arXiv:2602.06929v1 [physics.atom-ph] 6 Feb 2026

质子尺寸对氢超精细结构难题的解决

Gerald A.Miller[1] 华盛顿大学物理系，西雅图，华盛顿州 98195-1560，美国

（日期：2026年2月9日）

Baym 和 Farrar（arXiv:2601.02300v1）最近指出，在理解超精细相互作用在氢原子基态中的作用时存在一个难题。若采用一种变分波函数，其中玻尔半径 a_0 被变分半径参数 R取代，则一阶微扰理论可能产生与 $-1/R^3$成正比的能量贡献。这引出了一个问题：为什么超精细相互作用不会导致氢原子坍缩？我将说明，考虑质子非零尺寸的影响后，这一难题便可得到解决；变分过程所得的 R 值与 a_0无法区分。

I. 引言

氢原子中的超精细相互作用是一种量级为 $\alpha^2 \frac{m_e}{m_p}$ 的微扰，它会使不同总自旋（电子与质子自旋之和）态的能级发生分裂 [1]。在单重态中，超精细相互作用是吸引性的；若忽略质子的非零尺寸，该相互作用会正比于三维狄拉克 δ 函数，因此其期望值为 $\propto 1/R^3$，其中 R 是表征系统大小的参数。

Baym 与 Farrar [2] 表明，若对氢原子采用变分方法，并令波函数为

$$\phi_R(r) = \frac{e^{-r/R}}{\sqrt{\pi R^3}}, \tag{1}$$

自旋单态的能量会产生一项贡献，$E_{\mathrm{hf},\ 0} = -8\frac{|\mu_e|\mu_p}{R^3}$。这里，$\mu_{e,\ p}$分别是电子和质子的磁矩。这会导致当 R 趋近于 0 时，能量发散至 $-\infty$。文献 [2] 进一步说明，当 R 小于质子的尺寸时，超精细相互作用会压过动能的贡献，导致系统坍缩。文中提出的解决方案采用狄拉克方程中的相对论效应。在这种方法中，电子的磁矩取决于变分参数 R。

我讨论能量随 R 的变化，并提出一种基于质子非零尺寸的解释。波函数 $\phi_R(r)$ 是非相对论氢原子基态的精确解，其中 $R = a_0$ 为玻尔半径。该波函数的动能为 $1/(2mR^2)$，其中 m 是电子质量；库仑能为 $-\alpha/R$，其中 α 为精细结构常数。这里以及参考文献 [2] 中均忽略了电子质量与约化质量之差，即 $mM/(m+M)$（M 为质子质量）。

忽略超精细相互作用后，能量的期望值为

$$E_0(R) = \frac{1}{2mR^2} - \frac{\alpha}{R}. \tag{2}$$

该量在$R = 1/m\alpha = a_0$处取得最小值 $E_0 = -m\alpha^2/2$。

电子与质子之间的电子-质子超精细相互作用的哈密顿量为

$$H_{\mathrm{hf}}(r) = |\mu_e|\boldsymbol{\sigma}_e \cdot \mathbf{H}(r), \tag{3}$$

其中，$|\mu_e| = e/(2m)$，而 $\boldsymbol{\sigma}_e$ 是电子的泡利矩阵。算符 $\mathbf{H}(r)$由 Bjorken and Drell 第 58 页的一个方程给出 [3]:

$$\mathbf{H}(r) = -\frac{g_p}{2M}\int d^3r'\rho(r')\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\sigma}_p\times\boldsymbol{\nabla})\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{4}$$

其中，$\rho(r')$是质子的磁矩密度。该函数考虑了质子的非零尺寸。质子的旋磁比为 $g_p = 2.79$。利用关系式 $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\sigma}_p\times\boldsymbol{\nabla}) = \boldsymbol{\sigma}_p\nabla^2 - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla})$，并对球对称波函数取角平均，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(r) &= -\tfrac{2}{3}\tfrac{g_p e\boldsymbol{\sigma}_p}{2M}\int d^3r'\rho(r')\nabla^2\tfrac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\\ &= \tfrac{2}{3}\tfrac{g_p e\boldsymbol{\sigma}_p}{2M}\rho(r).\end{aligned} \tag{5}$$

密度 $\rho(r)$ 是计算超精细相互作用时 Sachs磁形状因子 G_M/μ_p 的三维傅里叶变换。我采用众所周知的偶极形式

$$G_D(\vec{q}^{\,2}) = \frac{G_M(\vec{q}^{\,2})}{\mu_p} = \frac{1}{(1+\frac{\vec{q}^{\,2}}{\Lambda^2})^2}, \tag{6}$$

其中 $\Lambda = 0.843$ 吉电子伏特。对于当前目的而言，这种形式已足够准确：它表明，考虑非零质子尺寸就足以解决超精细谜题。请注意，此处通常的标量变量 $-q^2$ 取为 $\vec{q}^{\,2}$，因为可以忽略单光子交换相互作用中的能量转移。G_M 的最新版本见参考文献 [4]。对 G_D 进行傅里叶变换后可得

$$\rho(r) = \frac{\Lambda^3}{8\pi} e^{-\Lambda r}. \tag{7}$$

该函数在极限 $\Lambda \to \infty$下趋近于三维δ函数。若如此，则**H**的表达式将简化为文献 [2]中的形式。人们可能会认为，0.843吉电子伏特的动量尺度对氢原子的基态能量并不重要，因为$\Lambda = 2.26 \times 10^5/a_0$。事实并非如此，下文将予以证明。

