联结函数与准联结函数集合中的凸线性可丰性

Enriquede Amo[a], Juan Fern´andez-S´anchez[b], David Garc´ıa-Fern´andez[b], Manuel ´Ubeda-Flores[a,b,*a]Mathematics系，Almer´ıa大学，04120 Almer´ıa，西班牙 edeamo@ual.es, mubeda@ual.es[b]联结函数理论与应用研究组，Almer´ıa大学，04120 Almer´ıa，西班牙 juanfernandez@ual.es, dgf992@inlumine.ual.es

arXiv:2602.06918v1 [math.ST] 6 Feb 2026

2026年2月9日

摘要

本文从凸线性可列性以及新近提出的凸可空间化性概念出发，研究 n-Copula与 n-准 copula的若干子集。我们的目的是确定这些族何时包含极大的代数结构，即基数为连续统的线性无关集，其凸包——在某些情形下还包括一个闭凸线性无关子集——完全包含于所研究的类中。其中包括非对称联结函数族、具有最大非对称测度的Copula族以及真 n-准 copula等。相比之下，对于其他若干自然的Copula类，我们证明（极大）凸线性可丰性成立，而凸空间可嵌入性仍是一个未决问题。

2020年数学主题分类：60E05，62H05。

关键词：联结函数、凸线性可列性、凸可空间化性、准联结函数。

1 引言

线性可嵌入性这一概念首次出现在 [31], 中，尽管在此之前数十年的研究成果中已隐含着这一概念。其目标是在向量空间的子集中寻找向量空间。对于联结函数（[13, 25]）而言，由于不能乘以负数，因此无法找到这些向量空间。针对这类情况，人们提出了锥可构性这一概念（[1]）。然而，这一新概念也不适用，因为乘以不同于 1 的数会破坏联结函数的边界条件。

近期，文献 [7], 引入了凸线性可列性的概念，事实证明，该概念适用于联结函数集。这一概念能够识别出大型线性无关族，其凸包仍包含在所关注的非线性集合之中。当线性无关向量的基数等于环境向量空间的基数时，我们称该集合具有极大凸可线性，这代表了最优情形。这一性质揭示了乍看之下似乎缺乏任何线性结构的集合中深厚的代数与几何丰富性。凸线性可丰性常能揭示病态、不规则或高度非线性对象集合中隐藏的向量行为，例如处处不可微函数、奇异测度或非线性微分方程的解。

*通讯作者

除了凸线性可丰性之外，本文还系统地运用相关概念“凸空间可嵌入性”，即在给定的非线性集合中存在一个闭、凸且由无限多个线性无关元素构成的子集。这一细化概念刻画了不仅代数上的丰富性得以保留、拓扑完备性也得以保留的情形。对于某些经典 copula 类（如非对称联结函数或具有最大非对称性的 copula），我们证明，最大凸线性可丰性实际上可以加强为最大空间化凸线性可丰性；而在其他情形下，凸空间可嵌入性仍属未知。

凸线性可丰性和凸空间可嵌入性揭示了某些非线性且往往高度不规则的集合内部，存在着出乎意料地庞大的代数与几何构型。在处处不可微函数、奇异测度或非线性微分方程解的集合中，都观察到了此类现象。在联结函数的背景下，庞大的凸可线化或凸可空间化族的存在，有助于加深对依赖建模的理解，丰富用于研究极值行为的实例，并为概率模型中的逼近与插值提供新工具。

本文研究赋予上确界范数的 n-联结函数在 $[0,1]^n$ 上的空间，并探讨若干自然的联结函数与准联结函数族的凸线性可丰性和凸空间可嵌入性。我们的主要贡献包括在多个重要类别中构造极大凸可线性族，并指出一些也能实现凸空间可嵌入性的具体情形。

本文结构如下。第 2 节回顾 Copula 理论、准联结函数、序数和以及凸线性可丰性和凸空间可嵌入性的相关预备知识。第 3 节给出主要结果：我们在多种相关族中确立凸线性可丰性和空间可嵌入性，包括具有分形支撑的 copula、非对称联结函数、具有最大非对称性的 copula、利普希茨型联结函数、真准拟 copula，以及处于不同拓扑下的联结函数序列。第 4 节总结全文并概述若干开放问题。

2 预备知识

本节介绍后续分析所需的基础数学概念。我们首先简要回顾 Copula 理论的核心原理，然后形式化定义凸线性可丰性的概念，这是本文的核心代数工具。

2.1 Copula 理论

设 $n \geq 2$ 为一个自然数。 n维联结函数（简称 n-联结函数） C是一个连续的 n维分布在$[0,1]^n$ 上的限制，其一维边缘分布在 $[0,1]$上均为均匀分布。以下定义与之等价：

定义 1. n-联结函数 C 是一个函数 $C\colon [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$，满足以下性质：

i) $C(\mathbf{u}) = 0$，对每个 $\mathbf{u} := (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in [0,1]^n$ 均成立，且 $\mathbf{u}$ 至少有一个坐标等于0。

ii) C（$\mathbf{u}$）$= u_k$ 当$\mathbf{u}$ 的所有坐标都等于1 时，可能除外的是 u_k。

iii) 对于 $[0,1]^n$ 中的每个 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$，满足 $a_k \leq b_k$ 对所有 k =1、2、. . .、 n 均成立，

$$V_C(B) := \sum_{\mathbf{c}} \operatorname{sgn}(\mathbf{c}) C(\mathbf{c}) \geq 0,$$

其中 B 表示 n-盒 $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \times_{k=1}^{n}[a_k, b_k]$，求和遍历 $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$，的顶点 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$；也就是说，每个 c_k 等于 a_k 或 b_k；若 $c_k = a_k$ 对偶数个 $k's$ 成立，则 $\operatorname{sgn}(\mathbf{c}) = 1$，否则 $\operatorname{sgn}(\mathbf{c}) = -1$。

我们将 V_C 称为与 C （在 n-盒上）相关的体积。

联结函数的重要性在于 Sklar 定理 [32], ，现在我们回顾该定理——关于此结果的完备证明，见 [35]。

定理 1 (Sklar)。 设$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是一个 n维随机向量，其联合分布函数为 H，一维边缘分布为 $F_1, F_2, \ldots, F_n$。则存在一个 n-联结函数 C，它在$\times_{i=1}^{n} Range(F_i)$上唯一确定，使得

$$H(\mathbf{x}) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n))$$

对所有$\mathbf{x} \in [-\infty, +\infty]^n$均成立。若所有边缘分布 F_i 均连续，则 n-联结函数 C 唯一。

独立随机变量的联结函数是乘积（或独立性）联结函数，定义为$\Pi^n(\mathbf{u}) := \prod_{i=1}^{n} u_i$，对所有$\mathbf{u} \in [0,1]^n$均成立。

令 $\mathcal{C}^n$ 表示所有 n-Copula 的集合。

Alsina 等人 [2] 提出了准联结函数这一概念，它比联结函数更为一般，旨在刻画分布函数上的运算是否能够由定义在同一概率空间上的随机变量运算导出。近年来，这些函数日益受到模糊集理论若干研究领域学者的关注，例如偏好建模、相似度和模糊逻辑。关于准联结函数的全面综述，请参见 [4, 29, 30]。

Cuculescu 和 Theodorescu [9] 将多元拟 Copula（即 n-准联结函数）刻画为函数 Q: $[0,1]^n \to [0,1]$，该函数满足定义 1 中的条件 i) 和 ii)，但以以下较弱条件取代条件 iii)；（2-准联结函数此前已在 [18] 中刻画）：

iv) Q 在每个变量上都是递增的；并且

v) the *Lipschitz condition*: $|Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{v})| \le \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|$, for any $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [0,1]^n$.

