arXiv:2602.06946v2 [math.QA] 13 Feb 2026

若干非交换球面代数的对称性

William J. Ugalde 和 Joseph C. Várilly*

哥斯达黎加大学数学学院，11501 圣何塞，哥斯达黎加

2026年2月13日

摘要

文献中已知的两种 q变形（或称“量子”）七维球面均记作 $\mathbb{S}^7_q$，可根据是否具有 SU$_q$(2) 对称性加以区分。Brain 和 Landi 已证明，$\mathbb{S}^7_q$ 的四元数版本具有这种对称性。本文则证明，由 Vaksman 和 Soibelman 引入的较早的 $\mathbb{S}^7_q$ 并不具有这种对称性；因此，这两种量子七维球面并不同构。

1 引言

自量子群问世以来，人们引入了若干“量子齐性空间”，将它们构造为李群被闭子群 q取商所得空间的变形。最早的例子是标准 Podleś球面 $\mathbb{S}^2_q$，它是紧量子群SU$_q$(2) 的齐性空间，实际上属于一族 q变形的2球面 [4, 16]，可根据其“经典点”集合加以区分。紧量子群 G_q 可以理解为带有余逆的 C^*-双代数 $C(G_q)$，也可以理解为其矩阵系数构成的含幺 Hopf $*$-代数$\mathcal{A}(G_q)$，见第 [15, 章。 1]本文采用后一种观点。

术语量子齐性空间在 G_q 中指的是一个 $*$-代数 $\mathcal{A}$，并配备了右余作用 $\Psi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}(G_q)$。

定义任意维数 $n \geqslant 2$ 的 q 变形球面还有其他方法。可以将 C^*-代数 $C(\mathbb{S}^n)$ 视为由满足二次关系 $x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ 的交换自伴生成元 x_0、x_1、……、x_n 所生成的代数的完备化，或采用某种等价形式。给定一个实参数 q，若其中一个关系在 $q = 1$ 时化为前述球面关系，则可通过一组合适的生成元与关系定义一个 q 变形 n 球面，此外还需满足若干（通常为二次的）交换关系。早期的一个例子是 Vaksman 和 Soibelman [19] 的奇数维球面代数 $\mathcal{A}(\mathbb{S}^{2m+1}_q)$。另一种方法是依照 Hong 和

*电子邮件：william.ugalde@ucr.ac.cr, joseph.varilly@ucr.ac.cr

Szymański [9], 其中 n 可以是偶数维或奇数维：在奇数维情形下，他们的 $C(\mathbb{S}^{2m+1}_q)$ 确实是 Vaksman 和 Soibelman 的 $\mathcal{A}(\mathbb{S}^{2m+1}_q)$的完备化。

这两种方法的一个特点是，q变形球面不一定是唯一的。例如，Podleś 二维球面构成一个带有额外参数 c 的族 $\mathbb{S}^2_{qc}$，正如前文所述。Calow 和 Matthes [3] 发现了一个由两个参数构成的 3-球面族 $\mathbb{S}^3_{pq}$；诸如此类。Dąbrowski [4]提供了一份实用目录，收录了这些以及其他量子二维球面和 3-球面。至少两种 q变形的 4-球面早已为人所知：一种称为 $\mathbb{S}^4_q$，在 [5] 中作为 $\mathrm{SU}q(2)$ 的悬挂被引入；另一种称为 Σ^4_q，由 Bonechi 等人于 [1]从 Hopf 丛 $\mathbb{S}^7 \to \mathbb{S}^4$ 的 q变形中构造而来，其总空间的坐标代数为前文提到的 $\mathcal{A}(\mathbb{S}^7_q)$。

下文中，我们考虑奇数维球面的 q变形，尤其是七维球面 $\mathbb{S}^7$。由于并非唯一，用 $\mathcal{A}(\mathbb{S}^{2m+1}_q)$ 表示它们的有限生成代数会产生歧义。我们将保留该记号，专指 Vaksman 和 Soibelman 的代数，并用 $\mathcal{O}(\mathbb{S}^7_q)$ 表示 Landi、Pagani 和 Reina [13]引入的“辛”七维球面的坐标代数。Brain 和 Landi 在 [2], 中进一步研究了该球面，作者评论说，这两个量子化版本$\mathbb{S}^7_q$ “似乎有所不同”。事实上它们确实不同：我们的主要结果是，$\mathcal{A}(\mathbb{S}^7_q)$ 不支持 $\mathcal{A}(\mathrm{SU}q(2))$ 的代数余作用，而（众所周知）$\mathcal{O}(\mathbb{S}^7_q)$ 支持这种余作用，因此这两个代数不同构。

为此，我们考虑上述球面代数上 $\mathcal{A}(\mathrm{SU}q(2))$ 的一类一般可能的（右）余作用，以了解哪些代数支持这种余作用，哪些不支持。余模代数的分类当然是一项艰巨的工作；在此我们只完成了其中一小部分。目前，采用生成元与关系的方法，我们只考虑生成元中为一次的候选余作用。这排除了例如 $\mathcal{A}(\mathrm{SU}q(2))$ 在自身上的右伴随余作用，因此只能得到部分分类；但这足以回答 Brain 和 Landi 提出的问题。

值得注意的是，4-球面 Σ^4_q in [1] 确实会作为余代数 余代数 $\mathcal{A}(\mathrm{SU}q(2))$ 在 $\mathcal{A}(\mathbb{S}^7_q)$ 上的某种余作用的不变子代数出现，但代价是其 代数结构遭到了扭曲。这个例子并不能反驳我们当前的不可能性定理。

第 2 节简要回顾球面代数，并给出其生成元与关系。第 3 节介绍一族线性 $*$-映射，它们应能提供我们所寻求的余作用。接下来的 4 节考察这些余作用是否存在于 Vaksman–Soibelman 代数$\mathcal{A}(\mathbb{S}^{2m+1}_q)$上。最后的 5 节探讨同一个问题在四元数 q-球 $\mathcal{O}(\mathbb{S}^7_q)$上的情形。我们找到的（少数几种）余作用构成若干族，其参数为 $\mathbb{T} = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| = 1\}$；忽略这个无关紧要的参数，对于 $\mathcal{O}(\mathbb{S}^7_q)$，我们恢复了 [2] 的余作用以及另一种余作用。

四元数情形中的余作用不变子代数存在一个小问题，它在 [2] 中被认定为一个 q-变形的 4-球。然而，我们发现生成元之间的关系略有不同，详见附录 A。

人们通常认为，作为 $\mathcal{A}(\mathrm{SU}q(2))$-余模而产生的“非交换球面”应由同一个参数 q标记。不过，鉴于 [12]Moyal 型非交换球面 $\mathbb{S}^n_\theta$的相关经验，我们不必 预先作此假设。因此，我们改用 p 来标记 Vaksman–Soibelman 球面，同时允许 $p \neq q$这种可能性存在。无论如何，我们取 q 为实数且为正，取值范围为 $0 < q < 1$，p也同样如此。

2 若干非交换球面

我们首先回顾最初的“量子 3-球面”，即由 Woronowicz 引入的量子群 $C(\mathrm{SU}_q(2))$ [20], 其中 $0 < q < 1$。它可视为其矩阵系数代数 $H = \mathcal{A}(\mathrm{SU}_q(2))$的完备化。该代数是由两个元素 $*$生成的 Hopf-a 代数，满足以下元素 b之间的交换关系：

$$\begin{aligned} ba &= qab, \qquad b^*a = qab^*, \qquad bb^* = b^*b, \\ a^*a + q^2b^*b &= 1, \qquad aa^* + bb^* = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

余乘法 $\Delta\colon\ H \to H \otimes H$ 定义为

$$\begin{aligned} \Delta(a) &:= a \otimes a - q\, b \otimes b^*, \qquad \Delta(a^*) := a^* \otimes a^* - q\, b^* \otimes b, \\ \Delta(b) &:= b \otimes a^* + a \otimes b, \qquad \Delta(b^*) := b^* \otimes a + a^* \otimes b^*, \end{aligned} \tag{2}$$

其余单位 $\varepsilon(a) = 1$, $\varepsilon(b) = 0$，以及对踵 S由 $S(a) = a^*$, $S(b) = -qb$,$S(b^*) = -q^{-1}b^*$, $S(a^*) = a$ 确定。这里我们遵循 [4, 6, 7]中的约定。关系 (1) 在 $q > 1$ 下同样成立，也就是说，只需交换 $q \leftrightarrow q^{-1}$；许多其他作者更倾向于采用这种做法。

余乘法公式 (2) 可以简洁地概括为 [20] 如下：$\Delta(u) := u \dot{\otimes} u$，作用于“基本酉元”

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -qb^* & a^* \end{pmatrix}.$$

通过将同一代数 (1) 上的另一种余乘法定义为 u 的逆元 $u^{-1} = u^*$，可得到 $\Delta'(u^*) := u^* \dot{\otimes} u^*$ 由此得到一种不同的余代数结构；例如，近期专著 [10],采用了这一约定。

圆群 $\mathbb{T}$ 在 $\mathcal{A}(\mathrm{SU}_q(2))$ 上有一个显然的自同构作用，其在生成元上的定义为 $a \mapsto a$, $b \mapsto \omega b$ 其中 $|\omega| = 1$，且与余乘法（2）相容。

最早的“量子7-球面”由 Vaksman 和 Soibelman [19], 通过从 $\mathcal{A}(\mathrm{SU}_p(4))$中识别出一个适当的子代数而构造，其中 $0 < p < 1$，它有四个 $*$-代数生成元 z_0, z_1, z_2, z_3，它们满足以下交换关系：

$$z_j z_i = p z_i z_j \quad \text{for} \quad i < j, \tag{3a}$$

$$z_i^* z_j = p z_j z_i^* \quad \text{for} \quad i \neq j, \tag{3b}$$

$$z_i^* z_i = z_i z_i^* + (1 - p^2) \sum_{j>i} z_j z_j^* \tag{3c}$$

以及球面条件

$$z_0 z_0^* + z_1 z_1^* + z_2 z_2^* + z_3 z_3^* = 1. \tag{3d}$$

（同样，关系（3）对 $p > 1$也有意义。）当 $p = 1$时，它们退化为C矩阵^4,的交换坐标代数，且最后一个关系确定 $\mathbb{S}^7 \subset$ C矩阵^4。

实际上， $\mathcal{A}(\mathbb{S}^7_p)$ 是代数族 $\mathcal{A}(\mathbb{S}^{2m+1}_p)$ 的一个特殊情形，其生成元为z_0、 z_1、……、 z_m，对任意 $m = 2$、3、……，并服从（3）以及更一般的球面关系：

$$z_0 z_0^* + z_1 z_1^* + \cdots + z_m z_m^* = 1. \tag{4}$$

这同样可作为 $\mathcal{A}(\mathrm{SU}_p(m+2))$ 的子代数获得。关于此类“奇量子球面”性质的优秀最新综述见 [14]；另见 [8] 和 [11]。

