}_1) = \gamma_2(\mathcal{T}_2) = 16$ 并且

$$B := \{C_{j,k}^{(1)} - z(C_{j,k}^{(1)}) \colon j,k = 1,2,3,4\} = \{C_{j,k}^{(2)} - z(C_{j,k}^{(2)}) \colon j,k = 1,2,3,4\}.$$

Then

$$\mathbb{P}^0_{\mathcal{T}_1}(\cdot) = \frac{1}{16}\mathbb{E}\sum_{C\in B} \mathbb{1}\big(C \in \cdot\big) = \mathbb{P}^0_{\mathcal{T}_2}(\cdot),$$

但几乎必然有 $\mathrm{skel}(\mathcal{T}_1) \neq \mathrm{skel}(\mathcal{T}_2)$。

3.5 应用

本节最后，我们将考察文献中此前讨论过的一些特殊情形下，我们的结果的若干应用。

独立标记的泊松点过程的拉盖尔镶嵌。 设 q 为某个概率测度

$$\mathbb{Q} \qquad \mathbb{R}_+ \qquad\qquad f_n\ h \quad = \gamma n\, q\ nh\ \ \in \text{在上}$$

$L^{1,+}_{n\in\mathbb{N}}$
的密度，并考虑函数族$(\,)\colon(\,)_{,\mathrm{loc}}\,(\mathbb{R}_+)$，。注意，根据泊松点过程的标记定理 [24, 定理5.6] ，点过程 $\eta_n := \eta_{f_n}$ 与齐次泊松点过程 η^γ的独立 $\mathbb{Q}_n$-标记具有相同的分布，其中

$$\mathbb{Q}_n(\cdot) = n\int_{\mathbb{R}^+} q(nh)\mathbb{1}(h \in \cdot)\mathrm{d}h,$$

是 $\mathbb{R}_+$上的概率测度。

推论 3.16. 令 $f_n(h) = \gamma n\, q(nh)$、$n \in \mathbb{N}$，其中 $q \in L^{1,+}{}_{\mathrm{loc}}\,(\mathbb{R}_+)$ 满足 $\int_{\mathbb{R}_+} q(h)\mathrm{d}h = 1$。随机闭集 $\mathscr{L}(\eta_n)$ 和 $\mathscr{L}^*(\eta_n)$ 分别弱收敛到 $\mathscr{L}(\eta^\gamma)$ 和 $\mathscr{L}^*(\eta^\gamma)$，当$n \to \infty$时。

证明。 对于任意 $x > 0$ ，由单调收敛定理可得

$$(\mathrm{I}^1 f_n)(x) = \gamma n \int_0^x q(nh)\mathrm{d}h = \gamma \int_0^{nx} q(h)\mathrm{d}h \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma \int_0^\infty q(h)\mathrm{d}h = \gamma.$$

因此， f_n 满足 (C2)，由定理 3.8 可得证明。 □

从几何角度来看，我们可以如下理解这一结果。如上所述， η_n 可以视为对$\eta\gamma$进行独立的 $\mathbb{Q}_n$标记。当 $n \to \infty$ 时，每个点的标记（权）都会趋近于 0，这意味着相应的拉盖尔（加权）胞腔会趋近于沃罗诺伊（非加权）胞腔。 [25], 中研究了这个例子，并证明 $\mathcal{L}$（η_n）的典型胞腔依分布收敛于 $\mathcal{L}$（η^γ）的典型胞腔。推论 3.16 为骨架层面的收敛提供了这一结果的对应版本。

β-沃罗诺伊和 β-德劳内镶嵌。 另一个应用与 β型镶嵌有关（见 [17] 中的介绍，并在一系列论文 [18, 19, 20, 21]中作了进一步研究）。对于 $\beta > -1$，考虑 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ 中的泊松点过程η_β ，其强度测度具有 (2.2) 的形式，密度为

$$f_\beta(h) = c_{d+1,\beta} h^\beta, \qquad h \geq 0, \qquad c_{d+1,\beta} := \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} + \beta + 2\right)}{\pi^{\frac{d}{2}+1}\Gamma(\beta+1)}.$$

请注意，在 [17] 中考察了略有不同的归一化，即 $\pi^{-\frac{d+1}{2}}\Gamma\left(\frac{d+1}{2} + \beta + 1\right)/\Gamma(\beta+1)$。正态随机镶嵌 $\mathcal{L}(\eta_\beta)$称为 β-沃罗诺伊镶嵌，而其对偶镶嵌 $\mathcal{L}^*(\eta_\beta)$称为 β-德劳内镶嵌。 β-沃罗诺伊和 β-德劳内这两个名称，意在指出 $\mathcal{L}(\eta_\beta)$及其对偶 $\mathcal{L}^*(\eta_\beta)$分别与经典泊松–沃罗诺伊镶嵌和泊松-德洛内镶嵌之间的联系。 [17], 中曾提及这一点，但未给出证明；文中指出，当 $\beta \to -1$ 时，经典泊松–沃罗诺伊镶嵌和泊松–德劳内镶嵌分别是 β-沃罗诺伊镶嵌和 β-德劳内镶嵌的极限情形。同时， [17, 的注记 6] 证明了，当 $\beta \to -1$ 时， $\mathcal{L}^*(\eta_\beta)$ 的典型胞腔依分布收敛到 $\mathcal{L}(\eta^{\gamma_d})$ 的典型胞腔，其中 $\gamma_d = \pi^{-\frac{d}{2}+1}\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)$。此外， [19, 的命题 3.1] 证明了，底层点过程 η_β 在局部有限整数值测度空间 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ 上弱收敛到 η^{γ_d}。此外， [19, 的定理 4.1] 表明，$\mathcal{L}(\eta^{\gamma_d})$ 与一个 ℓ 维仿射子空间的交在等距变换意义下是 $\mathbb{R}^\ell$ 中的一个随机镶嵌，其分布与一个 ℓ 维 β-沃罗诺伊镶嵌相同，且满足 $\beta = -1 + (d-\ell)/2$。所有这些事实都为如下观点提供了证据：当 $\beta \to -1$ 时，泊松–沃罗诺伊镶嵌和泊松-德洛内镶嵌分别是 β-沃罗诺伊镶嵌和 β-德劳内镶嵌的极限。借助定理 3.8，我们现在可以从相应骨架收敛的意义上证明这一收敛。

推论 3.17. 随机闭集 $\mathscr{L}(\eta_\beta)$ 与 $\mathscr{L}^*(\eta_\beta)$ 当 $\beta \to -1$ 时分别弱收敛于 $\mathscr{L}(\eta^{\gamma_d})$和 $\mathscr{L}^*(\eta^{\gamma_d})$，其中 $\gamma_d = \pi^{-\frac{d}{2}-1}\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)$。

注记 3.18. 该推论特别表明，泊松-沃罗诺伊镶嵌与泊松-德洛内镶嵌可视为 β族的成员：它们可分别视为对应于参数值 $\beta = -1$的 β-沃罗诺伊镶嵌和β-德劳内镶嵌。

证明. 考虑某个序列$(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (-1,\infty)$，使得当 $n\to\infty$时 $\beta_n \to -1$ 。根据定理 3.8，只需证明

$$f_n(h) := \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}+\beta_n+2\right)}{\pi^{\frac{d}{2}+1}\Gamma(\beta_n+1)} h^{\beta_n}, \qquad h\geq 0$$

满足条件（C2）。对于 $x>0$，我们有

$$(\mathrm{I}^1 f_n)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}+\beta_n+2\right)}{\pi^{\frac{d}{2}+1}\Gamma(\beta_n+1)} \int_0^x h^{\beta_n}\mathrm{d}h = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}+\beta_n+2\right)}{\pi^{\frac{d}{2}+1}\Gamma(\beta_n+2)} x^{\beta_n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}{\pi^{\frac{d}{2}+1}} = \gamma_d \in (0,\infty).$$

□

高斯-沃罗诺伊镶嵌和高斯-德洛内镶嵌。 令 $\widetilde{\eta}$ 为 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ 中强度测度具有密度 $\widetilde{f}(h) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}-1}e^{h/2}$、形式如（2.2）的泊松点过程。镶嵌 $\mathcal{L}(\widetilde{\eta})$ 称为 高斯-沃罗诺伊镶嵌，其对偶 $\mathcal{L}^*(\widetilde{\eta})$ 称为高斯 - 德洛内镶嵌。这些镶嵌在 [20] 中引入（采用归一化（2π）$^{-\frac{d}{2}}$），文中还证明了，当 $\beta\to\infty$ 时，$\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta})$ 是 β-德劳内镶嵌的骨架经 $\sqrt{2\beta}$ 缩放后的弱极限。利用一般性定理 3.5，我们可以重新得到这一结果，并证明相应的沃罗诺伊型镶嵌也成立。此外，对于 β-沃罗诺伊镶嵌，我们还可以利用定理 3.13 证明典型胞元的弱收敛。我们注意到，当 $\beta\to\infty$ 时，β-德劳内镶嵌的典型胞元（经 $\sqrt{2\beta}$ 重缩放）弱收敛到高斯-德洛内镶嵌的典型胞元；这是相应典型胞元的精确随机表示的一个推论，该表示见 [17, 定理 1] 和 [20, 定理 5.1]。

推论 3.19。 随机闭集 $\sqrt{2\beta}\mathscr{L}(\eta_\beta)$ 和 $\sqrt{2\beta}\mathscr{L}^*(\eta_\beta)$ 分别依弱收敛于 $\mathscr{L}(\widetilde{\eta})$ 和$\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta})$，当 $\beta\to\infty$ 时。此外，$\sqrt{2\beta}\mathcal{L}(\eta_\beta)$ 的典型胞腔依分布收敛于 $\mathcal{L}(\widetilde{\eta})$ 的典型胞腔，当 $\beta\to\infty$ 时。

证明。 设 $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset[1,\infty)$ 是一个单调序列，使得 $\beta_n\to\infty$，并定义

$$f_n(h) := c_{d+1,\beta_n}(2\beta_n)^{-\frac{d}{2}-1}\Big(1+\frac{h}{2\beta_n}\Big)^{\beta_n}\mathbb{1}(h\geq -2\beta_n), \quad c_{d+1,\beta_n} := \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}+\beta_n+2\right)}{\pi^{\frac{d}{2}+1}\Gamma(\beta_n+1)}. \tag{3.3}$$

由 (2.4) 可得 $\sqrt{2\beta_n}\mathcal{L}(\eta_{\beta_n}) \overset{d}{=} \mathcal{L}(\eta_{f_n})$。
我们先证明 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 (C1)，其中 $f(h) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}-1}e^{h/2}$。容易保证 $f_n\in\mathcal{L}^{1,+}_{\mathrm{loc}}([-2\beta_n,\infty))$ 和 $[-2\beta_n,\infty)\uparrow\mathbb{R}$，当 $n\to\infty$ 时。根据 [16, 命题 3.6]，这直接意味着对于每个 $n\in\mathbb{N}$，f_n 都是可容许的。

我们进一步指出，根据 [31, 第 5.11 段。12]

$$\lim_{n\to\infty} c_{d+1,\beta_n}(2\beta_n)^{-\frac{d}{2}-1} = \lim_{\beta_n\to\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}+\beta_n+2\right)}{(2\beta_n\pi)^{\frac{d}{2}+1}\Gamma(\beta_n+1)} = (2\pi)^{-\frac{d}{2}-1}, \tag{3.4}$$

此外，根据 $\beta_n\geq 1$ 第 5.5 段 [31, ，对于1] ，我们有

$$c_{d+1,\beta_n}(2\beta_n)^{-\frac{d}{2}-1} = \frac{(\frac{d}{2}+\beta_n+1)\cdots(\beta_n+\{\frac{d}{2}\})\Gamma\left(\beta_n+\{\frac{d}{2}\}\right)}{(2\beta_n\pi)^{\frac{d}{2}+1}\Gamma(\beta_n+1)} < \Big(\frac{\frac{d}{2}+2}{2\pi}\Big)^{\frac{d}{2}+1}, \tag{3.5}$$

其中，我们用 $\{\frac{d}{2}\}$ 表示 $\frac{d}{2}$ 的小数部分。此外，由于 $1+y \le e^y$ 对于任意 $y > -1$，我们有：对于任意 $h \in \mathbb{R}$ 和任意 $n \in \mathbb{N}$，均成立

$$\Big(1+\frac{h}{2\beta_n}\Big)^{\beta_n} \mathbb{1}(h \ge -2\beta_n) \le e^{h/2}.$$

由于对任意 $x \in \mathbb{R}$， $e^{h/2}\mathbb{1}(h \le x)$ 都可积，因此由控制收敛定理，并利用 (3.4) 和 (3.5)，可得对任意 $x \in \mathbb{R}$，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{x}|f_n(h)-f(h)|\mathrm{d}h \le \Big(\frac{\frac{d}{2}+2}{2\pi}\Big)^{\frac{d}{2}+1}\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{x}\Big(e^{h/2}-\Big(1+\frac{h}{2\beta_n}\Big)^{\beta_n}\mathbb{1}(h\ge -2\beta_n)\Big)\mathrm{d}h \\ + 2e^{x/2}\lim_{n\to\infty}|c_{d+1,\beta_n}(2\beta_n)^{-\frac{d}{2}-1}-(2\pi)^{-\frac{d}{2}-1}| = 0.\end{aligned}$$

为验证 (C1) 中的第三个条件，我们取 $x_0 = 0$、 $\delta = 1$，并注意到由 (3.5) 以及估计式 $1+y \le e^y$（对 $y \ge 1$），可知

$$\int_{-\infty}^{0}|h|^{\frac{d}{2}+1}f_n(h)\mathrm{d}h \le \Big(\frac{\frac{d}{2}+2}{2\pi}\Big)^{\frac{d}{2}+1}\int_{-\infty}^{0}|h|^{\frac{d}{2}+1}e^{h/2}\mathrm{d}h = \Big(\frac{\frac{d}{2}+2}{\pi}\Big)^{\frac{d}{2}+1}\Gamma\Big(\frac{d}{2}\Big),$$

对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。因此，(C1) 中的条件均已满足。由定理 3.5，骨架的收敛立即可得。为证明典型胞的收敛，我们使用定理 3.13，并证明其中的条件（i）成立。对于 $x \ge -2\beta_n$，我们有

$$(\mathrm{I}^1 f_n)(x) = c_{d+1,\beta_n}(2\beta_n)^{-\frac{d}{2}}\frac{1}{\beta_n+1}\Big(1+\frac{x}{2\beta_n}\Big)^{\beta_n+1},$$

a以及 $(\mathrm{I}^1 f_n)(x) = 0$（对 $x < -2\beta_n$）。取 $x_0 = 0$。那么对于 $x \ge 0$ 和 $\beta_n \ge 1$，我们有

$$\frac{(\mathrm{I}^1 f_n)(x+4d+3)}{(\mathrm{I}^1 f_n)(x)} = \Big(\frac{1+\frac{x+4d+3}{2\beta_n}}{1+\frac{x}{2\beta_n}}\Big)^{\beta_n+1} = \Big(1+\frac{4d+3}{2\beta_n+x}\Big)^{\beta_n+1} \le \exp\Big(\frac{(4d+3)(\beta_n+1)}{2\beta_n+x}\Big) \le \mathrm{e}^{4d+3}.$$

此外，对于 $x \ge 0$，函数 $f_n(x)$ 是递增的。因此，对于所有 $x \ge 0$，我们有

$$(\mathrm{I}^1 f_n)(x) \ge x f_n(0),$$

and

$$f_n(0) = c_{d+1,\beta_n}(2\beta_n)^{-\frac{d}{2}-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}+\beta_n+2\right)}{(2\beta_n\pi)^{\frac{d}{2}+1}\Gamma(\beta_n+1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (2\pi)^{-\frac{d}{2}-1} > 0.$$

于是存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \ge n_0$，我们有 $f_n(0) \ge \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{d}{2}-1} =: \alpha > 0$，因此，$(\mathrm{I}^1 f_n)(x) \ge \alpha x$。 □

与 β-模型一起， [17] 又引入了另一种特殊的泊松-拉盖尔镶嵌模型，并在 [18, 19, 20, 21]中进行了研究。对于 $\beta > d/2+1$，令 η'_β 为 $\mathbb{R}^d \times (-\infty, 0)$ 中的泊松点过程，其强度测度具有式 (2.2) 所示的密度形式

$$f'_\beta(h) = c'_{d+1,\beta}(-h)^{-\beta}, \qquad h < 0, \qquad c'_{d+1,\beta} := \frac{\Gamma(\beta)}{\pi^{\frac{d}{2}+1}\Gamma(\beta-\frac{d}{2}-1)}.$$

再次注意，[17]中使用了略有不同的归一化 $\pi^{-\frac{d+1}{2}}\Gamma(\beta)/\Gamma(\beta-\frac{d+1}{2})$。正态随机镶嵌 $\mathcal{L}(\eta'_\beta)$ 被称为 β'- 沃罗诺伊镶嵌，而对偶镶嵌 $\mathcal{L}^*(\eta'_\beta)$ 被称为 β'- 德劳内镶嵌。此外，[20] 中证明了，β'- 德劳内镶嵌的骨架在经过 $\sqrt{2\beta}$ 缩放并令 $\beta\to\infty$时，其 $\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta})$ 也是一个弱极限。利用我们的定理 3.5，还可以得到这一结果，并将其推广到相应的沃罗诺伊型模型。

推论 3.20. 随机闭集 $\sqrt{2\beta}\mathscr{L}(\eta'_\beta)$ 和 $\sqrt{2\beta}\mathscr{L}^*(\eta'_\beta)$ 分别弱收敛到 $\mathscr{L}(\widetilde{\eta})$和 $\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta})$，当 $\beta\to\infty$ 时。

证明. 证明与推论 3.19 证明的第一部分类似。令 $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset[d+1,\infty)$ 为一个单调序列，使得 $\beta_n\to\infty$，并定义

$$f_n(h):=c'_{d+1,\beta_n}(2\beta_n)^{-\frac{d}{2}-1}\Big(1-\frac{h}{2\beta_n}\Big)^{-\beta_n}\mathbb{1}(h<2\beta_n).$$

