单纯形模型中的分布式知识

Éric Goubault LIX，法国国家科学研究中心，巴黎综合理工学院，巴黎理工学院，巴黎，法国

Jérémy Ledent 巴黎西岱大学，法国国家科学研究中心，IRIF，F-75013，巴黎，法国

Sergio Rajsbaum 数学研究所，墨西哥国立自治大学，墨西哥城 04510，墨西哥

arXiv:2602.06945v1 [cs.LO] 6 Feb 2026

摘要

多智能体认知逻辑的通常语义基于 Kripke 模型，该模型以一组可能世界上的二元关系来定义。近年来，人们越来越关注使用单纯复形而非图作为多智能体认知逻辑的模型。

这种方法以智能体的视角 为基本对象，而非世界。不同智能体关于某个世界的一组视角构成一个单纯形，而一组单纯形定义了一个单纯复形，可用作多智能体认知逻辑的模型。这种新方法揭示了 Kripke 模型中隐含的拓扑信息，因为在单纯复形中，二元不可区分关系可以更清楚地表示为 n元关系。

本文面向经济学受众，向非专业人士介绍单纯形模型，并将分布式计算、认知逻辑和拓扑学联系起来。我们关注分布式知识及其不动点共同分布式知识。这些概念源于对这样一种知识的考量：如果一个智能体群体能够完美地交流各自的局部知识，他们将获得怎样的知识。尽管已有研究表明，共同知识与共识有关联，但我们将说明，分布式知识与一种弱于共识的任务有关，这项任务称为多数共识。

我们介绍三种通信模型，其中一些广为人知（即时快照），另一些则研究较少（与广播和测试并设置有关）。当多数共识可解时，我们描述用于解决该问题的分布式知识。当多数共识不可解时，我们提出一种逻辑障碍：根据任务规范，参与者理应始终知道某个公式，但他们却无法知道它。

2012年ACM学科分类 计算理论 → 模态逻辑与时序逻辑

关键词与短语 认知逻辑、单纯复形、分布式计算

1 引言

自20世纪80年代初以来，多智能体系统中用于推理知识与信念的逻辑一直是分布式系统特别关注的领域。共同知识等概念的基础性作用，以及它们与共识等协调任务之间的关系，已得到深入研究 [23, 38]。

知识逻辑最早的形式化之一是 Hintikka 的可能世界语义 [34]。在这一框架中，认知情境被建模为一组可能世界，以及一个二元关系，用以连接从某个智能体的视角来看不可区分的世界。给定这样的结构，一个智能体知道 某个事实，当且仅当基于其不完全信息，该事实在该智能体认为可能的所有世界中均为真。如今，这一观点被形式化为所有关系均为等价关系的 Kripke 模型，并可由逻辑**S5** [23]加以公理化。此后，认知逻辑已在多种模型上得到解释，包括粗糙集 [7],邻域结构 [16, 41], 子集空间模型 [17], 拓扑空间 [42, 40], 以及本文的核心主题——单纯复形 [27, 36]。单纯复形产生于我们不再以世界作为首要对象，而转向关于可能世界的视角 之时。也就是说，我们从全局方法转向局部方法：现在的首要对象是

智能体对世界的看法。可能世界这一概念可以从中导出，即一组相容的局部视角，也就是单纯复形的一个单纯形。

从全局状态到局部状态

在分布式系统中，每个智能体都持有一个称为其 局部状态的私有值，其中编码了该智能体在当前计算过程中观察到的所有信息。另一方面，全局状态是一种抽象，它汇集了所有参与智能体彼此兼容的局部状态。这种方法催生了一套基于单纯复形的分布式计算理论（概述见 [31] ）。值得注意的是，研究表明，智能体彼此通信时，有一些拓扑不变量会保持不变，而这些不变量进而决定了哪些分布式任务能够得到解决，或者解决这些任务的速度有多快。

同样的思路也可以通过单纯形模型 [27]这一概念应用于多智能体认知逻辑。我们不再从可能世界及其间不可区分关系的角度思考，而是首先着重对智能体的局部状态进行建模。接着， n 个智能体的全局状态可以分解为一个集合$\{\ell_1, \ldots\ldots, \ell_n\}$，其中每个智能体对应一个局部状态。在单纯形模型中，这些局部状态分别建模为单纯复形的一个顶点 。一个全局状态对应于由 n个单纯形顶点组成的集合，也就是一个（$n-1$）维单纯形。

因此，单纯形模型本质上具有几何性，其中每个世界都是一个高维胞腔；它们也可以被视为拓扑空间的离散近似 [30]。此外，世界之间的连接方式还揭示了智能体的知识信息。例如，当某个智能体在两个全局状态中具有相同的局部状态时，这两个全局状态对该智能体而言不可区分。在单纯形模型中，这一事实表现为：两个不同的单纯形（即两个全局状态）共享一个顶点（即该智能体的局部状态）。更一般地说，单纯复形明确编码了高阶不可区分关系；当 k 个智能体无法区分两个全局状态时，这一事实表现为两个单纯形共享 k 个顶点。不可区分性在容错分布式计算以及计算机科学的其他领域中都发挥着核心作用 [3], , 在数据科学 [15] 和各种生物与社会系统中也是如此 [9]。随着越来越多的证据表明，高阶结构决定着复杂系统的动力学行为，人们对这类复杂系统的高阶架构也日益关注。

近期已有多篇论文探讨了单纯形模型的各个方面 [1, 10, 11, 12, 14, 19, 25, 26, 22, 18, 21], , 包括分布式知识、双模拟与覆盖空间、信念、更一般的超图与单纯集合、故障代理、多值语义、动力学、协同知识以及近似一致。多个研讨会也以此为主题，包括达格施图尔研讨会 [13] 以及与 LICS 2022 相关的 CELT 研讨会，参见 `https://easychair.org/cfp/CELT2022`。

一个经典例子：泥孩子谜题

为了直观地理解如何用单纯复形来建模认知情境，让我们重新审视经典的认知逻辑泥孩子谜题。

> 三个孩子在校园操场上玩耍。他们中有些人的额头上沾了泥。他们都能看见彼此额头上的泥，却看不见自己额头上的泥。教师宣布："你们中至少有一个人额头上沾了泥。"接着，她问："如果你知道自己额头上沾了泥，就举手。"没人举手。教师重复了同样的问题，但还是没人举手。然而，第三次提问时，三个孩子都正确地举起了手。他们是如何得出这个结论的？

本文旨在使用单纯形模型分析这个谜题，并将其与图 1 所示的经典 Kripke 模型方法进行对比。我们强调，这两种模型携带的信息完全相同，形式上构成对偶范畴 [27], ，但我们将尝试说明采用单纯形版本的好处。在分布式计算中，也有人进行过类似的讨论 [31]。

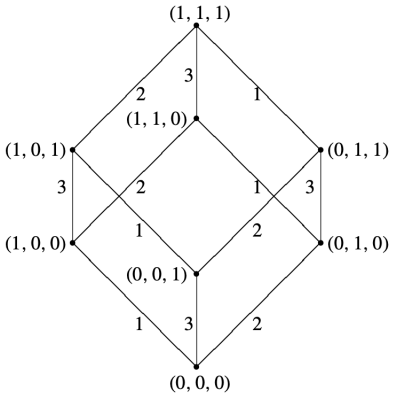


图 1 泥孩子谜题： [29, 中的 Kripke 模型图。图 2.3]。

由于我们考虑 3 个智能体（三个孩子——我们不对教师建模），因此单纯复形的维数为 2。也就是说，每个可能世界都将由一个 2-单形，即一个三角形[1]表示。在图 2 所示的模型中，三个孩子分别用粉色、蓝色和黄色表示。在初始模型（左侧）中，每个孩子都有四个顶点：它们对应于该孩子的四种可能局部状态。实际上，每个孩子都能看到另外两个孩子的额头，因此有四种可能的组合：（干净，干净）、（干净，沾泥）、（沾泥，干净）、（沾泥，沾泥）。为简单起见，我们用符号"0"表示干净，用"1"表示沾泥。这十二种局部状态（每个孩子 4 种）可以通过考虑全局状态组合成一个单纯形模型。一共有八种全局状态，或可能世界：000、001、010、011、100、101、110、111。每个全局状态都表示每个孩子（粉色、蓝色、黄色，从左到右依次排列）的状态（干净或沾泥）。一个全局状态由一个三角形表示，将三个相容的局部状态连接起来。请注意，这些三角形的连接方式揭示了智能体对世界的不确定性。例如，世界 000 和 100 共享同一个粉色顶点。这表明，从粉色智能体的局部视角来看，由于她只能看到另外两个孩子都是干净的，因此这两种情况都被视为可能。

[1] 本文中的所有示例都只涉及 3 个智能体，以便让讲解更易于理解，也便于用图片加以说明。一般而言，要对包含 n个智能体的认知情境建模，我们需要使用 $(n-1)$ 维复形

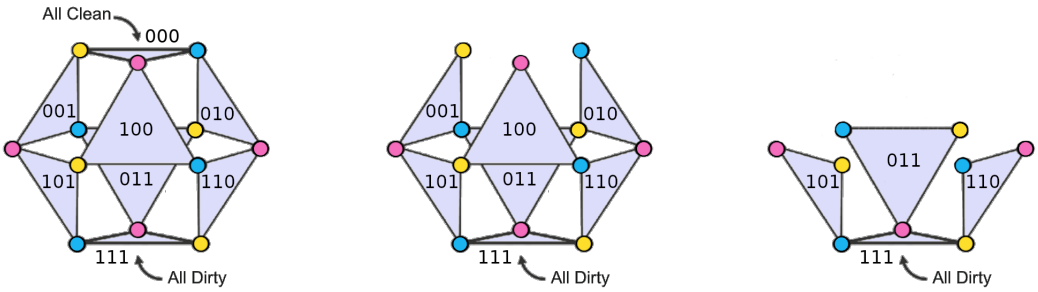


图 2 泥孩子谜题：初始情形（左），教师宣布之后（中），以及教师第一次提问之后（右）。

图 2 左侧的模型描述了谜题的初始情形。教师宣布“你们中至少有一个人的额头沾了泥”之后，世界 000 被排除。这对应于图 2 中间所示的模型。在这个新模型中，至少有一个孩子沾泥这一事实成为共同知识 。如果实际世界是 100，那么粉色智能体现在就会知道 自己的额头沾了泥，因为她能看到另外两个孩子都是干净的。同样，在世界 010 和 001 中，蓝色（分别是黄色）智能体知道自己沾了泥。