令 $\mathcal{Q}^n$ 表示所有 n-准联结函数的集合。

与 n-联结函数一样，我们将 $V_Q(B)$ 称为 n-盒 B 上的 n-准联结函数的 Q-体积，该体积不一定为正。

每个 n-准联结函数 Q 都满足以下不等式:

$$W^n(\mathbf{u}) := \max\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i - n + 1, 0\right\} \le Q(\mathbf{u}) \le \min\{\mathbf{u}\} =: M^n(\mathbf{u})$$

对于所有 $\mathbf{u} \in [0,1]^n$。 M^n 对每个 $n \ge 2$ 都是一个 n-联结函数， W^2（或简单地说， W）是一个 2-copula，并且 W^n 对于 $n \ge 3$ 而言是一个真正的 n-准联结函数，即一个 n-准联结函数，但不是一个 n-联结函数。

设 J 是自然数集 $\mathbb{N}$ 的一个有限或可数子集。设 $\{\,]a_k, b_k[\,\}_{k\in J}$ 是单位区间 $[0,1]$ 的子区间族，其指标为 J；再设 $\{Q_k\}_{k\in J}$ 是一族 n-准联结函数，其指标也为 J。要求任意两个区间 $]a_k, b_k[$, $k \in J$, 至多有一个端点相同。关于区间族 $\{\,]a_k, b_k[\,\}_{k\in J}$，族 $\{Q_k\}_{k\in J}$ 的序数和 Q 定义如下：对所有$\mathbf{u} \in [0,1]^n$,

$$Q(\mathbf{u}) := \begin{cases} a_k + (b_k - a_k)\, Q_k\left(\dfrac{\min\{u_1, b_k\} - a_k}{b_k - a_k}, \ldots, \dfrac{\min\{u_n, b_k\} - a_k}{b_k - a_k}\right), \\ \qquad\qquad \text{if } \min\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \in]a_k, b_k[\text{ for some } k \in J, \\ \min\{\mathbf{u}\}, \quad \text{elsewhere.} \end{cases}$$

n-准联结函数的序数和仍是一个 n-准联结函数，对所有 $n \geq 2$ 都成立（见 [14, 22]）。对于这样的 n-准联结函数 Q，记作 $Q = (\langle a_k, b_k, Q_k \rangle)_{k \in J}$。另一种基于 W 的序数和于 [23] 中被引入，其定义为

$$Q(u,v) = \begin{cases} (b_k - a_k) \cdot C_k \left(\dfrac{u - a_k}{b_k - a_k}, \dfrac{v + b_k - 1}{b_k - a_k} \right), & \text{if } (u,v) \in [a_k, b_k] \times [1 - b_k, 1 - a_k], \\ W(u,v), & \text{otherwise,} \end{cases}$$

并称为 W-序数和。

2.2 凸线性可列性

如引言中所述，本文将探讨的线性可嵌入性概念，是指在给定拓扑向量空间的子集内识别出大的代数结构。这一概念的起源可以追溯到对区间 $[0,1]$ 上有界变差函数的研究。[21] 中证明了，该集合不包含任何无限维闭子空间。关于这一理论的更详细论述，读者可参阅 [6]。线性可嵌入性的以下定义最早见于 [5]。

定义 2. 若向量空间 X 的子集 M 包含一个无限维向量空间，则称其具有线性可构造性。若 X 另外还是一个拓扑向量空间，则当 M 包含一个闭的无限维向量子空间时，称其为可空间化的。

如前所述，线性可嵌入性的概念不适用于联结函数集合。当乘以负标量或不同于 1 的常数时，每个联结函数必须满足的边界条件将不再保持。因此，引入于 [7], 的凸线性可丰性概念，是研究联结函数更为合适的框架。

定义 3. 设 M 是向量空间 X的一个子集。若存在一个无限线性无关子集 $A \subset X$，使得$\mathrm{conv}(A) \subset M$，则称 M 为凸可线化，其中$\mathrm{conv}(A)$ 表示向量空间 X的子集 A的凸包，即

$$\mathrm{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : x_i \in A,\ \lambda_i \in [0,1],\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

当线性无关向量的基数与向量空间 X的基数相同时，我们称 M 为极大凸可线性化。

基于凸可线化的概念，我们提出凸可空间化这一新概念。

定义 4. 设 M 是向量空间 X的一个子集。若存在一个包含无限线性无关子集 $A \subset M$的凸闭集，则称 M 为凸可空间化。若 A 的基数等于 X的基数，则称 M 为极大可空间化、凸可线性化。

本文中，我们将用 $\mathfrak{c}$ 表示连续统的基数，也就是实数集的基数。

3 联结函数集与准联结函数集中的凸线性可列性

集合 $\mathcal{C}^n$ 在随机变量间依赖建模的理论中发挥着核心作用。它在上确界范数下是紧致的，也是 $[0,1]^n$ 上所有分布函数的一个凸子集，但它既不是向量空间，也不在任意线性组合下封闭。凸线性可丰性使我们能够探索 $\mathcal{C}^n$ 的内部几何，揭示出大量兼具代数稳定性和凸稳定性的联结函数族。这些族可以张成整个子空间（基数为 $\mathfrak{c}$），同时仍满足既定的统计或分析约束。极大凸线性可列子集提供了丰富且结构化的示例或测试函数，其性质经过精细设计。这对于研究基于拟合函数的函数空间、涉及依赖结构的优化问题，或为模拟算法生成基函数尤其重要。从数学角度来看，若某一类联结函数包含一个维数达到最大值的子空间，就表明该类在 $\mathcal{C}^n$ 中并非“狭小”或“例外”，而是庞大、丰富，并且在精确意义上具有完备的结构。

在金融、水文学或保险等实际应用中，联结函数用于建模多变量依赖关系。联结函数的凸组合通常对应于依赖结构的混合，从而能够构建更丰富、更灵活的模型。在凸可线化族中进行研究，可确保所有此类混合都保留所需性质，从而提供稳健的建模工具。

注 1. 我们回顾一下，度量空间 $(\mathcal{C}^n, d_\infty)$——即配备上确界范数的 n 维联结函数空间——是紧致的：例如参见 *[13,* 定理 *1.7.7]*。

现在，我们介绍本文将要研究的一些相关集合，以及为清楚理解本文后续论证所必需的若干细节。

3.1 具有分形支撑的联结函数

根据 [17], ，存在一些自相似联结函数，其支撑（记为 supp）是具有预定豪斯多夫维数的分形。我们回顾一下，有界子集$E \subset \mathbb{R}^2$ 的豪斯多夫维数 $\dim_{\mathcal{H}}(E)$ 是通过豪斯多夫测度定义的（例如参见 [15]）。

一个变换矩阵是一个非负的 $n \times n$矩阵 T，其元素之和为 1，且没有任何一行或一列全为零。每个这样的 T 都定义了一个变换 $T(C)$，它通过按照 T 的元素划分单位正方形，并按比例重新分配 C 的质量（见 [17]），作用于联结函数。对于每个 T，都存在唯一的不变拟合函数 C_T满足 $T(C_T) = C_T$；只要至少有一个元素为零，其支撑就是一个自仿射分形集。

对于 $r \in (0, 1/2)$，考虑矩阵

$$T_r = \begin{bmatrix} r/2 & 0 & r/2 \\ 0 & 1-2r & 0 \\ r/2 & 0 & r/2 \end{bmatrix}.$$

不变拟合函数 C_{T_r} 具有分形支撑，其豪斯多夫维数 $s \in (1,2)$由下式确定

$$4r^{\,s} + (1-2r)^{\,s} = 1.$$

现在我们证明，支撑的豪斯多夫维数为 s 的联结函数集合 $S_{1,s}$ 是极大凸可线性化的。为此，我们将借鉴 [3, 17]中提出的概念。

定理 2。 集合$S_{1,\ s}$ 是极大凸可线性化的。

证明。只需考虑 [3] 中描述的联结函数集合：对于固定的 r,

$$\mathcal{C}_{r,a} := \left\{ C_{r,a} : r \in \left(0, \frac{1}{2}\right), 0 < a < r \right\} \subseteq S_{1,s},$$

其中$C_{r,\ a}$ 是变换矩阵的一个不变拟合函数

$$T_{r,a} = \begin{bmatrix} r-a & 0 & a \\ 0 & 1-2r & 0 \\ a & 0 & r-a \end{bmatrix}.$$

其支撑是一个分形，其豪斯多夫维数是方程$4r^s + (1-2r)^s = 1$的唯一解 $s \in (1, 2)$，因为它与 C_{T_r} 的支撑重合（见 [3]）。

对于固定的 r 和互不相同的参数 $a_1 \neq a_2$，相应的不变概率测度$\mu_{r,\ a_1}$ 和$\mu_{r,\ a_2}$ 相互奇异，并且（至关重要的是）支撑在同一个紧分形集上（见 [3, 命题 3.24] 和 [17]）。我们证明，$\mathcal{C}_{r,\ a}$ 是一个无限线性无关族，其凸包包含于$S_{1,\ s}$中。

对于每个联结函数 C，记 μ_C 为由 $C(u,\ v) = \mu_C\big([0,u]\times[0,v]\big)$ 所确定的 $[0,1]^2$ 上的博雷尔概率测度，对所有$(u,\ v) \in [0,1]^2$均成立。如果$\mathcal{C}_{r,\ a}$ 中成员的一个有限线性组合逐点为零，

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_{r,a_i} \equiv 0,$$

于是，对每个生成矩形 $[0,u]\times[0,v]$ 求值，得到

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{r,a_i}\big([0,u]\times[0,v]\big) = 0 \quad \text{for all } (u,v).$$

根据由生成 π 矩形系统上的取值所确定的测度唯一性——也就是说，该族集合对有限交集封闭——，有符号博雷尔测度 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{r,\ a_i}$ 恒等于零。现在，由于测度 $\mu_{r,\ a_i}$ 相互奇异，对于每个指标 j，都存在一个博雷尔集 A_j，使得 $\mu_{r,\ a_j}(A_j) = 1$，且 $\mu_{r,\ a_i}(A_j) = 0$，其中 $i \neq j$。在 A_j 上对零测度求值，得到

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{r,a_i}(A_j) = \lambda_j \mu_{r,a_j}(A_j) = \lambda_j,$$