备注 2.1。除了（3）和（4）所给出的二次关系外，生成元之间不存在其他二次关系。特别地，单项式集合 $\{z_i z_j$、 $z_k z_l^*$、 $z_r^* z_s^*$： $i \leqslant j$、 $k \leqslant l$、 $r \leqslant s\}$线性无关。

尤其要注意，（1）是（3）和（4）的一个特殊情形，其中 $p = q$ 和 $m = 1$，取 $z_0 = a$、 $z_1 = b$。因此 $\mathcal{A}(\mathbb{S}^3_q) = \mathcal{A}(\mathrm{SU}_q(2))$。

另一方面， $\mathbb{S}^7$ 也是四元数平面 $\mathbb{H}^2$中的单位球面。在这一表述下， $\mathbb{C}^4$ 的紧对称群 SU(4)被$\mathbb{H}^2$,的紧辛群Sp(2)所取代，后者同样保持四元数结构。

在 [13], 中，Sp(2) 的坐标代数被修改为其 q变形的紧量子群 $\mathrm{Sp}_q(2)$ 的坐标代数。随后，通过 $*$代数 $\mathcal{O}(\mathbb{S}^7_q)$ 给出一个合适的 q变形七维球面；该代数具有四个生成元 x_0、 x_1、 x_2、 x_3，分为两对： x_0、 x_1 以及 x_2、 x_3。

这里我们遵循后续论文 [2] 中 Brain 和 Landi 略有不同的约定，但取 $q \leftrightarrow q^{-1}$，因为 [2] 遵循 $\mathrm{SU}_q(2)$ 生成元的另一种约定。首先，我们列出两对生成元内部的关系：

$$\begin{aligned}
&x_1 x_0 = q^{-1} x_0 x_1, \qquad x_1^* x_0 = q x_0 x_1^*, \qquad x_0^* x_0 = x_0 x_0^*, \qquad x_1^* x_1 = x_1 x_1^* + (1-q^2) x_0 x_0^*, \\
&x_3 x_2 = q^{-1} x_2 x_3, \qquad x_3^* x_2 = q x_2 x_3^*, \qquad x_2^* x_2 = x_2 x_2^*, \qquad x_3^* x_3 = x_3 x_3^* + (1-q^2) x_2 x_2^*.
\end{aligned} \tag{5}$$

此外，还有混合两对生成元的“编织”关系：

$$\begin{aligned}
x_2 x_0 &= q^{1/2} x_0 x_2, \qquad & x_3 x_0 &= q^{-1/2} x_0 x_3, \\
x_2 x_1 &= q^{1/2} x_1 x_2, \qquad & x_3 x_1 &= q^{-1/2} x_1 x_3, \\
x_2^* x_0 &= q^{1/2} x_0 x_2^*, \qquad & x_3^* x_0 &= q^{-1/2} x_0 x_3^* - q^{-1}(1-q^2) x_2 x_1^*, \\
x_2^* x_1 &= q^{1/2} x_1 x_2^*, \qquad & x_3^* x_1 &= q^{-1/2} x_1 x_3^* + (1-q^2) x_2 x_0^*.
\end{aligned} \tag{6}$$

最后是一个球面关系，可以写成两个等价的形式：

$$\begin{aligned}
x_0 x_0^* + x_1 x_1^* + x_2 x_2^* + x_3 x_3^* &= 1, \\
\text{or} \quad q^2 x_0^* x_0 + x_1^* x_1 + q^2 x_2^* x_2 + x_3^* x_3 &= 1.
\end{aligned} \tag{7}$$

显然，对于 $p = q$， $\mathcal{A}(\mathbb{S}^7_q)$ 的生成元 z_i 与 $\mathcal{O}(\mathbb{S}^7_q)$ 的生成元 x_i 之间不存在简单的对应关系，无法由此得到代数同构。但这并不意味着不存在这样的同构。最终证明这些代数不同构的依据，将是它们的对称性，而非对生成元进行简单匹配，或发现无法匹配。

3 一次代数余作用

我们定义 注释（Ψ）：$\mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes H$ Hopf代数 H 对 $*$-代数 $\mathcal{A}$ 的右余作用 ：

$$(\Psi \otimes \iota)\,\Psi = (\iota \otimes \Delta)\,\Psi \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes H \otimes H \quad \text{and} \quad (\iota \otimes \varepsilon)\,\Psi = \iota \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

其中 Ψ 是线性 $*$-映射，即 $\Psi(z^*) = \Psi(z)^*$ 对任意 $z \in \mathcal{A}$成立。

我们考虑 $H = \mathcal{A}(\mathrm{SU}_q(2))$ 在有限生成的 $*$-代数 $\mathcal{A}$上的任意此类余作用 Ψ，其在 $\mathcal{A}$ 和 H 的生成元上为一次。具体而言，

$$\begin{aligned}\Psi(z_j) = \sum_k (&a_{jk} z_k \otimes a + a'_{jk} z_k^* \otimes a + b_{jk} z_k \otimes b + b'_{jk} z_k^* \otimes b \\ &+ c_{jk} z_k \otimes a^* + c'_{jk} z_k^* \otimes a^* + d_{jk} z_k \otimes b^* + d'_{jk} z_k^* \otimes b^*).\end{aligned}$$

这些系数组成矩阵 $A = [a_{jk}]$、$B = [b_{jk}]$等，其行和列的指标为 $\{0,1,\dots,m\}$。将生成元按列排列为 $z = (z_0,\dots,z_m)^t$和 $z^* = (z_0^*,\dots,z_m^*)^t$后，这些关系及其复共轭可改写为

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= (Az + A'z^*) \otimes a + (Bz + B'z^*) \otimes b + (Cz + C'z^*) \otimes a^* + (Dz + D'z^*) \otimes b^*, \\ \Psi(z^*) &= (\overline{A'}z + \overline{A}z^*) \otimes a^* + (\overline{B'}z + \overline{B}z^*) \otimes b^* + (\overline{C'}z + \overline{C}z^*) \otimes a + (\overline{D'}z + \overline{D}z^*) \otimes b. \quad (8)\end{aligned}$$

容易看出，系数矩阵满足

$$A + C = I, \qquad A' + C' = 0, \tag{9}$$

通过应用 $(\iota \otimes \varepsilon) \circ \Psi = \iota$，并利用 $\varepsilon(a) = \varepsilon(a^*) = 1$以及 $\varepsilon(b) = \varepsilon(b^*) = 0$。

余作用关系（$\Psi \otimes \iota$）Ψ =（$\iota \otimes \Delta$）Ψ可化为关于系数矩阵的若干方程，这些方程可按 $H \otimes H$ 中出现的单项式归类，方法是将（2）与（8）以及（9）结合起来。例如，类型为 $- \otimes a \otimes a$ 的项如下所示：

$$\begin{aligned}(\Psi \otimes \iota)\Psi(z) &= (\Psi \otimes \iota)\big((Az + A'z^*) \otimes a + \cdots\big) = \big(A\Psi(z) + A'\Psi(z^*)\big) \otimes a + \cdots \\ &= \big(A(Az + A'z^*) + A'(\overline{C'}z + \overline{C}z^*)\big) \otimes a \otimes a + \cdots\end{aligned}$$

和（$\iota \otimes \Delta$）Ψ（z）=（$Az + A'z^*$）$\otimes \Delta$（a）$+\cdots$ =（$Az + A'z^*$）$\otimes a \otimes a + \cdots$

比较 $z \otimes a \otimes a$ 与 $z^* \otimes a \otimes a$ 的系数，并利用 $C' = -A'$，我们得到两个矩阵方程：

$$A^2 - A'\overline{A'} = A, \qquad AA' + A'\overline{C} = A'.$$

$- \otimes a^* \otimes a^*$ 类型的项给出相同的关系，因为 Ψ 和 Δ都是 $*$-映射。

表1 给出了消去若干冗余项后得到的矩阵关系。

注释3.1。 容易验证，对于 $\mathcal{A} = H = \mathcal{A}(SU_q(2))$，余乘法 Δ（2）满足这些关系，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

和 $A' = B' = C' = D' = 0$。

$- \otimes a \otimes a$	$A^2 - A'\overline{A'} = A$	$AA' + A'\overline{C} = A'$
$- \otimes b \otimes a$	$AB + A'\overline{D}' = 0$	$AB' + A'\overline{D} = 0$
$- \otimes b^* \otimes a$	$AD + A'\overline{B'} = D$	$AD' + A'\overline{B} = D'$
$- \otimes a \otimes b$	$BA - B'\overline{A'} = B$	$BA' + B'\overline{C} = B'$
$- \otimes b \otimes b$	$B^2 + B'\overline{D'} = 0$	$BB' + B'\overline{D} = 0$
$- \otimes b^* \otimes b$	$BD + B'\overline{B'} = -qC$	$BD' + B'\overline{B} = qA'$
$- \otimes a \otimes b^*$	$DA - D'\overline{A'} = 0$	$DA' + D'\overline{C} = 0$
$- \otimes b \otimes b^*$	$DB + D'\overline{D'} = -qA$	$DB' + D'\overline{D} = -qA'$
$- \otimes b^* \otimes b^*$	$D^2 + D'\overline{B'} = 0$	$DD' + D'\overline{B} = 0$

表 1：余作用系数

注 3.2。 在 [2], 右余作用 δ_R： $\mathcal{O}(\mathbb{S}^7_q) \to \mathcal{O}(\mathbb{S}^7_q) \otimes \mathcal{A}(SU_q(2))$ 可得，具体表达式为

$$\begin{aligned} \delta_R(x_i) &:= x_i \otimes a + x^*_{i+1} \otimes b^* \qquad \text{for } i = 0, 2, \\ \delta_R(x_j) &:= x_j \otimes a - q x^*_{j-1} \otimes b^* \quad \text{for } j = 1, 3, \end{aligned} \tag{11}$$

这显然属于类型（8），其中 $B = B' = C = C' = D = 0$， $A = I_4$，以及

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -q & 0 \end{pmatrix}.$$

现在我们要求线性 $*$映射 Ψ （8）是代数同态，也就是说， Ψ 是一个 $*$代数余作用。公式（8）由此在系数矩阵元素之间施加了许多二次关系。

首先，我们可以平行地处理两类（族）代数，即带有 $0 < p < 1$ 的 Vaksman–Soibelman 代数 $\mathcal{A}(\mathbb{S}^{2m+1}_p)$；以及带有 $p = q$ 和 $m = 3$ 的 Brain–Landi 代数 $\mathcal{O}(\mathbb{S}^7_q)$。