然而，当教师问道“知道自己身上有泥的请举手”时，没有人举手。因此，我们得知实际世界既不是 100，也不是 010，更不是 001。新模型如图 2 右侧所示。教师提出第二个问题时，我们可以重复同样的推理，进一步排除那些有孩子会知道自己身上有泥的世界。第二个问题之后，只剩下所有孩子身上都有泥的世界 111。因此，教师第三次提问时，三个孩子都能举手。

分布式知识

认知逻辑文献中研究了各种群体知识 概念。例如，给定一个智能体集合 A，公式“ A 中的每个人都知道 φ”表示每个智能体 $a \in A$ 都知道公式 φ。这很容易用命题认知逻辑表达为一组公式的合取：对于每个 $a \in A$，都有一个形如“智能体 a 知道 φ”的公式。

这与分布式知识 算子形成对比，后者的表达能力严格强于个体知识。自 90 年代以来，分布式知识这一概念便在分布式系统的背景下得到研究 [28]。直观而言，当 φ 能够通过汇总智能体群体 A 中所有智能体所掌握的局部信息而推导出来时，该群体就拥有关于公式 φ 的分布式知识。在其他词，这个新的逻辑算子描述了智能体群体在能够完美通信时可以获得的知识。因此，智能体群体可能拥有关于某个公式 φ的分布式知识，即使群体中的任何单个智能体都不知道 φ。

有趣的是，认知逻辑单纯复形模型的最新发展表明，分布式知识作为知识的高维版本，具有重要意义。个体知识与一维连通性相关（即能够通过共享顶点从一个世界移动到另一个世界），而一组 k 智能体的分布式知识则与模型的 k维连通性有关（也就是从一个世界移动到

另一个世界时，可以经过共享边、三角形，或一般而言，经过（$k-1$）维胞腔）[2]。最早注意到并利用分布式知识与拓扑之间联系的研究之一，是 Nishimura [39] 关于 k-一致性任务不可解性的逻辑障碍。当然，k-连通性的重要性早已受到关注，例如在各种社会和生物学情境中 [8]。

正如共同知识可以定义为个体知识的无限迭代（每个人都知道，而且每个人都知道每个人都知道，如此等等），我们也可以考虑分布式知识的一种迭代形式。这一概念称为共同分布式知识，最早由 Baltag 和 Smets 公理化 [5, 6]。这个算子以一组智能体群体为参数。直观来说，它要求该集合中的每个智能体群体都拥有关于 φ 的分布式知识；并且每个群体都拥有这样的分布式知识：每个群体都拥有关于 φ 的分布式知识，如此等等。尽管定义看起来颇为复杂，这个算子在单纯形模型中却有非常清晰的几何解释。举例来说，考虑所有由两个智能体组成的群体。关于某个公式 φ 的共同分布式知识，意味着 φ 在实际世界所在的 2-连通分量中处处为真。

贡献

本文的主要目标是向经济学受众介绍单纯形模型，内容力求自成一体、通俗易懂，并避免涉及技术性证明和细节。我们阐述了分布式计算、认知逻辑与拓扑之间的精彩联系。尽管如此，我们也给出了新的结果，不过这里只在具体情形下加以呈现，重点讨论三个智能体。这些结果可以推广到任意数量的智能体，并可用于更具技术性的论文。本文的新贡献在于研究广播模型和测试并设置模型中的多数共识任务。特别是，我们从认知角度加以处理，展示分布式知识在设计解决方案以及证明何时不存在解决方案方面所起的作用。

关于求解比共识更容易的任务的不可能性结果，已有研究探讨了在 [2]，中，输出复形中的 局部割点 是障碍的情形：即其邻域（用拓扑学术语来说是它的链接）不连通的顶点。我们通过分布式知识，提出了这类性质一个更一般的认知版本。

论文结构

第 2 节介绍单纯复形以及它们与 Kripke 框架之间对偶关系的背景知识。此外，我们还回顾如何用通信模式表示动力学。第 3 节介绍分布式计算模型的概念，该模型定义了智能体彼此通信的方式，并给出一些示例。然后，我们介绍在给定计算模型中要解决的计算问题的基本概念。第 4 节阐述单纯复形上的知识与分布式知识概念。第 5 节将这些内容结合起来，研究如何在三种计算模型中利用分布式知识实现多数共识。第 6 节总结全文。

[2] 不要将其与拓扑空间的 k-连通性概念混淆；后者是根据将球面上的映射延拓到球面内部来定义的。

2 背景

我们在第一节介绍单纯复形、Kripke 框架及其对偶关系的背景知识。在第二节，我们介绍通信图的背景知识；通信图是我们在通信之后演化单纯形模型所使用的工具。

2.1 单纯复形与Kripke框架

多智能体模态逻辑的传统可能世界语义依赖于 Kripke 框架这一概念。尽管本文后续将使用单纯复形，我们还是先回顾 Kripke 框架的形式定义，以作比较。下文中，我们固定一个有限的智能体集合，记作 Ag。

▶ **定义 1**。认知框架 $M = \langle W, R\rangle$由一个可能世界集合 W以及一族定义在 W, $\sim_a \subseteq W \times W$上的等价关系构成，每个智能体 $a \in$Ag对应一个等价关系。关系 $\sim_a$ 称为智能体 a的不可区分关系。

认知框架加上赋值（用于指定每个可能世界中哪些原子公式为真）后，便构成多智能体认知逻辑的基本语义结构。事实上，其核心思想是：当智能体 $a \in$ Ag 在某个世界 w中时，恰好当公式 φ 在所有从 a 的角度看来与 w不可区分的世界 w' 中都为真（也就是说，满足 $w' \sim_a w$）时，该智能体才知道公式 φ 。按照这种解释，认知框架刻画了多智能体认知逻辑**S5**。

我们将不再使用认知框架，而是采用带色单纯复形。这类结构已广泛应用于容错分布式计算领域 [31]。从某种意义上说，它们与认知框架互为对偶：视角由全局转向局部 [27]。

▶ 定义 *2.* 带色单纯复形由一个元组 $C = \langle V, S, \chi\rangle$给出，其中 V是一个顶点集合， $S \subseteq \mathscr{P}(V)$ 是由 V 的非空子集构成的族，称为单纯形；$\chi : V \to Ag$ 称为着色映射，并满足：*1.* 对所有 $v \in V$，$\{v\} \in S$；*2.* 对所有 $X \in S$，若 $Y \subseteq X$ 则 $Y \in S$；*3.* 对所有 $X \in S$，对所有 $x, y \in X$，若 $x \neq y$ 则 $\chi(x) \neq \chi(y)$。

我们先介绍一些术语，并解释上述三个条件。单纯形的维数 $X \in S$ 是 $\dim(X) = \mathrm{card}(X) - 1$。维数为 0 的单纯形称为顶点，维数为 1 的称为边，维数为 2 的称为三角形。如果两个单纯形 X， $Y \in S$ 满足 $Y \subseteq X$，我们就说 Y 是 X的一个面 。

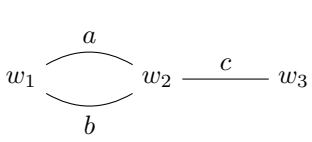
- 条件 (1) 表示，顶点 $v \in V$ 可以视为 0维单纯形$\{v\} \in S$。条件 (2) 表示，单纯形集合 S 在集合包含关系下是向下封闭的。换句话说，如果有一个单纯形 $X \in S$，那么也必须包含 X的所有面。例如，如果一个单纯复形包含一个三角形，那么它也必须包含该三角形的三条边以及三个顶点。条件 (3) 表示，单纯复形必须颜色良好。也就是说，每个单纯形的顶点都必须具有不同的颜色（智能体）。

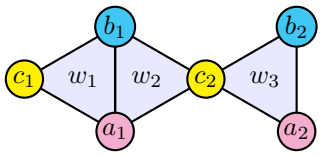
相对于集合包含而言极大的单纯形称为世界（在拓扑学中也称为面）。当所有世界的维数都相同时，单纯复形是纯的。下文中，我们始终考虑纯单纯复形。不过，关于非纯单纯复形的认知逻辑也已有研究 [44, 21, 26]。

▶ **例 3**。 下图展示了一个认知框架（左）及其对应的色彩单纯复形（右）。智能体集合为 $\mathsf{Ag} = \{a, b, c\}$。左侧的框架由三个世界组成 $W = \{w_1, w_2, w_3\}$，不可区分关系由带标签的边表示：即 $w_1 \sim_a w_2$、$w_1 \sim_b w_2$ 和 $w_2 \sim_c w_3$。

右侧以色彩单纯复形的形式描绘了相同的认知结构。该复形由 6 个顶点 $V = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}$ 组成。着色映射 $\chi : V \to \mathsf{Ag}$ 由顶点的名称表示，例如 $\chi(a_1) = a$。这里有三个维数为 2 的单纯形，以三角形表示，分别对应三个世界：$w_1 = \{a_1, b_1, c_1\}$、$w_2 = \{a_1, b_1, c_2\}$ 和 $w_3 = \{a_2, b_2, c_2\}$。因此，单纯形集合 S 包含这三个世界及其所有面：三个三角形、八条边和六个顶点。

请注意，在单纯复形中，不可区分关系对应于世界的交集。例如，当智能体 c 处于局部状态 c_2时，她无法判断自己身处世界 w_2 还是世界 w_3，因为这两个世界共享一个颜色为 c 的顶点。换言之，从 c的角度来看，世界 w_2 和 w_3 不可区分。同样，世界 w_1 和 w_2 共享一条颜色为 ab 的边：这对于之后解释群体 $\{a, b\}$ 的分布式知识至关重要。





2.2 通过通信图描述动力学

我们的目标是使用单纯形模型来描述分布式计算协议。我们采用一种基于通信图 [5, 14, 35], 的抽象形式体系，它既通用又简单，因此不熟悉分布式计算的读者也应该能够理解。我们将研究三种计算模型：广为人知的即时快照模型，以及两种较新的模型——不可靠广播和测试并设置。这三种模型都可以用通信图形式体系来描述。