因此 $\lambda_j = 0$。由于这对每个 j 都成立，所有系数均为零，且族 $\mathcal{C}_{r,\ a}$ 线性无关。设 $C = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_{r,\ a_i}$ 是 $\mathcal{C}_r$ 中任意成员的凸组合（因此 $\lambda_i \geq 0$、$\sum \lambda_i = 1$）。相应的测度是这些测度的凸组合，

$$\mu_C = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{r,a_i},$$

并且由于每个 μ_{r,a_i} 都支撑在同一个分形集 S 上，我们得到 $\operatorname{supp}(\mu_C) = S$。因此，$C$ 的支撑为 S，其豪斯多夫维数为 s；所以 $C \in S_{1,s}$。这证明了 $\operatorname{conv}(\mathcal{C}_{r,a}) \subset S_{1,s}$。

参数集 $(0, r)$ 的基数为 $\mathfrak{c}$，并在 $\mathcal{C}_{r,a}$ 中产生 $\mathfrak{c}$ 个线性无关的 Copula，因此凸线性维数为 $\mathfrak{c}$，且 $S_{1,s}$ 是极大凸可线性化的，从而完成证明。 □

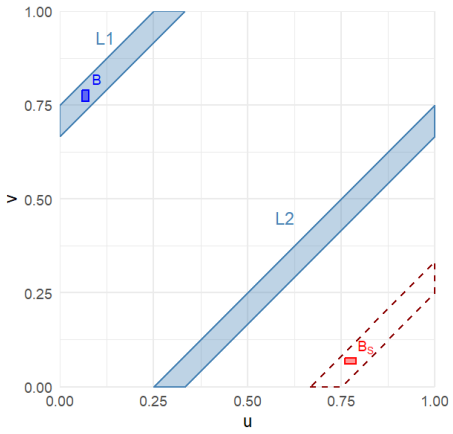


图 1：定理 3 证明中所述的情形。

3.2 非对称联结函数

令 S_2 表示非对称 2-copula 的集合，即满足以下条件的二元 Copula：对于至少一个 $(u,v)\in[0,1]^2$，有 $C(u,v)\neq C(v,u)$。

现在我们将证明 二元非对称联结函数集是极大可空间化、凸可线性化的 .

定理 3。 集合 S_2 是极大可空间化、凸可线性化的。

证明。考虑集合 L_1，它由顶点为 $(0,2/3)$、$(0,3/4)$、$(1/3,1)$ 和 $(1/4,1)$ 的四边形及其内部构成；再考虑 L_2，它由顶点为 $(1/3,0)$、$(1/4,0)$、$(1,2/3)$ 和 $(1,3/4)$ 的四边形及其内部构成。我们用 $L=L_1\cup L_2$ 和 $\mathcal{C}_L$ 表示支撑包含于 L 中的 2-copula 集合。我们证明 $\mathcal{C}_L$ 中的每个联结函数都是非对称的。设 C 是 $\mathcal{C}_L$中的一个联结函数。那么存在一个矩形 $B\subset \text{int}(L)$，使得 $V_C(B)>0$。反设它是对称的。那么必有 $V_C(B_S)=V_C(B)>0$，其中 B_S是关于 B 对称的矩形；也就是说，若$B=[u,u']\times[v,v']$，则 $B_S=[v,v']\times[u,u']$。但是 $B_S\cap L=\emptyset$，因为 B_S包含于顶点为 $(2/3,0)$、$(3/4,0)$、$(1,1/4)$ 和 $(1,1/3)$ 的四边形中。因此矛盾，且 C是非对称的。所以 $\mathcal{C}_L\subset S_2$ （见图 1）。

此外， $\mathcal{C}_L$ 是凸且闭的。首先，我们证明其凸性：设 C_1 和 C_2 是 $\mathcal{C}_L$中的两个联结函数，则对于 $\lambda\in[0,1]$，联结函数

$$C=\lambda C_1+(1-\lambda)C_2$$

属于 $\mathcal{C}_L$，因为显然$V_C=\lambda V_{C_1}+(1-\lambda)V_{C_2}$。现在，我们证明 $\mathcal{C}_L$ 是闭的：设 $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{C}_L$ 中的一个元素序列，该序列收敛于 C，并设 B 为一个满足$\text{int}(B)\cap L=\emptyset$的矩形，则对所有 $n\in\mathbb{N}$，都有 $V_{C_n}(B)=0$。因此，

$$V_C(B)=\lim_{n\to\infty}V_{C_n}(B)=0,$$

也就是说， $C\in\mathcal{C}_L$，因为其支撑包含于 L中。这就证明了 $\mathcal{C}_L$ 是闭的。

对于 $\theta\in[2/3,3/4]$，考虑由以下对象构成的连续非对称联结函数族 $\mathcal{C}_\theta$

$$C_\theta(u,v)=\begin{cases}\min\{u,v-\theta\}, & (u,v)\in[0,1-\theta]\times[\theta,1],\\ \min\{u+\theta-1,v\}, & (u,v)\in[1-\theta,1]\times[0,\theta],\\ W^2(u,v), & otherwise\end{cases}$$

（它们的支撑集如图 1 所示）。每个联结函数 C_θ 都是一个 *Min* 的洗牌 [24]（或一个 W-序数和），其概率质量均匀分布在线段 $(0,\ \theta)$，$(1-\theta,\ 1)$ 和 $(1-\theta,\ 0)$，$(1,\ \theta)$ 上。因此，给定 θ_1，$\theta_2 \in [2/3, 3/4]$、C_{θ_1} 和 C_{θ_2}，只要$\theta_1 \neq \theta_2$，它们就相互奇异。所以，集合 $\{C_\theta :\ \theta \in [2/3, 3/4]\}$ 线性无关，其基数为 $\mathfrak{c}$。该集合中所有联结函数的支撑均包含于 L。综合以上结果可证明，S_2 是极大可空间化、凸可线性化的。

□

3.3 具有最大非对称性度量的 Copula

根据 [20, 26], ，为了量化 2-copula C 的非对称程度，定义了一种自然且广泛使用的度量：

$$\|d_C\|_\infty = \sup_{(u,v)\in[0,1]^2} \{d_C(u,v)\},$$

其中 $d_C :\ [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ 由 $d_C(u,\ v) = |C(u,\ v) - C(v,\ u)|$ 给出。该度量为零当且仅当 C 对称；对于最不对称的 Copula，该度量达到最大值。

众所周知，

$$\|d_C\|_\infty \leq \frac{1}{3}$$

对于每个联结函数 C（见 [20, 26]），且当 $C(2/3,\ 1/3) = 1/3$ 且 $C(1/3,\ 2/3) = 0$，或 $C(1/3,\ 2/3) = 1/3$ 且 $C(2/3,\ 1/3) = 0$ 时，等号成立。若联结函数 C 满足 $\|d_C\|_\infty = 1/3$，则称其具有最大非对称性。L

et S_2' e the set of copulas with maxi$^{\text{mum asymme}}$ tri$^{\text{c measure.}}$ Th$^{\text{en}}_{\text{we}}$ have the followi$^{\text{ng resu}}$ lt:

定理 4。集合 S_2' 是极大可空间化、凸可线性化的。

证明。给定 $\Phi :\ (\mathcal{C}^2,\ d_\infty) \longrightarrow (\mathcal{C}^2,\ d_\infty)$，如下所示

$$\Phi(C)(u,v) := \begin{cases} \dfrac{1}{3}C(3u, 3v-2), & (u,v) \in [0,1/3]\times[2/3,1], \\ \min\{u - 1/3, v\}, & (u,v) \in [2/3,1]\times[0,2/3], \\ W^2(u,v), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

映射 Φ 定义良好，因为它构造为 W-序数和，并且是一个同胚——因为它是定义在紧集 $(\mathcal{C}^2,\ d_\infty)$ 上、取值于豪斯多夫空间的连续映射——因为

$$\begin{aligned} d_\infty(\Phi(C_1), \Phi(C_2)) &= \sup_{(u,v)\in[0,1]^2} |\Phi(C_1)(u,v) - \Phi(C_2)(u,v)| \\ &= \sup_{(u,v)\in[0,1/3]\times[2/3,1]} \left|\frac{1}{3}C_1(3u,3v-2) - \frac{1}{3}C_2(3u,3v-2)\right| \\ &= \frac{1}{3}\sup_{(u,v)\in[0,1]^2} |C_1(u,v) - C_2(u,v)| \\ &= \frac{1}{3}d_\infty(C_1, C_2), \end{aligned}$$

因此，Φ 是 Lipschitz 的，特别是连续的。度量空间 $(\mathcal{C}^2, d_\infty)$ 是紧致的，因此 $\Phi(\mathcal{C}^2)$ 是紧致的，进而是闭的。显然，$\Phi(\mathcal{C}^2) \subset S_2'$，因为对于每个$C \in \mathcal{C}^2$，$\Phi(C)(\frac{2}{3},\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$且 $\Phi(C)(\frac{1}{3},\frac{2}{3}) = 0$。同样显然，对于 $\lambda \in [0,1]$，有 $\Phi(\lambda C_1 + (1-\lambda)C_2) = \lambda\Phi(C_1) + (1-\lambda)\Phi(C_2)$。由于映射 Φ 是一个同胚，且保持凸线性组合，因此若 $A \subset \mathcal{C}^2$ 是一个由联结函数构成的线性无关族，则 $\Phi(A)$ 也是一个线性无关族。所以，S_2' 是极大可空间化、凸可线性化的。