由 (2.4) 可知 $\sqrt{2\beta_n}\mathcal{L}(\eta'_{\beta_n})\overset{d}{=}\mathcal{L}(\eta_{f_n})$，根据定理 3.5，只需确保 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$满足 (C1)，且 $f(h)=(2\pi)^{-\frac{d}{2}-1}e^{h/2}$。注意到 $f_n\in L^{1,+}_{\mathrm{loc}}((-\infty,-2\beta_n))$，并且 $(-\infty,-2\beta_n)\uparrow\mathbb{R}$，当 $n\to\infty$时。根据 [16, 例 3.9 和命题 3.12]，可知 f_n 对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都是可容许的。

由 [31, 第 5.11 段。12] 我们得到

$$\lim_{n\to\infty}c'_{d+1,\beta_n}(2\beta_n)^{-\frac{d}{2}-1}=\lim_{\beta_n\to\infty}\frac{\Gamma(\beta_n)}{(2\beta_n\pi)^{\frac{d}{2}+1}\Gamma(\beta_n-\frac{d}{2}-1)}=(2\pi)^{-\frac{d}{2}-1},\tag{3.6}$$

并且，由 [31,第 5.5 段。1] 我们得到

$$c'_{d+1,\beta_n}(2\beta_n)^{-\frac{d}{2}-1}=\frac{(\beta_n-1)\cdots(\beta_n-\lfloor\frac{d}{2}\rfloor)\Gamma\left(\beta_n-\lfloor\frac{d}{2}\rfloor\right)}{(2\beta_n\pi)^{\frac{d}{2}+1}\Gamma(\beta_n-\frac{d}{2}-1)}<(2\pi)^{-\frac{d}{2}-1}.\tag{3.7}$$

固定 $x\in\mathbb{R}$。令 $n_0=n_0(x)\in\mathbb{N}$ 满足 $x\le\beta_{n_0}\le\beta_n$ 对任意 $n>n_0$都成立。由于$-\frac{h}{2\beta_n}<1$，根据 [31, 方程 (4.5.2)]，我们有

$$-\log\big(1-\frac{h}{2\beta_n}\big)\ge\frac{h}{2\beta_n}.$$

两边乘以 β_n 并取指数，得到

$$e^{h/2}\mathbb{1}(h\le x)\le\Big(1-\frac{h}{2\beta_n}\Big)^{-\beta_n}\mathbb{1}(h<2\beta_n)\mathbb{1}(h\le x)\le\Big(1-\frac{h}{2\beta_{n_0}}\Big)^{-\beta_{n_0}}\mathbb{1}(h\le x),$$

对于任意 $n\ge n_0$。应用控制收敛定理以及 (3.6) 和 (3.7)，我们得出，对于任意 $x\in\mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{x}|f_n(h)-f(h)|\mathrm{d}h\le(2\pi)^{-\frac{d}{2}-1}&\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{x}|\Big(1-\frac{h}{2\beta_n}\Big)^{-\beta_n}\mathbb{1}(h<2\beta_n)-\mathrm{e}^{\frac{h}{2}}|\mathrm{d}h\\&+2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\lim_{n\to\infty}|c'_{d+1,\beta_n}(2\beta_n)^{-\frac{d}{2}-1}-(2\pi)^{-\frac{d}{2}-1}|=0.\end{aligned}$$

对于 (C1) 中的第三个条件，我们取 $x_0 = 0$、 $\delta = 1/2$ ，并注意到，根据 (3.7) 和 (3.5)，对于任意 $n \in \mathbb{N}$ ，有

$$\int_{-\infty}^{0} |h|^{\frac{d+1}{2}} f_n(h)\mathrm{d}h \leq (2\pi)^{-\frac{d}{2}-1} \int_{-\infty}^{0} |h|^{\frac{d+1}{2}} \Big(1 - \frac{h}{2(d+1)}\Big)^{-d-1} \mathrm{d}h = \frac{(2(d+1))^{d+2}\Gamma(\frac{d-1}{2})\Gamma(\frac{d+3}{2})}{(2\pi)^{\frac{d}{2}+1} d!},$$

因为对于任意 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\beta_n \geq d+1 > 0$。因此，(C1) 中的条件得到满足。

□

4 技术准备

定理 3.3 和定理 3.6 (i) 的证明策略依赖于两个关键步骤。第一步，我们考虑给定镶嵌的构型，将其限制在球 B_R 上，其中 $R > 0$，并寻找区域 $K \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$，使得以较大的概率，球中的镶嵌构型仅取决于相应泊松点过程在 K 上的限制。这类结果通常称为“稳定化”。随后利用区域 K 构造适当的点过程序列，并通过耦合论证将其定义在同一个概率空间上。

本节汇集了一些与这种稳定化相关的技术引理。这些引理的证明推迟到第 7 节。

4.1 抛物面生长与抛物面凸包过程

我们首先分别用抛物面生长和凸包过程来对拉盖尔镶嵌及其对偶作另一种描述。这种描述对于理解相应镶嵌模型的几何性质非常有用，也为第 4.2 节中提出的稳定化结果提供了一个有用的框架。生长过程最初由 Baryshnikov [2] 引入，之后在 [38]中进行了研究。抛物面生长和凸包过程在 [8] 中得到了形式化，并被特别用于研究随机多胞体 [9, 10, 11]的渐近性质。

令 Π^- （分别为 Π^+）表示标准的向下（分别为向上）抛物面，定义如下:

$$\Pi^{\pm} := \{(v', h') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \colon h' = \pm\|v'\|^2\}.$$

此外，令 $\Pi_x^{\pm}$ 表示将 $\Pi^{\pm}$ 沿向量 x 平移所得的图形: $= (v,\ h) \in \mathbb{R}^{d+1}$，即:

$$\Pi_x^{\pm} := \{(v', h') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \colon h' = \pm\|v' - v\|^2 + h\}.$$

点 x 是抛物面 $\Pi_x^{\pm}$ 的顶点，记作 apex($\Pi_x^{\pm}$) $= x$。此外，我们记 by

$$(\Pi_x^-)^{\downarrow} := \{(v, h') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \colon h' \leq -\|v' - v\|^2 + h\},$$
$$(\Pi_x^+)^{\uparrow} := \{(v, h') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \colon h' \geq \|v' - v\|^2 + h\},$$

分别为 Π_x^- 的下图集和 Π_x^+的上图集。

抛物面生长过程。对于 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 中给定的泊松点过程 η，我们（如 [8]中那样）引入抛物面生长过程

$$\Psi(\eta) := \bigcup_{x\in\eta} \big(\Pi^+_x\big)^\uparrow.$$

需要指出的是，这些抛物面中的大多数并不会对点过程作出贡献，因为它们的上图集完全被其他抛物面的上图集覆盖。若点 $x \in \eta$ 极点属于抛物面生长过程中 $\Psi(\eta)$，则称其为

$$\big(\Pi^+_x\big)^\uparrow \not\subset \bigcup_{y\in\eta, y\neq x} \big(\Pi^+_y\big)^\uparrow.$$

我们用 $\mathrm{ext}(\Psi(\eta))$ 表示 $\Psi(\eta)$的所有极点组成的集合。
如 [19, 第 1486] 页所示，如果 $\mathcal{L}(\eta)$是随机镶嵌，则抛物面生长过程给出了其另一种构造。注意，对于任意 $(v,\ h) \in \eta$,

$$(\Pi^+_{(v,h)})^\uparrow = \{(w,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}\colon\ \mathrm{pow}(w,(v,h)) \le t\}$$

因此,

$$\mathrm{bd}\Psi(\eta) = \{(w,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}\colon t = \inf_{(v',h')\in\eta} \mathrm{pow}(w,(v',h'))\}, \tag{4.1}$$

其中最小值可以达到，因为每个 $w \in \mathbb{R}^d$ 至少属于胞元 $C((v,\ h)\ \eta)$、$(v,\ h) \in \eta$中的一个。于是，$(v,\ h) \in \eta$的拉盖尔胞可以写成

$$C((v,h),\eta) = \big\{w \in \mathbb{R}^d\colon (v,h) = \operatorname*{arg\,min}_{(v',h')\in\eta} \mathrm{pow}(w,(v',h'))\big\} = \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^d}\big(\mathrm{bd}\,\Psi(\eta) \cap \Pi^+_{(v,h)}\big),$$

当且仅当 $(v,\ h) \in \mathrm{ext}(\Psi(\eta))$ 时，该集合非空。因此,

$$\mathcal{L}(\eta) := \{C((v,h),\eta) : (v,h) \in \eta, \mathrm{int}\, C((v,h),\eta) \neq \varnothing\} = \{C((v,h),\eta) : (v,h) \in \mathrm{ext}(\Psi(\eta))\}.$$

利用这一关系，我们也可以研究抛物面生长过程 $\Psi(\eta)$，而不是$\mathcal{L}(\eta)$；在某些情况下，这样更为方便。

抛物面凸包过程。对于给定的泊松点过程 ηin $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$，我们定义抛物面凸包过程 $\Phi(\eta)$，它可以被视为抛物面生长过程的对偶（见图 1）

$$\Phi(\eta) = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\colon\ \mathrm{int}(\Pi^-_x)^\downarrow\cap\eta=\varnothing} (\Pi^-_x)^\downarrow.$$

对于具有仿射无关的空间坐标的 $d+1$ 个点 $x_1 =(v_1,\ h_1)$.....，$x_{d+1} =(v_{d+1},\ h_{d+1})$，我们将 $\Pi^-(x_1$.....，$x_{d+1})$ 定义为包含 x_1，.....，x_{d+1} 的 Π^- 的唯一平移像，并记为

$$\Pi^-[x_1,\dots,x_{d+1}] := \Pi^-(x_1,\dots,x_{d+1}) \cap (\mathrm{conv}(v_1,\dots,v_{d+1}) \times \mathbb{R}).$$

For 具有仿射无关的空间坐标的点 x_1，.....，$x_{d+1} \in \eta$，我们将该集合称为

$$\Pi^-(x_1,\dots,x_{d+1}) \cap \mathrm{bd}\,\Phi(\eta)$$

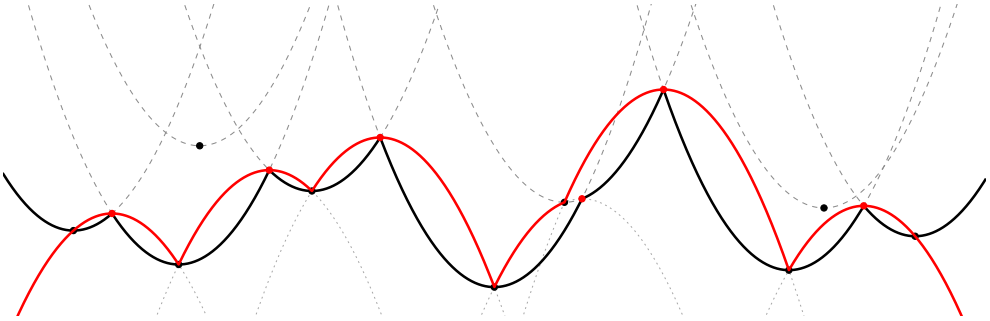

图 1： $\mathbb{R}^2$中的抛物面生长（黑色）和凸包过程（红色）。

一个抛物面面片 属于 $\Phi(\eta)$，如果

$$\operatorname{int}\left((\Pi^-(x_1,\dots,x_{d+1}))^{\downarrow}\right)\cap\eta=\varnothing.$$

我们注意到，一般而言， $\Pi^-(x_1,\ldots\ldots,x_{d+1})\cap\operatorname{bd}\Phi(\eta)$ 可能包含 η 中的其他点，但对于 η_f或η^γ ，这种情况以概率 1 不会发生，因此我们有

$$\Pi^-(x_1,\dots,x_{d+1})\cap\operatorname{bd}\Phi(\eta)=\Pi^-[x_1,\dots,x_{d+1}]$$

对于 $\Phi(\eta)$ 的任意抛物面面片。点 $x_1,\ldots\ldots,x_{d+1}$ 被称为相应抛物面面片的顶点。 $\Phi(\eta)$ 的所有顶点的集合记为 $\operatorname{vert}(\Phi(\eta))$，并且在 [8, 式（3.17）] 中已证明

$$\operatorname{ext}(\Psi(\eta))=\operatorname{vert}(\Phi(\eta)).\tag{4.2}$$

假设 $\mathcal{L}(\eta)$ 是一个随机法向镶嵌，我们可以利用抛物面凸包过程 $\Phi(\eta)$ 按如下方式构造对偶拉盖尔镶嵌$\mathcal{L}^*(\eta)$：对于来自 η 的任意成对不同的点$x_1=(v_1,\ h_1)\ldots\ldots,\ x_{d+1}=(v_{d+1},\ h_{d+1})$，如果且仅如果 $\operatorname{int}\left((\Pi^-(x_1,\ldots\ldots,x_{d+1}))^{\downarrow}\right)\cap\eta=\varnothing$，我们称单形 $\operatorname{conv}(v_1,\ldots\ldots,v_{d+1})$ 属于$\mathcal{L}^*(\eta)$，也就是说，当且仅当 $\Pi^-(x_1,\ldots\ldots,x_{d+1})\cap\operatorname{bd}\Phi(\eta)$ 是 $\Phi(\eta)$ 的一个抛物面面片。这也意味着

$$\operatorname{conv}(v_1,\dots,v_{d+1})=\operatorname{proj}_{\mathbb{R}^d}\left(\Pi^-(x_1,\dots,x_{d+1})\cap\operatorname{bd}\Phi(\eta)\right)=\operatorname{proj}_{\mathbb{R}^d}\left(\Pi^-[x_1,\dots,x_{d+1}]\right).\tag{4.3}$$

4.2 稳定化引理

设 η 是 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ 中的泊松点过程。对于 $a>0,\ t,T\in\mathbb{R}$，我们定义事件

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\max}(\eta,a,T)&:=\Big\{\sup_{w\in B_a}\inf_{(v,h)\in\eta}\operatorname{pow}(w,(v,h))\le T\Big\},\\ \mathcal{H}^{\min}(\eta,a,t)&:=\Big\{\inf_{w\in B_a}\inf_{(v,h)\in\eta}\operatorname{pow}(w,(v,h))\ge t\Big\}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

根据 (4.1)，事件 $\mathcal{H}^{\max}(\eta,\ a,\ T)$ 可描述如下：将 $\Psi(\eta)$ 限制在 $B_a\times\mathbb{R}$ 上后，其边界包含于 $B_a\times(-\infty,T]$，即在球 B_a 内不超过 T。类似地，事件

$\mathcal{H}^{\min}(\eta,\ a,\ t)$ 表示将 $\Psi(\eta)$ 限制在 $B_a\times\mathbb{R}$ 上后，其边界包含于 $B_a\times[t,\infty)$，即在球 B_a 内位于 t 上方。下一个引理给出了事件 $\mathcal{H}^{\max}(\eta,\ a,\ T)$ 和 $\mathcal{H}^{\min}(\eta,\ a,\ t)$ 的概率上界，其中 $\eta=\eta_f$，f 可容许，且 $\eta=\eta^\gamma$、$\gamma>0$ 的定义同第 2.2 节。

引理 4.1. 以下断言成立。

1. (a) 设 f 是可容许的，则对任意 $a>0$ 和 $T>4a^2$，我们有

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{H}^{\max}(\eta_f,a,T)^c\big)\le\exp\Big(-\pi^{\frac{d}{2}}2^{-d}(\mathrm{I}^{\frac{d}{2}+1}f)(T-4a^2)\Big).$$

此外，若对某个 $x_0\in\mathbb{R}$有 $(\mathrm{I}^1 f)(x_0)>0$，则对任意 $T\ge 4a^2+2x_0$，我们有

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{H}^{\max}(\eta_f,a,T)^c\big)\le\exp\Big(-\big(\frac{\pi}{8}\big)^{\frac{d}{2}}\frac{(\mathrm{I}^1 f)(x_0)}{\Gamma(d/2+1)}(T-4a^2)^{\frac{d}{2}}\Big).$$

(b) 设 f 是可容许的，则对任意 $a>0$ 和 $t\in\mathbb{R}$，我们有

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{H}^{\min}(\eta_f,a,t)^c\big)\le 2^d\kappa_d\Big((\mathrm{I}^{\frac{d}{2}+1}f)(t)+a^d(\mathrm{I}^1 f)(t)\Big).$$

2. (a) 对任意 $a>0$ 和 $T\ge a^2$，我们有

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{H}^{\max}(\eta^\gamma,a,T)^c\big)\le\exp(-\gamma\kappa_d(\sqrt{T}-a)^d).$$

(b) 对任意 $a>0$和 $t<0$，我们有 $\mathbb{P}\big(\mathcal{H}^{\min}(\eta^\gamma,a,t)^c\big)=0$。

接下来，对于给定的泊松点过程 ηin $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$和 $R,\ r>0$，考虑事件

$$\mathcal{E}(\eta,R,r):=\Big\{\bigcup_{S\in\mathcal{L}^*(\eta),S\cap B_R\neq\varnothing}\mathrm{apex}(\Pi^-(S))\in\big(\Pi^-_{(\mathbf{o},(R+r)^2)}\big)^{\downarrow}\Big\},\tag{4.5}$$

其中 $\Pi^-(S)$ 确定了唯一一个包含 $d+1$ 个点 $x_i=(v_i,\ h_i)\in\eta,1\le i\le d+1$ 的向下抛物面，这些点的空间坐标仿射无关，且满足 $\mathrm{conv}(v_1,\dots,v_{d+1})=S$。粗略地说，该事件使我们能够控制 η 中各点的位置，这些点决定了球 B_R内 $\mathscr{L}^*(\eta)$ 的骨架。现在利用引理 4.1，我们可以得到事件 $\mathcal{E}(\eta,\ a,\ T)$ 的概率上界，其中 $\eta=\eta_f$，f为可容许函数，且 $\eta=\eta^\gamma,\gamma>0$。

引理 4.2。设 $R>0$ 且 $r>2\max(1,R)$。则以下断言成立

1. 设 f为满足 $(\mathrm{I}^1 f)(1/2)>0$ 的可容许函数，则存在 $c_1,C_1\in(0,\infty)$，使得

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{E}(\eta_f,R,r)^c\big)<C_1\Big(\exp(-c_1(\mathrm{I}^1 f)(1/2)\,r^d)+\big(\mathrm{I}^{\frac{d}{2}+1}f\big)\big(-r^2/8\big)+R^d(\mathrm{I}^1 f)(-r^2/8)\Big).$$

2. 存在常数 $c_2,C_2\in(0,\infty)$，使得

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{E}(\eta^\gamma,R,r)^c\big)<C_2\exp(-c_2\gamma\,r^d).$$