最初，每个智能体（在分布式计算中称为进程）都以一个私有的输入值开始计算，该值取自一个可能值集合（通常为整数）。随后，智能体以基于轮次的方式彼此通信，以便了解有关其初始输入的新信息。在每一轮中，智能体都会将其当前局部状态发送给其他某些或所有智能体。在一轮中，成功送达的消息集合由一个通信图表示。这样的图展示了信息如何在智能体之间流动：在通信图中，从 a 指向 b 的箭头表示智能体 a 成功向智能体 b 发送了一条消息。

当智能体始终广播其全部局部状态（即智能体 a 将当前已知的全部信息发送给 a），并且始终记住一切时，我们就得到一个 全信息协议。单纯复形的一个主要应用是证明分布式可计算性的不可能性结果；为此，假定全信息协议就已足够。

经过有限次通信轮次后，计算停止，智能体必须根据其最终局部状态决定一个输出值。

▶ **定义 4**（通信图）。 设 Ag 表示智能体集合。通信图 $G \subseteq \mathsf{Ag} \times \mathsf{Ag}$ 是智能体集合上的自反二元关系。当 G 可由上下文明确时，我们用 $a \to b$ 代替 $(a, b) \in G$。 a 在 G 中的入邻域记作 $\mathsf{N}_G^-(a) = \{b \in \mathsf{Ag} \mid b \to a\}$。

最初，每个智能体的局部状态就是其输入值。例如，假设有三个智能体 a、b、c，其局部状态分别为 ℓ_a、ℓ_b、ℓ_c。它们根据某个通信图 G彼此发送消息。注意，由于 G 是自反的，智能体总能“将自己的局部状态发送给自己”；换句话说，它们不会忘记当前的信息。通信之后，每个智能体都会获得一个新的局部状态，其中汇集了它收到的所有消息。举例来说，设 $G = \{a \to b,\ a \to c,\ b \to c\}$。由于智能体 a没有收到任何消息，它的新局部状态是 $[\ell_a, \bot, \bot]$，其中符号 $\bot$ 表示没有收到消息。智能体 b 只收到了来自 a 的消息，因此它的新局部状态是 $[\ell_a, \ell_b, \bot]$。最后，智能体 c收到了所有消息，因此它的新局部状态是 $[\ell_a, \ell_b, \ell_c]$。

通信图描述了单轮通信期间信息如何交换。但我们如何决定每一轮使用哪张图呢？这取决于我们对心目中的分布式通信模型所作的假设：是否可能有消息丢失？是否可能发生进程故障？接下来，我们将考虑一类简单的模型，称为遗忘对手，例如 [46] 对这一模型已有深入研究：每一轮都会从一个固定的可能通信图集合中选出一张图。

▶ **定义 5** (分布式通信模型)。 固定一个智能体集合Ag。一个分布式 d 通信模型是Ag上的一组 M 通信图。

现在，我们已经具备了为分布式计算建模所需的所有工具。固定一个分布式通信模型 M。最初，我们有一个单纯复形，用来描述将输入值分配给智能体的所有可能配置。然后，在第一轮中，任意选取一张通信图 $G \in M$。对于每个输入配置 $(\ell_a^0)_{a \in \mathsf{Ag}}$ 和每张通信图 $G \in P$，我们会得到一组可能的新局部状态 $(\ell_a^1)_{a \in \mathsf{Ag}}$。这些新局部状态构成一个单纯形，它属于描述一轮通信后知识的单纯复形。

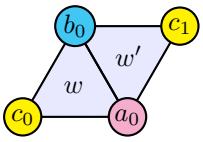
然后，我们可以将这一过程迭代任意有限轮次，直到得到最终的协议复形，它由系统所有可能的最终配置组成。随后，每个进程都必须根据其局部状态决定一个输出值。也就是说，最终单纯复形的每个顶点都对应一个输出值。对于要解决的给定分布式任务，这些值定义了一个到输出复形的单纯映射。值得注意的是，从一轮到下一轮，协议复形会保留拓扑性质；正如我们将在接下来的例子中看到的，这些性质因模型而异。模型解决任务的能力取决于它所保留的拓扑性质。

3 分布式计算

这里我们介绍三种分布式计算模型，它们规定了智能体彼此通信的方式。接下来，我们将介绍在给定计算模型中要解决的计算问题的基本概念，即分布式任务。

3.1 分布式通信模型示例

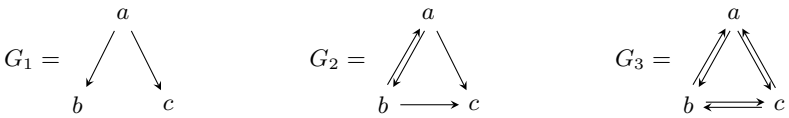
现在，我们按照定义 5 引入三种分布式通信模型，并说明描述一轮之后知识的单纯复形模型。在每种情况下，我们都使用由三个智能体组成的集合 $\mathsf{Ag} = \{a, b, c\}$。此外，我们假设初始输入单纯复形仅由两个三角形组成：智能体 a 和 b 始终以输入值 0 开始计算，而智能体 c 的初始输入值可以是 0 或 1。下图展示了这个输入单纯复形。



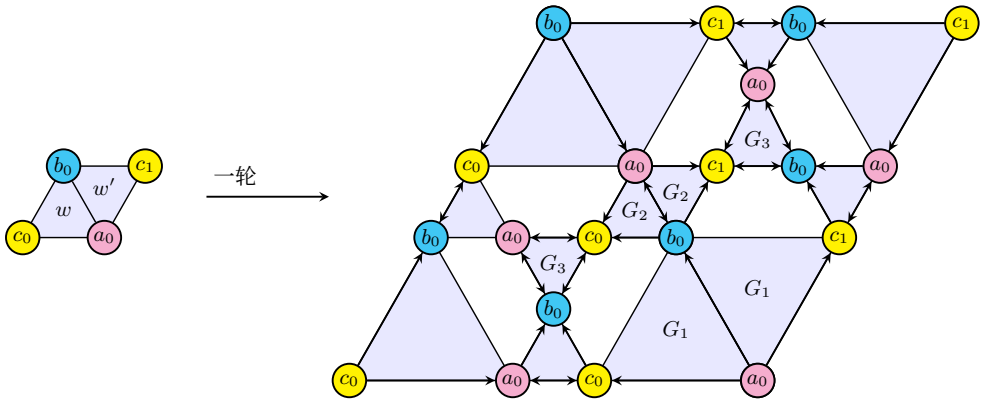
不可靠广播

在 [24], 引入的不可靠广播 模型中，每一轮所有智能体都会向其他所有智能体发送自己的局部状态。然而，某个智能体发送的消息要么会被所有智能体接收，要么无人接收（这是由于该轮发生瞬时故障所致；故障可能出在该智能体的发射器或通信媒介上）。智能体并不知道自己的消息是否已送达。我们假设每一轮至少有一个智能体成功广播其状态。请注意，如果某个智能体没有收到来自另一个智能体的消息，它就知道其他智能体也没有收到该消息。

这个模型可以用以下通信图来描述（图中未画出自反环）。图 G_1 对应的情况是，只有 a 成功广播了自己的值；在 G_2中， a 和 b 都成功广播了自己的值；而在 G_3中，三个智能体都成功广播了自己的值。



分布式通信模型 M_{UB} 实际上包含七个图： G_1、 G_2、 G_3，以及将智能体名称置换后从这三个图得到的图。下图展示了一个单纯复形，它由计算一轮后所有可能的局部状态构成。



请注意，初始单纯复形的整体结构得以保留，其中包含两个可能世界 w 和 w'。不过，这两个世界都被细分为 7 个三角形，具体取决于发生的是 7 个通信图 $G \in M_{\mathrm{UB}}$ 中的哪一个。在这两种细分中，都出现了三个洞（而初始单纯复形中没有洞）。要得到再进行一轮后的复形，需要对每个世界再应用一次通信模型。尽管会出现更多洞，但某些拓扑不变量仍会保持不变，例如协议复形的 1-连通性。

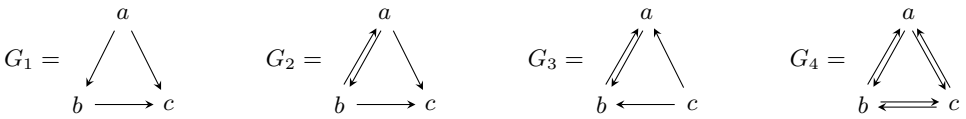
与图 G_1、 G_2、 G_3 对应的三角形也分别标有相应标签；请注意，每种图各有两个，具体取决于我们是从世界 w 还是世界 w'开始的。在

图中，单纯复形边上的箭头并不属于单纯复形结构。它们用于指示每个单纯形对应的通信图。例如，在标记为 G_1 的两个单纯形中，有箭头 $a \to b$ 和$a \to c$，表示智能体 a 成功将其值广播给了 b 和 c。最后，请注意，顶点内的信息并非智能体完整的局部状态：其中仅包含智能体的名称及其原始输入值。局部状态未明确给出，可以根据入箭头的集合推断得出。

即时快照

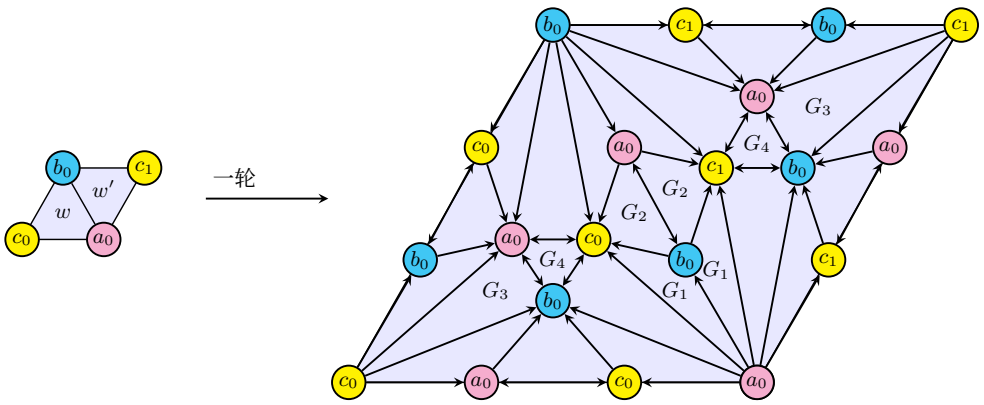
我们介绍的第二种模型是即时快照模型。它在分布式计算领域得到了广泛研究，因为它会引发一种称为色彩细分的单纯复形变换，在这种变换中永远不会出现洞。它出现在各种分布式计算场景中，在这些场景下，智能体通过简单的共享内存（仅由读写寄存器组成）或消息传递进行通信 [31]。