引理 3.3。 任一代数的交换关系都表明，矩阵 $A, B, C, D, A', C', B', D'$ 的每一列至多包含一个非零元素。

此外，矩阵 A *and* $C = I - A$ 是对角的。

证明。 由关系 (3a) 在 $\mathcal{A}(\mathbb{S}^{2m+1}_p)$中，我们得到以下条件：

$$z_j z_i = p z_i z_j \implies \Psi(z_j)\Psi(z_i) = p\Psi(z_i)\Psi(z_j) \quad \text{for} \quad i < j. \tag{12}$$

交换关系（6）给出了余作用于 $\mathcal{O}$（$\mathbb{S}^7_q$）上的类似公式。

比较这些公式中 $z_k^2 \otimes u^2$ 和 $z_k^{*2} \otimes u^2$ 的系数，对于 $u = a,\ \ b,\ \ a^*,\ \ b^*$，可得到以下等式：

$$a_{ik}a_{jk} = b_{ik}b_{jk} = c_{ik}c_{jk} = d_{ik}d_{jk} = 0, \quad a'_{ik}a'_{jk} = b'_{ik}b'_{jk} = c'_{ik}c'_{jk} = d'_{ik}d'_{jk} = 0$$

对于 $i \neq j$；这里 k 是任意列指标。第一个断言立刻可得。

若 A 不是对角矩阵，设为 $a_{01} \neq 0$，则 $a_{11} = 0$，因此 $c_{01} = -a_{01} \neq 0$和 $c_{11} = 1 - a_{11} = 1$，所以 C 会有一列至少包含两个非零元素，这已被排除。□

引理 3.4. 对角矩阵 A 和 $C = I - A$ 的对角元素仅为0 和1，且分别位于互补的位置。

证明。将 Ψ 应用于 $\mathcal{A}(\mathbb{S}_p^{2m+1})$ 的关系（4）。考察所得各项中第二个张量因子为 a^2的项，可得

$$a_{00}\bar{c}_{00}\, z_0 z_0^* + a_{11}\bar{c}_{11}\, z_1 z_1^* + \cdots + a_{mm}\bar{c}_{mm}\, z_m z_m^* = 0.$$

将 Ψ 应用于 $\mathcal{O}(\mathbb{S}_q^7)$ 的关系（7），可得一个类似的方程。

由于 $c_{ii} = 1 - a_{ii}$，$z_i z_i^*$的线性无关性意味着对每个 i，$a_{ii} = 0$ 或 1；进而分别有$c_{ii} = 1$ 或 0。□

4 Vaksman–Soibelman 球面上的余作用

我们现在考虑 Vaksman–Soibelman 代数所特有的代数余作用的性质。在本节其余部分，我们取满足 $0 < p < 1$ 的 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbb{S}_p^{2m+1})$。

除（12）之外，我们现在考虑关系（3b），即 $z_i^* z_j = p z_j z_i^*$，其中 $i \neq j$属于 $\mathcal{A}$（$\mathbb{S}_p^{2m+1}$）。将 Ψ应用于这些关系，我们得到关于该余作用的更多条件：

$$\Psi(z_j^*)\Psi(z_i) = p\,\Psi(z_i)\Psi(z_j^*) \ \text{ for } \ i \neq j. \tag{13}$$

引理 4.1. 若 Ψ 是 $\mathcal{A}$（$\mathrm{SU}_q(2)$）在 $\mathcal{A}$ 上的代数余作用，则 $A' = C' = 0$.

证明。由（9）可知，只需证明 $A' = 0$。我们首先证明 A' 是对角的。

利用关系（8），并再次比较项 $z_k^2 \otimes a^2$ 与 $z_k^{*2} \otimes a^2$的系数——对固定的 k——在关系（13）中，我们发现

$$\bar{c}'_{jk}a_{ik} = p a_{ik}\bar{c}'_{jk} \quad \text{and} \quad \bar{c}_{jk}a'_{ik} = p a'_{ik}\bar{c}_{jk} \quad \text{for} \quad i \neq j.$$

由于 $C' = -A'$，这些关系意味着

$$a_{ik}\bar{a}'_{jk} = 0 \quad \text{and} \quad c_{ik}\bar{a}'_{jk} = 0 \quad \text{for} \quad i \neq j.$$

由于 $A + C = I$和 A 是对角的，因此 $a'_{ji} = 0$ 对于 $i \neq j$，即 A' 是对角的。引理 3.4还意味着 $A^2 = A$，因此表 1 的第一行给出 $A'A' = 0$；由此，A'的所有对角元素也都为零。□

对于代数 $\mathcal{A}(\mathbb{S}_p^{2m+1})$，关系（8）化简为：

$$\begin{aligned}\Psi(z_i) &= a_{ii}z_i \otimes a + c_{ii}z_i \otimes a^* + \sum_k \left(b_{ik}z_k + b'_{ik}z_k^*\right) \otimes b + \sum_k \left(d_{ik}z_k + d'_{ik}z_k^*\right) \otimes b^*,\\ \Psi(z_j^*) &= \bar{a}_{jj}z_j^* \otimes a^* + \bar{c}_{jj}z_j^* \otimes a + \sum_l \left(\bar{b}_{il}z_l^* + \bar{b}'_{il}z_l\right) \otimes b^* + \sum_l \left(\bar{d}_{il}z_l^* + \bar{d}'_{il}z_l\right) \otimes b,\end{aligned} \tag{14}$$

而前面的表 1 现在可以简化为以下表 2。

(a)	$A^2 = A,$	
(b)	$AB = 0,$	$AB' = 0,$
(c)	$CD = 0,$	$CD' = 0,$
(d)	$BC = 0,$	$B'\overline{A} = 0,$
(e)	$B^2 + B'\overline{D'} = 0,$	$BB' + B'\overline{D} = 0,$
(f)	$BD + B'\overline{B'} = -qC,$	$BD' + B'\overline{B} = 0,$
(g)	$DA = 0,$	$D'\overline{C} = 0,$
(h)	$DB + D'\overline{D'} = -qA,$	$DB' + D'\overline{D} = 0,$
(i)	$D^2 + D'\overline{B'} = 0,$	$DD' + D'\overline{B} = 0$。

表2：V–S 代数的余作用系数

这给出了关于 B、 B'、 D 和 D'的行与列的一些信息，视 A 的对角元素为1或0而定。用 $b_{k\bullet}$ 表示 B 的第 k行，用 $b_{\bullet l}$ 表示 B的第 l列；其他系数矩阵亦同。

引理 4.2. 在 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbb{S}_p^{2m+1})$中，若 $a_{ii} = 1$且 $a_{jj} = 0$对某对指标 $i \neq j$，我们从表2 的第 *(b)*、*(c)*、*(d)*和*(g)*行推出：

$$\begin{aligned} AB = 0 \ \textit{and}\ AB' = 0 &\implies b_{i\bullet} = b'_{i\bullet} = 0.\\ BC = 0 \ \textit{and}\ B'A = 0 &\implies b_{\bullet j} = b'_{\bullet i} = 0.\\ CD = 0 \ \textit{and}\ CD' = 0 &\implies d_{j\bullet} = d'_{j\bullet} = 0.\\ DA = 0 \ \textit{and}\ D'C = 0 &\implies d_{\bullet i} = d'_{\bullet j} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

证明。 只需回忆 $A + C = 1$，从而 $c_{ii} = 0$与 $c_{jj} = 1$。 □

推论 4.3. 若 $A = I$，则 $B = B' = C = D = 0$、 $D'\overline{D'} = -qI$，且$\mathrm{diag}(D') = (0, \ldots, 0)$。
若 $C = I$，则 $A = B = D = D' = 0$、 $B'\overline{B'} = -qI$，且$\mathrm{diag}(B') = (0, \ldots, 0)$。

证明。 若 $A = I$，则 $C = 0$ 由（9）可得；并且 $B = B' = D = 0$ 由表2中（b）行和（g）行推出；（h）行给出 $D'\overline{D'} = -qI$。接下来，若某个 $d'_{rr} \neq 0$，那么根据引理 3.3，它是列 $d_{\bullet r}$中唯一的非零项。 r的第 $D'\overline{D'}$ 个对角项将为$|d'_{rr}|^2 = -q$，这显然荒谬。因此，对于每个 $d'_{rr} = \overline{0}$，都有 r。

同样，如果$C = I$，那么 $A = 0$，表中的行 (c) 和 (d) 给出 $B = D = D' = 0$，而行 (f) 给出 $B'\overline{B'} = -qI$。按照前面的相同论证，可得 B'的对角线为零。□

接下来，我们考察矩阵 A 和 C的对角元素中 1 和 0 的数量的其他几种可能情形。将 3-球面单独处理较为方便，因此暂且假设 $m > 1$。

命题 4.4。 若 $m > 1$，则不存在 Ψ 在 $\mathcal{A}(\mathrm{SU}_q(2))$ 对 $\mathcal{A}(\mathbb{S}^{2m+1}_p)$ 的代数余作用，其中 $A = I$ 或 $A = 0$ 成立。

证明。 假设 $A = I$。推论 4.3于是将（8）简化为

$$\Psi(z_i) = z_i \otimes a + \sum_k d'_{ik} z_k^* \otimes b^* \quad \text{and} \quad \Psi(z_j^*) = z_j^* \otimes a^* + \sum_l \bar{d}'_{jl} z_l \otimes b, \tag{16}$$

每个对角元素均为 $d'_{rr} = 0$。（13）中第二个张量因子形如$ba = qab$的项给出

$$(\bar{d}'_{jl} z_l \otimes b)(z_i \otimes a) = p(z_i \otimes a)(\bar{d}'_{jl} z_l \otimes b) \implies \bar{d}'_{jl}(q z_l z_i - p z_i z_l) = 0 \text{ for } i \neq j.$$

对于 $i \neq j$，有 $l = i, d'_{ji}(q - p) = 0$。由于 $\overline{D'}D' = -qI$ 使得 $D' \neq 0$，因此必有 $p = q$。

但这样一来 $d'_{jl}(z_l z_i - z_i z_l) = 0$对于 $l \neq i$。由于 $p < 1$，（3a）这一关系意味着 $d'_{jl} = 0$对于 $l \neq i$，因此 d'_{ji}是第 $d'_{\bullet i}$列中唯一可能的非零元素。但 i、j仅受 $i \neq j$约束，取值任意，因此 D'的所有列都会为零——因为每列至少有三个元素——这与 $D' \neq 0$矛盾。因此，情形 $A = I$ 不成立。

非常类似地，若 $A = 0$ and $C = I$，将 A 替换为 C、将 B' 替换为 D'，同样的论证会导致另一个僵局。□

命题 4.5。 若 $m > 1$，则不存在 $\mathcal{A}(\mathrm{SU}_q(2))$ 在 $\mathcal{A}(\mathbb{S}^{2m+1}_p)$ 上的代数余作用 Ψ，只要 A 的对角线上满足以下任一条件：(a): 只有一个0元素；或(b): 只有一个1 元素。