利用事件 $\mathcal{H}^{\max}$、 $\mathcal{H}^{\min}$ 和 $\mathcal{E}$，我们可以证明以下"稳定化"结果：在附加约束条件下（以 $\mathcal{H}^{\max}$、$\mathcal{H}^{\min}$ 和 $\mathcal{E}$的形式描述），将η限制在某个区域 $K_0 \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 上，即可确定球 B_R内的 $\mathscr{L}(\eta)$ 和 $\mathscr{L}^*(\eta)$。

引理 4.3。给定 R、$r > 0$ 和 $t \le 0$，定义区域

$$K_0(R, r, t) := \{(v, h) \in \mathbb{R}^d \times [t, (R+r)^2] : \|v\| \le 2\sqrt{(R+r)^2 - t}\}.$$

则以下断言成立

1. 在事件 $\mathcal{E}(\eta、R、r) \cap \mathcal{H}^{\min}(\eta、2\sqrt{(R+r)^2} - t、t)$ 上，我们几乎必然有

$$\bigcup_{S \in \mathcal{L}^*(\eta), S \cap B_R \neq \varnothing} \operatorname{bd} S = \bigcup_{S \in \mathcal{L}^*(\eta \cap K_0(R,r,t)), S \cap B_R \neq \varnothing} \operatorname{bd} S.$$

2. 在事件 $\mathcal{H}^{\max}(\eta、R、(R+r)^2) \cap \mathcal{H}^{\min}(\eta、2\sqrt{(R+r)^2} - t、t)$ 上，我们几乎必然有

$$\mathscr{L}(\eta) \cap B_R = \mathscr{L}(\eta \cap K_0(R, r, t)) \cap B_R.$$

5 定理 3.3 和定理 3.13 的证明

下面我们将需要一个关于满足 (C1) 的函数序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的性质的辅助引理。

引理 5.1. 设$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是满足 *(C1)* 的函数序列，则

1. $\int_{-\infty}^{x_0} |h|^{d/2+\delta} f(h) \, \mathrm{d}h < \infty$;

2. 对于任意正数序列$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，若 $x_n \to \infty$ 为 $n \to \infty$，则有

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{d/2} (\mathrm{I}^1 f_n)(-x_n) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} (\mathrm{I}^{\frac{d}{2}+1} f_n)(-x_n) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n^{d/2} (\mathrm{I}^1 f)(-x_n) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} (\mathrm{I}^{\frac{d}{2}+1} f)(-x_n) = 0.$$

这个引理的证明使用了标准的截断论证和单调收敛定理，因此推迟到第 7 节。

˜定理 *3.3* 的证明。在整个证明过程中，C、C、c、$\tilde{c}$均表示一些正数常量，它们仅依赖于 d。这些常量的具体取值可能随行而异。为简化表示，以下令 $\eta_0 := \eta$、$\widetilde{\eta}_0 := \widetilde{\eta}$ 和 $f_0 := f$。为证明该结论，我们需要为泊松点过程序列 $(\widetilde{\eta}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$找到一种合适的耦合，从而能够控制相应的（对偶）拉盖尔镶嵌在球 B_R上的限制，对任意 $R > 0$均成立。因此，给定 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $R > 0$ 后，我们首先估计将 η_n限制在某个区域 $K_1 \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 内时，该区域决定 $\mathscr{L}(\eta_n) \cap B_R$和 $\mathscr{L}^*(\eta_n) \cap B_R$ 的概率。随后将利用该区域构造 $\widetilde{\eta}_n$。

准备 **比率：**令 $R, r > 0$，并对 $n \in \mathbb{N}_0$ 定义辅助事件（见 (4.5) 和 (4.4))

$$\mathcal{E}_n := \mathcal{E}(\eta_n, R, r), \quad \mathcal{H}_n^{\min} := \mathcal{H}^{\min}(\eta_n, 3(R+r), -5/4(R+r)^2), \quad \mathcal{H}_n^{\max} := \mathcal{H}^{\max}(\eta_n, R, (R+r)^2),$$

从而使我们能够控制球 B_R 内 $\mathscr{L}(\eta_n)$ 和 $\mathscr{L}^*(\eta_n)$ 的构型。更准确地说，令

$$K_1(R,r) := \{(v,h) \in \mathbb{R}^d \times [-5/4(R+r)^2, (R+r)^2] : \|v\| \le 3(R+r)\}.$$

由引理 4.3，结合 $t = -5/4(R+r)^2$，可得 $K_0(R,r,t) = K_1(R,r)$，因此在 $\mathcal{E}_n \cap \mathcal{H}_n^{\min}$上成立：

$$\bigcup_{S \in \mathcal{L}^*(\eta_n), S \cap B_R \neq \varnothing} \operatorname{bd} S = \bigcup_{S \in \mathcal{L}^*(\eta_n \cap K_1(R,r)), S \cap B_R \neq \varnothing} \operatorname{bd} S, \tag{5.1}$$

并且在 $\mathcal{H}_n^{\max} \cap \mathcal{H}_n^{\min}$上，我们有：

$$\mathscr{L}(\eta_n) \cap B_R = \mathscr{L}(\eta_n \cap K_1(R,r)) \cap B_R. \tag{5.2}$$

还需注意，若 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 (C1)，则 $c := (\mathrm{I}^1 f_0)(1/2) > 0$；并且根据 (C1)，我们还有 $\lim_{n\to\infty} (\mathrm{I}^1 f_n)(1/2) = c$。因此，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \ge n_0$都有 $|(\mathrm{I}^1 f_n)(1/2) - c| < c/2$。接着，由引理 4.1（注意，由分数阶积分的单调性，对于 $\alpha = 1, \frac{d}{2}+1$ 和 $R > 0$，我们有 $\mathrm{I}^\alpha f_n(-5/4(R+r)^2) \le \mathrm{I}^\alpha f_n(-r^2/8)$）和引理 4.2，可得对所有 $n \ge n_0$ 和 $n = 0$：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((\mathcal{E}_n \cap \mathcal{H}_n^{\min})^c) &\le \mathbb{P}(\mathcal{E}_n^c) + \mathbb{P}((\mathcal{H}_n^{\min})^c) \\ &\le C\Big(\exp(-cr^d) + \big(\mathrm{I}^{\frac{d}{2}+1} f_n\big)(-r^2/8) + (r+R)^d (\mathrm{I}^1 f_n)(-r^2/8)\Big).\end{aligned} \tag{5.3}$$

同理，利用引理 4.1，对 $n \ge n_0$ 和 $n = 0$ 取 $x_0 = 1/2$ 和 $r \ge 2\max(R, 1)$，可得

$$\mathbb{P}((\mathcal{H}_n^{\max} \cap \mathcal{H}_n^{\min})^c) \le C\Big(\exp(-cr^d) + \big(\mathrm{I}^{\frac{d}{2}+1} f_n\big)(-r^2/8) + (r+R)^d (\mathrm{I}^1 f_n)(-r^2/8)\Big). \tag{5.4}$$

点过程的构造： 现在我们可以构造点过程 $(\widetilde{\eta}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$，它们定义在同一概率空间上，并且对所有 $n \in \mathbb{N}_0$，均满足 $\widetilde{\eta}_n \stackrel{d}{=} \eta_n$。令 $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为单调递增序列（稍后指定），使得当 $n \to \infty$ 时，$r_n \to \infty$。令 $\widetilde{\eta}_0$ 为一个强度为 $\widetilde{\eta}_0 \stackrel{d}{=} \eta_0$ 的泊松点过程，并令

$$\widetilde{\eta}_n = \xi_n + \hat{\xi}_n \stackrel{d}{=} \eta_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

其中 ξ_n 和 ξ_n 相互独立，ξ_n 是一个泊松点过程（定义在 $K_1(r_n/2, r_n)$ 上），其强度测度的密度为 $(v,h) \mapsto f_n(h)\mathbf{1}_{K_1(r_n/2,r_n)}(v,h)$；而 ξ_n 是一个泊松点过程（定义在 $K_1(r_n/2, r_n)^c$ 上），其强度测度的密度为 $(v,h) \mapsto f_n(h)\mathbf{1}_{K_1(r_n/2,r_n)^c}(v,h)$。此外，我们假设，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，ξ_n 与 $\widetilde{\eta}_0$ 相互独立；而 $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ 的构造方式使得随机元 ξ_n 和 $\widetilde{\eta}_0 \cap K_1(r_n/2, r_n)$ 尽可能重合（见 [40, 定理 7.3，第 107] 页）。由此便得到所需的构造。

（对偶）拉盖尔镶嵌的估计： 还需确保对于任意 $R > 0$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_n) \cap B_R \neq \mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_0) \cap B_R) = 0, \tag{5.5}$$

and

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_n) \cap B_R \neq \mathscr{L}(\widetilde{\eta}_0) \cap B_R) = 0. \tag{5.6}$$

令 $n_1(R) > 0$ 满足：对于任意 $n > n_1$， $r_n \geq 2\max(R,\ 1)$。根据 $(\widetilde{\eta}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的构造以及 (5.1)，我们在 $\mathcal{H}_n^{\min} \cap \mathcal{E}_n \cap \mathcal{H}_0^{\min} \cap \mathcal{E}_0$ 上对于任意 $n \geq n_1$ 都有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\{\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_n) \cap B_R \neq \mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_0) \cap B_R\} \cap \mathcal{H}_n^{\min} \cap \mathcal{E}_n \cap \mathcal{H}_0^{\min} \cap \mathcal{E}_0)\\ &\qquad = \mathbb{P}(\{\mathscr{L}^*(\xi_n) \cap B_R \neq \mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_0 \cap K_1(r_n/2, r_n)) \cap B_R\} \cap \mathcal{H}_n^{\min} \cap \mathcal{E}_n \cap \mathcal{H}_0^{\min} \cap \mathcal{E}_0),\end{aligned}$$

由于 $K_1(R,\ r_n) \subset K_1(r_n/2,\ r_n)$ 且 $\widetilde{\eta}_n \cap K_1(r_n/2,\ r_n) = \xi_n$ 几乎必然成立。根据全概率定律，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_n) \cap B_R \neq \mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_0) \cap B_R)\\ &\qquad \leq \mathbb{P}\big(\mathscr{L}^*(\xi_n) \cap B_R \neq \mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_0 \cap K_1(r_n/2, r_n)) \cap B_R\big) + \mathbb{P}((\mathcal{H}_n^{\min} \cap \mathcal{E}_n \cap \mathcal{H}_0^{\min} \cap \mathcal{E}_0)^c).\end{aligned} \tag{5.7}$$

进一步注意，若 $\xi_n = \widetilde{\eta}_0 \cap K_1(r_n/2,\ r_n)$，则 $\mathscr{L}^*(\xi_n) \cap B_R = \mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_0 \cap K_1(r_n/2,\ r_n)) \cap B_R$。因此，再次应用全概率定律可得

$$\mathbb{P}\big(\mathscr{L}^*(\xi_n) \cap B_R \neq \mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_0 \cap K_1(r_n/2, r_n)) \cap B_R\big) \leq \mathbb{P}\big(\xi_n \neq (\widetilde{\eta}_0 \cap K_1(r_n/2, r_n))\big). \tag{5.8}$$

根据构造， ξ_n 与 $\widetilde{\eta}_0 \cap K_1(r_n/2,\ r_n)$ 最大程度地重合，因此由 [40, 公式（8.18），p.112] 和 [35, 定理 3.2.2]可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\xi_n \neq (\widetilde{\eta}_0 \cap K_1(r_n/2, r_n))\big) &\leq \frac{3}{2}\int_{-5r_n^2}^{4r_n^2}\int_{\|v\|\leq 6r_n} |f_0(h) - f_n(h)|\mathrm{d}v\mathrm{d}h\\ &\leq C r_n^d \int_{-\infty}^{4r_n^2} |f_0(h) - f_n(h)|\mathrm{d}h.\end{aligned} \tag{5.9}$$

将（5.7）与（5.3）、（5.8）和（5.9）结合，对任意 $n \geq \max(n_0,\ n_1)$，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_n) \cap B_R \neq \mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}) \cap B_R) \leq C\Big(&\exp(-cr_n^d) + r_n^d \int_{-\infty}^{4r_n^2} |f_n(h) - f_0(h)|\mathrm{d}h + \big(\mathrm{I}^{\frac{d}{2}+1} f_n\big)(-r_n^2/8)\\ &+ \big(\mathrm{I}^{\frac{d}{2}+1} f_0\big)(-r_n^2/8) + r_n^d(\mathrm{I}^1 f_n)(-r_n^2/8) + r_n^d(\mathrm{I}^1 f_0)(-r_n^2/8)\Big).\end{aligned}$$

选择序列 $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$： 现在我们证明，当 $n \to \infty$ 时，右侧在适当选择 $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 后趋于 0，从而得到 (5.5)。由 (C1)-(ii)，存在一个（严格）递增的自然数序列 $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得对任意 $n \geq N_k$，都有 $\int_{-\infty}^{k} |f_n(h) - f_0(h)|\mathrm{d}h \leq 2^{-k}k^{-d/2}$. 然后我们定义

$$r_n = \sqrt{k}/2 \text{ for } N_k \leq n < N_{k+1}, \quad r_n = 1/2 \text{ for } 1 \leq n < N_k. \tag{5.10}$$

显然，$(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 单调递增，且当 $n \to \infty$ 时 $r_n \to \infty$。采用这一选择，我们有

$$r_n^d \int_{-\infty}^{4r_n^2} |f_n(h) - f_0(h)|\mathrm{d}h = 2^{-d}k^{d/2} \int_{-\infty}^{k} |f_n(h) - f_0(h)|\mathrm{d}h \leq 2^{-k-d} \to 0, \tag{5.11}$$

当 $n \to \infty$ （这意味着 $k \to \infty$）。此外，由于 $r_n \to \infty$，我们立即得到 $\exp(-cr_n^d) \to 0$当 $n \to \infty$；再通过选取 $x_n = r_n^2/8$，引理 5.1 可知其余项收敛到 0。将这些结果与 (5.11) 结合，便得到 (5.5)，从而完成了 (ii) 的证明。

类似地，由 (5.2)、$(\widetilde{\eta}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的构造（其中 $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的定义与 (5.10) 中相同），以及全概率公式，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_n)\cap B_R \neq \mathscr{L}(\widetilde{\eta})\cap B_R)\\
&\quad\le \mathbb{P}\big(\mathscr{L}(\xi_n)\cap B_R \neq \mathscr{L}(\widetilde{\eta}_0\cap K_1(r_n/2,r_n))\cap B_R\big) + \mathbb{P}((\mathcal{H}_n^{\min}\cap\mathcal{H}_n^{\max}\cap\mathcal{H}_0^{\min}\cap\mathcal{H}_0^{\max})^c)\\
&\quad\le \mathbb{P}\big(\xi_n \neq (\widetilde{\eta}_0\cap K_1(r_n/2,r_n))\big) + \mathbb{P}((\mathcal{H}_n^{\min}\cap\mathcal{H}_n^{\max}\cap\mathcal{H}_0^{\min}\cap\mathcal{H}_0^{\max})^c).
\end{aligned}$$

于是，结合 (5.9) 与 (5.4) 可知，对任意 $n\ge \max(n_0,n_1)$，有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_n)\cap B_R \neq \mathscr{L}(\widetilde{\eta})\cap B_R) \le C\Big(&\exp(-cr_n^d) + r_n^d\int_{-\infty}^{4r_n^2}|f_n(h)-f_0(h)|\mathrm{d}h + \big(\mathrm{I}^{\frac{d}{2}+1}f_n\big)(-r_n^2/8)\\
&+\big(\mathrm{I}^{\frac{d}{2}+1}f_0\big)(-r_n^2/8) + r_n^d(\mathrm{I}^1 f_n)(-r_n^2/8) + r_n^d(\mathrm{I}^1 f_0)(-r_n^2/8)\Big),
\end{aligned}$$

由上述论证，当 $n\to\infty$ 时它收敛于 0。因此 (5.6) 成立，(i) 的证明完成。

□

~定理 *3.13* 的证明。设 $c, C, C' > 0$ 为仅依赖于 d 的常数。其取值可能逐行不同。设 $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为密度 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 (C1) 的泊松点过程序列。由定理 3.3，存在定义在共同概率空间上的点过程 $\widetilde{\eta}$ 与 $(\widetilde{\eta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $n\in\mathbb{N}$ 有 $\widetilde{\eta}\overset{d}{=}\eta$ 与 $\widetilde{\eta}_n\overset{d}{=}\eta_n$，并且当 $n\to\infty$ 时 $\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_n)$ 以高概率局部收敛于 $\mathscr{L}(\widetilde{\eta})$。注意 $\mathbb{P}^0_{\mathcal{L}(\eta_n)} = \mathbb{P}^0_{\mathcal{L}(\widetilde{\eta}_n)}$。利用命题 3.10，只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_d(\mathcal{L}(\widetilde{\eta}_n)) = \gamma_d(\mathcal{L}(\widetilde{\eta})).$$

根据 [37, 定理 10.2.8]，对任意 $n\in\mathbb{N}$，我们有 $\gamma_0(\mathcal{L}^*(\widetilde{\eta}_n)) = \gamma_d(\mathcal{L}(\widetilde{\eta}_n))$，且 $\gamma_0(\mathcal{L}^*(\widetilde{\eta})) = \gamma_d(\mathcal{L}(\widetilde{\eta}))$。令 $V_n := \#(\mathcal{F}_0(\mathcal{L}^*(\widetilde{\eta}_n))\cap[0,1]^d)$，那么只需证明存在某个 $p>1$ 使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\big[V_n^p\big] < \infty$$

并应用引理 3.12，即可得到胞元强度的收敛。特别地，只需证明存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得

$$\sup_{n\ge n_0}\mathbb{E}\big[V_n^2\big] < \infty. \tag{5.12}$$

我们先证明在条件 (i) 下该结论成立。对于 $k\in\mathbb{N}$ 和 $n\in\mathbb{N}_0$，按照 (4.4) 的定义，令辅助事件为

$$\mathcal{H}_n^{\max}(k) := \mathcal{H}^{\max}(\eta_n,\sqrt{d},k).$$

首先我们注意到 $[0,1]^d\subset B_{\sqrt{d}^\circ}$–因此，给定事件 $\mathcal{H}_n^{\max}(k)$，我们有：$[0,1]^d$ 内的每个 $\mathcal{L}^*(\widetilde{\eta}_n)$ 顶点都是集合 $B_{\sqrt{d}}\times[-\infty,k]$ 内的 $\widetilde{\eta}_n$ 点，由此得出 –

$$V_n\mathbb{1}\{\mathcal{H}_n^{\max}(k)\} \le \#\big(\mathcal{F}_0(\mathcal{L}^*(\widetilde{\eta}_n))\cap B_{\sqrt{d}}\big)\mathbb{1}\{\mathcal{H}_n^{\max}(k)\} \le \widetilde{\eta}_n\big(B_{\sqrt{d}}\times[-\infty,k]\big) =: N_n(k)$$