□

对于下一个结果，我们回顾一下：给定一个拓扑空间 (X, d)，若子集 $S \subset X$ 的闭包的内部为空，则称无处稠密 于 X。

定理 5. 集合 S_2' 在（$\mathcal{C}^2, d_\infty$）中是闭且无处稠密的。

证明。 现在证明 S_2' 是闭集。定义映射 $\Phi : \mathcal{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ 如下：

$$\Phi(C) := \|d_C\|_\infty = \sup_{(u,v)\in[0,1]^2} |C(u,v) - C(v,u)|.$$

我们断言， Φ 关于上确界范数 d_∞是连续的。事实上，对于任意两个联结函数 C 和 C'，以及任意的（u， v），

$$\big||C(u,v) - C(v,u)| - |C'(u,v) - C'(v,u)|\big| \le |C(u,v) - C'(u,v)| + |C(v,u) - C'(v,u)| \le 2\|C - C'\|_\infty.$$

对（u， v）取上确界，得到

$$|\Phi(C) - \Phi(C')| \le 2\|C - C'\|_\infty,$$

因此， Φ 是利普希茨的（特别是连续的）。因此，水平集

$$S_2' = \Phi^{-1}(\{1/3\})$$

由于它是连续映射 Φ下闭单点集 $\{1/3\}$ 的原像，因此在 $\mathcal{C}^2$ 中是闭集。

最后，我们证明 S_2' 没有内点。假设 C 是一个内点；则存在一个值 n_0，使得对 $n > n_0$有 ${}^{n-1}_{n}C + {}^{1}_{n}\Pi^2 \in S_2'$；因为 $d_\infty(C, {}^{n-1}_{n}C + {}^{1}_{n}\Pi^2) = {}^{1}_{n}d_\infty(C, \Pi^2)$。但这并不成立，因为这些 Copula 中没有一个在 $({}^{1}_{3}, {}^{2}_{3})$ 上取零值。由于 S_2'是闭的且没有内点，因此它是无处稠密的。

□

3.4 1-p-利普希茨 Copula，它们对任意 $p' > p$都不是1-p'-利普希茨的

设 C 是满足以下条件的 2-copula

$$|C(\mathbf{x}) - C(\mathbf{y})| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p,$$

对任意$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$、$\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in [0,1]^2$，其中 $\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{i=1}^2 |x_i|^p)^{1/p}$。关于这类 Copula 及其性质的全面研究，读者可参阅 [10]。注意，$(\mathcal{C}_p)_{p\in[1,\infty]}$ 给出了所有二元 Copula 类的一个划分。

对于固定的 p，令 S_3 为满足 1-p-利普希茨、但对任意 $p' > p$ 均不满足 1-p'-利普希茨条件的联结函数集合。利用 [10], 中介绍的概念，我们将证明集合 S_3 是极大凸可线性化的。

回顾一下，若族 $\{K_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ 由自然数集 $\mathbb{N}$ 的无限子集构成，且当 $\alpha \neq \beta$时 $K_\alpha \cap K_\beta$为有限集，则称其为几乎不相交。

考虑在 [10]中定义的两个单参数二元 copula 族；一方面， $C_{(c)} : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, 定义为

$$C_{(c)}(u,v) = \min\left\{u, v, \max\left\{\frac{u+v-c}{2-c}, 0\right\}\right\}$$

对所有 $(u,v) \in [0,1]^2$，其中 $c \in [0,1]$，其支撑如图 2 所示。

另一方面， $D_{(a)} : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$定义为

$$D_{(a)}(u,v) = \begin{cases} \min\{u, v, (1-a)(u+v)\}, & \text{if } u+v \le 1, \\ \min\{u, v, a(u+v) + 1 - 2a\}, & \text{if } u+v \ge 1, \end{cases}$$

对于所有的（u， v）$\in [0,1]^2$ 和 $a \in [1/2, 1]$，其支撑如图 3 所示。

现在我们可以证明以下结果：

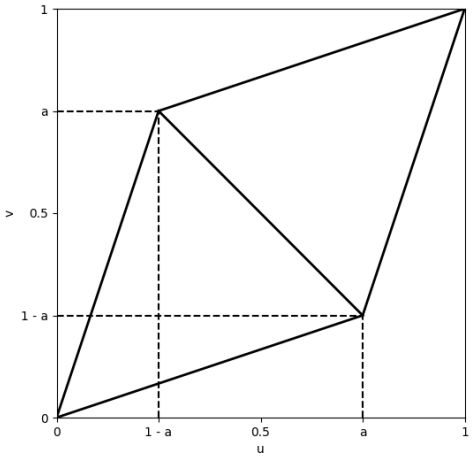


图 2：联结函数 $C_{(c)}$的支撑。

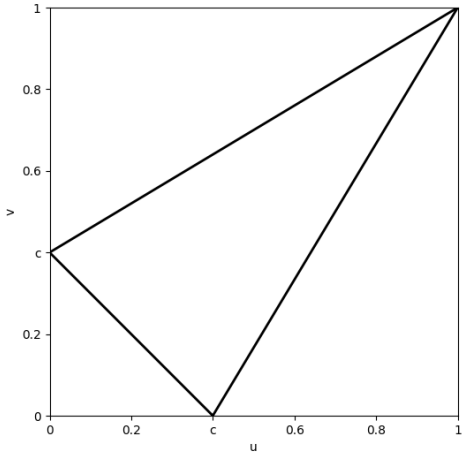


图 3：联结函数 $D_{(a)}$的支撑。

定理 6。 集合 S_3 是极大凸可线性化的。

证明。 令 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 为由分量取 0 或 1 的序列组成的集合。令 $\{K_\alpha :\ \alpha \in [0,1]\}$ 为 $\mathbb{N}$ 的无限子集构成的几乎不交族，使得若 $n \in K_\alpha$，则 $K_\alpha(n) = 1$；若 $n \notin K_\alpha$，则 $K_\alpha(n) = 0$。

考虑 $C^{(\lambda)} = \lambda C_{(c)} + (1-\lambda)D_{(a)}$，其中 $\lambda \in [0,1]$。根据 [10, 例 4.2],，对于适当的 a 和 c取值，联结函数 $C_{(c)}$, $D_{(a)}$ 和 $C^{(\lambda)}$ 都是 $\mathscr{C}_p$的元素。

现在，我们着手构造序数和 $A_\alpha = \left(\left\langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}, C^{(K_\alpha)(n)} \right\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$。假设这些联结函数线性相关，那么存在一个线性组合，使得

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i A_{\alpha_i} \equiv 0,$$

其中 $\beta_i \in \mathbb{R}$ 对所有 $i = 1,\ldots,k$ 都成立。满足 $K_{\alpha_1}(n) = 1$ 且 $K_{\alpha_i}(n) = 0$ 的 n 有无穷多个，其中 $i = 2,\ldots,k$。由此可推得，对于给定的 β，$D_{(a)} = \beta \cdot C_{(c)}$，这是不可能的，因为

这两个联结函数彼此不同。因此，存在 $\mathfrak{c}$ 个线性无关的联结函数。 [10, 命题 4.4] 保证这些联结函数 A_α 的任意凸组合都属于 $\mathscr{C}$。因此， S_3 是极大凸可线性化的。

□

3.5 真 n准拟 copula

设 S_4 为集合 $\mathcal{Q}^n \setminus \mathcal{C}^n$。本节考察类 S_4 的内部代数结构和拓扑丰富性。我们的主要目标是确定这些集合以及具有给定对角截面的真 2-拟 Copula 类，在多大程度上是极大可空间化、凸可线性化的。

定理 7. 集合 S_4 是极大可空间化、凸可线性化的。

证明。 我们先研究情形 $n = 2$。给定 $C \in \mathcal{C}^2$，令 $Q_C\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ 为如下定义的函数

$$Q_C(u,v) = \begin{cases} u + v - \dfrac{1}{3}C(3u-1, 3v-1) - \dfrac{2}{3}, & (u,v) \in [1/3, 2/3]^2, \\ \max\left\{0, u - \dfrac{1}{3}, v - \dfrac{1}{3}, u + v - 1\right\}, & (u,v) \notin [1/3,2/3]^2 \text{ and } |u-v| < 1/3, \\ \min\{u, v\}, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1}$$