证明。(a) ： 首先假设 $a_{00} = 0$ 且 $a_{ii} = 1$ 对 $i = 1, \ldots, m$。那么（15）表明 t:

- B 矩阵唯一的非零行是 $b_{0\bullet}$，而 D 矩阵唯一的非零列是 $d_{\bullet 0}$ ；
- B 和 D 的第一个对角元素为零： $b_{00} = d_{00} = 0$；
- B' 唯一可能的非零元素是第一个对角元素 b'_{00}；
- D' 的第一行和第一列均为零： $d'_{0\bullet} = d'_{\bullet 0} = 0$;

an根据引理3.3，每个矩阵的每一列中至多有一个非零元素。

对于 z_0 和 z_l 满足 $l \geqslant 1$的情形，公式（8）现在可简化为：

$$\Psi(z_0) = z_0 \otimes a^* + b'_{00} z_0^* \otimes b + \sum_{k=1}^{m} b_{0k} z_k \otimes b,$$

$$\Psi(z_l) = z_l \otimes a + d_{l0} z_0 \otimes b^* + \sum_{k=1}^{m} d'_{lk} z_k^* \otimes b^*. \tag{17}$$

将 Ψ 应用于 $z_l z_0 = p z_0 z_l$ 并比较第二个张量因子为 $a^* b^* = q b^* a^*$ 的项，

$$\left(d_{l0} z_0 + \textstyle\sum_k d'_{lk} z_k^*\right) z_0 = pq z_0 \left(d_{l0} z_0 + \textstyle\sum_k d'_{lk} z_k^*\right)$$

表明对于所有 $l \geqslant 1$， $d_{l0}(1 - pq) z_0^2 = 0$，从而得到 $D = 0$；又由于 $c_{00} = 1$，关系 $-qC = B'\overline{B'}$ 现在给出 $-q = |b'_{00}|^2$，这是不可能发生的；因此，这种情形被排除。

由于 $m > 1$，如果对于 $i \neq j$ 存在其他某个 $a_{jj} = 0$和 $a_{ii} = 1$，则类似的论证同样适用。

(b)：接下来考虑情形 $a_{00} = 1$， $a_{jj} = 0$对于 $j \geqslant 1$。关系式 (15) 现在表明：

$\diamond$ D 唯一的非零行是 $d_{0\bullet}$，而 B 唯一的非零列是 $b_{\bullet 0}$；$\diamond$ B 和 D 的第一个对角元素为零：$b_{00} = d_{00} = 0$；$\diamond$ D' 唯一可能的非零元素是第一个对角元素 d'_{00}；$\diamond$ B' 的第一行和第一列均为零：$b'_{0\bullet} = b'_{\bullet 0} = 0$；

and，由引理 3.3可知，每个矩阵的每一列中至多有一个非零元素。

对于 z_0 和 z_l，其中 $l \geqslant 1$，式（8）现在简化为：

$$\Psi(z_0) = z_0 \otimes a + d'_{00} z_0^* \otimes b^* + \sum_{k=1}^{m} d_{0k} z_k \otimes b^*,$$
$$\Psi(z_l) = z_l \otimes a^* + b_{l0} z_0 \otimes b + \sum_{k=1}^{m} b'_{lk} z_k^* \otimes b. \tag{18}$$

像之前一样，将 Ψ 应用于 $z_l z_0 = p z_0 z_l$，第二个张量因子为 $ba = qab$ 的项给出

$$q\big(b_{l0} z_0 + \textstyle\sum_k b'_{lk} z_k^*\big) z_0 = p z_0 \big(b_{l0} z_0 + \textstyle\sum_k b'_{lk} z_k^*\big).$$

特别地，$b'_{lk} p(1-q) z_0 z_k^* = 0$ 在 k，$l \geqslant 1$ 时得出 $b'_{lk} = 0$，因此在这种情形下也有 $B' = 0$。现在，$b_{l0}(p-q) z_0^2 = 0$ 与 $b_{\bullet 0} \neq 0$ 表明 $q = p$。

现在改为比较第二个张量因子为 $a^* b^* = q b^* a^*$ 的项，我们得到

$$d'_{00}(q - q^2) z_l z_0^* + \textstyle\sum_k d_{0k} q (z_l z_k - z_k z_l) = 0.$$

由于 $q - q^2 \neq 0$，这给出 $d'_{00} = 0$，因而 $D' = 0$。剩下 $\sum_k q d_{0k}(z_l z_k - z_k z_l) = 0$，这意味着

$$\sum_{k<l} d_{0k}(q-1) z_k z_l + \sum_{k>l} d_{0k}(1-q) z_l z_k = 0,$$

因此，对于 $k \neq l$，$d_{0k} = 0$。注意到 k，$l \in \{1, \ldots\ldots, m\}$ 和 $m > 1$，这意味着 $d_{0\bullet} = 0$，从而得到 $D = 0$，与关系 $-qA = DB$ 矛盾。因此，这种情形也被排除。□

现在我们仔细考察引理 4.2 的结果，该结果适用于代数 $\mathcal{A}(\mathbb{S}_p^{2m+1})$。

引理 4.6。若 $a_{jj} = 0$，则

(a) $b'_{lj} = 0$对于 $l \neq j$，即只有列 $b'_{\bullet j}$ 的对角项 b'_{jj}可能非零。(b)$b'_{lk} = 0$若 $k \neq j$且 $l \neq j$。

此外，若 $a_{ii} = 1$，则

(c) $d'_{ki} = 0$ 对于 $k \neq i$，即只有列 $d'_{\bullet i}$ 的对角项 d'_{ii} 可能非零。(d) $d'_{kl} = 0$对于 $k \neq i$ 和 $l \neq i$。

证明。(a, b)：在等式（13）中，将指标 i 替换为 l，并注意到 $c_{jj} = 1$，第二张量因子为 $ba = qab$ 的那些项给出

$$\sum_{k=0}^{m} z_j^* (b_{lk} z_k + b'_{lk} z_k^*) + q(\bar{b}_{jk} z_k^* + \bar{d}'_{jk} z_k) a_{ll} z_l$$
$$= \sum_{k=0}^{m} pq (b_{lk} z_k + b'_{lk} z_k^*) z_j^* + p a_{ll} z_l (\bar{d}_{jk} z_k^* + \bar{d}'_{jk} z_k).$$

收集第一张量因子为 $z_j^* z_k^*$ 或 $z_k^* z_j^*$ 的项，得到 $b'_{lk} z_j^* z_k^* = pq b'_{lk} z_k^* z_j^*$。若 $k = j$，由于 $0 < pq < 1$，由此对 $l \neq j$ 可得 $b'_{lj} = 0$。

若 $k < j$，式（3a）给出 $p b'_{lk} z_k^* z_j^* = pq b'_{lk} z_k^* z_j^*$。由于 $0 < q < 1$，因此得到 $b'_{lk} = 0$对于 $l \neq j$。否则，若 $k > j$，则有 $b'_{ik} z_j^* z_k^* = p^2 q b'_{lk} z_j^* z_k^*$，同样得到 $b'_{lk} = 0$对于 $l \neq j$。

（c，d）：采用类似的论证，在式（13）中取指标 j，令 k 并注意到 $a_{ii} = 1$，只收集第二个张量因子为 $ba = qab$ 且第一个张量因子为 $z_k z_i$ 或$z_i z_k$的项，即可得出所述结论。□

前一个引理使我们能够在（15）的基础上再补充两个关系。

推论 4.7。以下是 B' 和 D' 的行满足的关系：

$$\begin{aligned} a_{jj} = 0 &\implies b'_{i\bullet} = 0 \ \textit{for} \ i \neq j; \\ a_{ii} = 1 &\implies d'_{j\bullet} = 0 \ \textit{for} \ j \neq i. \end{aligned} \tag{19}$$

证明。设 $a_{jj} = 0$；则引理4.6 中的关系（a）和（b）成立。在矩阵 B'的任意一列 $b'_{\bullet k}$ 中，非零元素只能出现在行$b'_{j\bullet}$中：若 $k = j$，则为情形（a）；若 $k \neq j$，则为情形（b）。因此，B'的其余各行均为零；这就得到式（19）的第一个蕴含。

T第二个蕴含可由引理 4.6 的 (c) 和 (d) 以同样方式推出。□

推论 4.8。如果 A 的两个对角元素0，则 $B' = 0$；如果A 的两个对角元素1，则 $D' = 0$。⊟

引理 4.9。若 $m > 1$，则 A 不是数量矩阵的情形不会给出 $*$-代数余作用 (8) 在 $\mathcal{A}(\mathrm{SU}_q(2))$ 上的作用 $\mathcal{A}$。

证明。必要时交换行和列，我们可以假设 $\mathrm{diag}(A) = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$，其中 r 个元素为 0，后接 s 个元素为 1，其中 $r \geqslant 1$，$s \geqslant 1$且 $r + s = m + 1$。关系 (15) 表明矩阵 B 和 D 可写成分块形式：

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_* & 0 \end{pmatrix},$$

其中，B_* 是一个 $r \times s$ 矩阵，D_* 是一个 $s \times r$ 矩阵。

这些情形 $r = 1$ 和 $s = 1$ 已由命题4.5排除；因此我们可以假设 $m \geqslant 3$ 并且 $r \geqslant 2$ 以及 $s \geqslant 2$。然后，根据推论4.8，已有 $B' = D' = 0$；而关系$BD + B'B' = -qC$ 化为 $B_* D_* = -qI_r$。特别地，B_* 的任何行以及 D_* 的任何列都不是空的。

同理，关系 $DB + D'D' = -qA$化简为 $D_* B_* = -qI_s$，因此 B_* 的每一列恰好有一个非零项，且 D_* 没有零行。只有当 B_* 和 D_* 是方阵，也就是说，当 $r = s$时，这两个化简后的关系才可能同时成立。因此，m 必须为奇数，且 $r = s = \frac{1}{2}(m + 1)$。于是 B_*、D_* 是可逆的 $r \times r$ 矩阵，其非零项就是（互为逆矩阵的）置换矩阵中的非零项。

关系 (14)，当 $j < r$ 且 $i \geqslant r$时，化简为：

$$\begin{aligned} \Psi(z_j) &= z_j \otimes a^* + \textstyle\sum_h b_{jh} z_h \otimes b, \qquad & \Psi(z_i) &= z_i \otimes a + \textstyle\sum_k d_{ik} z_k \otimes b^*, \\ \Psi(z_j^*) &= z_j^* \otimes a + \textstyle\sum_h \bar{b}_{jh} z_h^* \otimes b^*, \qquad & \Psi(z_i^*) &= z_i^* \otimes a^* + \textstyle\sum_k \bar{d}_{ik} z_k^* \otimes b, \end{aligned} \tag{20}$$