几乎必然。注意，由于 $k \to \infty$， $\mathcal{H}_n^{\max}(k) \uparrow \Omega$。应用上述界和柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[V_n^2] &= \mathbb{E}[V_n^2 \mathbb{1}\{\mathcal{H}_n^{\max}(1)\}] + \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[V_n^2 \mathbb{1}\{\mathcal{H}_n^{\max}(k+1)) \setminus \mathcal{H}_n^{\max}(k)\}] \\ &\leq \mathbb{E}[N_n(1)^2] + \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[N_n(k+1)^4]^{1/2} \mathbb{P}[\mathcal{H}_n^{\max}(k)^c]^{1/2}.\end{aligned}$$

由引理 4.1 可得

$$\mathbb{P}[\mathcal{H}_n^{\max}(k)^c] \leq \exp\big(-c(\mathrm{I}^{\frac{d}{2}+1} f_n)(k-4d)\big) \leq \exp\big(-c(\mathrm{I}^1 f_n)(k-4d-1)\big),$$

对所有 $k > 4d$ 均成立。注意到 $N_n(k)$ 服从参数为 $C(\mathrm{I}^1 f_n)(k)$ 的泊松分布，因此可得

$$\mathbb{E}[N_n(k)^4] \leq \widetilde{C}\big((\mathrm{I}^1 f_n)(k)\big)^4,$$

从而

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[V_n^2] &\leq C\Big(\sum_{k=1}^{4d} ((\mathrm{I}^1 f_n)(k))^2 + \sum_{k\geq 4d+1} ((\mathrm{I}^1 f_n)(k+1))^2 \exp\big(-c(\mathrm{I}^1 f_n)(k-4d-1)\big)\Big) \\ &= C\Big(\sum_{k=1}^{4d} ((\mathrm{I}^1 f_n)(k))^2 + \sum_{k\geq 0} ((\mathrm{I}^1 f_n)(k+4d+2))^2 \exp\big(-c(\mathrm{I}^1 f_n)(k)\big)\Big)\end{aligned}$$

由 (C1)-(ii) 可知存在 $n_1 \in \mathbb{N}$，使得对 $n \geq n_1$ 和所有 $k = 1, \ldots, 4d$，均有

$$(\mathrm{I}^1 f_n)(k) \leq (\mathrm{I}^1 f_n)(4d) \leq \frac{(\mathrm{I}^1 f)(4d)}{2} \in (0, \infty),$$

其中 $f \in L^{1,+}{}_{\mathrm{loc}}(E)$ 是一个可容许函数（这意味着，根据引理 2.2，$(\mathrm{I}^1 f)(4d) < \infty$）。因此，对所有 $n \geq n_1$，第一项求和有一个常数界。根据同样的论证，只需考虑从 $k_0 := \lceil x_0 \rceil$ 开始的第二项求和（其中 x_0 按假设选取）。注意， $g(y) := y^2 \exp(-(c/2)y)$ 在 $[0, \infty$ 上的全局最大值位于 $y = 4/c$，因此

$$y^2 \exp(-cy) = y^2 \exp\big(-\frac{c}{2}y\big) \exp\big(-\frac{c}{2}y\big) \leq \frac{16}{c^2 \mathrm{e}^2} \exp\big(-\frac{c}{2}y\big),$$

对于所有 $y \geq 0$。首先应用 $(\mathrm{I}^1 f_n)(x + 4d + 2) \leq C(\mathrm{I}^1 f_n)(x)$，然后应用 $(\mathrm{I}^1 f_n)(x) \geq \alpha x^{\varepsilon}$ 可得 s

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq k_0} ((\mathrm{I}^1 f_n)(k+4d+2))^2 \exp\big(-c(\mathrm{I}^1 f_n)(k)\big) &\leq C \sum_{k\geq k_0} ((\mathrm{I}^1 f_n)(k))^2 \exp\big(-c(\mathrm{I}^1 f_n)(k)\big) \\ &\leq \frac{16C}{(c\mathrm{e})^2} \sum_{k\geq k_0} \exp\Big(-\frac{c}{2}(\mathrm{I}^1 f_n)(k)\Big) \\ &\leq \frac{16C}{(c\mathrm{e})^2} \sum_{k\geq k_0} \exp\Big(-\frac{c}{2}\alpha k^{\varepsilon}\Big) < \infty,\end{aligned}$$

并得到 (5.12)。

在条件 (ii) 下，我们立即得到

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\Big[\#(\mathcal{F}_0(\mathcal{L}^*(\eta_n) \cap [0,1]^d)^p\Big] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\big[\eta_n([0,1]^d \times \mathbb{R}^d)^p\big] \leq C \max\{1, \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n^p\} < \infty,$$

证明随即得出。 □

6 定理 3.6 的证明

我们首先陈述几个辅助引理。设

$$\mathrm{AI}^{d+1} := \{\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_{d+1}) \in \mathbb{R}^d \colon y_1, \dots, y_{d+1} \text{ are affinely independent}\}.$$

进一步，对于$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{d+1}) \in \mathrm{AI}^{d+1}$，记 $B(\mathbf{y})$ 为包含 $y_1, \dots, y_{d+1}$ 且这些点位于其边界上的唯一球，并令 $\rho(\mathbf{y}) > 0$ 为其半径，$c(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d$ 为其中心。

引理 6.1. 映射 *(i)* $\mathrm{AI}^{d+1} \to \mathbb{R}_+, \mathbf{y} \mapsto \rho(\mathbf{y})$ 和 *(ii)* $\mathrm{AI}^{d+1} \to \mathbb{R}^d, \mathbf{y} \mapsto \|c(\mathbf{y})\|$ 是连续的。

Lemma 6.2. 设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^{1,+}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ 为满足 *(C2)* 且定义……的函数序列 e

$$g_{n,s}(x) := \frac{s^d}{\pi^{d/2}(\mathrm{I}^{d/2} f_n)(s^2)} f_n(s^2 - s^2\|x\|^2), \quad x \in \mathbb{B}^d,\ s > 0. \tag{6.1}$$

则以下性质成立：
1. $\mathbb{P}_{n,s}(\cdot) := \int_{\mathbb{B}^d} g_{n,s}(x)\mathbb{1}(x \in \cdot)\mathrm{d}x$ 在 $\mathbb{B}^d$ 上定义一个概率测度；*2.* $\mathbb{P}_{n,s}$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde{\sigma}_{d-1}$ 对所有 $s > 0$ 弱收敛，其中 $\tilde{\sigma}_{d-1}$ 表示 $\mathbb{S}^{d-}$上的均匀分布 ^{1}.

这些技术引理的证明见第 7 节。

˜定理 *3.6* 的证明。与定理 3.3 的证明一样，令 C、C、c、$\tilde{c}$ 为一些正数常量，它们仅依赖于 d，且其具体取值可能因行而异。为简便起见，设 $\eta_0 := \eta^\gamma$ 以及 $\widetilde{\eta}_0 := \widetilde{\eta}^\gamma$。证明策略与定理 3.3 中所用的策略类似。第一步，对于给定的 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $R > 0$，我们估计 η_n在某个区域 $K_2 \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 上的限制能够确定 $\mathscr{L}(\eta_n) \cap B_R$和 $\mathscr{L}^*(\eta_n) \cap B_R$的概率。这个区域还将用于构造点过程 $\widetilde{\eta}_n$、$n \in \mathbb{N}_0$，但此处的额外难点在于，$\widetilde{\eta}_0$ 是 $\mathbb{R}^d$中的点过程，而 $\widetilde{\eta}_n$ 是 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$中的点过程。因此，我们不能像定理 3.3 的证明中那样直接使用最大耦合，还需要额外的论证。

准备工作：令 R，$r > 0$并对 $n \in \mathbb{N}_0$考虑以下辅助事件 $\mathcal{E}_n := \mathcal{E}(\eta_n, R, r)$（见（4.5））以及 $\mathcal{H}_n^{\max} := \mathcal{H}^{\max}(\eta_n, R, (R+r)^2)$（见（4.4））。进一步定义区域

$$K_2(R,r) := \big\{(v,h) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ : \|v\| \le 2(R+r),\ h \le (R+r)^2\big\}.$$

注意到，由于 η_n是 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$上的泊松点过程，我们有 $\mathcal{H}^{\min}(\eta_n, a, 0)$对任意 $a > 0$几乎必然成立。因此，根据引理 4.3，取 $t = 0$时，我们注意到 $K_0(R, r, 0) = K_2(R, r)$。于是，在 $\mathcal{E}_n$ 上有

$$\bigcup_{S\in\mathcal{L}^*(\eta_n), S\cap B_R\neq\varnothing} \mathrm{bd}\, S = \bigcup_{S\in\mathcal{L}^*(\eta_n\cap K_2(R,r)), S\cap B_R\neq\varnothing} \mathrm{bd}\, S, \tag{6.2}$$

并且在 $\mathcal{H}_n^{\max}$ 上，我们有

$$\mathscr{L}(\eta_n) \cap B_R = \mathscr{L}(\eta_n \cap K_2(R,r)) \cap B_R. \tag{6.3}$$

此外，注意到如果 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 (C2)，则存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得 $\left|(\mathrm{I}^1 f_n)(1/2)-\gamma\right|<\gamma/2$ 对所有 $n\geq n_0$ 均成立。于是，对于所有 $n\geq n_0$ 和 $n=0$，由引理 4.1 可得

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{H}_n^{\max}\big)<C\exp(-c\gamma r^d),$$

并由引理 4.2，我们得到

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{E}_n^c\big)<C\exp(-c\gamma r^d), \tag{6.4}$$

其中我们还用到：对任意 $\alpha>0$、$n\in\mathbb{N}$ 和 $t\leq 0$，均有 $(\mathrm{I}^\alpha f_n)(t)=0$。

点过程的构造：接下来，我们构造点过程 $(\widetilde{\eta}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$，它们定义在同一概率空间上，并且对所有 $n\in\mathbb{N}_0$ 都满足 $\widetilde{\eta}_n\overset{d}{=}\eta_n$。设 $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为单调递增序列（稍后具体指定），使得当 $n\to\infty$ 时有 $r_n\to\infty$，并定义 $\widetilde{\eta}_0$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上强度为 γ 的齐次泊松点过程（即 $\widetilde{\eta}_0\overset{d}{=}\eta_0$）。此外，设

$$\widetilde{\eta}_n=\xi_n+\hat{\xi}_n,\qquad n\in\mathbb{N},$$

^^其中 ξ_n 与 ξ_n 相互独立，ξ_n 是（$K_2(r_n/2,r_n)^c$ 上的）泊松点过程，其强度测度具有密度 $(v,h)\mapsto f_n(h)\mathbf{1}_{K_2(r_n/2,r_n)^c}(v,h)$，且 ξ_n 是 B_{3r_n} 上齐次泊松点过程 ξ_n^0 的独立 $\mathbb{Q}_n$-标记（注意 $B_{3r_n}=\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^d}(K_2(\frac{r_n}{2},r_n))$），强度为 $(\mathrm{I}^1 f_n)(9r_n^2/4)$，且 —

$$\mathbb{Q}_n(B)=\Big(\big(\mathrm{I}^1 f_n\big)(9r_n^2/4)\Big)^{-1}\int_B f_n(h)\mathbb{1}(h\in[0,9r_n^2/4])\mathrm{d}h,\qquad B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

根据标记定理 [24, 定理 5.6] 和叠加定理 [24, 定理 3.3]，我们得到 $\widetilde{\eta}_n\overset{d}{=}\eta_{n^\circ}$ 最后，我们假设，对于所有 $n\in\mathbb{N}$ 和 ξ_n^0，^ξ_n 与 $\widetilde{\eta}_0$ 相互独立，并且构造方式使得随机元 ξ_n^0 和 $\widetilde{\eta}_0\cap B_{3r_n}$ 尽可能一致（见 [40,定理 7.3，第 107] 页）。考虑耦合事件

$$\mathcal{Y}_n:=\{\widetilde{\eta}_0\cap B_{3r_n}=\xi_n^0\},$$

由 [40, 公式（8.18），第 112] 页以及 [35,定理 3.2.2]，我们得到

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{Y}_n^c\right)\leq\frac{3}{2}\int_{\{v\in\mathbb{R}^d:\|v\|\leq 3r_n\}}\left|\gamma-\big(\mathrm{I}^1 f_n\big)(9r_n^2/4)\right|\mathrm{d}v\leq C\left|\gamma-\big(\mathrm{I}^1 f_n\big)(9r_n^2/4)\right|r_n^d. \tag{6.5}$$

为了证明 (i)，现在需要证明，对于任意 $R>0$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_n)\cap B_R\neq\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_0)\cap B_R)=0, \tag{6.6}$$

对于序列 $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的适当选取。同样，为了根据 (3.2) 证明 (ii)，只需确保对于任意 $R>0$ 和 $\varepsilon>0$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big(\big[(\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_n)\setminus(\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_0))^{\varepsilon-}\big)\cup\big(\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_0)\setminus(\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_n))^{\varepsilon-}\big)\big]\cap B_R\neq\varnothing\Big)=0, \tag{6.7}$$

由于一个任意紧集 $C\in\mathcal{C}$ 都包含在某个半径为 $R>0$ 的球中。这里我们回顾一下

$$X^{\varepsilon-}=\{z\in\mathbb{R}^d:\inf_{x\in X}\|z-x\|<\varepsilon\}.$$

在证明的接下来两个部分中，我们将推导上述概率的界；在证明的最后一部分中，我们将证明，对于适当选择的序列 $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$，当 $n\to\infty$ 时这两个界都趋于 0。

对偶拉盖尔镶嵌的估计： 令 $n_1(R) > 0$ 满足：对任意 $n > n_1$，$r_n \geq 2\max(R,1)$。结合 (6.2)，利用全概率定律以及 $K_2(R, r_n) \subset K_2(r_n/2, r_n)$ 和 $\widetilde{\eta}_n \cap K_2(r_n/2, r_n) = \xi_n$ 几乎必然成立这一事实，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_n)\cap B_R \neq \mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_0)\cap B_R\big)\\
&\qquad\leq \mathbb{P}\Big(\bigcup_{S\in\mathcal{L}^*(\widetilde{\eta}_n),S\cap B_R\neq\varnothing}\operatorname{bd} S \neq \bigcup_{S\in\mathcal{L}^*(\widetilde{\eta}_0),S\cap B_R\neq\varnothing}\operatorname{bd} S\Big)\\
&\qquad= \mathbb{P}\Big(\Big\{\bigcup_{S\in\mathcal{L}^*(\xi_n),S\cap B_R\neq\varnothing}\operatorname{bd} S \neq \bigcup_{S\in\mathcal{L}^*(\widetilde{\eta}_0\cap B_{3r_n}),S\cap B_R\neq\varnothing}\operatorname{bd} S\Big\}\cap\mathcal{E}_n\cap\mathcal{E}_0\cap\mathcal{Y}_n\Big)\\
&\qquad\qquad + \mathbb{P}\big((\mathcal{E}_n\cap\mathcal{E}_0\cap\mathcal{Y}_n)^c\big)\\
&\qquad\leq \mathbb{P}\Big(\Big\{\bigcup_{S\in\mathcal{L}^*(\xi_n)}\operatorname{bd} S \neq \bigcup_{S\in\mathcal{L}^*(\xi_n^0)}\operatorname{bd} S\Big\}\cap\mathcal{E}_n\Big) + \mathbb{P}(\mathcal{E}_n^c) + \mathbb{P}(\mathcal{E}_0^c) + \mathbb{P}(\mathcal{Y}_n^c),
\end{aligned} \tag{6.8}$$

其中在最后一步中，我们用到了 $\xi_n^0 = \widetilde{\eta}_0\cap B_{3r_n}$ 在 $\mathcal{Y}_n$ 上几乎必然成立。
记

$$\mathcal{S}_n := \Big\{\bigcup_{S\in\mathcal{L}^*(\xi_n)}\operatorname{bd} S = \bigcup_{S\in\mathcal{L}^*(\xi_n^0)}\operatorname{bd} S\Big\} = \big\{\mathscr{L}^*(\xi_n^0) = \mathscr{L}^*(\xi_n)\big\}, \tag{6.9}$$

我们的下一个目标是估计 $\mathbb{P}(\mathcal{S}_n^c\cap\mathcal{E}_n)$。
首先注意到，根据构造，$\xi_n^0 = \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^d}(\xi_n)$，因此由 (4.2) 可知，对于任意 $(v,h)\in\mathrm{vert}(\Phi(\xi_n))$，都有 $(v,0)\in\mathrm{vert}(\Phi(\xi_n^0))$，因为在后一种情况下，所有点都是极点，且 $\mathrm{vert}(\Phi(\xi_n^0)) = \xi_n^0$。此外，$\mathcal{L}^*(\xi_n^0)$ 和 $\mathcal{L}^*(\xi_n)$ 的所有胞元几乎必然都是单纯形。因此，若对任意 $d+1$ 个不同点 $(v_1,h_1)\ldots,(v_{d+1},h_{d+1})\in\xi_n$，只要 $\mathrm{conv}(v_1,\ldots,v_{d+1})$ 构成镶嵌 $\mathcal{L}^*(\xi_n^0)$ 的一个胞元，$\mathrm{conv}(v_1,\ldots,v_{d+1})$ 也构成镶嵌 $\mathcal{L}^*(\xi_n)$ 的一个胞元，则事件 $\mathcal{S}_n$ 几乎必然发生。因此，事件 $\mathcal{S}_n^c$ 意味着存在 $d+1$ 个不同点 $(v_1,h_1)\ldots,(v_{d+1},h_{d+1})\in\xi_n$，使得 $\mathrm{conv}(v_1,\ldots,v_{d+1})$ 构成 $\mathcal{L}^*(\xi_n^0)$ 的一个胞元，却不构成 $\mathcal{L}^*(\xi_n)$ 的胞元；根据构造，这意味着

$$\xi_n^0\cap\operatorname{int} B(\mathbf{v}) = \varnothing \text{ and } \xi_n\cap\operatorname{int}(\Pi^-(\mathbf{v},\mathbf{h}))^{\downarrow}\neq\varnothing,$$