从抽象的分布式通信模型角度来看，即时快照模型可以用一组 M_{IS} 通信图来描述。它包含下方描绘的四个图，以及通过置换智能体名称从这些图得到的图，总计 13 个图。



在计算上，这种行为可以通过共享内存模型实现：每个智能体先将自己的值写入专用内存单元，然后读取所有其他智能体的值。由于该模型是异步的，“过快”的智能体可能会在其他智能体写入其值之前就进行读取，因此得不到任何信息。例如，在图G_1中，智能体 a 最先运行，写入了自己的值，却没有从共享内存中读到其他智能体的任何值；随后智能体 b 第二个运行，并看到了 a的值；接着智能体 c 第三个运行，读取了另外两个智能体写入的值。在图 G_2中，智能体 a 和 b 同时运行，彼此只能看到对方；随后智能体 c 第三个运行，看到了另外两个值。

下图展示了输入单纯复形在一轮之后如何演化 o f 即时快照通信。



与前一个例子一样，我们可以识别出一种模式：初始单纯复形的每个世界都被细分为13个三角形，每种可能的通信各对应一个。

模型的图。与每个三角形对应的图可以通过单纯复形上绘制的箭头来识别。此外，与图G_1, G_2, G_3, G_4 对应的图均已作相应标记。在顶点内标明了智能体的名称及其原始输入值。

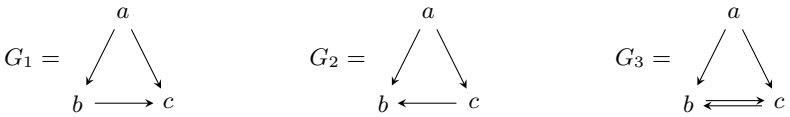
请注意，即时快照模型不会在单纯复形中引入洞：输入复形的拓扑得以保留。事实上，经过任意多个轮次后，情况依然如此。这是分布式计算文献中的一个关键观察，有助于证明许多不可能性结果 [31]。

测试并设置

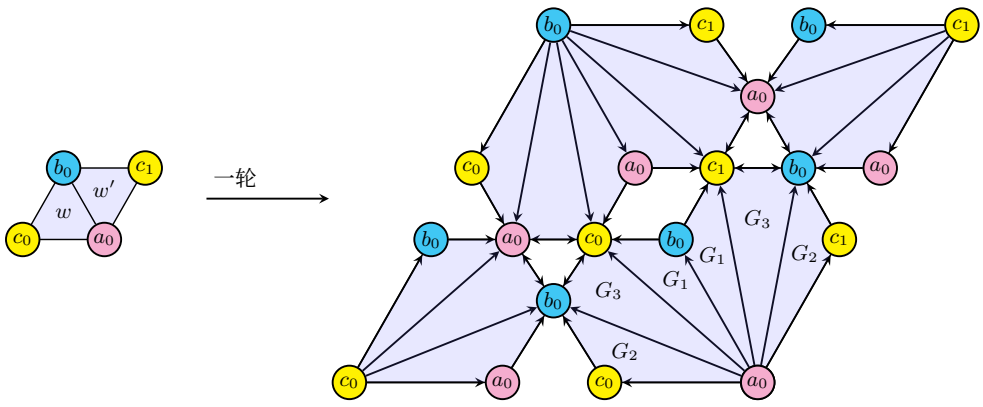
测试并设置 对象是一种用于并发编程的同步原语，可防止竞态条件。它由一个初始值为 0 的内存单元构成。进程可以原子地读取内存单元的当前值，并将其设为 1。因此，当多个进程尝试并行访问它时，只有一个进程（“胜者”）能够读到值 0，而所有其他进程（“败者”）读到的都是值 1。

利用这一原语，我们可以采用即时快照模型的一种变体。每一轮中，所有智能体先将自己的值写入共享内存，然后执行测试并设置操作。败者会对共享内存进行快照。胜者不读取内存，但可以保证所有其他智能体都能看到它的值。

下面的三个通信图对应于智能体 a 获胜的所有执行情况。其他两个智能体要么能看到彼此的值（图 G_3），要么只有一个能看到另一个的值（图 G_1 和 G_2）。在这两种情况下，它们都能看到获胜者的输入值。测试并设置模型的分布式通信模型 $M_{\mathrm{T\&S}}$ 包含 9 个图：下面的三个图，以及智能体 b 或 c 获胜时对应的图。



下图展示了测试并设置协议运行一轮后，描述智能体知识的单纯复形。请注意，它是即时快照单纯复形的一个子复形，其中一些三角形被移除了。事实上， $M_{\mathrm{T\&S}}$ 的所有通信图也都在 M_{IS}中。这些洞对应着缺失的四个图。



对四个智能体（即三维）的单纯复形感兴趣的读者，可以参看 [33]中测试并设置模型某个版本的示意图。

3.2 分布式任务示例

分布式通信协议的目标是解决一个分布式任务。每个智能体都以一个输入值开始，经过若干轮通信后，最终得到一个编码了关于系统的某些不完全信息的局部状态。智能体必须仅依据这一局部状态，决定一个输出值。任务将输入配置与相应的有效输出配置关联起来。要解决这类任务，智能体必须协调各自的决策，使其输出共同满足整体的全局规范。

我们不给出任务的抽象一般定义（参见 [31] 以供参考），而是重点讨论两个例子：共识和多数共识。

共识

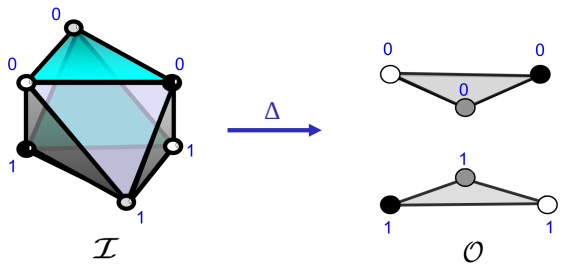
固定一个由三个智能体组成的集合，Ag $=\{a,b,c\}$。每个智能体的初始输入值取自集合$\mathcal{B}$ $=\{0,1\}$，因此初始单纯复形有 8 种可能的输入配置（即 8 个三角形），对应于将 0 和 1 分配给各智能体的所有方式：000、001、.....、111。共识任务的目标是，在计算结束时，所有智能体应就同一输出值达成一致。此外，这一共同输出值必须属于初始输入值。这传统上由以下两个性质来表述：

- 一致性：三个输出值必须相同。有效性：所达成一致的值
- 必须是三个输入之一。

例如，如果三个智能体以输入 (0，1，0) 开始，那么三个输出可以是 (1，1，1) 或 (0，0，0)。另一方面，如果三个输入为 (1，1，1)，那么它们必须全部决定输出值 1，因为一致同意输出值 0 会违反有效性条件。

任务规范也可以用单纯复形来作几何解释。事实上，在计算结束时，智能体根据各自的局部状态决定输出值。而智能体的局部状态恰好是表示通信发生后知识的单纯复形的顶点。因此，要解决一项任务，必须为单纯复形的每个顶点指定一个决策值。这种指定也可以看作映射到另一个称为输出复形的单纯复形中的单纯映射 。

对于共识任务，输出复形只包含两个三角形，分别对应两种可能的输出配置：(0，0，0) 或 (1，1，1)。图中对此进行了描绘
如下图右侧所示。左侧的单纯复形是输入复形，包含该任务所有可能的输入配置。请注意，从拓扑上看，这是一个三角剖分球面。任务规范 Δ 根据上述一致性和有效性条件，将输入复形的单纯形与输出复形的单纯形关联起来。

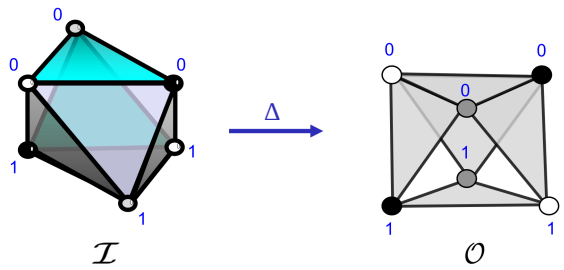


多数共识

众所周知，在许多分布式计算模型中，共识任务无法求解 [37, 45]。为了解决这一问题，人们定义了较弱的共识变体，例如 0-多数共识 任务 [2]。与常规共识任务一样，智能体以二进制输入值 0 或 1 开始，并决定二进制输出值。如果它们的初始输入值都相同，则必须都选择该值作为输出。不过，一致性条件有所放宽：当输入值不同时，智能体可以全部决定输出 1，也可以全部决定输出 0；只要 0 占多数，它们也可以意见不一致。

- 多数一致性：要么所有输出值都相同，要么 0 的数量占多数。有效性：所有输出值都必须属于输入值集合。

下图展示了多数共识任务的输出复形。与共识任务一样，它由输入复形的一个子复形构成；但与共识任务相比，它多出了三个三角形，其输出值分别为 (0、0、1)、(0、1、0) 或 (1、0、0)。任务规范 Δ 将输入复形中的 (0、0、0) 三角形映射到输出复形中的 (0、0、0) 三角形；对于 (1、1、1) 三角形也是如此。输入复形中的所有其他三角形都可以映射到输出中的任意位置。



4 解读单纯复形上的认知逻辑

我们已经看到，单纯复形可以对一组可能世界及智能体对这些世界的局部观点进行建模。为了在这类结构上给出认知逻辑的语义，我们还需要一项额外信息：原子公式，也就是我们想要推理的关于世界的基本事实。在分布式计算示例中，原子公式将是形如“智能体 a 的输入值为 0”的陈述。在本节中，为了说明各种逻辑算子的语义，我们假设存在一个称为 p 的抽象原子公式。在示例中，我们用 p （p为真）或 $\neg p$ （p 为假）来标记世界。