其中，$b_{jh} \neq 0$和 $d_{ik} \neq 0$分别仅对应一个$h \geqslant r$和 $k < r$的取值。选取 k, l使得 $d_{m-1,k} \neq 0$且 $d_{ml} \neq 0$。

将 Ψ 应用于关系 $z_{m-1}^* z_{m-1} = z_{m-1} z_{m-1}^* + (1-p^2) z_m z_m^*$（来自 3c）可得

$$\begin{aligned} &\left(z_{m-1}^* \otimes a^* + \bar{d}_{m-1,k} z_k^* \otimes b\right)\left(z_{m-1} \otimes a + d_{m-1,k}\, z_k \otimes b^*\right) \\ &\quad = \left(z_{m-1} \otimes a + d_{m-1,k}\, z_k \otimes b^*\right)\left(z_{m-1}^* \otimes a^* + \bar{d}_{m-1,k} z_k^* \otimes b\right) \\ &\qquad + (1-p^2)\left(z_m \otimes a + d_{ml}\, z_l \otimes b^*\right)\left(z_m^* \otimes a^* + \bar{d}_{ml} z_l^* \otimes b\right). \end{aligned}$$

比较第二个张量因子为 $ba = qab$ 的项，得到

$$q \bar{d}_{m-1,k} z_k^* z_{m-1} = \bar{d}_{m-1,k} z_{m-1} z_k^* + (1-p^2) \bar{d}_{ml} z_m z_l^*. \tag{21}$$

由于 $k \leqslant r-1 < m-1$，这将意味着

$$(pq-1) \bar{d}_{m-1,k} z_{m-1} z_k^* = (1-p^2) \bar{d}_{ml} z_m z_l^*$$

这不成立，因为 $z_{m-1} z_k^*$ 不是 $z_m z_l^*$的非零倍数。（参见注记 2.1。） □

命题 4.4 和 4.5 以及引理 4.9 穷尽了类型为（8）的“线性”余作用的所有可能性，唯一例外是 $\mathcal{A}(\mathrm{SU}_q(2))$的余乘法。由此得到以下结果。

命题 4.10. 如果 $m > 1$，那么 $\mathcal{A}(\mathbb{S}_p^{2m+1})$ 上不存在 $\mathcal{A}(SU_q(2))$ 的一阶余作用 .

特别是，Vaksman 和 Soibelman 的7维球面不允许一阶 $*$-代数余作用。我们将在下文第 7节中将其与四元数 7 维球面进行比较。不过，由于 $\mathcal{O}(\mathbb{S}_q^7)$上确实存在 $\mathcal{A}(\mathrm{SU}_q(2))$ 的右余作用，我们可以先给出一个显而易见的推论。

推论 4.11. $\mathcal{A}(\mathbb{S}_p^7)$ 和 $\mathcal{O}(\mathbb{S}_q^7)$ 这两个代数不同构，无论 p 和 q取何值。

仔细考察前面的结果可以发现，在 $q = 1$ 的极限情形下，Vaksman 和 Soibelman 的代数上也不存在群 $SU(2)$ 的作用。

4.1 非交换3维球面上的余作用

当 $m = 1$时，先前的一些不可能性结果不再成立，因此有必要单独考察这种情形。正如已经指出的，Vaksman–Soibelman 3球面代数$\mathcal{A}(\mathbb{S}_q^3)$ 恰好就是 $\mathcal{A}(\mathrm{SU}_q(2))$，因为当 3和 4中的关系在 1时与之重合 $m = 1$，并且有如下对应关系 $z_0 = a$， $z_1 = b$。不过，为求清晰起见，我们在第一个张量因子中仍采用记号 z_0， z_1 。

考虑 $A = I$ 上 $\mathcal{A}(\mathrm{SU}_q(2))$ 的余作用 $\mathcal{A}(\mathbb{S}^3_p)$这一情形。推论 4.3 表明，唯一非零的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad D' = \begin{pmatrix} 0 & d'_{01} \\ d'_{10} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad d'_{01}\bar{d}'_{10} = -q.$$

因此（16）化简为

$$\Psi(z_0) = z_0 \otimes a + d'_{01} z_1^* \otimes b^*, \qquad \Psi(z_1) = z_1 \otimes a + d'_{10} z_0^* \otimes b^*$$

以及它们的共轭关系。命题4.4证明的第一部分表明$d'_{10}(q-p) = 0$，这里同样有 $p = q$。

设 $d'_{10} =: \omega r$ 其中 $|\omega| = 1, \quad r > 0$；于是 $d'_{01} = -\omega q/r$。现在，关系（1）表明

$$\Psi(z_1)\Psi(z_0) - q\Psi(z_0)\Psi(z_1) = \omega q(1-q^2)(r - 1/r) z_1^* z_1 \otimes ab^*,$$

当且仅当 $r = 1$时其为零。这就得到右余作用

$$\begin{aligned} \Psi(z_0) &= z_0 \otimes a - \omega q\, z_1^* \otimes b^*, \\ \Psi(z_1) &= z_1 \otimes a - \omega\, z_0^* \otimes b^*, \quad \text{with} \quad |\omega| = 1. \end{aligned} \tag{22}$$

在自身上的另一个 $\mathcal{A}(\mathrm{SU}_q(2))$ 余作用来自取 $A = 0$ 和 $C = I$，并将 D' 与 B' 交换，参见推论4.3。现在令 $b'_{10} = \omega r$ 和 $b'_{01} = -\omega q/r$，我们再次得到 $r = 1$，并得到

$$\begin{aligned} \Psi(z_0) &= z_0 \otimes a^* - \omega q\, z_1^* \otimes b, \\ \Psi(z_1) &= z_1 \otimes a^* - \omega\, z_0^* \otimes b, \end{aligned} \tag{23}$$

再次带有一个自由参数 ω，满足 $|\omega| = 1$。

接下来考虑情形 $a_{00} = 0, \quad a_{11} = 1$。根据命题 4.5(a) 的证明，系数矩阵中唯一可能非零的项为 $a_{11} = c_{00} = 1, \quad b_{01}, \quad d_{10}, \quad b'_{00}$ 和 d'_{11}。公式（17）简化为

$$\begin{aligned} \Psi(z_0) &= z_0 \otimes a^* + b'_{00} z_0^* \otimes b + b_{01} z_1 \otimes b, \\ \Psi(z_1) &= z_1 \otimes a + d_{10} z_0 \otimes b^* + d'_{11} z_1^* \otimes b^*. \end{aligned}$$

计算 $\Psi(z_1)\Psi(z_0) - p\Psi(z_0)\Psi(z_1)$ 后，$z_0^2 \otimes b^* a^*$ 的系数为 $d_{10}(1-pq) = 0$，这迫使 $d_{10} = 0$，因而 $D = 0$。接着，$-qC = B'B'$ 表明 $-q = |b'_{00}|^2$，这是不可能的；因此，当 $m = 1$时，这种情形也可以排除。

需要考虑的最后一种情形是 $a_{00} = 1, \quad a_{11} = 0$。由命题4.5(b) 的证明可知，系数矩阵中唯一可能非零的元素是 $a_{00} = c_{11} = 1, \quad b_{10}, \quad d_{01}, \quad b'_{11}$ 和d'_{00}。公式（18）可简化为

$$\begin{aligned} \Psi(z_0) &= z_0 \otimes a + d'_{00} z_0^* \otimes b^* + d_{01} z_1 \otimes b^*, \\ \Psi(z_1) &= z_1 \otimes a^* + b_{10} z_0 \otimes b + b'_{11} z_1^* \otimes b. \end{aligned}$$

计算 $\Psi(z_1)\Psi(z_0) - p\Psi(z_0)\Psi(z_1)$ 后， $z_0 z_1^* \otimes ab$的系数为 $b'_{11}p(q-1) = 0$，这迫使 $b'_{11} = 0$ 成立，进而得到 $B' = 0$。然后 $-qC = BD$ 表明 $-q = b_{10}d_{01}$。

令 $b_{10} =: \bar{\omega}r$，如前所述，取 $|\omega| = 1, r > 0$；现在取

$$\Psi(z_0) = z_0 \otimes a + d_{01} z_1 \otimes b^*, \qquad \Psi(z_1^*) = z_1^* \otimes a + \bar{b}_{10} z_0^* \otimes b^*,$$

我们得到

$$\Psi(z_1^*)\Psi(z_0) - q\Psi(z_0)\Psi(z_1^*) = \omega q(1-q^2)(r - 1/r) z_1^* z_1 \otimes ab^*,$$

这再次迫使 $r = 1$。由于 $z_0 = a, z_1 = b$，结果是

$$\begin{aligned} \Psi(a) &= a \otimes a - \omega q b \otimes b^*, \\ \Psi(b) &= b \otimes a^* + \bar{\omega} a \otimes b, \end{aligned} \tag{24}$$

再次取一个自由参数 $\omega \in \mathbb{T}$。当然，取值 $\omega = 1$ 给出预期的余乘法 (10)。

5 在四元数7-球面上的应用

现在我们考察可能的右余作用 $\Psi\colon \mathcal{O}(\mathbb{S}_q^7) \to \mathcal{O}(\mathbb{S}_q^7) \otimes \mathcal{A}(\mathrm{SU}q(2))$，以检验由 11 得到的余作用 ([2] 的唯一性。为此，我们将确定上述所有这类一阶余作用。

因此，我们取 Ψ 为由（8）给出的余作用，其中系数矩阵现取自 $M_4(\mathbb{C})$，并满足 $A + C = I$ 和 $A' + C' = 0$。表1 中的所有关系均适用，引理3.3 和3.4 也成立；也就是说，每个矩阵列至多有一个非零项，并且 A和 C 是幂等对角矩阵。第4 节中得到的其他关系则不能想当然地认为成立。

由于 [13]和 [2], 中导出的 Hopf 纤维化具有四元数结构，其x_j 生成元 $*$-代数 $\mathcal{O}(\mathbb{S}_q^7)$ 按两组成对元素排列，并具有一定程度的对称性 $(x_0, x_1) \leftrightarrow (x_2, x_3)$；参见上文的关系（5）和（7）。不过，这种部分对称性被（6）中的交换关系打破。现在我们作出拟设，认为Ψ 保持这种对称性：也就是说，采用（8）中的记号，

$$\Psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = \Psi(x_2, x_3, x_0, x_1).$$

右余作用 δ_R，声明于 [2, 引理3.4] ，并在此记为（11），确实具有这种结构。

将（$M = A$）、B等矩阵写成分块形式（8） $\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$，可得

$$M_{11}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + M_{12}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M_{21}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + M_{22}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