其中我们使用记号 $\mathbf{v} = (v_1,\ldots,v_{d+1})$、$(\mathbf{v},\mathbf{h}) = ((v_1,h_1)\ldots,(v_{d+1},h_{d+1}))$，并回顾：对于 $\mathbf{v}\in\mathrm{AI}^{d+1}$，我们将 $B(\mathbf{v})$ 记为边界上包含 $v_1,\ldots,v_{d+1}$ 的唯一球，将 $\Pi^-(\mathbf{v},\mathbf{h})$ 记为包含 $(v_1,h_1)\ldots,(v_{d+1},h_{d+1})$ 的唯一向下抛物面。此外，在 $\mathcal{E}_n$ 上，由于 ξ_n 的所有高度坐标均为非负，顶点 $(z,s^2) :=$顶点$(\Pi^-(\mathbf{v},\mathbf{h}))$ 满足 $s\in[0,3r_n/2]$ 与 $\|z\|\leq\sqrt{9r_n^2/4 - s^2}$。~~我们~~将相应的事件按如下方式表示

$$\mathcal{B}_\varnothing = \mathcal{B}_\varnothing(\xi_n,\mathbf{v}) := \{\xi_n^0\cap\operatorname{int} B(\mathbf{v}) = \varnothing\} = \{\xi_n\cap(\operatorname{int} B(\mathbf{v})\times[0,9r_n^2/4]) = \varnothing\},\mathcal{P}_\varnothing = \mathcal{P}_\varnothing(\xi_n,(\mathbf{v},\mathbf{h})) := \{\xi_n\cap\operatorname{int}(\Pi^-(\mathbf{v},\mathbf{h}))^{\downarrow} = \varnothing\},\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{v},\mathbf{h}) := \{(z,s^2) = \text{顶点}(\Pi^-(\mathbf{v},\mathbf{h})) \text{ 满足 } s\in[0,3r_n/2],\|z\|\leq\sqrt{9r_n^2/4 - s^2}\}.$$

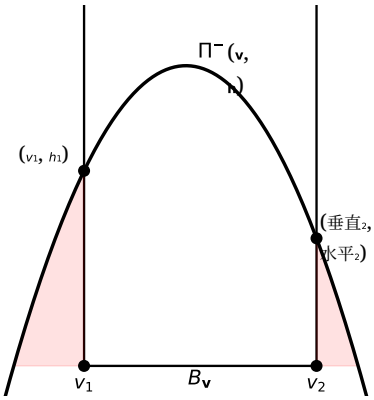

图 2：向下抛物线 $(\Pi^-(\mathbf{v},\ \mathbf{h}))^{\downarrow}$ 以及条带 $\big(B(\mathbf{v})\ \times[0,9r_n^2/4]\big)$ 位于 $\mathbb{R}^2$中。

因此，我们有

$$\mathbb{P}(\mathcal{S}_n^c\cap\mathcal{E}_n)\leq\mathbb{P}\big(\exists(v_1,h_1),\ldots,(v_{d+1},h_{d+1})\in\xi_n:\mathcal{B}_\varnothing\cap\mathcal{P}_\varnothing^c\cap\mathcal{A}\big).$$

注意，根据定理 5， ξ_n 是一个强度测度为

$$\Lambda_{r_n}(\cdot)=\int_{B_{3r_n}}\int_0^{9r_n^2/4}\mathbb{1}((v,h)\in\cdot)f_n(h)\mathrm{d}h\mathrm{d}v. \tag{6.10}$$

然后，利用不等式 $\mathbb{P}(X\neq0)\leq\mathbb{E}(X)$（其中随机变量 X为非负整数值随机变量）以及多元 Mecke 公式 [37, 推论 3.2，3] 可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{S}_n^c\cap\mathcal{E}_n)&\leq\mathbb{E}\sum_{(v_1,h_1),\ldots,(v_{d+1},h_{d+1})\in(\xi_n)_{\neq}^{d+1}}\mathbb{1}\big(\mathcal{B}_\varnothing(\xi_n,\mathbf{v})\cap\mathcal{P}_\varnothing^c(\xi_n,(\mathbf{v},\mathbf{h}))\big)\mathbb{1}(\mathcal{A}(\mathbf{v},\mathbf{h}))\\&\leq\int_{(B_{3r_n})^{d+1}}\int_{(\mathbb{R}_+)^{d+1}}\mathbb{P}_{\xi_n}\big(\mathcal{B}_\varnothing\cap\mathcal{P}_\varnothing^c\big)\mathbb{1}(\mathcal{A})\prod_{i=1}^{d+1}f_n(h_i)\mathbb{1}(h_i\leq9r_n^2/4)\mathrm{d}h_i\,\mathrm{d}v_i,\end{aligned} \tag{6.11}$$

其中， $n\in\mathbb{N}$ 和 $(\xi_n)_{\neq}^{d+1}$ 是由 ξ_n 中不同点构成的 $(d+1)$ 元组的点过程，而 $\mathcal{B}_\varnothing\cap\mathcal{P}_\varnothing^c$ 是一个依赖于固定点 $(\mathbf{v},\ \mathbf{h})$ 和点过程 ξ_n的事件。此外，注意到根据事件 $\mathcal{B}_\varnothing$ 和 $\mathcal{P}_\varnothing$ 的定义（见图 2），我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\xi_n}\big(\mathcal{B}_\varnothing\cap\mathcal{P}_\varnothing^c\big)&=\mathbb{P}\Big[\xi_n\Big(\operatorname{int}(\Pi^-(\mathbf{v},\mathbf{h}))^{\downarrow}\setminus\big(\operatorname{int}B(\mathbf{v})\times[0,9r_n^2/4]\big)\Big)\neq0\Big]\\&\leq\mathbb{E}\Big[\xi_n\Big((\Pi^-(\mathbf{v},\mathbf{h}))^{\downarrow}\setminus\big(B(\mathbf{v})\times[0,9r_n^2/4]\big)\Big)\Big],\end{aligned} \tag{6.12}$$

其中，在最后一步中，我们再次对非负整数值随机变量 X 使用了不等式 $\mathbb{P}(X\neq0)\leq\mathbb{E}(X)$，并利用了 ξ_n 的强度测度相对于勒贝格测度绝对连续这一事实。

回顾一下，(z,s^2) 表示向下抛物面 $\Pi^-(\mathbf{v},\mathbf{h})$ 的顶点。于是我们可以写作$v_i=z+sy_i$，其中 $y_1,\ldots,y_{d+1}\in\mathbb{B}^d$ 唯一定义且两两不同，并且还有 $h_i=s^2(1-\|y_i\|^2)$。

考虑变换

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+\times(\mathbb{B}^d)^{d+1} &\to (\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+)^{d+1}\\ (z,s,y_1,\dots,y_{d+1}) &\mapsto (z+sy_1,s^2(1-\|y_1\|^2),\dots,z+sy_{d+1},s^2(1-\|y_{d+1}\|^2)),\end{aligned} \tag{6.13}$$

其雅可比行列式为

$$|\det J(\varphi)| = 2^{d+1}d!s^{(d+1)^2}\lambda_d\big(\operatorname{conv}(y_1,\dots,y_{d+1})\big) \le 2^{d+1}d!\kappa_d s^{(d+1)^2} \tag{6.14}$$

（参见 [20, 定理 5.1]）。注意，事件 $\mathcal{A}$ 蕴含 $z\in B_{3r_n/2}$ 和 $s\le 3r_n/2$。将变换 φ 应用于 (6.11)，再结合 (6.12)，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{S}_n^c\cap\mathcal{E}_n) \le C\int_{(\mathbb{B}^d)^{d+1}}\int_0^{3r_n/2}\int_{B_{3r_n/2}} s^{(d+1)^2}\mathbb{E}\Big[\xi_n\Big((\Pi^-_{(z,s^2)})^{\downarrow}\setminus\big((sB(\mathbf{y})+z)\times[0,9r_n^2/4]\big)\Big)\Big]\\ \times\prod_{i=1}^{d+1} f_n\big(s^2(1-\|y_i\|^2)\big)\mathbb{1}\big(sy_i+z\in B_{3r_n}\big)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y_1,\dots,\mathrm{d}y_{d+1}.\end{aligned} \tag{6.15}$$

设 $s\in(0,\ 3r_n/2]$、$z\in B_{3r_n/2}$ 和 $\mathbf{y}\in(\mathbb{B}^d)^{d+1}\cap \mathrm{AI}^{d+1}$。回忆一下，$\rho(\mathbf{y})$ 表示球的半径，而 $c(\mathbf{y})$ 表示球 $B(\mathbf{y})$ 的中心。由 (6.10) 可得

$$\begin{aligned}E(n,s,\mathbf{y},z) &:= \mathbb{E}\Big[\xi_n\Big((\Pi^-_{(z,s^2)})^{\downarrow}\setminus\big((sB(\mathbf{y})+z)\times[0,9r_n^2/4]\big)\Big)\Big]\\ &= \int_{B_{3r_n}}\int_0^{9r_n^2/4} f_n(h)\mathbb{1}\Big((v,h)\in(\Pi^-_{(z,s^2)})^{\downarrow}\setminus\big((sB(\mathbf{y})+z)\times[0,9r_n^2/4]\big)\Big)\mathrm{d}h\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

现在来分析指示函数。注意，$(v,\ h)\in(\Pi^-_{(z,\ s^2)})^{\downarrow}$ 表示 $h\le -\|v-z\|^2+s^2$，这又蕴含 $\|v-z\|\le\sqrt{s^2-h}\le s$ 和 $h\le s^2$。同时，条件 $(v,\ h)\notin(sB(\mathbf{y})+z)\times[0,9r_n^2/4]$ 等价于：对于任意 $h\in[0,9r_n^2/4]$，$\|v-sc(\mathbf{y})-z\|>s\rho(\mathbf{y})$。因此，

$$\begin{aligned}&\mathbb{1}\Big((v,h)\in(\Pi^-_{(z,s^2)})^{\downarrow}\setminus\big((sB(\mathbf{y})+z)\times[0,9r_n^2/4]\big)\Big)\\ &\qquad\le \mathbb{1}\big(\|v-z\|\le s,\|v-sc(\mathbf{y})-z\|>s\rho(\mathbf{y}),h\le s^2\big).\end{aligned}$$

然后进行变量替换 $v'=v-z$，并注意到 $z\in B_{3r_n/2}$ 和 $v\in B_{3r_n}$ 蕴含 $v'\subset B_{5r_n}$，即可得到

$$\begin{aligned}E(n,s,\mathbf{y},z) &\le \int_{B_{5r_n}}\int_0^{s^2} f_n(h)\mathbb{1}\big(\|v'\|\le s,\|v'-sc(\mathbf{y})\|>s\rho(\mathbf{y})\big)\mathrm{d}h\,\mathrm{d}v'\\ &\le \int_{B_{5r_n}}\int_0^{s^2} f_n(h)\mathbb{1}\big(s(\rho(\mathbf{y})-\|c(\mathbf{y})\|)<\|v'\|\le s\big)\mathrm{d}h\,\mathrm{d}v',\end{aligned}$$

其中在第二步中我们还使用了三角不等式。由于

$$\big|\rho(\mathbf{y})-\|c(\mathbf{y})\|\big| = \big|\|c(\mathbf{y})-y'\|-\|c(\mathbf{y})\|\big|\le\|y'\|\le 1$$

对于某个 $y' \in \mathbb{B}^d$，条件 $s(\rho(\mathbf{y}) - \|c(\mathbf{y})\|) \le s$ 对任意 $\mathbf{y} \in (\mathbb{B}^d)^{d+1} \cap \mathrm{AI}^{d+1}$ 均成立。因此，

$$E(n, s, \mathbf{y}, z) \le C s^d \big(\mathrm{I}^1 f_n\big)(s^2)\big(1 - (\rho(\mathbf{y}) - \|c(\mathbf{y})\|)_+^d\big), \tag{6.16}$$

其中 $x_+ = \max(x, 0)$。此外，对于 $s \in [0, 3r_n^2/2]$ 和 $\mathbf{y} \in (\mathbb{B}^d)^{d+1} \cap \mathrm{AI}^{d+1}$，定义

$$h(\mathbf{y}) := \big(1 - (\rho(\mathbf{y}) - \|c(\mathbf{y})\|)_+^d\big). \tag{6.17}$$

回顾概率密度 $g_{n,s}$ 的定义 (6.1)，并令 $Y_{(n,s)\,1}, \dots, Y_{(n,s)\,d+1}$ 为 $\mathbb{B}^d$ 中密度为 $g_{n,s}$ 的独立同分布随机点，其中 $n \in \mathbb{N}$ 和 $s \ge 0$ 任意。然后，将 (6.16) 中的界应用于 (6.15)，估计 $\mathbb{1}(sy_i + z \in B_{3r_n}) \le 1$ 并对 z 积分，最后利用 Fubini 定理可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{S}_n^c \cap \mathcal{E}_n) &\le C r_n^d \int_0^{3r_n/2} s^{(d+1)^2+d} \big(\mathrm{I}^1 f_n\big)(s^2) \int_{(\mathbb{B}^d)^{d+1}} h(s, \mathbf{y}) \prod_{i=1}^{d+1} f_n(s^2 - s^2\|y_i\|^2))\mathrm{d}y_i \mathrm{d}s \\
&= C r_n^d \int_0^{3r_n/2} s^{2d+1} \Big(\big(\mathrm{I}^{\frac{d}{2}} f_n\big)(s^2)\Big)^{d+1} \big(\mathrm{I}^1 f_n\big)(s^2) \mathbb{E}\big[h(Y_1^{(n,s)}, \dots, Y_{d+1}^{(n,s)})\big] \mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{6.18}$$

进一步记

$$F_n^{(1)}(s) := s^{2d+1} \Big(\big(\mathrm{I}^{\frac{d}{2}} f_n\big)(s^2)\Big)^{d+1} \big(\mathrm{I}^1 f_n\big)(s^2) \mathbb{E}\big[h(Y_1^{(n,s)}, \dots, Y_{d+1}^{(n,s)})\big] \tag{6.19}$$

并结合 合并 (6.8) 与 (6.4)、(6.5) 及 (6.18)，对于任意 $n \ge \max(n_0, n_1)$，最终得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_n) \cap B_R \ne \mathscr{L}^*(\widetilde{\eta}_0) \cap B_R\big) \\
&\qquad \le C\Big(\exp\big(-c r_n^d\big) + r_n^d \Big(\int_0^{3r_n/2} F_n^{(1)}(s)\mathrm{d}s + \big|\gamma - \big(\mathrm{I}^1 f_n\big)(9r_n^2/4)\big|\Big)\Big).
\end{aligned} \tag{6.20}$$

拉盖尔镶嵌的估计： 如前一部分所述，令 $n_1(R) > 0$ 满足：对于任意 $n > n_1$，有 $r_n \ge 2\max(R, 1)$；由全概率定律，结合 (6.3) 以及以下事实：$K_2(R, r_n) \subset K_2(r_n/2, r_n)$、$\widetilde{\eta}_n \cap K_2(r_n/2, r_n) = \xi_n$，且 $\xi_n^0 = \widetilde{\eta}_0 \cap B_{3r_n}$ 在 $\mathcal{Y}_n$ 上几乎必然成立，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\big[(\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_n) \setminus (\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_0))^{\varepsilon-}) \cup (\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_0) \setminus (\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_n))^{\varepsilon-})\big] \cap B_R \ne \varnothing\Big) \\
&\quad = \mathbb{P}\Big(\Big\{\big[(\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_n) \setminus (\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_0))^{\varepsilon-}) \cup (\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_0) \setminus (\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_n))^{\varepsilon-})\big] \cap B_R \ne \varnothing\Big\} \cap \mathcal{H}_0^{\max} \cap \mathcal{H}_n^{\max} \cap \mathcal{Y}_n\Big) \\
&\qquad\qquad + \mathbb{P}\big((\mathcal{H}_0^{\max} \cap \mathcal{H}_n^{\max} \cap \mathcal{Y}_n)^c\big) \\
&\quad \le \mathbb{P}\Big((\mathscr{L}(\xi_n) \setminus (\mathscr{L}(\xi_n^0))^{\varepsilon-}) \cup (\mathscr{L}(\xi_n^0) \setminus (\mathscr{L}(\xi_n))^{\varepsilon-}) \ne \varnothing\Big) \\
&\qquad\qquad + \mathbb{P}\big((\mathcal{H}_0^{\max})^c\big) + \mathbb{P}\big((\mathcal{H}_n^{\max})^c\big) + \mathbb{P}\big(\mathcal{Y}_n^c\big).
\end{aligned} \tag{6.21}$$

再次使用 th　全概率定律，并回顾事件 $\mathcal{S}_n$ 的定义（见 (6.9)），以及

$\mathcal{E}_n$ 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big((\mathscr{L}(\xi_n)\setminus(\mathscr{L}(\xi_n^0))^{\varepsilon-})\cup(\mathscr{L}(\xi_n^0)\setminus(\mathscr{L}(\xi_n))^{\varepsilon-})\neq\varnothing\Big)&\\ \leq\mathbb{P}\Big(\Big\{(\mathscr{L}(\xi_n)\setminus(\mathscr{L}(\xi_n^0))^{\varepsilon-})\cup(\mathscr{L}(\xi_n^0)\setminus(\mathscr{L}(\xi_n))^{\varepsilon-})\neq\varnothing\Big\}\cap\mathcal{S}_n\cap\mathcal{E}_n\Big)&\\ +\mathbb{P}\big((\mathcal{S}_n\cap\mathcal{E}_n)^c\big)&\qquad(6.22)\\ \leq\mathbb{P}\Big(\big\{\mathscr{L}(\xi_n)\not\subset(\mathscr{L}(\xi_n^0))^{\varepsilon-}\big\}\cap\mathcal{S}_n\cap\mathcal{E}_n\Big)+\mathbb{P}\Big(\big\{\mathscr{L}(\xi_n^0)\not\subset(\mathscr{L}(\xi_n))^{\varepsilon-}\big\}\cap\mathcal{S}_n\cap\mathcal{E}_n\Big)&\\ +\mathbb{P}(\mathcal{S}_n^c\cap\mathcal{E}_n)+\mathbb{P}(\mathcal{E}_n^c).&\end{aligned}$$