超精细积分的期望值为

$$\langle \phi_R | \mathbf{H} | \phi_R \rangle = \frac{8e}{3} \frac{g_p \boldsymbol{\sigma}_p}{2M} \frac{1}{R^3} \frac{\Lambda^4 R^3}{(2+\Lambda R)^3}, \tag{8}$$

由此产生的超精细相互作用对氢原子能量的贡献为

$$E_{\rm hf}(R) = \frac{8}{3} \frac{g_p \pi \alpha}{mM} \frac{1}{R^3} \frac{\Lambda^3 R^3}{(2+\Lambda R)^3} \langle \boldsymbol{\sigma}_e \cdot \boldsymbol{\sigma}_p \rangle. \tag{9}$$

该表达式在极限 $\Lambda \to \infty$，下同样简化为文献 [2]中的形式，而且重要的是，它在 $R = 0$处取有限值。总能量 E_1 现在是两项之和：

$$E_1(R) = E_0(R) + E_{\rm hf}(R). \tag{10}$$

下一步是评估项$E_{\rm hf}(R)$的影响。这通过两种方法完成。第一种是利用闭式表达式进行估算。第二种是数值计算。该估算是通过将 $E(R)$在点 $R = a_0$附近展开而得到的。由此可得：

$$E_1(R) \approx E_0(a_0) + \frac{1}{2}(R-a_0)^2 E_0^{''}(a_0) + E_{\rm hf}(a_0) + (R-a_0) E_{\rm hf}^{'}(a_0). \tag{11}$$

利用 $\Lambda a_0 \gg 2$， $E(R)$的最小值出现在

$$R - a_0 \approx -\frac{E_{\rm hf}^{'}(a_0)}{E_0^{''}(a_0)} = 24\pi\alpha g_p \frac{1}{M}, \tag{12}$$

对于自旋单态。能量最小值处的 R 变化与质子的康普顿波长成正比，且为 $6 \times 10^{-6}\, a_0$。这是一个极其微小的变化，对于使 $E(R)$ 最小化时的 R 值而言可以忽略不计。

下一步是展示能量如何随变分参数变化。动量尺度（Λ，$1/a_0$）差异巨大，因此采用重新缩放的变量 $x = R/a_0$，并研究无量纲量 $\epsilon_i = a_0/\alpha E_i(x)$，这样更为高效。结果见图 1。如预期，极小值出现在 $x = 1$。如图 1 所示， ϵ_0 和 ϵ_1 对应的曲线几乎没有差异。上半部分展示了 x 大于约 $x = 0.4$ 时的结果。此外，还给出了 x 较小时的对数图，以清楚表明除 $x = 1$ 附近的极小值外，不存在其他极小值。

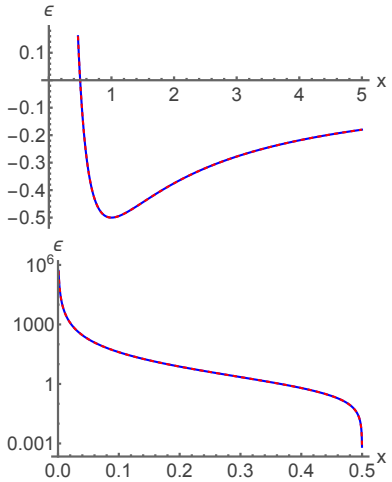

图1。 $\epsilon_0(x)$为实线， $\epsilon_1(x)$为虚线。曲线相互重叠。

图1所示的结果并不依赖于磁形状因子的细节。$\rho(r)$的任何形式，由质子尺寸控制；当尺寸参数趋于零时，它会退化为三维 δ 函数，所得结果将与图 1 几乎相同。

总之，考虑质子的非零尺寸所产生的影响，会使超精细结构的影响

单重态中的相互作用对于任意取值的变分参数 R，几乎不会影响该态的能量。

致谢

本研究部分由美国能源部科学办公室核物理办公室通过合同编号 DE-SC0026252 资助。

[1] Michael I. Eides、Howard Grotch 和 Valery A. She- lyuto，《轻氢样束缚态理论》，第 222 卷（Springer-Verlag，柏林，2007 年）。[2]Gordon Baym 和 Glennys Farrar，《超精细结构之谜的解决及其对双费米子狄拉克原子的意义》（ 2026 2601 02300 ），arXiv: . [ ] physics.atom-ph.

[3]James D. Bjorken 和 Sidney D. Drell，《相对论量子力学》，国际纯粹与应用物理丛书（McGraw-Hill，纽约，1965 年）。[4] T. J. Hague、J. Arrington、J. Jayne、G. A. Miller、S. N. Santiesteban 和 Z. Ye，《中子磁形状因子与核子横向密度的最新分析》（2025 年），arXiv:2501.18443 [nucl-ex]。