Q_C 确实是真准拟 copula，因为 $V_{Q_C}([1/3, 2/3]^2) = -1/3$（图 4 展示了其在$C = M^2$时的支撑）。

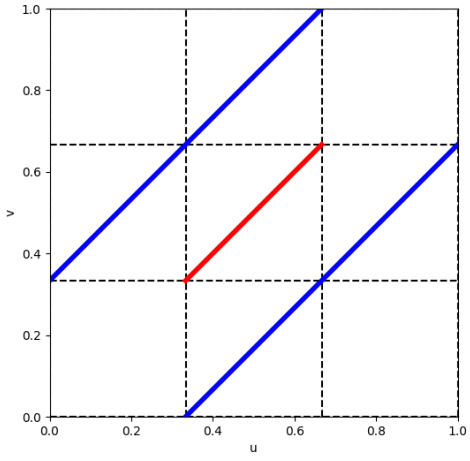


图 4：由式 (1) 给出的真准拟 copula Q_C 在 $C = M^2$ 时的支撑，红色表示负概率质量，蓝色表示正概率质量。

映射

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{C}^2 &\longrightarrow \mathcal{Q}^2 \\ C &\longmapsto Q_C \end{aligned}$$

是连续的，因为给定 C_1， $C_2 \in \mathcal{C}^2$，

$$
\begin{aligned}
d_\infty(\Phi(C_1),\Phi(C_2)) &= \sup_{(u,v)\in[0,1]^2} |Q_{C_1}(u,v) - Q_{C_2}(u,v)| \\
&= \sup_{(u,v)\in[1/3,2/3]^2} \left| \frac{1}{3}\left(C_2(3u-1,3v-1) - C_1(3u-1,3v-1)\right) \right| \\
&= \frac{1}{3} \sup_{(u,v)\in[0,1]^2} |C_2(u,v) - C_1(u,v)| \\
&= \frac{1}{3} d_\infty(C_1,C_2).
\end{aligned}
$$

度量空间 $(\mathcal{C}^2,\ d_\infty)$ 是紧致的，因此 $\Phi(\mathcal{C}^2)$ 是紧致的，从而是闭的。还需注意，像 $\Phi(\mathcal{C}^2)$ 是凸的，因为显然对于所有 $a \in [0,1]$，$\Phi(aC_1 + (1-a)C_2) = a\Phi(C_1) + (1-a)\Phi(C_2)$。由于这一性质，映射 Φ 将向量的线性无关的凸组合映射为向量的线性无关的凸组合。因此，$\mathcal{Q}^2 \setminus \mathcal{C}^2$ 是极大可空间化、凸可线性化的。

为了证明一般情形 n，我们定义连续映射

$$
\begin{aligned}
\Psi : \mathcal{Q}^2 &\longrightarrow \mathcal{Q}^n \\
Q &\longmapsto Q'
\end{aligned}
$$

其中 $Q'(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n) = Q(u_1,\ u_2)u_3 \cdots u_n$。显然，$\Psi(\Phi(C))$ 是一个真准拟 copula，并且映射 Ψ 是连续的，因为

$$
\begin{aligned}
d_\infty(\Psi(Q_1),\Psi(Q_2)) &= \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^n} |Q_1'(\mathbf{u}) - Q_2'(\mathbf{u})| \\
&= \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^n} |Q_1(u_1,u_2)u_3\cdots u_n - Q_2(u_1,u_2)u_3\cdots u_n| \\
&= \sup_{\mathbf{u}\in[0,1]^n} |(Q_1(u_1,u_2) - Q_2(u_1,u_2)| \cdot |u_3\cdots u_n| \\
&= \sup_{(u_1,u_2)\in[0,1]^2} |Q_1(u_1,u_2) - Q_2(u_1,u_2)| \\
&= d_\infty(Q_1,Q_2).
\end{aligned}
$$

显然，$\Psi\left(\Phi\left(\mathcal{C}^2\right)\right)$ 是凸的，并且 Ψ 保持线性无关向量的凸组合。由于 $\Psi\left(\Phi\left(\mathcal{C}^2\right)\right) \subset \mathcal{Q}^n \setminus \mathcal{C}^n$，我们有 $\mathcal{Q}^n \setminus \mathcal{C}^n$ 是极大可空间化、凸可线性化的。

□

3.5.1 具有给定对角线截面的真2-准 copula

我们从对角线的定义开始本小节。

定义 5。如果映射 $\delta:\ [0,1] \longrightarrow [0,1]$ 满足以下条件，则称其为对角线：

i. $\delta(1) = 1$; *ii.* $\delta(t) \leq t$ 对所有 $t \in [0,1]$ 均成立；

iii. δ 是递增的；

iv. $|\delta(v) - \delta(u)| \leq 2|v-u|$ 对所有 $u, v \in [0,1]$ 均成立。

The 任意 2-准拟 copula Q 的对角截面由 $\delta_Q(t) = Q(t, t)$ 给出，对所有 $t \in [0,1]$ 均成立。

令 $\mathcal{C}_\delta^2$（分别地，$\mathcal{Q}_\delta^2$）表示所有具有对角截面 δ的二元 copula（分别地，2-拟联结函数）的集合。已知（见 [16, 27]），对于每个对角线 δ，至少存在一个具有该对角线的 2-copula C_δ。

令 S_4' 表示所有共享固定对角截面 δ的真 2-拟 Copula 的集合，其中该对角截面不同于$\delta(t) = t$，即 $\mathcal{Q}_\delta^2 \setminus \mathcal{C}_\delta^2$。于是我们有以下结果。

定理 8。集合 S_4' 是极大可空间化、凸可线性化的。

证明。我们采用 [12]中给出的构造。固定一个对角线 δ，使得存在 $t_0 \in (0, 1)$ 满足 $\delta(t_0) \neq t_0$。令 $C \in \mathcal{C}_\delta^2$为具有该对角线的一个 2-copula，并定义矩形 $R = [0, t_0] \times [t_0, 1]$。对于给定的定义在 $[0,1]^2$, 上的真准拟 copula Q，定义

$$\widetilde{C}(u,v) = \begin{cases} V_C(R) \cdot Q(F(u), G(v)) + C(u, t_0), & (u,v) \in R, \\ C(u,v), & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{2}$$

其中，缩放函数 F、G： $[0,1] \to [0,1]$ 由下式给出

$$F(u) = \frac{V_C([0,u] \times [t_0, 1])}{V_C(R)}, \qquad G(v) = \frac{V_C([0,t_0] \times [t_0, v])}{V_C(R)}.$$

~由准联结函数的性质（见 [12, 命题 3]）可知，C 是一个与 C具有相同对角线的准联结函数，并且当 Q 为真准联结函数时，$\widetilde{C}$ 不是联结函数。因此，$\widetilde{C} \in \mathcal{Q}_\delta^2 \setminus \mathcal{C}_\delta^2$。

令 $L = \Psi\left(\Phi\left(\mathcal{C}^2\right)\right) \subset \mathcal{Q}^n \setminus \mathcal{C}^n$——回顾定理 7 的证明——，并令 Ω 为如下定义的映射

$$\begin{aligned} \Omega : L &\longrightarrow \mathcal{Q}^2 \\ Q &\longmapsto \widetilde{C}_Q \end{aligned}$$

该映射是连续的，事实上还是利普希茨的，因为

$$\begin{aligned} d_\infty(\Omega(Q_1), \Omega(Q_2)) &= \sup_{(u,v)\in[0,1]^2} |\widetilde{C}_{Q_1}(u,v) - \widetilde{C}_{Q_2}(u,v)| \\ &= \sup_{(u,v)\in R} |V_C(R) Q_1(F(u), G(v)) - C(u,t_0) - V_C(R) Q_2(F(u), G(v)) + C(u,t_0)| \\ &= \sup_{(u,v)\in R} |V_C(R)(Q_1(F(u), G(v)) - Q_2(F(u), G(v))| \\ &= V_C(R) \sup_{(u,v)\in R} |Q_1(F(u), G(v)) - Q_2(F(u), G(v))| \\ &= V_C(R) \sup_{(u,v)\in[0,1]^2} |Q_1(u,v) - Q_2(u,v)| \\ &= V_C(R) \cdot d_\infty(Q_1, Q_2). \end{aligned}$$

因此，Ω(*L*) 是闭集。现在，我们证明对于 $\lambda \in [0,1]$，Ω(λQ_1 + (1 − λ)Q_2) = λΩ(Q_1) + (1 − λ)Ω(Q_2)；但这显然成立，因为如果 (*u*、 *v*) ∉ *R*，则 Ω(Q_1)(*u*、 *v*) =Ω(Q_2)(*u*、 *v*) = *C*(*u*、 *v*)，而如果 (*u*、 *v*) ∈ *R*，则

$$\begin{aligned} \Omega(\lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2)(u,v) &= V_C(R)(\lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2)(F(u), G(v)) + C(u, t_0) \\ &= \lambda V_C(R) Q_1(F(u), G(v)) + (1-\lambda) V_C(R) Q_2(F(u), G(v)) + (\lambda + 1 - \lambda) C(u, t_0) \\ &= \lambda \Omega(Q_1)(u,v) + (1-\lambda)\Omega(Q_2)(u,v). \end{aligned}$$

Ω 也保持线性无关向量，因此 $\mathcal{Q}_\delta^2 \setminus \mathcal{C}_\delta^2$ 是极大可空间化、凸可线性化的。 □