注意

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\xi_n)&=\bigcup_{(v,h)\in\xi_n}\operatorname{bd}C((v,h),\xi_n),\\ \mathscr{L}(\xi_n^0)&=\bigcup_{v\in\xi_n^0}\operatorname{bd}C(v,\xi_n^0).\end{aligned}$$

此外，在 $\mathcal{S}_n$ 上，我们有 $C((v,h)\ \xi_n)\cap C((v',h')\ \xi_n)\neq\varnothing$ 当且仅当 $C(v,\xi_n^0)\cap C(v',\xi_n^0)\neq\varnothing$，因此特别地，对于任意 $(v,h)\in\xi_n$，胞元 $C((v,h)\ \xi_n)$ 和 $C(v,\xi_n^0)$ 具有相同的组合结构（即面格，见 [41, 定义 2.6.]）。这由对偶关系以及 $\mathcal{L}^*(\xi_n)$ 与 $\mathcal{L}^*(\xi_n^0)$ 在 $\mathcal{S}_n$ 上重合这一事实得出。此外，由 (4.2) 可知

$$\operatorname{vert}(\Phi(\xi_n^0))=\operatorname{ext}(\Psi(\xi_n^0))=\xi_n^0,$$

因此，$C(v,\ \xi_n^0)\neq\varnothing$ 对任意 $v\in\xi_n^0$ 都成立，这意味着 $C((v,\ h)\ \xi_n)\neq\varnothing$ 对任意 $(v,\ h)\in\xi_n$ 都成立。我们先考虑事件 $\{\mathscr{L}(\xi_n)\ \not\subset(\mathscr{L}(\xi_n^0))^{\varepsilon-}\}\cap\mathcal{S}_n\cap\mathcal{E}_n$，这意味着存在 $(v,\ h)\in\xi_n$，以及一个点 $x\in\mathbf{bd}\ C((v,\ h)\ \xi_n)$，使得

$$\inf_{y\in\operatorname{bd}C(v,\xi^0)}\|x-y\|\geq\inf_{y\in\mathscr{L}(\xi_n^0)}\|x-y\|\geq\varepsilon.$$

假设 $C((v,h)\ \xi_n)$ 的顶点为 $w_1,\ldots,w_m$，其中 $m\in\mathbb{N}$。那么在 $\mathcal{S}_n$ 上，单元 $C(v,\xi_n^0)$ 恰有 m 个顶点 $w_1',\ldots,w_m'$；此外，对于每个 $i=1,\ldots,m$，几乎必然存在恰好 $d+1$ 个点 $(v_1,h_1)\ldots,(v_{d+1},h_{d+1})\in\xi_n$，使得

$$w_i=\operatorname{proj}_{\mathbb{R}^d}\big(\operatorname{apex}(\Pi^-(\mathbf{v},\mathbf{h}))\big),\qquad w_i'=c(\mathbf{v}),$$

这里回顾一下记号 $\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_{d+1})$、$(\mathbf{v},\mathbf{h})=((v_1,h_1)\ldots,(v_{d+1},h_{d+1}))$；对于 $\mathbf{v}\in\mathbf{AI}^{d+1}$，记 $c(\mathbf{v})$ 为包含 $v_1,\ldots,v_{d+1}$ 且以它们为边界点的唯一球 $B(\mathbf{v})$ 的中心，记 $\Pi^-(\mathbf{v},\mathbf{h})$ 为经过 $(v_1,h_1)\ldots,(v_{d+1},h_{d+1})$ 的唯一向下抛物面。由于 $x\in\mathbf{bd}\ C((v,h)\ \xi_n)$，存在 $C((v,h)\ \xi_n)$ 的一个面 F，其顶点为 $w_{i_1},\ldots,w_{i_k}$，$k<m$，使得 $x\in F$。注意，此时 $C(v,\xi^0)$ 有一个面 F'，其顶点为 $w_{i_1}',\ldots,w_{i_k}'$。

一般而言，F和 F'是（$d-1$）维凸多面体集。根据 (2.1) 和 $\mathcal{S}_n$，面F和 F'包含于平行超平面中，具有相同的面格，且其对应的面也彼此平行。因此，根据凸多面体集的闵可夫斯基–韦尔定理，面F，F'可表示为

$$F=\operatorname{conv}(w_{i_1},\ldots,w_{i_k})+\operatorname{pos}(r_1,\ldots,r_q),\qquad F'=\operatorname{conv}(w_{i_1}',\ldots,w_{i_k}')+\operatorname{pos}(r_1,\ldots,r_q),$$

其中 r_1，……，r_q是一些单位向量，而 pos(r_1，……，r_q) 是由它们张成的锥。因此，存在 λ_{i_1}，……，$\lambda_{i_k} \in [0,1]$，满足 $\lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_k} = 1$ 和 μ_1，……，$\mu_q \geq 0$，使得 $x = \sum_{j=1}^k \lambda_{i_j} w_{i_j} + \sum_{i=1}^q \mu_i r_{i\circ}$ 此外，$x' := \sum_{j=1}^k \lambda_{i_j} w'_{i_j} + \sum_{i=1}^q \mu_i r_i \in F'$，于是我们得到

$$\begin{aligned}\inf_{y \in \mathrm{bd}\, C(v,\xi^0)} \|x-y\| &\leq \Big\| \sum_{j=1}^k \lambda_{i_j} w_{i_j} - \sum_{j=1}^k \lambda_{i_j} w'_{i_j} \Big\| \leq \max_{1\leq j\leq k} \|w_{i_j} - w'_{i_j}\| \\ &\leq \max_{(v_1,h_1),\ldots,(v_{d+1},h_{d+1}) \in \xi_n} \big\| \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^d}(\mathrm{apex}(\Pi^-(\mathbf{v},\mathbf{h}))) - c(\mathbf{v}) \big\|.\end{aligned}$$

给定 $(\mathbf{v},\mathbf{h}) = ((v_1,h_1)\ldots,(v_{d+1},h_{d+1}))$，$\mathbf{v} \in \mathrm{AI}^{d+1}$ 定义这些事件

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_\varepsilon := \mathcal{V}_\varepsilon(\mathbf{v},\mathbf{h}) &= \big\{ \big\| \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^d} \big(\mathrm{apex}(\Pi^-(\mathbf{v},\mathbf{h}))\big) - c(\mathbf{v}) \big\| > \varepsilon \big\}, \\ \mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{v},\mathbf{h}) &:= \{(z,s^2) = \mathrm{apex}(\Pi^-(\mathbf{v},\mathbf{h})) \text{ satisfies } s \in [0,3r_n/2], \|z\| \leq \sqrt{9r_n^2/4 - s^2}\}.\end{aligned}$$

回忆一下，在 $\mathcal{E}_n$ 上事件 $\mathcal{A}$发生。于是

$$\mathbb{P}\big(\big\{\mathscr{L}(\xi_n) \not\subset (\mathscr{L}(\xi_n^0))^{\varepsilon-}\big\} \cap \mathcal{S}_n \cap \mathcal{E}_n\big) \leq \mathbb{P}(\exists (v_1,h_1),\ldots,(v_{d+1},h_{d+1}) \in \xi_n : \mathcal{A} \cap \mathcal{V}_\varepsilon) =: P(n). \quad (6.23)$$

利用非负整数值随机变量 X 的不等式 $\mathbb{P}(X \neq 0) \leq \mathbb{E}(X)$ 和多元 Mecke 公式，并回忆 ξ_n 的强度测度的定义（见 (6.10)），可得

$$\begin{aligned}P(n) &\leq \mathbb{E} \sum_{(v_1,h_1),\ldots,(v_{d+1},h_{d+1}) \in (\xi_n)^{d+1}_{\neq}} \mathbb{1}(\mathcal{V}_\varepsilon)\mathbb{1}(\mathcal{A}(\mathbf{v},\mathbf{h})) \\ &= \int_{(B_{3r_n})^{d+1}} \int_{(\mathbb{R}_+)^{d+1}} \mathbb{1}(\mathcal{V}_\varepsilon)\mathbb{1}(\mathcal{A}) \prod_{i=1}^{d+1} f_n(h_i)\mathbb{1}(h_i \leq 9r_n^2/4)\mathrm{d}h_i \mathrm{d}v_i,\end{aligned}$$

其中 $(\xi_n)^{d+1}_{\neq}$ 是由 ξ_n的$(d+1)$元不同点组成的点过程。与 (i) 的证明中一样，记 (z,s^2) 为向下抛物面 $\Pi^-(\mathbf{v},\mathbf{h})$ 的顶点，并考虑由 (6.13) 定义的变换 φ，其雅可比行列式见 (6.14)。还要回忆，在事件 $\mathcal{A}$ 发生时，我们有 $z \in B_{3r_n/2}$ 和$s \leq 3r_n/2$。将 φ 应用于上面的积分，得到

$$\begin{aligned}P(n) \leq C \int_{(\mathbb{B}^d)^{d+1}} \int_0^{3r_n/2} \int_{B_{3r_n/2}} & s^{(d+1)^2} \mathbb{1}(\|z - (s\, c(\mathbf{y}) + z)\| > \varepsilon) \\ & \prod_{i=1}^{d+1} f_n(s^2(1-\|y_i\|^2))\mathbb{1}(sy_i + z \in B_{3r_n})\mathrm{d}z\mathrm{d}s\mathrm{d}y_1,\ldots \mathrm{d}y_{d+1}.\end{aligned}$$

利用 Fubini 定理，回顾 (6.1) 中概率密度 $g_{n,s}$ 的定义，并对$\mathbb{1}(sy_i + z \in B_{3r_n}) \leq 1$ 取界，可得

$$\begin{aligned}P(n) &\leq C r_n^d \int_0^{3r_n/2} \int_{(\mathbb{B}^d)^{d+1}} s^{d+1} \Big(\big(\mathrm{I}^{\frac{d}{2}} f_n\big)(s^2) \Big)^{d+1} \mathbb{1}(\|c(\mathbf{y})\| > \varepsilon/s) \prod_{i=1}^{d+1} g_{n,s}(y_i)\mathrm{d}y_1,\ldots \mathrm{d}y_{d+1}\mathrm{d}s \\ &\leq C r_n^d \int_0^{3r_n/2} s^{d+1} \Big(\big(\mathrm{I}^{\frac{d}{2}} f_n\big)(s^2) \Big)^{d+1} \mathbb{P}(\|c(Y_1^{n,s},\ldots Y_{d+1}^{n,s})\| > \varepsilon/s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 $Y_{(n,s)\,1},\dots,Y_{(n,s)\,d+1}$ 是 $\mathbb{B}^d$ 中独立同分布的随机点，其密度为 $g_{n,s}$ 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 和 $s>0$。记

$$F_n^{(2)}(s):=s^{d+1}\Big(\big(\mathrm{I}^{\frac{d}{2}}f_n\big)(s^2)\Big)^{d+1}\mathbb{P}(\|c(Y_1^{n,s},\dots Y_{d+1}^{n,s})\|>\varepsilon/s),\quad s>0 \tag{6.24}$$

由 (6.23) 可得

$$\mathbb{P}\big(\{\mathscr{L}(\xi_n)\not\subset(\mathscr{L}(\xi_n^0))^{\varepsilon-}\}\cap\mathcal{S}_n\cap\mathcal{E}_n\big)\le Cr_n^d\int_0^{3r_n/2}F_n^{(2)}(s)\mathrm{d}s.$$

对事件 $\{\mathscr{L}(\xi_n^0)\not\subset(\mathscr{L}(\xi_n))^{\varepsilon-}\}\cap\mathcal{S}_n\cap\mathcal{E}_n$，同样的论证也适用，并得到相同的界。因此，结合 (6.21)、(6.22)、(6.7) 和 (6.19)，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(\big[(\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_n)\setminus(\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_0))^{\varepsilon-})\cup(\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_0)\setminus(\mathscr{L}(\widetilde{\eta}_n))^{\varepsilon-})\big]\cap B_R\neq\varnothing\Big)\\&\quad\le C\Big(\exp\big(-cr_n^d\big)+r_n^d\Big(\int_0^{3r_n/2}(F_n^{(1)}(s)+F_n^{(2)}(s))\mathrm{d}s+\big|\gamma-\big(\mathrm{I}^1f_n\big)(9r_n^2/4)\big|\Big)\Big).\end{aligned} \tag{6.25}$$

选取序列 $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$： 为完成证明，只需证明不等式 (6.25) 右侧在 $n\to\infty$ 时趋于 0。由于对任意 $s\ge0$，$F_n^{(2)}(s)\ge0$，这也意味着 (6.20) 右侧在 $n\to\infty$ 时依分布收敛于 0。

回顾 $F_{(1)n}$ 的定义（见 (6.19)）以及 $F_n^{(2)}$ 的定义（见 (6.24)）。由引理 6.2 可知，对任意 $s>0$，$(Y_{(n,s)\,1},\dots,Y_{(n,s)\,d+1})$ 依分布收敛于 $(Z_1,\dots,Z_{d+1})$，当 $n\to\infty$ 时，其中 $Z_1,\dots,Z_{d+1}$ 相互独立，且服从 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的均匀分布。注意，映射 $y\to h(y)$（见 (6.17)）和 $y\to\|c(y)\|$ 有界；由引理 6.1 可知，它们在任意 $(x_1,\dots,x_{d+1})\in(\mathbb{S}^{d-1})^{d+1}\cap\mathrm{AI}^{d+1}$ 处也连续。然后，利用 Portmanteau 定理，并注意到 $\rho(Z_1,\dots,Z_{d+1})=1$ 和 $\|c(Z_1,\dots,Z_{d+1})\|=0$ 几乎必然，对任意 $s>0$ 和 $\varepsilon>0$ 可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\big(h(Y_1^{(n,s)},\dots,Y_{d+1}^{(n,s)})\big)&=\mathbb{E}\big(h(s,Z_1,\dots,Z_{d+1})\big)=0,\\\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\|c(Y_1^{n,s},\dots Y_{d+1}^{n,s})\|>\varepsilon/s)&=\mathbb{P}(\|c(Z_1,\dots Z_{d+1})\|>\varepsilon/s)=0.\end{aligned}$$

这进一步意味着，对于任意固定的 $x>0$，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x(F_n^{(1)}(s)+F_n^{(2)}(s))\mathrm{d}s=0. \tag{6.26}$$

事实上，根据 $F_{(1)n}$ 与 $F_{(2)n}$ 的定义，我们有 $\lim_{n\to\infty}(F_{(1)n}(s)+F_n^{(2)}(s))=0$。此外，由 (C2)，对任意 $s\in[0,x]$、$\alpha\ge1$ 和 $n\ge n_2(x)$，我们有

$$0\le\Gamma(\alpha)\big(\mathrm{I}^{\alpha+1}f_n\big)(s^2)\le\int_0^{x^2}f_n(h)(x^2-h)^\alpha\mathrm{d}h\le\big(\mathrm{I}^1f_n\big)(x^2)x^{2\alpha}\le(\gamma+1)x^{2\alpha},$$

这意味着 $F_{(1)n}(s)+F_n^{(2)}(s)$ 有界；由控制收敛定理可得 (6.26)。

现在由 (6.26) 和 (C2)，存在一个（严格）递增的自然数序列 $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得对于任意 $n \geq N_k$，都有

$$\int_0^k (F_n^{(1)}(s) + F_n^{(2)}(s))\mathrm{d}s + \left|\gamma - \left(\mathrm{I}^1 f_n\right)(k^2)\right| \leq 2^{-k}k^{-d}.$$

定义 $r_n = 2k/3$ 为 $N_k \leq n < N_{k+1}$，定义 $r_n = 1/2$ 为 $1 \leq n < N_k$，我们得到

$$r_n^d\Big(\int_0^{3r_n/2} (F_n^{(1)}(s) + F_n^{(2)}(s))\mathrm{d}s + \left|\gamma - \left(\mathrm{I}^1 f_n\right)(9r_n^2/4)\right|\Big) \leq 3^{-d}\cdot 2^{-k+d} \to 0,$$

为 $n \to \infty$。进一步地，由于 $r_n \to \infty$ 为 $n \to \infty$，我们得到 $\exp(-cr_n^d) \to 0$ 为 $n \to \infty$。因此，采用这一组 $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 后，不等式 (6.25) 蕴含 (6.7)，而界 (6.20) 蕴含 (6.6)。证明至此完成。

□

7 技术引理的证明

引理 4.1 的证明： 第 1. 部分的证明遵循 [20, 引理 4.4]和[18, 引理 3]中的相同论证。为方便读者，我们在此也给出证明。**第 1. (a) 部分的证明：** 我们首先注意到，对于任意 $a > 0$、$T \in \mathbb{R}$，都有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\mathcal{H}^{\max}(\eta_f, a, T)^c\big) &= \mathbb{P}\big(\sup_{w\in B_a}\inf_{(v,h)\in\eta_f} \mathrm{pow}(w,(v,h)) > T\big)\\ &\leq \mathbb{P}\Big(\inf_{(v,h)\in\eta_f}\sup_{w\in B_a} \mathrm{pow}(w,(v,h)) > T\Big). \end{aligned} \tag{7.1}$$

令 $T > 4a^2$，并注意到，对于满足 $h \leq T - a^2$ 和 $v \in B_{\sqrt{T-h}-a}$ 的点 $(v,h) \in \eta_f$，我们有

$$\sup_{w\in B_a}\mathrm{pow}(w,(v,h)) = \sup_{w\in B_a}\|v-w\|^2 + h \leq \sup_{w\in B_a}(\|v\|+\|w\|)^2 + h \leq (\sqrt{T-h}-a+a)^2 + h = T.$$

因此，定义

$$K_3(a,T) := \big\{(v,h)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R} : h \leq T-a^2, v \in B_{\sqrt{T-h}-a}\big\}$$

我们得到一个估计

$$\mathbb{P}\Big(\inf_{(v,h)\in\eta_f}\sup_{w\in B_a}\mathrm{pow}(w,(v,h)) > T\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\eta_f\cap K_3(a,T) = \varnothing\Big) = \exp\big(-\mathbb{E}\big[\eta_f\big(K_3(a,T)\big)\big]\big). \tag{7.2}$$