认知逻辑公式 φ 由原子公式通过组合各种逻辑算子构成。首先，我们有命题逻辑的基本算子：φ 且 ψ（记作 $\varphi \wedge \psi$）；φ 或 ψ（记作 $\varphi \vee \psi$）；φ 蕴含 ψ（记作 $\varphi \Rightarrow \psi$）；非 φ（记作 $\neg\varphi$）。与我们的目的更相关的是认知算子：

- **知识：** $K_a\,\varphi$，其中 $a \in$ Ag 是一个智能体。读作“a 知道 φ”。**共同知识：** $C_A\,\varphi$，其中 $A \in \mathscr{P}$(Ag) 是一个智能体群体。读作“ A 中存在共同知识，即 φ”。**分布式知识：** $D_A\,\varphi$，其中 $A \in \mathscr{P}$(Ag) 是一个智能体群体。读作 “ A 中存在分布式知识，即 φ”。**共同分布式知识：** $CD_\alpha\,\varphi$，其中 $\alpha \in \mathscr{P}(\mathscr{P}$(Ag)) 是一组智能体群体。读作“ α 中存在共同分布式知识，即 φ”。

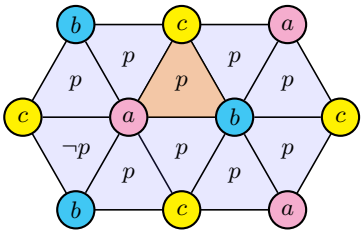
在本节其余部分，我们将解释这四个算子各自的直观含义，并通过玩具示例说明它们的单纯复形语义。

4.1 知识

在经典的可能世界语义中，当公式 $K_a\varphi$ 在某个世界 w 中为真时， φ 在智能体 a看来与 w 无法区分的所有世界中都为真。

让我们将其转换为单纯复形模型。在我们的示例中，实际世界 w 是一个单纯形（三角形）。这个单纯形包含一个颜色为 a的顶点，表示智能体 a的局部状态，即关于世界 w 的不完全信息，而这些信息对 a而言是可获得的。任何其他包含该顶点的单纯形，从 a的角度来看，都与 w无法区分。因此，当且仅当 φ 在所有与 w共享一个颜色为 a的顶点的单纯形中都为真时，我们可以说，在世界 w中， a 知道 φ 。

下方的单纯复形描绘了一个包含 10 个可能世界的认知情境。实际世界 w 以橙色突出显示。原子命题 p 在 9 个可能世界中为真（包括 w），在左下方的另一个世界中为假。



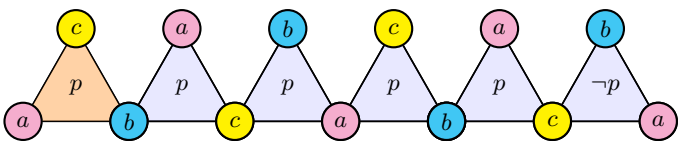
在这个模型中，在高亮显示的世界 w 中， b 知道 p。事实上，世界 w 中颜色为 b 的顶点属于六个可能世界；但在这些世界中， p 都为真。因此，公式 $K_b\varphi$ 成立。同样，我们可以说，在世界 w 中， c 知道 p 。这次只需考虑三个可能世界。然而，智能体 a 不知道 p。在 a看来，实际世界可能是左下方那个 p 为假的世界。因此，公式 $K_a p$ 在世界 w 中为假。

4.2 共同知识

共同知识是知识的迭代变体。它以智能体集合 $A \subseteq \mathsf{Ag}$ 为参数。直观而言，公式 $C_A\varphi$ 表示，在群体 A 中，每个人都知道 φ，并且每个人都知道每个人都知道 φ，如此无穷递归下去。注意，共同知识涵盖个体知识，例如 $K_a\varphi \Leftrightarrow C_{\{a\}}\varphi$。

在单纯复形模型中，可以将其形式化如下。固定一个表示实际世界的单纯形 w。当 φ 在所有能够从 w 经由一系列步骤到达的世界中都为真时，我们就说世界 w中， A 关于 φ 拥有共同知识；在每一步中， A 中的某个智能体都无法区分这两个世界。更形式化地说，当从世界 $w_0 = w$出发的每一条有限路径 w_0， w_1， w_2，……， w_k 都满足以下条件时，公式 φ 在世界 w中成立：每一步中，世界 w_i 和 w_{i+1} 共享一个顶点，且该顶点的颜色属于集合 A；此外，公式 φ 在 w_k中为真。

下图展示了一个由六个世界组成的单纯复形示例，其中实际世界 w 以橙色突出显示。



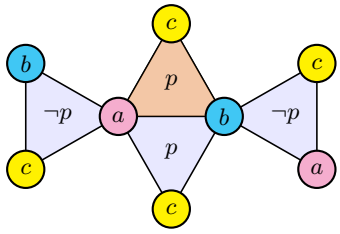
在突出显示的世界 w中，智能体$\{a,\ b,\ c\}$并不共同知道 p。事实上，存在一条有限路径，将世界 w 与最右侧的世界连接起来，而在那个世界中 p 为假。这条路径的含义是：在世界 w中，智能体 b 认为智能体 c认为智能体 a 认为智能体 b 认为智能体 c 认为 p 为假是可能的。因此，与 Kripke认识模型一样，共同知识与模型的连通性密切相关。

4.3 分布式知识

直观而言，分布式知识算子 $D_A\,\varphi$ 描述的是：如果一个智能体群体 A 能够结合各自的个体知识（例如，通过完全可靠通信） [23, 29]，那么他们会知道什么。另一种解释方式是，我们将智能体群体 A 视为一个单一实体，只要至少有一个智能体 $a \in A$ 能够区分两个可能世界，该实体就能够区分这两个可能世界。请注意，分布式知识包含个体知识，因为 $K_a\,\varphi \Leftrightarrow D_{\{a\}}\,\varphi$。然而，共同知识与分布式知识无法相互定义。

从单纯复形模型的角度来看，分布式知识有明确的几何解释：它对应于相邻单纯形之间的高维连通性。设 w 为实际世界， $A \subseteq$ Ag 为一个智能体群体。那么，当 φ 在所有与 w 共享一条 A 颜色面的世界 w' 中都成立时，公式 $D_A\,\varphi$ 在世界 w 中成立。例如，如果 $A = \{a, b\}$ 是一个由两个智能体组成的群体，那么该群体中的分布式知识 A 对应于通过共享一条 ab 颜色边，从一个世界移动到另一个世界。

下面的示例展示了这样一种情况：尽管每个单独的智能体都不知道某个事实，但我们仍然可以拥有关于该事实的分布式知识。这是一个包含四个世界的单纯形模型，实际世界 w 以橙色突出显示。



首先请注意，在突出显示的世界 w中，智能体 a 不知道 p。事实上， a 认为实际世界可能是最左侧的世界，在那里 p 为假。类似地，智能体 b不知道 p，因为 b 认为实际世界可能是最右侧的世界。然而，公式 $D_{\{a,b\}}\,p$ 在世界 w中成立：{style id='11'>{</style}$a, b\}$ 之间存在分布式知识，即 p 为真。这是因为只有两个可能世界包含ab颜色的 w的边，并且在这两个世界中， p 都为真。

4.4 共同分布式知识

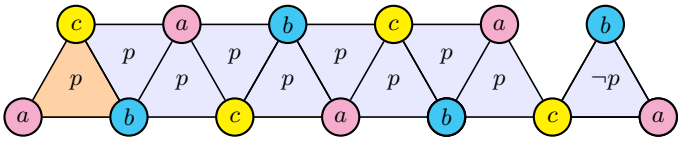
共同分布式知识是分布式知识 [5, 6]的无限迭代。它由智能体集合的集合 $\alpha \subseteq \mathscr{P}$(Ag)加以参数化。直观而言，公式 $CD_\alpha\,\varphi$ 表示 α 中的每一组都拥有关于 φ的分布式知识，并且每一组都拥有“每一组都拥有关于 φ的分布式知识”这一分布式知识，如此无限延续。请注意，共同分布式知识涵盖了此前引入的所有算子。事实上，我们有 $K_a\,\varphi \Leftrightarrow CD_{\{\{a\}\}}\,\varphi$、$C_A\,\varphi \Leftrightarrow CD_{\{\{a\}\,|\,a\in A\}}\,\varphi$和 $D_A\,\varphi \Leftrightarrow CD_{\{A\}}\,\varphi$。

16 单纯形模型中的分布式知识

在本文中，我们将聚焦于一种特殊情形，其中 α 包含所有恰好由2个智能体组成的集合。也就是说， $\alpha = \{\{x, y\} \mid x \neq y \in \mathrm{Ag}\}$。由于我们的示例仅涉及三个智能体 a、 b、 c，所得的智能体集合的集合为 $\alpha = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$。

对于这个特定的 α， $CD_\alpha \varphi$ 在单纯复形中的语义可以表述如下。在世界 w 中，当 φ 在 w 的 2- 连通分量中的每个世界 w' 都成立时， φ 在 α 中具有共同分布式知识。这里，2-连通分量指从 w 出发，通过移动到共享公共边的相邻世界所能到达的所有世界。更形式化地说，对于从世界 $w_0 = w$ 出发的每一条有限路径 w_0， w_1， w_2，…， w_k，若每一步中世界 w_i 和 w_{i+1} 都共享一条公共边，则公式 φ在世界 w_k中成立。

下面的单纯复形展示了共同分布式知识与共同知识的区别。实际世界 w 以橙色突出显示。



设 $\alpha = \{\{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\}\}$ 包含所有由两个智能体组成的群体。那么，在突出显示的世界 w 中，公式 $CD_\alpha p$ 成立。事实上， w 的 2-连通分量包含模型中的所有世界，唯独最右侧的世界除外；该世界仅通过一个顶点与其他世界相连。因此， p 不成立的那个世界，无法通过由边相连的世界构成的路径到达。相比之下，公式 $C_{\{a,b,c\}} p$ 在此模型中不成立，因为标准的共同知识只涉及 1-连通性。