3.6 Copula 序列

对 copula 空间 $\mathcal{C}^2$ 的研究通常依赖于各种拓扑。在一般情况下，这些拓扑并不等价，因此会产生由这样的序列组成的集合：这些序列在一种度量下收敛，却在另一种度量下发散。

3.6.1 在 d_∞ 中收敛但不在 D_1中收敛的 Copula 序列

我们回顾一下， $\mathcal{C}^2$ 上的标准一致度量 d_∞ 定义为

$$d_\infty(C_1, C_2) := \max_{(x,y)\in[0,1]^2} |C_1(x,y) - C_2(x,y)|. \tag{2.1}$$

众所周知，度量空间（$\mathcal{C}, d_\infty$）是紧致的，并且 Copula 序列（C_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 的逐点收敛与一致收敛等价（参见 [13]）。

另一方面，对于度量 D_1 ，我们需要一些预备概念。

定义 6。从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$的马尔可夫核，即 $\mathbb{R}$上的 *Borel* σ-域，是一个映射 $K\colon \mathbb{R}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow[0,1]$，满足对每个固定的 $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$，$(x, B)$ 均为可测函数；并且对每个固定的 $x\in\mathbb{R}$， $B\mapsto K(x, B)$ 均为概率测度。

给定概率空间 $(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上的两个随机变量 X和 Y，若对于每个 $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$，马尔可夫核 K 都满足

$$K(X(\omega), B) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \circ Y|X)(\omega)$$

都成立（关于 $\mathbb{P}$ 几乎处处）。若 $C\in\mathcal{C}^2$ 是与 X 和 Y 相关联的联结函数， $E, F\in\mathcal{B}([0,1])$，则

$$\int_F K_C(u, E)d\lambda(u) = \mu_C(F\times E),$$

其中 K_C 表示给定 X 时 Y 的正则条件分布，而 μ_C 是与 C 相关联的概率测度。

在 $\mathcal{C}^2$ 中，度量 D_1 定义为

$$D_1(C_1, C_2) := \iint_{[0,1]^2} |K_{C_1}(u,[0,v]) - K_{C_2}(u,[0,v])|\mathrm{d}\lambda(u)\mathrm{d}\lambda(v).$$

度量空间 $(\mathcal{C}^2, D_1)$ 是完备且可分的（见 [33]）。

令 S_5 表示这样的联结函数序列族：这些序列在 d_∞ 度量下收敛，但在 D_1 度量下不收敛（ S_5 中联结函数序列的一个例子见 [19, 例 5.1]）。

注 2. 我们回顾一下，$(\mathcal{C}^2)^{\mathbb{N}}$——所有 *2-copula* 序列组成的集合——是定义在 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 上的有界函数序列所构成的向量空间的子集。

为了推广 Min 的经典洗牌概念， [11] 中引入了两个基本概念：*S*-结构 和*S*-余联结函数。S-结构为每个边缘维度上的单位区间提供了一种系统化的划分方式，确保由此得到的多维网格在各坐标间保持测度一致性。基于这种结构，通过适当的仿射变换，在划分的每个块内重新分配一个余联结函数族的概率质量，从而构造出 S-余联结函数（或洗牌余联结函数）。这一框架涵盖了 Min 的多元洗牌和序数和构造，并在 L^∞ 范数下逼近任意余联结函数方面发挥着核心作用。

定义 7 (S-结构)。 设 $d \geq 2$。S-结构 （或洗牌结构）是一个族 $S = (J^i)_{i=1}^d$，其中每个 $J^i = (J_n^i)_{n\in N}$都是由 $[0,1]$, 的闭非空子区间构成的系统，满足以下条件：

i) N是有限或可数的指标集，即 $N = \{0, 1, \ldots, \tilde{n}\}$ 或 $N = \mathbb{Z}_+$;

ii) 对每个 $i \in \{1, \ldots, d\}$及所有满足 $n \neq m$的 n、 $m \in N$，区间 J_n^i和 J_m^i至多有一个公共端点；

iii) 对每个 $i \in \{1, \ldots, d\}$,

$$\sum_{n\in N} \lambda(J_n^i) = 1,$$

其中 λ 表示 $[0,1]$上的勒贝格测度；

iv) 对每个 $n \in N$，所有区间 J_n^1、 J_n^2、.....、 J_n^d的长度都相同，即

$$\lambda(J_n^1) = \lambda(J_n^2) = \cdots = \lambda(J_n^d).$$

该集合 基于指标集 N 的所有 *S*-结构的集合记为 $\mathscr{S}_N$，且 $\mathscr{S} = \bigcup_N \mathscr{S}_N$.

定义 8 （S-余联结函数）。 *S*-余联结函数（*shuffling copula* 的简称）是一种联结函数，其诱导测度可以表示为一种 d-重随机的洗牌测度。形式化地说，*S*-余联结函数

$$C = \langle (J^i)_{i=1}^d, (C_n)_{n\in N} \rangle$$

通过将单位立方体 $[0,1]^d$划分为若干块 $J_n^1 \times \cdots \times J_n^d$ （一个S-结构），并在每个块内通过适当的仿射变换重新分配一族 ***Copula*** $(C_n)_{n\in N}$ 的概率质量而得到。所得测度仍然是 d-重随机的，因此定义了一个有效连接函数。

我们感兴趣的一个特殊情形是：存在一个联结函数 C ，使得$C_n = C$ 对任意 $n \in N$均成立。在这种情况下，对于任意 $S \in \mathscr{S}_N$ ，可以定义一个映射 $\widetilde{\psi}_{(S,\cdot)}$： $\mathcal{C}^2 \longrightarrow \mathcal{C}^2$， $\widetilde{}$，其为 $\psi_{(S,\cdot)}(C) = \langle S, (C_n = C)_{n\in N} \rangle$。

现在我们可以证明以下结果。

定理 9. 集合 S_5 是极大凸可线性化的。

证明. 对每个整数 $N \geq 2$，考虑 $[0,1]$ 的等长划分

$$I_n^1 = \left[\frac{n-1}{N^2}, \frac{n}{N^2}\right], \qquad n = 1, 2, ..., N^2,$$

$$I_{N(j-1)+k}^2 = \left[\frac{N(k-1)+j-1}{N^2}, \frac{N(k-1)+j}{N^2}\right] \text{ for } k, j = 1, 2, ..., N$$

（见 [24, 25]），以及相应的块 $I_n^1 \times I_n^2$。这给出了一个 *S*-结构 $S'_N \in \mathcal{S}$ （见 [11]）。

我们定义 Θ_N： $\mathcal{C}^2 \longrightarrow \mathcal{C}^2$，使得对于给定的联结函数 $C \in \mathcal{C}^2$， $\Theta_N(C)$ 的定义方式是在每个块 $I_n^1 \times I_n^2$ 上放置 C 的一个仿射缩放副本，该副本对应于（u， v） $\in I_n^1 \times I_n^2$，其质量为 $1/N^2$。这是与 S_N 相关联的 S- 联结函数，其常值块族为 C （见 [11, 命题 2.2]）。

关于 [24, 25], 中的论证，有

$$\lim_{N\to\infty} d_\infty(\Theta_N(C), \Pi^2) = 0.$$

因此， $\Theta_N(C)$ 一致收敛于独立 copula Π^2。

另一方面，我们考虑对 $[0,1]$ 的等长划分

$$J_n^1 = J_n^2 = \left[\frac{n-1}{N^2}, \frac{n}{N^2}\right], \qquad n = 1, 2, ..., N^2,$$

以及相应的对角块 $J_n^1 \times J_n^2$。这将得到一个 S 结构 $S_N \in \mathcal{S}$（见 [11]）。

现在，固定一个联结函数 $C \in \mathcal{C}^2$, $C \neq \Pi^2$，并通过在每个对角块$J_n^1 \times J_n^2$上放置 C 的仿射缩放副本来定义 $\Psi_N(C)$；也就是说，对于 $(u, v) \in J_n^1 \times J_n^2$,

$$\Psi_N(C)(u, v) = \frac{n-1}{N^2} + \frac{1}{N^2} C(N^2 u - (n-1), N^2 v - (n-1)).$$