进一步利用 Campbell 定理 [24,命题 2.7], ，我们得到

$$\mathbb{E}\big[\eta_f\big(K_3(a,T)\big)\big] = \int_{-\infty}^{T-a^2}\int_{B_{\sqrt{T-h}-a}} f(h)\mathrm{d}v\mathrm{d}h \geq \kappa_d\int_{-\infty}^{T-4a^2} f(h)(\sqrt{T-h}-a)^d\mathrm{d}h.$$

对于 $h \leq T-4a^2$，我们有 $a \leq \frac{1}{2}\sqrt{T-h}$，因此，

$$\mathbb{E}\big[\eta_f\big(K_3(a,T)\big)\big] \geq 2^{-d}\kappa_d\int_{-\infty}^{T-4a^2} f(h)(T-h)^{\frac{d}{2}}\mathrm{d}h \geq 2^{-d}\pi^{\frac{d}{2}}(\mathrm{I}^{\frac{d}{2}+1}f)(T-4a^2), \tag{7.3}$$

结合 (7.1) 和 (7.2)，即可完成第一个界的证明。对于第二个界，我们使用半群性质 (2.3)，并且对于任意 $x \geq x_0$，可得

$$(\mathrm{I}^{\frac{d}{2}+1} f_n)(x) = \big(\mathrm{I}^{\frac{d}{2}}(\mathrm{I}^1 f_n)\big)(x) \geq \frac{(\mathrm{I}^1 f)(x_0)}{\Gamma(d/2)} \int_{x_0}^{x} (x-h)^{\frac{d}{2}-1} \mathrm{d}h = \frac{(\mathrm{I}^1 f)(x_0)}{\Gamma(d/2+1)} (x-x_0)^{\frac{d}{2}}.$$

那么，对于任意 $T \geq 4a^2 + 2x_0$，由 (7.3) 可得

$$\mathbb{E}\big[\eta_n\big(K_3(a,T)\big)\big] \geq 2^{-d}\pi^{\frac{d}{2}} \frac{(\mathrm{I}^1 f)(x_0)}{\Gamma(d/2+1)} \big(T - 4a^2 - x_0\big)^{\frac{d}{2}} \geq \big(\frac{\pi}{8}\big)^{\frac{d}{2}} \frac{(\mathrm{I}^1 f)(x_0)}{\Gamma(d/2+1)} (T-4a^2)^{\frac{d}{2}},$$

结合 (7.1) 和 (7.2)，即可得到证明。

1. (b) 的证明： 令 $a > 0$，$t \in \mathbb{R}$ 并定义

$$K_4(a,t) := \{(v,h) \in \mathbb{R}^d \times (-\infty, t) : \|v\| < a + \sqrt{t-h}\}.$$

注意，$\mathrm{pow}(w, (v, h)) < t$ 对某个 $w \in B_a$ 成立，并且 $(v, h) \in \eta_f$ 当且仅当 $\eta_f \cap K_4(a, t) \neq \varnothing$。事实上，假设存在 $w \in B_a$ 和 $(v, h) \in \eta_f$，使得 $\mathrm{pow}(w, (v, h)) = \|v-w\|^2 + h < t$。那么我们有

$$\|v\| \leq \|v-w\| + \|w\| < \sqrt{t-h} + a,$$

并且 $h < t$，从而 $(v, h) \in K_4(a, t)$。否则，若存在 $(v, h) \in \eta_f$，使得 $\|v\| < a + \sqrt{t-h}$ 且 $h < t$，我们定义 $w := a\frac{v}{\|v\|} \in B_a$，并注意到

$$\mathrm{pow}(w, (v,h)) = \big\|v - a\frac{v}{\|v\|}\big\|^2 + h < t - h + h = t.$$

因此，

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{H}^{\min}(\eta_f, a, t)^c\big) = 1 - \mathbb{P}(\eta_f \cap K_4(a,t) = \varnothing) = 1 - \exp\big(-\mathbb{E}\big[\eta_f\big(K_4(a,t)\big)\big]\big).$$

利用詹森不等式，该估计

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\eta_f\big(K_4(a,t)\big)\big] &= \int_{-\infty}^{t} \int_{B_{a+\sqrt{t-h}}} f(h)\mathrm{d}v\mathrm{d}h \\
&= \kappa_d \int_{-\infty}^{t} (a+\sqrt{t-h})^d f(h)\mathrm{d}h \\
&\leq 2^{d-1}\kappa_d \Big(\int_{-\infty}^{t-a} (t-h)^{\frac{d}{2}} f(h)\mathrm{d}h + a^d \int_{t-a}^{t} f(h)\mathrm{d}h \Big) \\
&\leq 2^{d-1}\kappa_d \big((\mathrm{I}^{\frac{d}{2}+1} f)(t) + a^d (\mathrm{I}^1 f)(t) \big),
\end{aligned}$$

连同界 $1 - e^{-x} \leq x$ 即完成证明。

2. 的证明 **：** 我们注意到，根据与前面相同的论证，对任意 $a > 0$ 与 $T \geq a^2$，我们有

$$\mathbb{P}\Big(\mathcal{H}^{\max}(\eta^\gamma, a, T)\Big) \leq \exp\big(-\mathbb{E}\big[\eta^\gamma\big(K_3(a,T)\big)\big]\big) = \exp\big(-\gamma\kappa_d(\sqrt{T}-a)^d\big),$$

这里回顾一下，将每个点 $v \in \eta^\gamma$ 与点 $(v, 0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 对应，就可以把 η^γ 视为 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 中的点过程。此外，在这种情况下，对于任意 $(v, 0) \in \eta^\gamma$，我们有 $\mathrm{pow}(w, (v, 0)) = \|v-w\|^2 > 0$，因此对于任意 $a > 0$ 和 $t < 0$，可得 $\mathbb{P}(\mathcal{H}^{\min}(\eta^\gamma, a, t)^c) = 0$。

引理 4.2 的证明： 下文中，先用 η 表示泊松点过程 η^γ 或 η_f 之一，其中 f 是可容许函数。在整个证明过程中，C、C、c、$\tilde{c}$ 表示一些正数常量，它们仅依赖于 d。这些常量的具体取值可能因行而异。令 $R > 0$ 和 $r \geq 2\max(1, R)$。根据全概率定律，对于任意 $t \leq 0$，我们有

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}(\eta, R, r)^c) \leq P_1(\eta, R, r, t) + P_2(\eta, R, t), \tag{7.4}$$

其中

$$\begin{aligned} P_1(\eta, R, r, t) &:= \mathbb{P}\big(\mathcal{E}(\eta, R, r)^c \cap \mathcal{H}^{\min}(\eta, R, t)\big), \\ P_2(\eta, R, t) &:= \mathbb{P}\big(\mathcal{H}^{\min}(\eta, R, t)^c\big). \end{aligned}$$

为了给 $P_1(\eta, R, r, t)$ 设界，我们首先注意到，在 $\mathcal{H}^{\min}(\eta, R, t)$ 上有 $\mathrm{bd}\,\Psi(\eta) \cap (B_R \times \mathbb{R}) \subset B_R \times [t, \infty)$，也就是说，限制在球 B_R 上的抛物面生长过程位于 t 上方。这也意味着 $\mathrm{bd}\,\Phi(\eta) \cap (B_R \times \mathbb{R}) \subset B_R \times [t, \infty)$。由于对于任意 $S \in \mathcal{L}^*(\eta)$，集合 $F(S) := \Pi^-(S) \cap \mathrm{bd}\,\Phi(\eta)$ 根据 (4.3) 是 $\Phi(\eta)$ 的一个抛物面面片，我们得出，若 $S \cap B_R \neq \varnothing$，则 $\varnothing \neq F(S) \cap (B_R \times \mathbb{R}) \subset B_R \times [t, \infty)$，因此，

$$\Pi^-(S) \cap (B_R \times [t, \infty)) \neq \varnothing. \tag{7.5}$$

设 (w, q) 是 $\Pi^-(S)$ 的顶点，则 (7.5) 意味着存在一点 (v', h')，满足 $\|v'\| \leq R$ 和 $h' \geq t$，使得 $\|w - v'\| \leq \sqrt{q - h'}$，从而得到

$$\|w\| \leq R + \sqrt{q - t}, \qquad q \geq t.$$

同时，在 $\mathcal{E}(\eta, R, r)^c$ 上，我们有存在一个单形 $S \in \mathcal{L}^*(\eta)$，使得 $S \cap B_R \neq \varnothing$ 且顶点 $(\Pi^-(S)) = (w, q) \notin \big(\Pi^-_{(\mathbf{o}, (R+r)^2)}\big)^{\downarrow}$，从而得到

$$\|w\| \geq \sqrt{\max((R + r)^2 - q, 0)}.$$

这意味着，

$$\begin{aligned} P_1(\eta, R, r, t) \leq \mathbb{P}\big(\exists S \in \mathcal{L}^*(\eta) \colon\ & \mathrm{apex}(\Pi^-(S)) = (w, q) \\ & \text{satisfies } q \geq t, \sqrt{\max((R + r)^2 - q, 0)} \leq \|w\| \leq R + \sqrt{q - t}\big). \end{aligned}$$

进一步注意到，条件 $\sqrt{\max((R + r)^2 - q, 0)} \leq R + \sqrt{q - t}$ 蕴含 $q \geq r^2/2 + t$。事实上，若 $\max((R + r)^2 - q, 0) = 0$，则我们立即得到 $q \geq (R + r)^2 \geq r^2/2$。另一方面，对于 $q \leq (R + r)^2$，我们利用对任意 $t \leq 0$ 都有

$$R + \sqrt{q - t} \geq \sqrt{(R + r)^2 - q} \geq \sqrt{(R + r)^2 - (q - t)}.$$

两边平方可得

$$R^2 + 2R\sqrt{q - t} + (q - t) \geq (R + r)^2 - (q - t)$$

因此，

$$q - t + R\sqrt{q - t} - (Rr + \frac{r^2}{2}) \geq 0.$$

特别是，这意味着

$$\sqrt{q-t} \geq \frac{-R+\sqrt{R^2+4Rr+2r^2}}{2} \geq \frac{-R+R+\sqrt{2}r}{2} = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

因此，定义

$$K_5(r,t) := \{(w,q) \in \mathbb{R}^d \colon q \in \big[r^2/2+t, \infty), \|w\| \leq R+\sqrt{q-t}\},$$

我们得出

$$P_1(\eta,R,r,t) \leq \mathbb{P}\big(\exists S \in \mathcal{L}^*(\eta) \colon \operatorname{apex}(\Pi^-(S)) = (w,q) \in K_5(r,t)\big). \tag{7.6}$$

接下来，我们考虑用盒子覆盖 $\mathbb{R}^d \times [t+r^2/2, \infty)$

$$Q_m(z) := (z \oplus [0,\ell(m)]^d) \times [t+r^2/2+m, t+r^2/2+m+1], \qquad m \in \mathbb{N}_0,\ z \in \ell(m)\mathbb{Z}^d,$$

其中 $\ell(m) = \frac{1}{2\sqrt{2d}}\sqrt{r^2/2+m} > 0$ 表示闵可夫斯基加法。对 (7.6) 应用并集界可得

$$P_1(\eta,R,r,t) \leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{z \in \ell(m)\mathbb{Z}^d \colon \\ Q_m(z) \cap K_5(r,t) \neq \varnothing}} \mathbb{P}(\exists S \in \mathcal{L}^*(\eta) : \operatorname{apex}(\Pi^-(S)) \in Q_m(z)).$$

由 η 的平稳性，我们得到

$$\mathbb{P}(\exists S \in \mathcal{L}^*(\eta) : \operatorname{apex}(\Pi^-(S)) \in Q_m(x)) = \mathbb{P}(\exists S \in \mathcal{L}^*(\eta) : \operatorname{apex}(\Pi^-(S)) \in Q_m(\mathbf{o})).$$

此外，由于集合 $\Pi^-(S) \cap \operatorname{bd} \Phi(\eta)$ 是抛物面面片，因此对于 $(w,\ q) \colon =$顶点$(\Pi^-(S))$，存在不同点 $x_1 = (v_1,\ h_1) \ldots, x_{d+1} = (v_{d+1},\ h_{d+1}) \in \eta \cap \Pi^-(S)$，使得

$$\operatorname{pow}(w,(v_1,h_1)) = \ldots = \operatorname{pow}(w,(v_{d+1},h_{d+1})) = q,$$

且 $\operatorname{int}(\Pi^-(S))^{\downarrow} \cap \eta = \varnothing$，即 $\operatorname{pow}(w,(v,h)) \geq q$ 对所有 $(v,h) \in \eta$ 均成立。因此，条件 顶点$\Pi^-(S) \in Q_m(\mathbf{o})$ 意味着存在 $w \in [0,\ell(m)]^d$，使得 $\operatorname{pow}(w,(v,h)) \geq t+r^2/2+m$对所有 $(v,h) \in \eta$ 均成立。于是我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\exists S \in \mathcal{L}^*(\eta) : \operatorname{apex}(\Pi^-(S)) \in Q_m(z)) &\leq \mathbb{P}\Big(\sup_{w \in [0,\ell(m)]^d} \inf_{(v,h) \in \eta} \operatorname{pow}(w,(v,h)) > t+r^2/2+m\Big) \\ &\leq \mathbb{P}\Big(\mathcal{H}^{\max}\Big(\eta, \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{r^2/2+m}, t+r^2/2+m\Big)^c\Big),\end{aligned}$$

它与 z 无关。固定 $m \in \mathbb{N}_0$，记

$$N(m) := \#\big\{z \in \ell(m)\mathbb{Z}^d \colon Q_m(z) \cap K_5(r,t) \neq \varnothing\big\}$$

与集合 $K_5(r,\ t)$ 有非空交集的盒子数量。注意，$(v,\ h) \in Q_m\ z \qquad h \leq t+r^2/2+m+1 \qquad Q_m\ z \cap K_5\ r\ t\ \neq \varnothing \qquad \sqrt{r^2/2+m+1} \leq$ ( ) 满足条件，因此，~~( ) (,) 连同 and~~（由 $2\sqrt{r^2/2+m} \quad R \leq \sqrt{r^2/2+m} \quad r \geq 2 \quad 1\ R$ 于 max(,) ）可推出

$$z \in B_{R+\sqrt{r^2/2+m+1}+\sqrt{d}\ell(m)} \subset B_{4\sqrt{r^2/2+m}}.$$

因此，

$$N(m) \le \#\big\{z \in \ell(m)\mathbb{Z}^d \colon z \in B_{4\sqrt{r^2/2+m}}\big\} \le C(\ell(m)^{-1}\sqrt{r^2/2+m})^d \le C,$$

并得到

$$P_1(\eta, R, r, t) \le C \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\mathcal{H}^{\max}\Big(\eta, \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{r^2/2+m}, t + r^2/2 + m\Big)^c\Big). \tag{7.7}$$

接下来，我们分别计算 $\eta = \eta^\gamma$ 和 $\eta = \eta_f$的情形。先令 $\eta = \eta^\gamma$，则由引理 4.1并取 $t = 0$，可直接得出

$$\mathbb{P}\Big(\mathcal{H}^{\max}\Big(\eta^\gamma, \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{r^2/2+m}, r^2/2+m\Big)^c\Big) \le \exp\big(-c\gamma\,(r^2/2+m)^{\frac{d}{2}}\big).$$

接下来，由引理 4.1，对于满足可容许条件的 $\eta = \eta_f$ （ f ），取 $x_0 = 1/2$ 和 $t = -r^2/8$，并注意到 $r \ge 4$ 和 $m \ge 0$，可得

$$\mathbb{P}\Big(\mathcal{H}^{\max}\Big(\eta_f, \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{r^2/2+m}, 3r^2/8+m\Big)^c\Big) \le \exp\Big(-c\,(\mathrm{I}^1 f)(1/2)\big(r^2/4+m\big)^{\frac{d}{2}}\Big).$$

现在将这些界应用于 (7.7)，得到

$$P_1(\eta, R, r, t) \le C\sum_{m=0}^{\infty} \exp\big(-\widetilde{c}(m+r^2/4)^{\frac{d}{2}}\big) \le C\exp(-\widetilde{c}r^d)\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\tilde{c}m^{\frac{d}{2}}} \le C\exp(-\widetilde{c}r^d), \tag{7.8}$$

其中，在第二步中，我们应用 $(a+b)^{d/2} \ge a^{d/2} + b^{d/2}$。它对所有 $a, b \ge 0$ 和 $d \ge 2$均成立，并且当 $\eta = \eta^\gamma$和 $\widetilde{c} = c$时，对 $\eta = \eta_f$有 $\widetilde{c} = c\gamma(\mathrm{I}^1 f)(1/2)$。
剩下的任务是求 $P_2(\eta, R, t)$的界。当 $\eta = \eta^\gamma$时，由引理 4.1可得 $P_2(\eta, R, 0) = 0$，此时的证明结合 (7.4) 和 (7.8) 即可完成。现在令 f 为可容许的，并取$t = -r^2/8$。由引理 4.1可得

$$P_2(\eta_f, R, -r^2/8) \le C\big((\mathrm{I}^{\frac{d}{2}+1} f)(-r^2/8) + R^d(\mathrm{I}^1 f)(-r^2/8)\big),$$

将其与 (7.4) 和 (7.8) 结合，即可完成此情形下的证明。

引理 4.3 的证明： 令 $R,\ r > 0$、$t < 0$ 并考虑以下事件（见 (4.5) 和 (4.4)）

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}(\eta, R, r), \qquad \mathcal{H}^{\min} := \mathcal{H}^{\min}(\eta, 2\sqrt{(R+r)^2 - t}, t), \qquad \mathcal{H}^{\max} := \mathcal{H}^{\max}(\eta, R, (R+r)^2).$$

1. 的证明： 首先，我们证明事件 $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}^{\min}$ 确保 $\mathcal{L}^*(\eta) \cap B_R$ 仅取决于相应泊松点过程 η 在其中的构型

$$K_0(R, r, t) = \big\{(v, h) \in \mathbb{R}^d \times [t, (R+r)^2] : \|v\| \le 2\sqrt{(R+r)^2 - t}\big\},$$

也就是说，在 $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}^{\min}$ 上，每个满足 $S \cap B_R \ne \varnothing$ 的集合 $S \in \mathcal{L}^*(\eta)$ 都由 $\eta \cap K_0(R,\ r,\ t)$ 中的点确定。事实上，设 $S \in \mathcal{L}^*(\eta)$ 满足 $S \cap B_R \ne \varnothing$。单形 S 由 $\Pi^-(S)$ 确定，它被定义为包含点 $(v_i,\ h_i) \in \eta_n$ 的向下抛物面，