或者更简洁地说，这些 2×2 块满足

$$M_{11} = M_{22} \quad \text{and} \quad M_{12} = M_{21}. \tag{25}$$

在此拟设（25）下，引理 4.1 的结论仍然成立，尽管其先前的证明依赖于代数 $\mathcal{A}$（$\mathbb{S}_p^{2m+1}$）中的交换关系（3b）。然而，式（$x_3^* x_0$ 和 $x_3^* x_1$ 中的关系（6）因一些额外项而变得复杂。

引理 5.1。对于 $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathbb{S}_q^7)$，条件（25）蕴含 $A' = C' = 0$。

证明。如引理 4.1证明的第一部分所述，我们再次比较将 Ψ应用于式（$x_i^* x_j = p_{ij} x_j x_i^*$5）和（6）中的 $x_k^2 \otimes a^2$型关系时 $x_k^{*2} \otimes a^2$和 Ψ的项的 $x_i^* x_j = p_{ij} x_j x_i^*$系数，得到：

$$a_{ik}\bar{a}'_{jk} = 0 \quad \text{and} \quad c_{ik}\bar{a}'_{jk} = 0 \quad \text{for} \quad i \neq j \ \text{ in } \{0,1,2\} \text{ (only)}.$$

利用 $A + C = I$，可知 3×3 的首个 A' 块是对角的。对 $M = A'$应用（25），得到

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{11} & 0 & a'_{13} \\ 0 & 0 & a'_{00} & 0 \\ 0 & a'_{13} & 0 & a'_{11} \end{pmatrix}.$$

现在$A^2 - A'\overline{A'} = A$（表1）和 $A^2 = A$（引理3.4）表明 $A'A' = 0$。由于 A'在此处是对称的，$A'A' = \overline{A'}(A')^*$是半正定的，而 $A'(A')^* = 0$表明 $A' = 0$。

最后，$C' = -A' = 0$ 也一样。 □

由此立即可得一个推论：更简单的表2 也适用于作用在 $\mathcal{O}(\mathbb{S}_q^7)$ 上且满足（25）的余作用。于是，引理4.2和推论4.3 在这种情况下也都成立。

对称性 $A_{11} = A_{22}$ 意味着 A 可能的对角线只有 (1，0，1，0)、(0，1，0，1)，以及标量对角线 (1，1，1，1) 和 (0，0，0，0)。我们接下来排除前两种可能。

引理 5.2. 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathbb{S}_q^7)$，对角矩阵$(A) = (1，0，1，0)$ 不是有效配置。

证明。由引理4.2 及（25），

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{10} & 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{12} & 0 & b_{10} & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & d_{01} & 0 & d_{03} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{03} & 0 & d_{01} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

并且

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b'_{11} & 0 & b'_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b'_{13} & 0 & b'_{11} \end{pmatrix}, \qquad D' = \begin{pmatrix} d'_{00} & 0 & d'_{02} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d'_{02} & 0 & d'_{00} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

每一列至多有一个非零项；这意味着

$$b_{10}b_{12} = d_{01}d_{03} = b'_{11}b'_{13} = d'_{00}d'_{02} = 0.$$

表2 中的关系 (f) 和 (h) 进而推出

$$b_{k\bullet} \cdot d_{\bullet k} + b'_{k\bullet} \cdot \bar{b}'_{\bullet k} = -q \text{ for } k = 1, 3; \qquad d_{l\bullet} \cdot b_{\bullet l} + d'_{l\bullet} \cdot \bar{d}'_{\bullet l} = -q \text{ for } l = 0, 2.$$

显然， $B = 0$或 $D = 0$不可能成立，因为这会推出 $\|b'_{k\bullet}\|^2 = -q$或 $\|d'_{l\bullet}\|^2 = -q$。此外，出于同样的原因， $b_{10} = 0 = d_{03}$ 或 $b_{12} = 0 = d_{01}$ 也不成立。

若 $b_{10} = 0 = d_{01}$ 而 $b_{12} \neq 0 \neq d_{03}$，则 (8) 变为

$$\begin{aligned} \Psi(x_0) &= x_0 \otimes a + d_{03}x_3 \otimes b^* + (d'_{00}x_0^* + d'_{02}x_2^*) \otimes b^*, \\ \Psi(x_1) &= x_1 \otimes a^* + b_{12}x_2 \otimes b + (b'_{11}x_1^* + b'_{13}x_3^*) \otimes b, \\ \Psi(x_2) &= x_2 \otimes a + d_{03}x_1 \otimes b^* + (d'_{02}x_0^* + d'_{00}x_2^*) \otimes b^*, \\ \Psi(x_3) &= x_3 \otimes a^* + b_{12}x_0 \otimes b + (b'_{13}x_1^* + b'_{11}x_3^*) \otimes b, \end{aligned}$$

with

$$b_{12}d_{03} + |b'_{11}|^2 + |b'_{13}|^2 = -q = b_{12}d_{03} + |d'_{00}|^2 + |d'_{02}|^2 \quad \text{and} \quad b'_{11}b'_{13} = 0 = d'_{00}d'_{02}.$$

将 Ψ 应用于关系 $x_3^*x_0 = q^{-1/2}x_0x_3^* + (q - q^{-1})x_2x_1^*$，然后比较第一张量因子为 $x_1x_1^*$ 或 $x_3x_3^*$、第二张量因子为 $b^*a = qab^*$ 的项，可得

$$d_{03}x_3^*x_3 = q^{1/2}d_{03}x_3x_3^* - (1 - q^2)d_{03}x_1x_1^*.$$

wher也用到了 e (5)。但这将推出 $d_{03} = 0$，与假设矛盾 .

采用 $b_{21} = 0 = d_{03}$ 与 $b_{10} \neq 0 \neq d_{01}$ 的替代方案同样会陷入僵局。 □

类似的计算表明，diag(A) =(0，1，0，1) 也不成立。

命题5.3。 $\mathcal{A}(\mathrm{SU}_q(2))$ 在$\mathcal{O}(\mathbb{S}^7_q)$上的一阶右余作用有两个族，由以下公式给出

$$A = I \quad \textit{and} \quad \Psi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \otimes a + \omega T(\boldsymbol{x}^*) \otimes b^*, \tag{26a}$$

$$A = 0 \quad \textit{and} \quad \Psi'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \otimes a^* + \omega T(\boldsymbol{x}^*) \otimes b, \tag{26b}$$

其中 $\omega \in \mathbb{T}$ 且 $T \in M_4$(C矩阵) 具有如下形式 (25)，其中

$$T_{11} = T_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{and} \quad T_{12} = T_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{26c}$$

证明。 (a)：首先假设 $A = I$。由推论 4.3可知，唯一其他非零系数矩阵是 D'，它满足 $D'D' = -qI$ 且对角线上全为零。由于 $d'_{l\bullet} \cdot \overline{d'_{\bullet l}} = -q$对每个 l都成立， D' 的任何行或列都不可能全为零。由引理 3.3 可知， D' 的每一列 —— 现在每一行也一样 —— 都恰有一个（非对角的）非零项。应用（ 25 ），得到

$$D'_{11} = D'_{22} = \begin{pmatrix} 0 & d'_{01} \\ d'_{10} & 0 \end{pmatrix}, \qquad D'_{12} = D'_{21} = \begin{pmatrix} d'_{02} & d'_{03} \\ d'_{12} & d'_{13} \end{pmatrix}.$$

假设 $d'_{01} = 0$；那么在第 $d'_{0\bullet}$ 行中， $d'_{03} \neq 0$ 或 $d'_{02} \neq 0$必有其一成立，但不能同时成立。若 $d'_{03} \neq 0$ ，使得 $d'_{02} = 0 = d'_{13}$，我们得到

$$\Psi(x_0) = x_0 \otimes a + d'_{03} x_3^* \otimes b^*, \qquad \Psi(x_2) = x_2 \otimes a + d'_{03} x_1^* \otimes b^*.$$

由 $\Psi(x_2)\Psi(x_0) = q^{1/2}\Psi(x_0)\Psi(x_2)$，第二个张量因子为 $b^*a = qab^*$ 的项给出

$$d'_{03}(1 - q^{5/2}) x_2 x_3^* = d'_{03}(q^{1/2} - q^2) x_0 x_1^*,$$

这是不可能的，因为 $d'_{03} \neq 0$。另一方面，若 $d'_{02} \neq 0$，使得 $d'_{03} = 0 = d'_{12}$，我们发现

$$\Psi(x_0) = x_0 \otimes a + d'_{02} x_2^* \otimes b^*, \qquad \Psi(x_2) = x_2 \otimes a + d'_{02} x_0^* \otimes b^*.$$

现在同样的计算得到

$$d'_{02}(1 - q^{3/2}) x_2 x_2^* = d'_{02}(q^{1/2} - q) x_0 x_0^*$$

这仍然不可能，因为 $d'_{02} \neq 0$。

结果是 $d'_{01} \neq 0$；事实上， $d'_{10} \neq 0$ 也成立——连同 $D'_{12} = 0$ 一起——因为 $D'\overline{D'} = -qI$ 蕴含 $d'_{01} d'_{10} = -q$。

写成 $d'_{01} =: \omega r \in \mathbb{C}$矩阵 与 $|\omega| = 1$， $r > 0$；则 $d'_{10} = -\omega q/r$。现在（8）化为

$$\begin{aligned} \Psi(x_0) &= x_0 \otimes a + \omega r x_1^* \otimes b^*, & \Psi(x_2) &= x_2 \otimes a + \omega r x_3^* \otimes b^*, \\ \Psi(x_1) &= x_1 \otimes a - \omega(q/r) x_0^* \otimes b^*, & \Psi(x_3) &= x_3 \otimes a - \omega(q/r) x_2^* \otimes b^*. \end{aligned} \tag{27}$$

比较应用 $a^*b^* = qb^*a^*$ 于球面关系（ Ψ 的第二个张量因子 7）后的各项，我们得到

$$\omega q^2 (r - 1/r)(x_1^* x_0^* + x_3^* x_2^*) = 0,$$

这意味着 $|d'_{01}| = r = 1$；而对 ω 没有任何条件。

(b)：现在假设 $A = 0$，或者等价地， $C = I$。再次由推论4.3，可知 $B = D = D' = 0$ 且 $B'B' = -qI$，这意味着 $b'_{l\bullet} \cdot \overline{b'_{\bullet l}} = -q$ 对每个 l均成立，因此 B' 的任何行或列都不可能全为零；每一行和每一列都恰有一个（非对角的）非零项。因此，

$$B'_{11} = B'_{22} = \begin{pmatrix} 0 & b'_{01} \\ b'_{10} & 0 \end{pmatrix}, \qquad B'_{12} = B'_{21} = \begin{pmatrix} b'_{02} & b'_{03} \\ b'_{12} & b'_{13} \end{pmatrix}.$$