由于 Π^2 在广义洗牌的作用下保持不变，因此有 $D_1(\Psi_N(C)\ \Pi^2) = D_1(\Theta_N(C)\ \Pi^2)$。因此，我们将研究 $D_1(\Psi_N(C)\ \Pi^2)$:

$$\begin{aligned}
D_1(\Psi_N(C), \Pi^2) &= \int\int_{[0,1]^2} |K_{\Psi_N(C)}(u, [0, v]) - v| dv du \\
&\geq \sum_{n=1}^{N^2} \left(\int\int_{\left[\frac{n-1}{N^2}, \frac{n}{N^2}\right] \times \left[0, \frac{n-1}{N^2}\right]} v\ du dv + \int\int_{\left[\frac{n-1}{N^2}, \frac{n}{N^2}\right] \times \left[\frac{n}{N^2}, 1\right]} (1-v) du dv \right) \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N^2} \left(\int_{\left[0, \frac{n-1}{N^2}\right]} v\ dv + \int_{\left[\frac{n}{N^2}, 1\right]} (1-v) dv \right) \\
&= \frac{2N^4 - 3N^2 + 1}{6N^4}.
\end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned}
D_1(\Psi_N(C), \Pi^2) =) &= \int\int_{[0,1]^2} |K_{\Psi_N(C)}(u, [0, v]) - v| dv du \\
&\leq \sum_{n=1}^{N^2} \left(\int\int_{\left[\frac{n-1}{N^2}, \frac{n}{N^2}\right] \times \left[0, \frac{n-1}{N^2}\right]} v\ du dv + \int\int_{\left[\frac{n-1}{N^2}, \frac{n}{N^2}\right] \times \left[\frac{n}{N^2}, 1\right]} (1-v) du dv \right. \\
&\quad \left. + \int\int_{\left[\frac{n-1}{N^2}, \frac{n}{N^2}\right]^2} 1\ du dv \right) \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N^2} \left(\int_{\left[0, \frac{n-1}{N^2}\right]} v\ dv + \int_{\left[\frac{n}{N^2}, 1\right]} (1-v) dv + \frac{1}{N^2} \right) \\
&= \frac{2N^4 + 3N^2 + 1}{6N^4}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{N \to \infty} D_1(\Psi_N(C), \Pi^2) = \frac{1}{3}.$$

那么,

$$\lim_{N \to \infty} D_1(\Theta_N(C), \Pi^2) = \frac{1}{3}.$$

由于该映射将每个联结函数 C 映射为其在每个块 $I_n^1 \times I_n^2$中的一个仿射缩放副本，因此显然，对于每个 $\lambda \in [0, 1]$，都有 $\Theta_N(\lambda C_1 + (1-\lambda) C_2) = \lambda \Theta_N(C_1) + (1-\lambda) \Theta_N(C_2)$，从而它保持线性无关向量。因此， S_5 是极大凸可线性化的。 □

3.6.2 序列 在 D_1 中收敛、但在全变差意义下不收敛的联结函数序列 n

设 $(\Omega, \mathcal{A})$ 是一个可测空间，且 μ 是 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上的一个符号测度。μ的全变差范数记作 $\|\mu\|_{\mathrm{var}}$，定义为绝对值测度 $|\mu|$ 的总质量，其中 $|\mu|$ 定义如下：

$$\|\mu\|_{\mathrm{var}} := |\mu|(\Omega) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(A_i)|\right\},$$

其中，上确界取遍 Ω 的所有可数划分 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$，这些划分由两两不相交的可测集$A_i \in \mathcal{A}$组成。或者，根据哈恩分解定理，Ω 可以划分为一个正集 P和一个负集 N，使得 $\mu = \mu^+ - \mu^-$。于是，（全）变差范数等于正部和负部的范数之和：

$$\|\mu\|_{\mathrm{var}} = \mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega) = \mu(P) - \mu(N).$$

（例如，参见 [28]。）

若一列 2-copula $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 与极限 2-copula C 的相关测度之间的距离（以其密度的 L_1 范数度量——如果密度存在）趋于零，则称该序列在（全）变差意义下收敛到该极限：

$$\lim_{k\to\infty} \|\mu_{C_k} - \mu_C\|_{\mathrm{var}} = 0.$$

从概率角度看，这意味着序列 $\{C_k\}$ 在各方面都逐渐变得与极限 C 无法区分，因为它们在任意可测集上的概率分配之差都趋于零。

（全）变差收敛严格强于一致度量 d_∞ 和度量D_1。令 S_6 表示在 D_1 度量下收敛、但在全变差意义下不收敛的联结函数序列族。S_6 中的一个联结函数序列例子如下：

例 1. 令 D 表示独立 *copula* $\Pi(u,v) = uv$（我们将使用它的核 $K(x,[0,y]) = y$）。对每个整数 $n \geq 1$，定义二元 *copula*

$$C_n(u,v) = uv + \frac{(1-\cos(2\pi u))(1-\cos(2\pi n v))}{8\pi^2 n}, \quad (u,v) \in [0,1]^2. \tag{3}$$

其在 $[0,1]^2$ 上的密度为

$$c_n(u,v) = 1 + \frac{1}{2}\sin(2\pi u)\,\sin(2\pi n v), \quad (u,v) \in [0,1]^2. \tag{4}$$

令 C_n 为相对于勒贝格测度、密度为 c_n 的联结函数（容易验证$c_n \geq 1/2 > 0$，因此它确实是一个密度；又因为 y-积分 $\sin(2\pi n y)$ 为0，两个边缘分布均为均匀分布，且 C_n 是一个联结函数）。

令 C为独立 *copula*（其核为 $K(x,[0,y]) = y$）。我们证明：

1. $D_1(C_n, C) \to 0$ 作为 $n \to \infty$;

2. 相关测度不在全变差意义下收敛：$\|\mu_{C_n} - \mu_C\|_{\mathrm{var}} \not\to 0$。

对于密度为 $c(x,y)$ 的绝对连续联结函数，其马尔可夫核满足 s

$$K(x,[0,y]) = \int_0^y c(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

因此，对于我们的 c_n，

$$K_n(x,[0,y]) - K(x,[0,y]) = \int_0^y \frac{1}{2}\sin(2\pi x)\sin(2\pi n t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi n}\big(1-\cos(2\pi n y)\big).$$

因此，根据定义

$$D_1(C_n, C) = \iint_{[0,1]^2} \big|K_n(x,[0,y]) - K(x,[0,y])\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

我们得到一致有界

$$\big|K_n(x,[0,y]) - K(x,[0,y])\big| \le \frac{|\sin(2\pi x)|}{2\pi n},$$

从而

$$D_1(C_n, C) \le \frac{1}{2\pi n}\int_0^1 |\sin(2\pi x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi n}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi^2 n} \longrightarrow 0.$$

因此， $C_n \to C$ 在度量 D_1下。

另一方面，两个概率测度 μ_{C_n} 和 μ_C 之间的全变差距离等于其密度的 L_1-距离：

$$\|\mu_{C_n} - \mu_C\|_{\mathrm{var}} = \int_{[0,1]^2} |c_n(x,y) - 1|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 |\sin(2\pi x)|\,\mathrm{d}x \;\cdot\; \int_0^1 |\sin(2\pi n y)|\,\mathrm{d}y.$$

每个因子都等于 $\int_0^1 |\sin(2\pi t)|\mathrm{d}t = 2/\pi$，因此

$$\|\mu_{C_n} - \mu_C\|_{\mathrm{var}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi^2} > 0,$$

独立于 n。特别地，变差距离不会趋于0。

如下结果所示，集合 S_6 具有极大凸线性结构。

定理 10. 集合 S_6 是极大凸可线性化的。

证明。 为了证明该定理的结论，我们将使用例 1 中的序列 $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 。设 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$为分量取值为 0 和 1 的序列集合。设 $\{K_\alpha\colon\ \alpha\in[0,1]\}$ 为自然数集 $\mathbb{N}$的一个无限子集几乎不交族。我们考虑满足下式的序列 $\{C_{K_\alpha,n}\}_n \in \mathbb{N}$

$$C_{K_\alpha,n} = \begin{cases} C_n, & \text{if } n \in K_\alpha, \\ \Pi^2, & \text{if } n \notin K_\alpha. \end{cases}$$

现在，我们证明这些 Copula 线性无关：假设这些 Copula 线性相关，那么对于 $i = 1,\ldots,k$，存在 $\beta_i \in \mathbb{R}$，其中某个 $\beta_i \neq 0$ 满足

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i \{C_{K_{\alpha_i},n}\} \equiv 0.$$

满足 $K_{\alpha_1}(n) = 1$ 且 $K_{\alpha_i}(n) = 0$ 的 $i = 2$、.....、k 有无穷多个取值。因此，若将两个数列的各项逐一对应相等，就会得到 $\beta_1 C_n = \beta\Pi^2$；然而，对于每个 $(u,\ v) \in [0,1]^2$，这两个联结函数并不相等。因此，数列 $\{C_{K_\alpha,n}\}_n \in \mathbb{N}$ 线性无关，且共有 $\mathfrak{c}$ 个，因为 $\alpha \in [0,1]$。

由例 1 可知，

$$\lim_{n\to\infty} D_1(C_{K_\alpha,n}, \Pi^2) = 0,$$

因为仅对 $\mathbb{N}$, $C_{K_\alpha,n} = \Pi^2$ 的有限子集成立。这些联结函数的凸组合也满足在度量 D_1 下收敛到 Π^2。由于 $K_{\alpha_1} \cap K_{\alpha_2} = \emptyset$，因此对于$\lambda \in [0,1]$，只要 $n \to \infty$，就有 $\lambda C_{K_{\alpha_1},n} + (1-\lambda)C_{K_{\alpha_2},n} = C_n$。