5 研究多数共识的可解性

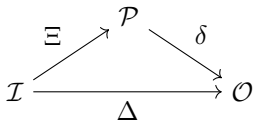
本节旨在研究多数共识任务在第3.1节介绍的三种分布式计算模型中的可解性：不可靠广播、即时快照和测试并设置。要证明一项任务可解，只需给出一个算法，即提供每个智能体执行的代码。然而，要证明一项任务不可解，则需要额外的技术。这里我们介绍一种用于证明不可能性结果的认知逻辑方法。该方法依赖于找到一个称为逻辑障碍 [27] 的认知逻辑公式，以证明该任务无法解决。

5.1 使用障碍公式证明不可能性

回想一下，在多数共识任务中，智能体以一个二进制输入值（0 或 1）开始计算。令$\mathcal{I}$ 表示由所有可能的二进制输入赋值构成的输入复形 。多数共识任务的输出复形 $\mathcal{O}$ 如第3.2节所述。对于给定的通信模型，我们还有一个协议复形 $\mathcal{P}$，用于描述经过 R 轮通信后的局部状态。

为了完成一项任务，每个智能体都必须在通信后仅根据自己的局部状态作出输出值决策，并确保该决策符合任务对一致性和有效性的要求。这些决策值为协议复形提供了一种标记方式：为每个顶点（即每个局部状态）分配一个决策值。更抽象地说，决策值所提供的信息可以视为一个单纯映射 $\delta : \mathcal{P} \to \mathcal{O}$，它将$\mathcal{P}$ 的每个顶点映射到$\mathcal{O}$的一个顶点。这正是 Herlihy 和 Shavit 的异步可计算性定理 [32] 所依据的核心思想。

▶ **定理 6** (异步可计算性定理 [32])。 当且仅当存在一个尊重任务规范的单纯映射 $\delta : P \to O$ 时，任务 O 才能通过协议 P求解；也就是说，下面的单纯复形图表是交换的。



这个定理是分布式计算领域的基础定理，因为它将一个计算问题（任务的可解性）归结为一个拓扑问题（单纯映射的存在性）。当我们要证明不存在这样的决策映射时，这一点非常有用，因为单纯映射会保持拓扑不变量。

正如我们所见，单纯复形也可以视为认知逻辑的模型。因此，我们不再依靠拓扑来寻找不可能性证明，而将基于认知逻辑，寻找阻碍 δ 存在的因素。利用认知逻辑证明不可能性结果的主要工具是知识增益定理 [27]。直观而言，它指出，智能体在选择决策值时不会获得知识。事实上，智能体会在协议的通信阶段获取新信息。但选择决策值的行为是在本地完成且完全保密的，因此不会带来新的信息。

▶ **定理 7** （知识增长 [27]）。 设 $\delta : P \to O$ 是一个单纯映射，且 φ 是一个正认知逻辑公式。设 $w \in P$ 是 P 的一个世界。如果公式 φ 在世界 $\delta(w)$ 中为真，那么它在 $w: O$ $\delta(w) \models \varphi \implies P$ $w \models \varphi$ 中就已经为真。

在上述定理中，正 认知公式是指只谈论智能体知道什么，而不谈论它们不知道什么的公式。该定理结合 Herlihy 和 Shavit 对异步可计算性的刻画，给出了一个简单而具体的方法来证明某个任务不可解[3]:

- 反设决策映射 $\delta : \mathcal{P} \to \mathcal{O}$ 存在。选取一个正认知逻辑公式 φ。在协议复形中找出一个
- 世界 $w \in \mathcal{P}$，使公式 φ 为假。证明它在像 $\delta(w) \in \mathcal{O}$ 中为真。这与知识增长定理矛
- 盾，因此最初的假设不成立。
-
-

这样的公式 φ 称为逻辑障碍。直观地说，公式 φ 描述了某种知识，它是能够解决任务$\mathcal{O}$的必要条件，但通过协议$\mathcal{P}$并未获得这种知识。

5.2 不可靠广播模型

在不可靠广播模型中，使用来自 [24]的*Courteous*算法，多数共识可以在一轮内得到解决:

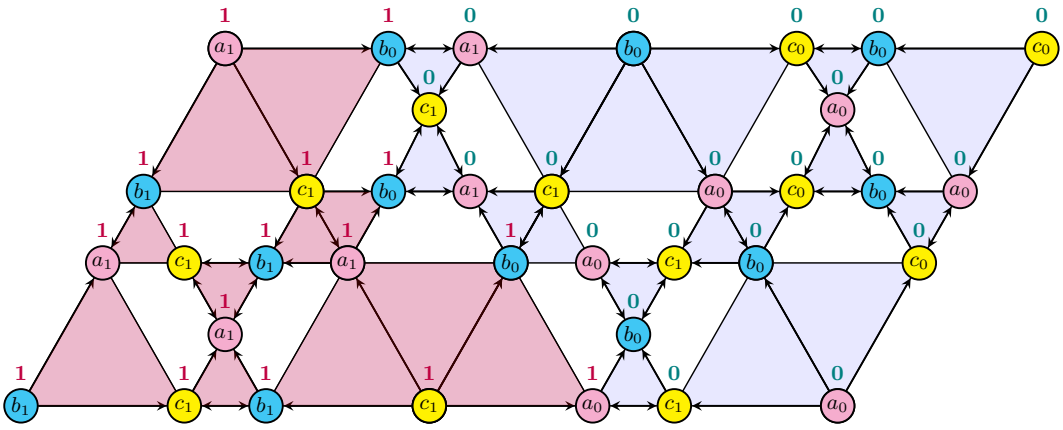
[3] 专业读者会注意到，我们在这里稍微耍了个小花招。输出复形$\mathcal{O}$ 标注的是输出值，而不是输入。因此，我们不能直接在$\mathcal{O}$ 上求值认知公式。我们应该在乘积更新模型 $\mathcal{I}[\mathcal{O}]$, 上进行求值，其中我们将输出复形视为行动模型，如 [27]所示。在本文余下部分，为了简化起见，我们假定$\mathcal{O}$ 本身描述的是输入值。我们提出的所有论证都适用于$\mathcal{I}[\mathcal{O}]$, ，但需要稍加留意。

Courteous算法：

设（x_a， x_b， x_c）表示三个智能体 a、 b、 c的输入值。每个智能体 $i \in$ Ag广播其输入值，并接收一个输入值集合 $v_i = \{（j， x_j）\}$（包括其自身的输入值），这些值带有相应智能体 j的标记。因此，集合 v_i 包含一个、两个或三个值。智能体 i 根据以下规则决定其输出：

- 如果所有值都相等，则决定采用该值。
- 如果 card(v_i) $= 2$，则决定 $1 - x_i$。
- 如果 card(v_i) $= 3$，且存在 0 的多数，则决定 0。
- 如果 card(v_i) $= 3$，且存在 1 的多数，则决定 $1 - x_i$。

可以通过操作性证明来验证该算法正确，也可以在一轮次后为协议复形的顶点标记，并检查任务的要求是否得到满足。下图直观展示了该算法的决策值。回想一下，三个智能体的多数共识任务的输入复形是一个三角剖分球面（参见第3.2节），其中三个智能体 a、 b、 c 各自以输入值 0 或 1 开始。在协议复形中，输入复形的 8 个输入三角形各自细分为 7 个三角形，具体如第3.1节所述。下图仅展示了不可靠广播协议复形的一半：它展示了四种可能输入配置的细分。从左到右依次是 (a_1， b_1， c_1)、(a_1， b_0， c_1)、(a_0， b_0， c_1)，最后是 (a_0， b_0， c_0)。因此，在图的左侧，所有智能体的输入值都是 1；而在右侧，所有智能体的输入值都是 0。



每个顶点上方的数字（0 或 1）对应于智能体在该局部状态下的决策值。我们可以很容易地验证该算法是正确的：对于协议复形的每个三角形，要么所有智能体都决定 1，要么 0 占多数。

让我们分析这个协议复形中智能体的知识。这里，我们只关心智能体对彼此输入值的了解。事实上，我们只会用到一个原子公式，它表示“所有智能体的输入值都是 1”，记作 all_1。在图片左侧，顶点为 (a_1、 b_1、 c_1) 的 7 个世界中，这个原子公式为真；在其他所有世界中则为假。此外，令 $\alpha = \{\{a、 b\}、\{a、 c\}、\{b、 c\}\}$，并考虑公式 $\Phi = CD_\alpha(\neg \text{all}_1)$。也就是说， Φ 表示：“所有由两名智能体组成的群体都具有共同分布式知识，即并非所有人的输入值都是 1。”协议复形图片中的红色区域对应公式 Φ 为假的世界；蓝色区域则对应公式 Φ 为真的世界。

有了这一点，我们就可以用知识来重新表述多数共识算法。事实上，请注意，智能体恰好在与红色区域相邻时决定 1；否则就决定 0。因此，上文介绍的多数共识算法可以重新表述如下：如果我知道公式 Φ，就决定 0，否则决定 1。

5.3 在即时快照模型中

众所周知，即时快照模型是一种非常弱的计算模型。从输入复形出发，运行一轮即时快照协议，会将输入中的每个单纯形细分，且不会引入任何洞（见第3.1节）。运行多轮协议，只会让每个单纯形得到越来越细的细分。关键的是，这意味着输入复形的拓扑得以保留，从而可以证明许多不可能性结果 [31]。

对于多数共识任务，我们已经看到，二元输入复形是一个三角剖分球面。当智能体使用即时快照协议进行任意有限轮次的通信时，所得的协议复形仍然是一个组合球面，只是三角形的数量呈指数级增加。重要的是，无论经过多少轮次，协议复形仍保持 2-连通（这里指边连通性，而非同伦连通性，见第4.4节）。

考虑与上一节相同的公式 $\Phi = CD_\alpha(\neg\text{所有}_1)$。回顾一下，所有双人群组的共同分布式知识 CD_α，等同于检查该公式是否在实际世界所在的 2-连通分量中的每个世界都成立。由于即时快照模型的协议复形$\mathcal{P}$ 是 2-连通的，因此公式 Φ 在$\mathcal{P}$中的任何地方都不成立。事实上，无论哪个世界是实际世界，总存在一条路径，经过共享公共边的世界，抵达一个所有智能体最初输入值均为 1 的世界。