现在假设 $b'_{01}=0$和 $b'_{03}\neq 0$，因此 $b'_{02}=0=b'_{13}$；由此，

$$\Psi'(x_0)=x_0\otimes a^*+b'_{03}x_3^*\otimes b,\qquad \Psi'(x_2)=x_2\otimes a^*+b'_{03}x_1^*\otimes b.$$

再次由 $\Psi'(x_2)\Psi'(x_0)=q^{1/2}\Psi'(x_0)\Psi'(x_2)$，使用第二个张量因子为 $a^*b=qba^*$ 的项，我们得到

$$b'_{03}q(1-q^{1/2})(x_2x_3^*-x_0x_1^*)=0,$$

矛盾 的 $b'_{03}\neq 0$。若改为 $b'_{01}=0$和 $b'_{02}\neq 0$，使得 $b'_{03}=0=b'_{12}$，则得到 at

$$\Psi'(x_0)=x_0\otimes a^*+b'_{02}x_2^*\otimes b,\qquad \Psi'(x_2)=x_2\otimes a^*+b'_{02}x_0^*\otimes b,$$

从而得到

$$b'_{02}(1-q^{3/2})x_0x_0^*=b'_{02}(q^{1/2}-q)x_2x_2^*$$

这与 $b'_{02}\neq 0$ 矛盾。因此，$b'_{01}\neq 0$。和之前一样，$b'_{10}\neq 0$，结合 $B'_{12}=0$，因为 $B'\overline{B'}=-qI$ 蕴含$b'_{01}b'_{10}=-q$。

在这种情形下，我们令 $b'_{01}=:\omega r\in$ C矩阵，其中 $|\omega|=1$ 和 $r>0$；以及 $b'_{10}=-\omega(q/r)$。此时余作用的形式为

$$\begin{aligned}\Psi'(x_0)&=x_0\otimes a^*+\omega r x_1^*\otimes b, & \Psi'(x_2)&=x_2\otimes a^*+\omega r x_3^*\otimes b,\\ \Psi'(x_1)&=x_1\otimes a^*-\omega(q/r)x_0^*\otimes b, & \Psi'(x_3)&=x_3\otimes a^*-\omega(q/r)x_2^*\otimes b,\end{aligned}\tag{28}$$

并且与之前一样，我们得到 $r=1$。

(26) 的两种情形现均已得到验证。 □

显然，Brain 和 Landi 在 [2]中得到的余作用 (11) 是 (27) 的情形 $\omega=1$。我们分析中的新特点是第二个余作用族 (28)（在两个公式中都代入 $r=1$）。

命题 5.4。右余作用 (26a)对应的 余作用不变子代数 $\mathcal{B}$， $\mathcal{O}(\mathbb{S}^7_q)$ 与 ω无关。它是由元素 X_0, X_1, X_2生成的 $*$-代数，其中

$$\begin{aligned}X_0&:=2\big(q^2x_0x_0^*+x_1^*x_1\big)-1=2\big(x_0x_0^*+x_1x_1^*\big)-1=X_0^*,\\ X_1&:=2\big(q^2x_0x_2^*+x_1^*x_3\big),\qquad X_2:=2\big(qx_0x_3^*-x_1^*x_2\big),\end{aligned}\tag{29}$$

满足以下关系：X_0 是中心的，并且

$$\begin{aligned}X_1X_2&=X_2X_1, & X_2^*X_2&=q^{-1}X_2X_2^*,\\ X_1^*X_2&=q^{-1}X_2X_1^*, & X_1^*X_1&=qX_1X_1^*-q^{-2}(1-q^2)\,X_2^*X_2,\end{aligned}\tag{30}$$

以及球面关系：

$$qX_1X_1^*+q^{-1}X_2X_2^*+X_0^2=1.\tag{31}$$

这些关系使我们能够将 $\mathcal{B}=:\mathcal{A}(\mathbb{S}^4_q)$ 识别为一个非交换4球面。

证明。代数关系（30）和（31）的证明虽然计算冗长但直接明了，我们将其推迟到附录A。

容易验证，X_i（29）中的元素都是余作用不变量。例如，

$$\begin{aligned}\Psi(\tfrac{1}{2}(X_0+1)) &= q^2(x_0\otimes a+\omega x_1^*\otimes b^*)(x_0^*\otimes a^*+\bar\omega x_1\otimes b)\\ &\quad+(x_1^*\otimes a^*-q\bar\omega x_0\otimes b)(x_1\otimes a-q\omega x_0^*\otimes b^*)\\ &= q^2x_0x_0^*\otimes(aa^*+bb^*)+x_1^*x_1\otimes(q^2b^*b+a^*a)\\ &= q^2x_0x_0^*\otimes 1+x_1^*x_1\otimes 1=\tfrac{1}{2}(X_0+1)\otimes 1.\end{aligned}$$

类似地，$\Psi(\frac{1}{2}X_1) = q^2x_0x_2^*\otimes 1+x_1^*x_3\otimes 1$ 和 $\Psi(\frac{1}{2}X_2)_- = qx_0x_3^*\otimes 1-x_1^*x_2\otimes 1$ 可通过类似的计算得出。□

注 5.5。非交换 4-球面 $\mathcal{B}$的交换关系（30）和（31）直接由非交换 7-球面$\mathcal{O}(\mathbb{S}_q^7)$ 的定义关系（5）、（6）和（7）得到。现在，除了记号上的差异（$q\leftrightarrow q^{-1}$ 和 $X_i\leftrightarrow x_i$）之外，7-球面关系和余作用不变量与论文 [2]中给出的一致。在该文中，非交换 7-球面 $\mathcal{B}$ 的生成元（29）作为矩阵投影算子 $\boldsymbol{p}$的矩阵元出现。然而，方程 $\boldsymbol{p}^2=\boldsymbol{p}$ 导出的关系与此处给出的关系不同，见 [2, 式 (3.18)], ，因此值得在附录 A 中直接推导这些关系。

还可以证明，迄今得到的结构是一个非交换主丛；也就是说，典范映射 $\chi\colon \mathcal{O}(\mathbb{S}_q^7)\otimes_{\mathcal{B}}\mathcal{O}(\mathbb{S}_q^7)\to\mathcal{O}(\mathbb{S}_q^7)\otimes\mathcal{A}(\mathrm{SU}q(2))$ 是双射。正如 [18, 第 12 节 1], 后文所述，[17], 只需证明提升后的典范映射

$$\tilde\chi\colon \mathcal{O}(\mathbb{S}_q^7)\otimes\mathcal{O}(\mathbb{S}_q^7)\to\mathcal{O}(\mathbb{S}_q^7)\otimes\mathcal{A}(\mathrm{SU}_q(2)) : x\otimes y\mapsto x\,\Psi(y)$$

是满射。因此，例如，

$$\begin{aligned}&\tilde\chi(q^2x_0^*\otimes x_0+x_1^*\otimes x_1+q^2x_2^*\otimes x_2+x_3^*\otimes x_3)\\ &\quad=(q^2x_0^*x_0+x_1^*x_1+q^2x_2^*x_2+x_3^*x_3)\otimes a\\ &\qquad+(q^2\omega x_0^*x_1^*-q\omega x_1^*x_0^*+q^2\omega x_2^*x_3^*-q\omega x_3^*x_2^*)\otimes b^*=1\otimes a,\end{aligned}$$

利用（5）和（7）；类似地，

$$\begin{aligned}\tilde\chi(x_0\otimes x_0^*+x_1\otimes x_1^*+x_2\otimes x_2^*+x_3\otimes x_3^*)&=1\otimes a^*,\\ \tilde\chi(x_1^*\otimes x_0^*-qx_0^*\otimes x_1^*+x_3^*\otimes x_2^*-qx_2^*\otimes x_3^*)&=\bar\omega\otimes b,\\ \tilde\chi(x_0\otimes x_1-qx_1\otimes x_0+x_2\otimes x_3-qx_3\otimes x_2)&=-q\omega\otimes b^*.\end{aligned}$$

由于 $\bar\omega$ 和 $-q\omega$ 是标量，$\tilde\chi$ 的像对 $\mathcal{A}(\mathrm{SU}q(2))$ 的每个代数生成元 c 都包含 $1\otimes c$；又由于 Ψ 是代数余作用，因此 $\tilde\chi$ 是满射。

最后，我们简要考虑另一个余作用 Ψ'，由（26b）给出。

引理 5.6. 余作用不变子代数 $\mathcal{B}'$ 属于 $\mathcal{O}(\mathbb{S}^7_q)$，对于右余作用 （26b）不依赖于 ω。它是 $*$-代数，由

$$Y_0 := 2\big(q^2 x_0^* x_0 + x_1 x_1^*\big) - 1 = 2\big(x_0^* x_0 + x_1^* x_1\big) - 1 = Y_0^*,$$
$$Y_1 := 2\big(q^2 x_0^* x_2 + x_1 x_3^*\big), \qquad Y_2 := 2\big(q x_0^* x_3 - x_1 x_2^*\big).$$

$\mathcal{B}'$ 的余作用不变性以及 $\tilde{\chi}' : \ x \otimes y \mapsto x\,\Psi'(y)$ 的满射性，都可以像验证 $\mathcal{B}$ 和 $\tilde{\chi}$那样，通过检验代数生成元来确认。Y_i 和 Y_i^*之间的交换关系不那么显然，因此不清楚 $\mathcal{B}'$ 是否也可以称为非交换 4-球面。

A 非交换4-球面关系

为了完成命题 5.4的证明，必须确立关系 (30) 和 (31)。这只需直接计算即可，但由于结果与 [2, 式 (3.18)], 不一致，我们给出详细推导。

首先，由代数关系 (5) 和 (6)，我们可以推出几个简单的三次关系：

$$\begin{aligned}
&x_0 x_0^* x_1 = q^2\, x_1 x_0^* x_0, \qquad x_0 x_0^* x_2 = x_2 x_0^* x_0, \qquad x_0 x_2^* x_1 = q\, x_1 x_2^* x_0,\\
&x_2 x_0^* x_1 = q\, x_1 x_0^* x_2, \qquad x_2 x_2^* x_0 = q\, x_0 x_2^* x_2, \qquad x_2 x_2^* x_1 = q\, x_1 x_2^* x_2.
\end{aligned} \tag{32}$$