$1 \le i \le d+1$，其中 v_1、…、v_{d+1} 是 S 的顶点。注意，在 $\mathcal{E}$ 上，$(w,\ q)$：＝是 $\Pi^-(S)$ 的顶点 $\in \left(\Pi^-_{\mathbf{o},\ (R+r)_2}\right)^{\downarrow}$，因此，

$$\|w\| \le \sqrt{(R+r)^2 - q}, \quad q \le (R+r)^2. \tag{7.9}$$

对于 $q \ge t$ $\Pi^-_{(w,q)}$ 与子空间 $\mathbb{R}^d \times \{t\}$ 的交集是一个半径为 $\sqrt{q-t}$、中心为w的球。因此，对于任何满足 (7.9) 且满足 $q \ge t$ 的 (w,q)，利用三角不等式可知，$\Pi^-_{(w,q)}$ 与 $\mathbb{R}^d \times \{t\}$ 的交集包含于半径为

$$\sqrt{(R+r)^2 - q} + \sqrt{q-t} \le 2\sqrt{(R+r)^2 - t}.$$

因此，事件 $\mathcal{H}^{\min}$ 还意味着 $S \subset B_{2\sqrt{(R+r)^2-t}}$，并且对于所有顶点，我们有 $(v_i, h_i) \in K_0(R,r,t)$，$1 \le i \le d+1$。因此，在 $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}^{\min}$ 上有

$$\bigcup_{S \in \mathcal{L}^*(\eta), S \cap B_R \neq \varnothing} \operatorname{bd} S = \bigcup_{S \in \mathcal{L}^*(\eta \cap K_0(R,r,t)), S \cap B_R \neq \varnothing} \operatorname{bd} S.$$

2. 的证明： 类似地，在 $\mathcal{H}_n^{\max} \cap \mathcal{H}_n^{\min}$上，我们有 $\mathscr{L}(\eta) \cap B_R$仅取决于 η 在 $K_0(R,r,t)$ 内的构型。为了证明这一点，我们注意到，在 $\mathcal{H}^{\max}$ 上，只有满足 $\Pi^+_{(v,h)} \cap (B_R \times (-\infty, (R+r)^2] \neq \varnothing$ 的点 $(v,h) \in \eta$ 才可能影响 $\Psi(\eta)$ 的边界，并因此影响 $\mathscr{L}(\eta)$ 在 B_R 内的构型。这些点满足

$$\|v\| \le R + \sqrt{(R+r)^2 - h}, \qquad h \le (R+r)^2. \tag{7.10}$$

现假设存在 $(v,h) \in \eta$，它在 $h < t$ 下满足 (7.10)。则对充分小的 $\delta > 0$，存在 $(w,s) \in (\Pi^+_{(v,h)})^{\uparrow}$，且 $s = t - \delta < t$ 以及

$$\|w\| = R + \sqrt{(R+r)^2 - t + \delta} \le 2\sqrt{(R+r)^2 - t}.$$

由定义，$(w,s) \in \Psi(\eta)$，因此这与 $\mathcal{H}^{\min}$ 矛盾。此外，$h \ge t$ 与 (7.10) 蕴含

$$\|v\| \le R + \sqrt{(R+r)^2 - t} \le 2\sqrt{(R+r)^2 - t},$$

因为 $t \le 0$ 与 $r > 0$。因此，在 $\mathcal{H}_n^{\max} \cap \mathcal{H}_n^{\min}$ 上我们有

$$\mathscr{L}(\eta) \cap B_R = \mathscr{L}(\eta \cap K_0(R,r,t)) \cap B_R.$$

引理 5.1 的证明： 利用 (C1)-(iii)，设 $x_0 \in \mathbb{R}$ 与 $\delta > 0$ 满足

$$M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{-\infty}^{x_0} |h|^{\frac{d}{2}+\delta} f_n(h) \mathrm{d}h < \infty.$$

1. 的证明： 令 $k \in \mathbb{N}$。根据 (C1)-(ii)，我们得到

$$\left| \int_{-\infty}^{x_0} |h|^{d/2+\delta} \mathbf{1}\{h \in [-k, x_0]\} (f_n(h) - f(h)) \mathrm{d}h \right| \le \max(|k|, x_0)^{d/2+\delta} \int_{-\infty}^{x_0} |f_n(h) - f(h)| \mathrm{d}h \to 0,$$

由于 $n \to \infty$，这意味着对于任意 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\int_{-\infty}^{x_0} |h|^{d/2+\delta} \mathbf{1}\{h \in [-k, x_0]\} f(h) \mathrm{d}h = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{x_0} |h|^{d/2+\delta} \mathbf{1}\{h \in [-k, x_0]\} f_n(h) \mathrm{d}h$$
$$\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{x_0} |h|^{d/2+\delta} f_n(h) \mathrm{d}h \leq M.$$

然后根据单调收敛定理，我们得出

$$\int_{-\infty}^{x_0} |h|^{d/2+\delta} f(h) \mathrm{d}h = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{x_0} |h|^{d/2+\delta} \mathbf{1}\{h \in [-k, x_0]\} f(h) \mathrm{d}h \leq M < \infty.$$

2. 的证明： 设 $n_0 > 0$ 满足：对所有 $n \geq n_0$，均有 $-x_n \leq x_0$。此外，我们注意到，对于任意 $h \leq -x_n$，都有 $x_n^{-1}|h| \geq 1$，因为对所有 $n \in \mathbb{N}$，均有 $x_n > 0$。然后由 (C1)-(iii) 得到

$$x_n^{d/2} (\mathrm{I}^1 f_n)(-x_n) \leq x_n^{d/2} \cdot x_n^{-d/2-\delta} \int_{-\infty}^{x_0} |h|^{d/2+\delta} f_n(h) \mathrm{d}h \leq M x_n^{-\delta} \to 0,$$

当 $n \to \infty$ 时。同理可得

$$\Gamma\big(\frac{d}{2}+1\big)\big(\mathrm{I}^{\frac{d}{2}+1} f_n\big)(-x_n) \leq \int_{-\infty}^{-x_n} |h|^{d/2} f_n(h) \mathrm{d}h \leq x_n^{-\delta} \int_{-\infty}^{x_0} |h|^{d/2+\delta} f_n(h) \mathrm{d}h \leq M x_n^{-\delta} \to 0,$$

当 $n \to \infty$ 时。由于 (C1)-(ii)，对函数 f 也适用同样的论证，因此我们得出$x_n^{d/2}$(I^1 f)$(-x_n) \to 0$，且 (I$^{\frac{d}{2}+1}$ f)$(-x_n) \to 0$，当$^-n \to \infty$ 时。

引理 6.1 的证明： 设 $\mathbf{y} :=$ ($y_1, \ldots, y_{d+1}$) $\in$ AI^{d+1}。那么，包含 $y_1, \ldots, y_{d+1}$ 且以其为边界的唯一球的中心 c(**y**) 和半径ρ(**y**) 满足

$$\|y_1 - c(\mathbf{y})\| = \ldots = \|y_{d+1} - c(\mathbf{y})\| = \rho(\mathbf{y}). \tag{7.11}$$

因此，我们有 $\|y_1\|^2 - 2\langle c(\mathbf{y})\ y_1\rangle = \ldots = \|y_{d+1}\|^2 - 2\langle c(\mathbf{y})\ y_{d+1}\rangle$，取两两差可得

$$2\langle c(\mathbf{y}), y_j - y_1\rangle = \|y_j\|^2 - \|y_1\|^2, \qquad 2 \leq j \leq d+1.$$

令 b(**y**) :=($\|y_2\|^2 - \|y_1\|^2, \ldots, \|y_{d+1}\|^2 - \|y_1\|^2$)$^\top$，且 A(**y**) 为行向量是 2($y_i - y_1$),$2 \leq j \leq d+1$ 的 $d \times d$矩阵。注意，det A(**y**) $\neq 0$，因为 $y_1, \ldots, y_{d+1}$ 仿射无关。由于在行列式不为零的矩阵集合 A 上，矩阵求逆是连续运算，我们得到 c(**y**) $= A(\mathbf{y})^{-1} b(\mathbf{y})$ 连续。由 c(**y**) 的连续性以及 (7.11)，可得 ρ(**y**) 的连续性。

引理 6.2 的证明：1. 的证明： 函数 $g_{n,s}$ 为正，且

$$\int_{\mathbb{B}^d} g_{n,s}(x) \mathrm{d}x = \frac{s^d}{\pi^{d/2} (\mathrm{I}^{d/2} f_n)(s^2)} \int_{\mathbb{B}^d} f_n(s^2 - s^2\|x\|^2) \mathrm{d}x$$
$$= \frac{s^d}{\Gamma(\frac{d}{2}) (\mathrm{I}^{d/2} f_n)(s^2)} \int_0^1 r^{\frac{d}{2}-1} f_n(s^2 - s^2 r) \mathrm{d}r = 1.$$

因此，测度 $\mathbb{P}_{n,s}(\cdot) := \int_{\mathbb{B}^d} g_{n,s}(x)\mathbb{1}(x \in \cdot)\mathrm{d}x$ 在 $\mathbb{B}^d$ 上定义了一个概率测度。

2. 的证明： 令 $s > 0$。暂时省略指标 s，并记 $\mathbb{P}_n := \mathbb{P}_{n,\ s}$ 以及 $g_n := g_{n,\ s}$。注意到 $\mathbb{B}^d$ 是一个紧度量空间。因此，对于任意概率测度序列 $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$，存在一个子序列 $(\mathbb{P}_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$，使得

$$\mathbb{P}_{n_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P} \quad \text{weakly}$$

对于某个定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的概率测度 $\mathbb{P}$ （见 [23, 引理 8.11.]）。这意味着序列 $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是弱紧的，而根据Helly定理，这等价于其在 $\mathbb{R}^d$ 中是紧的，参见 [3,定理 8.9]。概率测度 $\mathbb{P}$ 集中于 $\mathbb{S}^{d-1}$，因为

$$\mathbb{P}_n(r\mathbb{B}^d) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad r \in (0,1).$$

事实上，使用球坐标 $\alpha = \|x\|$ 和变量替换 $t = s^2\alpha^2$ 可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_n(r\mathbb{B}_d) &= \frac{s^d}{\pi^{d/2}(\mathrm{I}^{d/2}\, f_n)(s^2)} \int_{r\mathbb{B}^d} f_n(s^2 - s^2\|x\|^2)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})(\mathrm{I}^{d/2}\, f_n)(s^2)} \int_{s^2(1-r^2)}^{s^2} f_n(t)(s^2-t)^{\frac{d}{2}-1}\mathrm{d}t \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})(\mathrm{I}^{d/2}\, f_n)(s^2)} (sr)^{d-2} \int_{s^2(1-r^2)}^{s^2} f_n(t)\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

由于 $\frac{d}{2} - 1 \ge 0$，此外

$$\lim_{n\to\infty} \int_{s^2(1-r^2)}^{s^2} f_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_0^{s^2} f_n(t)\mathrm{d}t - \lim_{n\to\infty} \int_0^{s^2(1-r^2)} f_n(t)\mathrm{d}t = \gamma - \gamma = 0.$$

此外，$\mathbb{P}$ 是旋转不变的。如第2.1节所述，$\mathbb{S}^{d-1}$ 上的唯一旋转不变测度是 $\tilde{\sigma}_{d-1}$。因此，每个弱收敛的子序列都收敛到相同的极限，即 $\tilde{\sigma}_{d-1}$。然后，[3, 定理 5.1的推论] 给出 $\mathbb{P}_n \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{\sigma}_{d-1}$ 弱收敛。

致谢

作者获德国研究联合会资助，资助项目属于德国卓越战略 EXC 2044 – 390685587，数学 *M ¨ünster*：动力学 - 几何 - 结构 以及研究培训组3027复杂随机系统的严格分析。AG 获德国研究联合会优先项目SPP 2265随机几何系统资助。

参考文献

[1] Aurenhammer, F., Klein, R., and Lee, D.-T. 沃罗诺伊图与德劳内三角剖分。世界科技出版有限公司，新泽西州哈肯萨克，2013。

[2] Baryshnikov, Y. 支撑点过程及其若干应用。《概率论及相关领域》117, 2 (2000), 163–182。[3] Billingsley, P. 概率测度的收敛，第二版。Wiley 概率与统计丛书：概率与统计。John Wiley & Sons Inc.，纽约，1999。Wiley-Interscience 出版物。[4] Bollobás, B., and Riordan, O. 平面上随机 Voronoi 渗流的临界概率为 1/2。《概率论及相关领域》136 (2006), 417–468。[5] Bonnet, G., and Chenavier, N. 泊松-德洛内图中的最大度。伯努利 26, 2 (2020), 948–979。[6] Bonnet, G., and Gordon, J. β-德劳内图和 β'-德劳内图中的度。arXiv:2503.24024, 2025。[7] Bourne, D., Pearce, M., and Roper, S. 多晶材料的几何建模：拉盖尔镶嵌与周期半离散最优输运。《力学研究通讯》127 (2023), 104023。[8] Calka, P., Schreiber, T., and Yukich, J. E. 球内凸包的布朗极限、局部极限与方差渐近性。《概率年刊》41, 1 (2013), 50–108。[9] Calka, P., and Yukich, J. E. 光滑凸体中随机多胞体的方差渐近性。《概率论及相关领域》158, 1-2 (2014), 435–463。[10] Calka, P., and Yukich, J. E. 高斯多胞体的方差渐近性与尺度极限。《概率论及相关领域》163, 1-2 (2015), 259–301。[11] Calka, P., and Yukich, J. E. 随机多胞体的方差渐近性与尺度极限。《数学进展》304 (2017), 1–55。[12] D'Achille, M. 双曲空间之外的理想泊松–沃罗诺伊镶嵌 arXiv:2412.00822, 2024。..[13] D'Achille, M., Curien, N., Enriquez, N., Lyons, R., and Unel, M. 双曲空间上的理想泊松-沃罗诺伊镶嵌。arXiv:2303.16831, 2023。[14] Dirksen, S. 量化压缩感知：综述。载于《压缩感知及其应用》，《应用数值与调和分析》。Birkh¨auser/施普林格，Cham，2019，第67–95页。[15] Fraczyk, M., Mellick, S., and Wilkens, A. 高秩中的泊松-沃罗诺伊镶嵌与固定价格。arXiv:2307.01194, 2023。[16] Gusakova, A., and in Wolde-Lübke, M. 泊松-拉盖尔镶嵌。《电子概率期刊》30 (2025), 1–48。[17] Gusakova, A., Kabluchko, Z., and Thäle, C. β-德劳内镶嵌：模型描述与典型胞元的几何。《应用概率进展》54, 4 (2022), 1252–1290。

[18] Gusakova, A., Kabluchko, Z., and Thäle, C. β德劳内镶嵌 IV：混合性质与中心极限定理。随机过程与动力系统 23, 03（2023），2350021。[19] Gusakova, A., Kabluchko, Z., and Thäle, C. 截面沃罗诺伊镶嵌：刻画与高维极限。伯努利 30, 2（2024），1482 – 1501。[20] Gusakova, A., Kabluchko, Z., and Thäle, C. β德劳内镶嵌 II：高斯极限镶嵌。《电子概率期刊》27（2022），1 – 33。[21] Gusakova, A., Kabluchko, Z., and Thäle, C. β德劳内镶嵌 III：肯德尔问题与高维极限定理。ALEA，《拉丁美洲概率与数理统计杂志》19（2022），23 – 50。[22] Hug, D., and Thäle, C. 球面空间中的分裂镶嵌。《电子概率期刊》24（2019），第24号论文，60。[23] Koralov, L., and Sinai, Y. 概率论与随机过程理论。Universitext（柏林印刷版）。施普林格，2007。[24] Last, G., and Penrose, M. 泊松过程讲义，数学统计学会教材第7卷。剑桥大学出版社，剑桥，2018。[25] Lautensack, C. 随机拉盖尔镶嵌。博士论文，2007。[26] Lautensack, C., and Zuyev, S. 随机拉盖尔镶嵌。《应用概率进展》40, 3（2008），630–650。[27] Møller, J. 随机沃罗诺伊镶嵌讲义，统计学讲义第87卷。Springer-Verlag，纽约，1994。[28] Molchanov, I. 随机集理论，概率论与随机建模第87卷。Springer-Verlag，伦敦，2017。[29] Nagel, W., and Weiss, V. 平稳平面镶嵌序列的极限。第35卷。2003，123–138页。[30] Nagel, W., and Weiss, V. 裂纹STIT镶嵌：对迭代稳定的平稳随机镶嵌的刻画。《应用概率进展》37, 4（2005），859–883。[31] Olver, F. W. J., Lozier, D. W., Boisvert, R. F., and Clark, C. W.，编。NIST数学函数手册。美国商务部、美国国家标准与技术研究院，华盛顿特区；剑桥大学出版社，剑桥，2010。[32] O'Reilly, E., and Tran, N. M. 高维随机镶嵌森林的极小极大速率。机器学习研究杂志 25, 89（2024），1–32。[33] Peyré, G., and Cuturi, M. 计算最优输运及其在数据科学中的应用。机器学习基础与趋势 11, 5-6（2019年02月），355–607。[34] Redenbach, C., and Jung, C. 随机镶嵌：模型概述。施普林格自然瑞士，Cham，2025，35–80页。

[35] Reiss, R. 点过程课程。Springer统计学系列。Springer-Verlag，1993。
[36] Schlottmann, M. 周期性与准周期性拉盖尔铺砌。《现代物理学国际期刊*B 7*》，6-07（1993年1月），1351–1363。[37] Schneider, R., and Weil, W. 随机几何与积分几何。概率及其应用（纽约）。Springer-Verlag，柏林，2008。[38] Schreiber, T., and Yukich, J. E. 广义增长过程的方差渐近性与中心极限定理及其在凸包和极大点中的应用。《概率年刊》*36*，1（2008），363–396。[39] Sun, G., Baccelli, F., Feng, K., Uzeda Garcia, L., and Paris, S. 用于RIS辅助OFDM蜂窝网络性能分析的随机几何框架。*IEEE*无线通信汇刊 *25*（2026），5859–5875。[40] Thorisson, H. 耦合、平稳性与再生。概率及其应用。Springer纽约，2000。[41] Ziegler, G. M. 多胞体讲义。Springer-Verlag，纽约，1995。