设 w 是$\mathcal{P}$ 中的任意一个世界，其中所有智能体最初输入值均为 0，(a_0, b_0, c_0)。根据多数共识任务的有效性要求，唯一允许的决策值是 (0，0，0)。因此，如果决策映射 δ存在，它必须将世界 w映射到输出复形$\mathcal{O}$中的世界 $\delta(w) = (0, 0, 0)$。然而，在输出复形中，很容易看出公式 Φ 在世界 $\delta(w)$中成立。由于我们已经看到 Φ 在 w中不成立，这与知识增益定理相矛盾。结论：

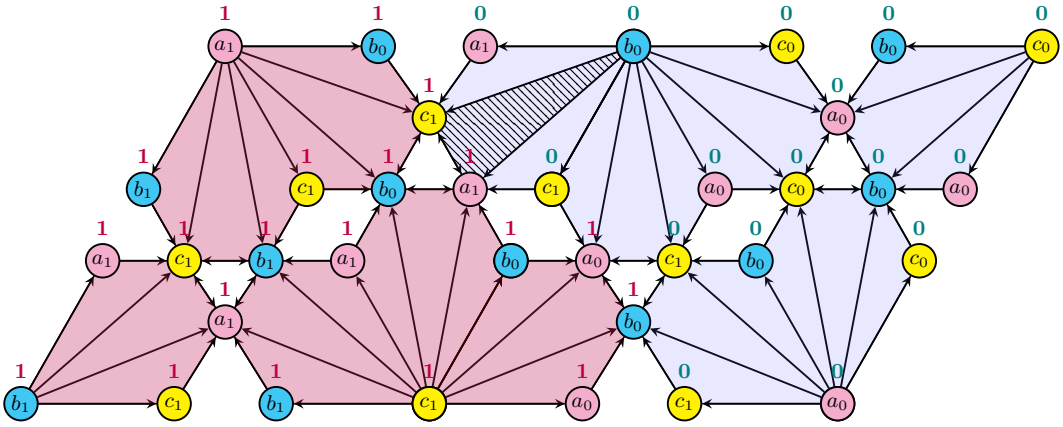
▶**定理8.** 在即时快照模型中，无论进行多少轮次，多数共识任务都不可解。

5.4 在测试并设置模型中

现在我们来研究多数共识在测试并设置模型中的可解性。

一轮

首先，让我们尝试应用第5.2节中的基于知识的算法：通信结束时，如果智能体知道公式 $\Phi = CD_\alpha(\neg\text{所有}_1)$，就决定 0；否则就决定 1。对于单轮测试并设置模型，相应的决策映射可以用下图表示。和之前一样，红色区域表示公式 Φ 为假的世界。决策值写在协议复形各顶点的上方。



请注意，由此得到的算法并不正确：在交叉阴影三角形中，输入值为 $(a_1,\ b_0,\ c_1)$ 时，三个决策值为 (1，0，1)。这与任务的多数一致性要求相矛盾，因为多数决策值为 1。问题在于，在这个世界中，只有一个智能体知道公式 Φ：a 和 c 都位于红色区域的边界上，因此它们认为 Φ可能为假。

然而，在多数共识输出复形$\mathcal{O}$中，这种情况不会发生：在所有世界中，智能体要么都不知道 Φ，要么有 ≥ 2 个智能体知道 Φ。这个陈述[4] 将作为我们的障碍公式，用来证明多数共识在单轮测试并设置模型中不可解。

▶**定理 9.** 多数共识在单轮测试并设置模型中不可解。

证明（概要）。假设存在一个决策映射 $\delta : \mathsf{P} \to \mathsf{O}$，满足任务规范。令 $\alpha = \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$ 包含所有由两个智能体组成的组，并定义两个公式 $\Phi_1 = CD_\alpha(\neg \mathsf{all}_1)$ 和 $\Phi_0 = CD_\alpha(\neg \mathsf{all}_0)$。接着，我们定义以下障碍公式，直观来说，“要么 Φ_0 为真，要么至少有两个智能体知道 Φ_1”。

$$\Psi \ = \ \Phi_0 \vee (K_a\,\Phi_1 \wedge K_b\,\Phi_1) \vee (K_a\,\Phi_1 \wedge K_c\,\Phi_1) \vee (K_b\,\Phi_1 \wedge K_c\,\Phi_1)$$

公式 Ψ 在协议复形$\mathcal{P}$的交叉阴影世界 w 中为假。然而，在多数共识的输出复形$\mathcal{O}$ 中，Ψ 处处为真。因此，无论单纯映射 δ 将世界 w 映射到何处，我们总会发现 Ψ 在 $\delta(w)$ 中为真，但在 w 中为假。这与知识增益定理矛盾，因此决策映射 δ 不可能存在。◀

分两轮

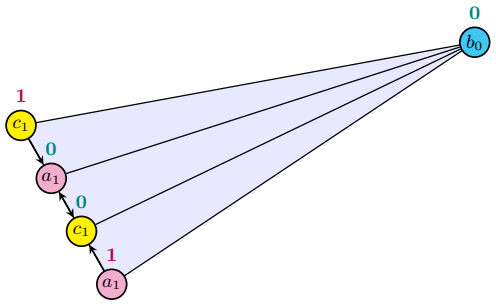
在前一次单轮尝试中，只有一个世界（事实上，如果画出完整的协议复形，则有三个世界）不满足任务的规范。看来，我们只需将两个出错的顶点 a_1 和 c_1 分开，算法就能奏效。确实，只需再进行一轮测试并设置，就足以解决多数共识。事实上，并不需要完整的第二轮：我们只需让第一轮中落败的两个智能体之间额外进行一次写入/读取。

[4] 不完全是：“0 个智能体知道 Φ”不是一个正公式，因此我们需要稍作改写。

用于求解多数共识的测试并设置算法：

- 第一轮次：所有智能体写入、调用测试并设置，然后读取。
- 智能体按单轮情形做出决定，但以下情形除外。
- 如果智能体 i 以值 1 开始，在测试并设置中失败，并读到值 0 以及其他两个智能体的 1，则再额外执行一次写入和读取。
- 如果智能体 i 在第二轮看到另一个值，则决定为 0，否则决定为 1。

由该算法产生的协议复形与单轮情形的几乎相同，只是交叉阴影三角形进一步细分如下：



箭头表示两个智能体 a 和 c在第二次写入/读取期间交换了哪些值。正如我们所见，三个三角形都满足任务规范，因此该算法是正确的。

6 结论

我们面向经济学受众介绍了单纯形模型，内容有些非正式，但自成体系且避免了技术细节，展现了知识、分布式计算与组合拓扑之间的相互作用。我们重点讨论了以下概念，而这些概念值得该受众进一步了解：单纯形模型、分布式知识、通信模型和任务规范。

首先，尽管Kripke框架语义在多智能体系统研究中无处不在，我们描述了一种基于单纯复形的对偶语义，它展现了一种拓扑结构。我们说明了这种语义对于推理分布式知识和共同分布式知识的价值。但还存在更复杂的拓扑信息可以加以利用，这些信息与底层单纯复形的同调有关，可以直接运用组合拓扑，如 [31] 中所示，也可以从认知角度运用，如 [39] 中所示。

已有大量关于动力学的研究，基于 Kripke 模型探讨智能体彼此通信后其知识如何演变；与我们的方法尤其接近的是动态认知逻辑 [4, 20]。我们使用通信模式来展示单纯形模型如何随着通信而演变。我们的一个主要目标是说明如何定义分布式通信模型，以及不同模型如何使智能体获得不同程度的知识增长。我们介绍了三个示例：即时快照、广播和测试并设置。

最后，我们展示了单纯形模型也可以用作规约语言，用于描述分布式任务，并对智能体应当获得的知识进行建模。我们强调，任务规范独立于通信模型 [43]。我们考察了共识的一种较弱形式——多数共识，并展示了在某些模型中，智能体确实能够

获得足够的知识来解决任务，而在另一些模型中则不能。这些示例依赖于共同分布式知识这一概念。

这项工作有许多可能的扩展。迭代知识过去已被研究，以及它与求解近似一致（即智能体就彼此接近的值达成一致）之间的关系 [1, 27]。我们希望对迭代分布式知识，以及从多数共识到近似多数共识的推广进行类似的分析 [2]。显然，将我们的示例从三个智能体推广到任意数量的智能体将是有意义的。此外，更形式化、更一般地探索分布式知识技术，并描述它可以应用的任务。特别是，将其应用于智能体可能发生故障的场景会很有趣，故障既包括崩溃，也包括任意拜占庭故障。