另一方面，应用与上述类似的论证

$$\lim_{n\to\infty} \|\mu_{C_{K_\alpha},n} - \mu_{\Pi^2}\|_{\mathrm{var}} = \lim_{n\to\infty} \|\mu_{C_n} - \mu_{\Pi^2}\|_{\mathrm{var}} > 0.$$

通过与前面相同的推理，我们推得这些联结函数的凸组合也不会收敛到 Π^2。因此， S_6 是极大凸可线性化的。 □

4 结论

在本文中，我们通过凸线性可丰性和凸空间可嵌入性的概念，研究了若干联结函数与准联结函数族在代数和拓扑意义上的丰富性。我们的结果表明，许多经典的以及近期研究的 n-联结函数子类具有出人意料的丰富内部结构。我们证明，其中若干族是极大凸可线性化的，这意味着它们包含基数为 $\mathfrak{c}$ 的线性无关集，且其整个凸包仍包含在该类中。例如，具有指定分形支撑的联结函数、满足有界利普希茨型约束的联结函数，以及根据所选拓扑呈现不同收敛行为的联结函数序列，都具有这一性质。对于其他重要的类，凸线性可丰性还可加强为极大可空间化的凸线性可丰性。非对称联结函数族、具有最大非对称性的 copula、真准拟 copula，以及具有固定对角截面的真 2-拟 Copula，均属于此类。在这些情形下，我们找到了闭的、凸的、无限线性无关子集，从而显著深化了对相关函数族结构的理解。

另一方面，在某些自然情形下，凸空间可嵌入性仍是一个未解问题。例如，具有分形支撑的 copula，或属于 1-p-利普希茨类、但对任何 $p' > p$ 都不属于 1-p'-利普希茨类的联结函数，便是如此。在这些情形中，我们的构造保证了最大凸线性可丰性，但由于线性张成空间不闭，我们无法断言其具有空间可嵌入性。这些例子揭示了由序数和机制、诱导测度的互相奇异性或离散化块构造所导致的微妙障碍。

本文所得结果开辟了若干研究方向。其中较为重要的包括：(i) 确定凸空间可嵌入性尚未解决的那些族是否确实包含闭的无限线性无关子集；(ii) 刻画凸可线化和可空间化结构在洗牌变换的复合或迭代等运算下的稳定性；(iii) 研究其他联结函数集合的凸线性可丰性和空间可嵌入性，例如具有发夹形支撑集 [8] 的联结函数；以及 (iv) 将分析推广至更高维的依赖结构和其他度量。

致谢

第一作者获得西班牙阿尔梅里亚大学 CDTIME 的资助。

参考文献

[1] Aizpuru, A., P´erez-Eslava, C., Garc´ıa-Pacheco, F.J., Seoane-Sep´ulveda, J.B.（2008）。 $\mathbb{R}$上不连续函数的线性可嵌入性与锥可构性。德布勒森数学出版物 **7**，129–139。

[2] Alsina, C., Nelsen, R.B., Schweizer, B.（1993）。关于分布函数上一类二元运算的刻画。Statist. Probab. Lett. 17，85–89。[3] Amo, E. de, D´ıaz Carrillo, M., Fern´andez-S´anchez, J.（2012）。Copula及其相关分形集。《J. Math. Anal. Appl.》386，528–541。[4] Arias-Garc´ıa, J.J., Mesiar, R., De Baets, B.（2020）。准 copula漫游指南。《Fuzzy Sets Syst.》393，1–28。[5] Aron, R.M. Gurariy, V.I., Seoane-Sep´ulveda, J.B.（2005）。 $\mathbb{R}$上函数集的线性可嵌入性与空间可嵌入性。Proc. Amer. Math. Soc. 133(3)，795–803。[6] Aron, R.M., Bernal-Gonz´alez, L., Pellegrino, D.M., Seoane-Sep´ulveda, J.B.（2016）。线性可嵌入性：在数学中探寻线性。数学专著与研究笔记丛书，CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州。[7] Bernal-Gonz´alez, L., Conejero, J.A., Murillo-Arcilla, M., Seoane-Sep´ulveda, J.B.（2019）。函数族中的 $[\mathcal{S}]$-线性结构与凸结构。Linear Algebra Appl. 579，463–483。[8] Chamizo, F., Fern´andez-S´anchez, J., ´Ubeda-Flores, M.（2021）。具有发夹形支撑集的Copula的构造。Mediterr. J. Math. 18，文章编号155。[9] Cuculescu, I., Theodorescu, R.（2001）。Copula：对角线与轨迹。Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 46，731–742。[10] De Baets, B., De Meyer, H., Mesiar, R.（2010）。Copula关于 L_p-范数的利普希茨连续性。Nonlinear Anal. 72，3722–3731。[11] Durante, F., Fern´andez-S´ánchez, J.（2010）。多元洗牌与Copula的逼近。Stat. Probab. Lett. 80，1827–1834。[12] Durante, F., Fern´andez-S´ánchez, J.（2011）。关于具有给定对角截面的Copula类与准 copula类。Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowlege-Based Syst. 19，1–10。[13] Durante, F., Sempi, C.（2016）。Copula理论原理；Chapman & Hall/CRC，博卡拉顿。[14] Durante, F., Fern´andez-S´ánchez, J., Trutschnig, W., ´Ubeda-Flores, M.（2020）。关于准 copula子类的规模及其戴德金–麦克尼尔完备化。Mathematics 8(12)，2238–2248。[15] Falconer, K.（2014）。分形几何：数学基础与应用。（第3版）。威利出版社，霍博肯。[16] Fredricks, G.A., Nelsen, R.B.（1996）。由对角截面构造的Copula。载于：《给定边缘分布的分布与矩问题》（Benes, V., Stepan, J. 编），Kluwer 学术出版社，多德雷赫特，第129–136页。[17] Fredricks, G.A., Nelsen, R.B., Rodr´ıguez-Lallena, J.A.（2005）。具有分形支撑的Copula。Insur. Math. Econ. 37，42–48。[18] Genest, C., Quesada-Molina, J.J, Rodr´ıguez-Lallena, J.A., Sempi, C.（1999）。准 copula的一种刻画。J. Multivar. Anal. 69，193–205。

[19] Kamnitui, N., Fern´andez-S´anchez, J., Trutschnig, W.（2018）。余 copula 的最大非对称性再探。《Depend. Model.》6，47–62。[20] Klement, E.P., Mesiar, R.（2006）。联结函数可以有多不对称？《Comment. Math. Univ. Carol.》47，141–148。[21] Levine, B., Milman, D.（1940）。关于由有界变差函数构成的空间中的线性集。《Commun. Inst. Sci. Math. M´ec. Univ. Kharkoff》《Zapiski Inst. Mat. Mech./ 16》(4)，102–105。[22] Mesiar, R., Sempi, C.（2010）。序数和与幂等联结函数。《Aequat. Math.》79，39–52。[23] Mesiar, R., Szolgay, J.（2004）。联结函数与准联结函数的 W序数和。载于：MAGIA 2004 会议论文集，斯洛伐克共和国 Kočovce，2004年，第78–83页。[24] Mikusi´nski, P., Sherwood, H., Taylor, M.D.（1992）。Min 的洗牌。《Stochastica》13(1)，61–74。[25] Nelsen, R.B.（2006）。《Copula 导论》（第2版）。纽约：施普林格。[26] Nelsen, R.B.（2007）。非可交换性的极值。《Stat. Papers》48(2)，329–336。[27] Nelsen, R.B., Fredricks, G.A.（1996）。对角 copula。载于：《给定边缘分布的分布与矩问题》（Beneˇs, V., ˇStˇep´an, J. 编），多德雷赫特：Kluwer 学术出版社，第121–128页。[28] Royden, H.L.（1988）。《实分析》（第3版）。纽约：麦克米伦出版公司。[29] Sempi, C.（2017）。准 copula：简要综述。载于：《Copula 与依赖模型及其应用》（M. ´Ubeda Flores, E. de Amo Artero, F. Durante, J. Fern´andez S´anchez 编），Cham：施普林格，第203–224页。[30] Sempi, C.（2023）。准 copula 质量分布研究。《Fuzzy Sets Syst.》466，文章编号108467。[31] Seoane-Sep´ulveda, J.B.（2006）。分析中病态现象的混沌与线性可嵌入性，ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州。博士论文——肯特州立大学。[32] Sklar, A.（1959）。二维分布函数及其边缘分布。《Publ. Inst. Statist. Univ. Paris》8，229–231。[33] Trutschnig, W.（2011）。关于 copula 空间上的一种强度量及其诱导的依赖性度量。《J. Math. Anal. Appl.》384，690–705。[34] Trutschnig, W.（2012）。关于（准）copula 收敛的一些结果。《Fuzzy Sets Syst.》191，113–121。[35] ´Ubeda-Flores, M., Fern´andez-S´anchez, J.（2017）。Sklar 定理：Copula 理论的基石。载于：《Copula 与依赖模型及其应用》（M. ´Ubeda Flores, E. de Amo Artero, F. Durante, J. Fern´andez S´anchez 编），Cham：施普林格，第241–258页。