参考文献

1 Jorge Armenta-Segura、Jérémy Ledent 和 Sergio Rajsbaum。从认知逻辑视角看双智能体近似一致。Computación y Sistemas，26(2)，2022年。URL: https://cys.cic.ipn.mx/ojs/index.php/CyS/article/view/4234。 2 Hagit Attiya、Pierre Fraigniaud、Ami Paz 和 Sergio Rajsbaum。一般三进程任务的可解性刻画。载于 Alkida Balliu 和 Fabian Kuhn 编，ACM分布式计算原理研讨会论文集，PODC 2025，墨西哥瓦图尔科瓦图尔科的 Hotel Las Brisas Huatulco，2025 年 6 月 16 日至 20 日，第 488–498 页。ACM，2025 年。 doi:10.1145/3732772.3733548。 3 Hagit Attiya 和 Sergio Rajsbaum。不可区分性。《Commun. ACM》，63(5):90?99，2020年4月。 doi:10.1145/3376902。 4 Alexandru Baltag 和 Bryan Renne。动态认知逻辑。载于 Edward N. Zalta 编，《斯坦福哲学百科全书》。斯坦福大学形而上学研究实验室，2016年冬季版，2016年。 5 Alexandru Baltag 和 Sonja Smets。学习他人所知。载于 Elvira Albert 和 Laura Kovács 编，LPAR 2020：第 23 届程序设计、人工智能与推理逻辑国际会议，西班牙阿利坎特，2020年5月22日至27日，《EPiC计算系列》第73卷，第90–119页。EasyChair，2020年。URL： https://doi.org/10.29007/plm4,doi:10.29007/PLM4。 6 Alexandru Baltag 和 Sonja Smets。学习他人所知。CoRR，abs/2109.07255，2021年。URL: https://arxiv.org/abs/2109.07255, arXiv:2109.07255。 7 M. Banerjee 和 Md.A. Khan。粗糙集理论中的命题逻辑。《Trans. Rough Sets》，6:1–25，2007年。 doi:10.1007/978-3-540-71200-8_1。 8 Hélène Barcelo、Xenia Kramer、Reinhard Laubenbacher 和 Christopher Weaver。单纯复形连通性理论的基础。《Advances in Applied Mathematics》，26(2):97–128，2001年。URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196885800907103, doi:10.1006/aama.2000.0710。 9 Federico Battiston、Giulia Cencetti、Iacopo Iacopini、Vito Latora、Maxime Lucas、Alice Patania、Jean-Gabriel Young 和 Giovanni Petri。超越成对交互的网络：结构与动力学。《Physics Reports》，874:1–92，2020年。超越成对交互的网络：结构与动力学。URL： https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157320302489, doi:10.1016/j.physrep.2020.05.004。 10 Marta Bílková、Hans van Ditmarsch、Roman Kuznets 和 Rojo Randrianomentsoa。非纯单纯复形的双模拟。载于 Agata Ciabattoni、David Gabelaia 和 Igor Sedlár 编，《模态逻辑进展》，AiML 2024，捷克布拉格，2024年8月19日至23日，第225–248页。College Publications，2024年。URL: http://www.aiml.net/volumes/volume15/11-BilkovaEtAl.pdf。 11 Christian Cachin、David Lehnherr 和 Thomas Studer。单纯形信念。载于 Ulrich Schmid 和 Roman Kuznets 编，《结构信息与通信复杂性——第32届

国际研讨会》，SIROCCO 2025，希腊德尔斐，2025年6月2日至4日，会议论文集，《计算机科学讲义》第15671卷，第176–193页。施普林格，2025年。 doi:10.1007/978-3-031-91736-3_11。 12 Christian Cachin 、 David Lehnherr 和 Thomas Studer。协同知识。《理论计算机科学》，1023:114902，2025年。URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030439752400519X, doi:10.1016/j.tcs.2024.114902。 13 Armando Castañeda、Hans van Ditmarsch、Roman Kuznets、Yoram Moses 和 Ulrich Schmid。分布式系统中的认知与拓扑推理（Dagstuhl研讨会23272）。《Dagstuhl报告》，13(7):34–65，2023年。URL: https://doi.org/10.4230/DagRep.13.7.34, doi:10.4230/DAGREP.13.7.34。 14 Armando Castañeda、Hans van Ditmarsch、David A. Rosenblueth 和 Diego A. Velázquez。通信模式逻辑：认知与拓扑视角。《哲学逻辑杂志》，2023年7月。 doi:10.1007/s10992-023-09713-8。 15 Frédéric Chazal 和 Bertrand Michel。拓扑数据分析导论：面向数据科学家的基础与实践。《人工智能前沿》，第4卷——2021年，2021年。URL: https://www.frontiersin.org/journals/artificial-intelligence/articles/10.3389/frai.2021.667963, doi:10.3389/frai.2021.667963。 16 B.F. Chellas。《模态逻辑：导论》。剑桥大学出版社，1980年。 17 A. Dabrowski、L.S. Moss 和 R. Parikh。拓扑推理与知识逻辑。《Ann. Pure Appl. Logic》，78(1-3):73–110，1996年。 doi:10.1016/0168-0072(95)00016-X。 18 Hans van Ditmarsch、Éric Goubault、Marijana Lazic、Jérémy Ledent 和 Sergio Rajsbaum。对等式否定及其他认知覆盖任务的动态认知逻辑分析。《J. Log. Algebraic Methods Program.》，121:100662，2021年。 doi:10.1016/j.jlamp.2021.100662。 19 Hans van Ditmarsch、Éric Goubault、Jérémy Ledent 和 Sergio Rajsbaum。知识与单纯复形。载于 Björn Lundgren 和 Nancy Abigail Nuñez Hernández 编，《计算哲学》，第143卷，第1–50页。施普林格国际出版，2022年。 doi:10.1007/978-3-030-75267-5_1。 20 Hans van Ditmarsch、Wiebe van der Hoek 和 Barteld Kooi。《动态认知逻辑》，Synthese图书系列。施普林格，第337版，2007年。 doi:10.1007/978-1-4020-5839-4。 21 Hans van Ditmarsch 和 Roman Kuznets。死活皆可：非纯单纯复形的认知逻辑。《J. Log. Comput.》，35(6)，2025年。URL: https://doi.org/10.1093/logcom/exae055, doi:10.1093/LOGCOM/EXAE055。 22 Hans van Ditmarsch、Roman Kuznets 和 Rojo Randrianomentsoa。非纯单纯复形的二值与三值语义。载于 Antonis Achilleos 和 Dario Della Monica 编，第十四届博弈、自动机、逻辑与形式验证国际研讨会论文集，GandALF 2023，意大利乌迪内，2023年9月18日至20日，EPTCS第390卷，第50–66页，2023年。 doi:10.4204/EPTCS.390.4。 23 Ronald Fagin、Joseph Y. Halpern、Yoram Moses 和 Moshe Y. Vardi。《关于知识的推理》。麻省理工学院出版社，美国马萨诸塞州剑桥，2003年。 24 Pierre Fraigniaud、Boaz Patt-Shamir 和 Sergio Rajsbaum。随机广播下的共识。CoRR，预印本，2026年。 25 Éric Goubault、Roman Kniazev、Jérémy Ledent 和 Sergio Rajsbaum。用于分布式知识的半单纯集合模型。载于 LICS，第1–13页，2023年。 doi:10.1109/LICS56636.2023.10175737。 26 Éric Goubault、Roman Kniazev、Jérémy Ledent 和 Sergio Rajsbaum。故障代理认知逻辑的单纯形模型。《墨西哥数学学会公报》，30(3):90，2024年。 doi:10.1007/s40590-024-00656-x。 27 Éric Goubault、Jérémy Ledent 和 Sergio Rajsbaum。用于研究分布式任务可计算性的动态认知逻辑单纯复形模型。《Inf. Comput.》，278:104597，2021年。doi:10.1016/j.ic.2020.104597。 28 Joseph Y. Halpern 和 Yoram Moses。分布式环境中的知识与共同知识。《J. ACM》，37(3):549–587，1990年。 doi:10.1145/79147.79161。

29 J.Y. Halpern 和 Y. Moses。分布式环境中的知识与共同知识。《ACM学报》，37(3):549–587，1990年。30 Allen Hatcher。《代数拓扑》。剑桥大学出版社，剑桥，2002年。31 M. Herlihy、D. Kozlov 和 S. Rajsbaum。《组合拓扑中的分布式计算》。Morgan Kaufmann，旧金山，加利福尼亚州，美国，2013年。32 M. Herlihy 和 N. Shavit。异步可计算性的拓扑结构。《ACM学报》，46(6):858–923，1999年11月。 doi:10.1145/331524.331529。33 Maurice Herlihy 和 Sergio Rajsbaum。代数拓扑与分布式计算：入门介绍。载于 Jan van Leeuwen 编，《今日计算机科学：最新趋势与发展》，《计算机科学讲义》第1000卷，第203–217页。施普林格，1995年。网址：https://doi.org/10.1007/BFb0015245, doi:10.1007/BFB0015245。34 J. Hintikka。《知识与信念》。康奈尔大学出版社，1962年。35 Fabian Kuhn 和 Rotem Oshman。动态网络：模型与算法。SIGACT News，42(1):82–96，2011年。 doi:10.1145/1959045.1959064。36 J. Ledent。《异步可计算性的几何语义》。博士论文，巴黎综合理工学院，帕莱索，法国，2019年。37 Nancy A. Lynch。《分布式算法》。Morgan Kaufmann，1996年。38 Yoram Moses。《分布式系统中的知识》，第1051–1055页。Springer New York，纽约，纽约州，2016年。 doi:10.1007/978-1-4939-2864-4_606。39 Susumu Nishimura。用认知逻辑中的不动点定义逻辑障碍。《应用计算拓扑》，8(4):941–970，2024年。网址： https://doi.org/10.1007/s41468-023-00151-8,doi:10.1007/S41468-023-00151-8。40 A. Özgün。《认知逻辑中的证据：拓扑学视角》。博士论文，洛林大学与阿姆斯特丹大学，2017年。41 E. Pacuit。《模态逻辑的邻域语义》。施普林格，2017年。42 R. Parikh、L.S. Moss 和 C. Steinsvold。拓扑与认知逻辑。载于 M. Aiello、I. Pratt- Hartmann 和 J. van Benthem 编，《空间逻辑手册》，第299–341页。施普林格出版社，2007年。43 Sergio Rajsbaum。分布式决策问题：超越二元关系的并发规范（特邀报告）。载于 Bartek Klin、Slawomir Lasota 和 Anca Muscholl 编，第33届国际并发理论会议（CONCUR 2022），波兰华沙，2022年9月12日至16日，第243卷 LIPIcs，第3:1–3:13页。施洛斯·达格施图尔信息学中心，2022年。网址： https://doi.org/10.4230/LIPIcs.CONCUR.2022.3,doi:10.4230/LIPICS.CONCUR.2022.3。44 Rojo Randrianomentsoa、Hans van Ditmarsch 和 Roman Kuznets。非纯单纯复形：完全公理化。《计算机科学逻辑方法》，19(4):3:1–3:35，2023年10月。 doi:10.46298/lmcs-19(4:3)2023。45 J. Turek 和 D. Shasha。分布式系统中共识的诸多面向。《Computer》，25(6):8–17，1992年。 doi:10.1109/2.153253。46 Kyrill Winkler、Ami Paz、Hugo Rincon Galeana、Stefan Schmid 和 Ulrich Schmid。无知消息对手下共识的时间复杂度。《Algorithmica》，86(6):1830–1861，2024年。网址： https://doi.org/10.1007/s00453-024-01209-4, doi:10.1007/S00453-024-01209-4。