另外几个三次关系的右侧包含更多项：

$$\begin{aligned}
x_2 x_1^* x_1 &= x_1 x_1^* x_2 + (1-q^2) x_0 x_0^* x_2,\\
x_3 x_0^* x_0 &= x_0 x_0^* x_3 + q^{-3/2}(1-q^2)\, x_0 x_2^* x_1,\\
x_3 x_1^* x_2 &= x_2 x_1^* x_3 - q^{-1/2}(1-q^2) x_2 x_2^* x_0,\\
x_3 x_1^* x_1 &= x_1 x_1^* x_3 + (1-q^2)(x_3 x_0^* x_0 - q^{-1/2}\, x_1 x_2^* x_0),\\
x_0 x_3^* x_3 &= q\, x_3 x_3^* x_0 + (1-q^2)(x_0 x_2^* x_2 + q^{-1/2}\, x_3 x_1^* x_2).
\end{aligned} \tag{33}$$

我们用一种便于书写的形式列出 $\mathcal{B}$的代数生成元：

$$\begin{aligned}
X_0 &= 2(x_0 x_0^* + x_1 x_1^*) - 1 \quad = X_0^* = 1 - 2(x_2 x_2^* + x_3 x_3^*),\\
X_1 &= 2(q^{-1/2} x_3 x_1^* + x_0 x_2^*), \quad X_1^* = 2(q^{-1/2} x_1 x_3^* + x_2 x_0^*),\\
X_2 &= 2(q x_0 x_3^* - q^{1/2} x_2 x_1^*), \quad X_2^* = 2(q x_3 x_0^* - q^{1/2} x_1 x_2^*).
\end{aligned}$$

.....的中心性 X_0 以及关系（30）和（31）现在可以直接使用（32）和（33）进行验证，如下所示。

(a) 为了证明 X_0 与 X_1 （以及与 X_1^*）可交换，我们首先注意到单项式 $x_i x_j^*$ 的几个乘积：

$$\begin{aligned}
x_0 x_0^*\, x_0 x_2^* &= x_0 x_2^*\, x_0 x_0^*,\\
x_1 x_1^*\, x_0 x_2^* &= x_0 x_2^*\, x_1 x_1^*,\\
x_0 x_0^*\, x_3 x_1^* &= q^{-2}\, x_3 x_1^*\, x_0 x_0^* - q^{-3/2}(1-q^2) x_0 x_2^* x_1 x_1^*,\\
x_1 x_1^*\, x_3 x_1^* &= x_3 x_1^*\, x_1 x_1^* - (1-q^2) x_3 x_0^* x_0 x_1^* + q^{-1/2}(1-q^2) x_1 x_2^* x_0 x_1^*.
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}[X_0, X_1] &= [x_0x_0^*, x_0x_2^*] + [x_1x_1^*, x_0x_2^*] + q^{-1/2}[x_0x_0^*, x_3x_1^*] + q^{-1/2}[x_1x_1^*, x_3x_1^*] \\ &= q^{-2}(1-q^2)\big(q^{-1/2}\,x_3x_1^*x_0x_0^* - x_0x_2^*x_1x_1^* - q^{3/2}\,x_3x_0^*x_0x_1^* + q\,x_1x_2^*x_0x_1^*\big) = 0.\end{aligned}$$

这里以及下文中，我们使用了公式（32），例如，用于得到最后一行中的消去。

(b) 为证明 X_0 与 X_2 （以及 X_2^*）可交换，我们采用类似的方法：

$$\begin{aligned}x_0x_0^*\,x_2x_1^* &= q^{-2}\,x_2x_1^*\,x_0x_0^*, \\ x_1x_1^*\,x_2x_1^* &= x_2x_1^*\,x_1x_1^* - (1-q^2)x_2x_0^*x_0x_1^*, \\ x_0x_0^*\,x_0x_3^* &= x_0x_3^*\,x_0x_0^* + q^{-3/2}(1-q^2)x_0x_1^*x_2x_0^*, \\ x_1x_1^*\,x_0x_3^* &= x_0x_3^*\,x_1x_1^* - q^{-1/2}(1-q^2)x_0x_0^*x_2x_1^*,\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}[X_0, X_2] &= -q^{-1/2}[x_0x_0^*, x_2x_1^*] - q^{-1/2}[x_1x_1^*, x_2x_1^*] + q[x_0x_0^*, x_0x_3^*] + q[x_1x_1^*, x_0x_3^*] \\ &= -q^{-3/2}(1-q^2)\big(x_2x_1^*x_0x_0^* - q^2\,x_2x_0^*x_0x_1^* - q\,x_0x_1^*x_2x_0^* + q^2\,x_0x_0^*x_2x_1^*\big) = 0.\end{aligned}$$

由此可知， X_0 是 $\mathcal{B}$ 中心的。

(c) 为证明 X_1 与 X_2 可交换：

$$\begin{aligned}x_0x_2^*\,x_2x_1^* &= q^{-2}\,x_2x_1^*\,x_0x_2^*, \\ x_3x_1^*\,x_2x_1^* &= x_2x_1^*\,x_3x_1^* - q^{-1/2}(1-q^2)x_2x_2^*x_0x_1^*, \\ x_0x_2^*\,x_0x_3^* &= x_0x_3^*\,x_0x_2^* + q^{-3/2}(1-q^2)x_0x_1^*x_2x_2^*, \\ x_3x_1^*\,x_0x_3^* &= x_0x_3^*\,x_3x_1^* - (1-q^2)x_0x_2^*x_2x_1^*,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}[X_1, X_2] &= -q^{1/2}[x_0x_2^*, x_2x_1^*] - [x_3x_1^*, x_2x_1^*] + q[x_0x_2^*, x_0x_3^*] + q^{1/2}[x_3x_1^*, x_0x_3^*] \\ &= -q^{-3/2}(1-q^2)\big(x_2x_1^*x_0x_2^* - q\,x_2x_2^*x_0x_1^* - q\,x_0x_1^*x_2x_2^* + q^2\,x_0x_2^*x_2x_1^*\big) = 0.\end{aligned}$$

(d) 关于 X_2^* 与 X_2 的交换关系，我们需要

$$\begin{aligned}x_1x_2^*\,x_2x_1^* &= q^{-1}\,x_2x_1^*\,x_1x_2^* - q^{-1}(1-q^2)x_0x_0^*x_2x_2^*, \\ x_1x_2^*\,x_0x_3^* &= q^{-1}\,x_0x_3^*\,x_1x_2^* - q^{-3/2}(1-q^2)x_0x_0^*x_2x_2^*, \\ x_3x_0^*\,x_2x_1^* &= q^{-1}\,x_2x_1^*\,x_3x_0^* - q^{-3/2}(1-q^2)x_2x_2^*x_0x_0^*, \\ x_3x_0^*\,x_0x_3^* &= q^{-1}\,x_0x_3^*\,x_3x_0^* - q^{-1}(1-q^2)x_0x_2^*x_2x_0^*,\end{aligned}$$

据此

$$\tfrac{1}{4}(X_2^*X_2 - q^{-1}X_2X_2^*) = (1-q^2)\big(x_0x_0^*x_2x_2^* - x_0x_0^*x_2x_2^* + x_2x_2^*x_0x_0^* - q\,x_0x_2^*x_2x_0^*\big) = 0.$$

（e）对于 X_1^* 和 X_2的交换关系，我们需要

$$\begin{aligned}
x_2x_0^*x_2x_1^* &= q^{-1}\,x_2x_1^*x_2x_0^*,\\
x_2x_0^*x_0x_3^* &= q^{-1}\,x_0x_3^*x_2x_0^*,\\
x_1x_3^*x_2x_1^* &= q\,x_2x_1^*x_1x_3^* - q(1-q^2)x_2x_0^*x_0x_3^*,\\
x_1x_3^*x_0x_3^* &= q^{-1}\,x_0x_3^*x_1x_3^* - q^{-3/2}(1-q^2)x_0x_0^*x_2x_3^* - q^{-3/2}(1-q^2)x_1x_1^*x_2x_3^*
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4}(X_1^*X_2 - q^{-1}X_2X_1^*) &= q^{-1}(1-q^2)\big(x_2x_1^*x_1x_3^* + q^2\,x_2x_0^*x_0x_3^* - x_0x_0^*x_2x_3^* - x_1x_1^*x_2x_3^*\big)\\
&= -q(1-q^2)\big(x_0x_0^*x_2x_3^* - x_2x_0^*x_0x_3^*\big) = 0.
\end{aligned}$$

(f) 对于 X_1^* 和 X_1的交换关系，我们利用

$$\begin{aligned}
x_2x_0^*x_0x_2^* &= q\,x_0x_2^*x_2x_0^*,\\
x_2x_0^*x_3x_1^* &= q^{-1}\,x_3x_1^*x_2x_0^* - q^{-3/2}(1-q^2)x_2x_2^*x_1x_1^*,\\
x_1x_3^*x_0x_2^* &= q^{-1}\,x_0x_2^*x_1x_3^* - q^{-3/2}(1-q^2)x_1x_1^*x_2x_2^*,\\
x_1x_3^*x_3x_1^* &= q\,x_3x_1^*x_1x_3^* - q(1-q^2)x_3x_0^*x_0x_3^* + (1-q^2)x_1x_2^*x_2x_1^*.
\end{aligned}$$

其中第二个和第三个可以改写为

$$\begin{aligned}
x_2x_0^*x_3x_1^* &= q\,x_3x_1^*x_2x_0^* + q^{-1}(1-q^2)x_3x_1^*x_2x_0^* - q^{-3/2}(1-q^2)x_2x_2^*x_1x_1^*,\\
x_1x_3^*x_0x_2^* &= q\,x_0x_2^*x_1x_3^* + q^{-1}(1-q^2)x_0x_2^*x_1x_3^* - q^{-3/2}(1-q^2)x_1x_1^*x_2x_2^*,
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4}(X_1^*X_1 - qX_1X_1^*) = q^{-2}(1-q^2)\big(&q^{1/2}\,x_3x_1^*x_2x_0^* - x_2x_2^*x_1x_1^* + q^{1/2}\,x_0x_2^*x_1x_3^*\\
&- x_1x_1^*x_2x_2^* - q^2\,x_3x_0^*x_0x_3^* + q\,x_1x_2^*x_2x_1^*\big).
\end{aligned}$$

另一方面，

$$\tfrac{1}{4}X_2^*X_2 = q^2x_3x_0^*x_0x_3^* - q^{1/2}x_3x_1^*x_2x_0^* - q^{1/2}x_0x_2^*x_1x_3^* + qx_1x_2^*x_2x_1^*.$$

因此

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4}\big(X_1^*X_1 - qX_1X_1^* + q^{-2}(1-q^2)X_2^*X_2\big)\\
&\qquad = q^{-2}(1-q^2)\big(2q\,x_1x_2^*x_2x_1^* - x_2x_2^*x_1x_1^* - x_1x_1^*x_2x_2^*\big) = 0,
\end{aligned}$$

（g）最后，为验证球面关系（31），只需计算

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4}X_1X_1^* &= q^{-1}\,x_3x_1^*x_1x_3^* + q^{-1/2}\,x_0x_2^*x_1x_3^* + q^{-1/2}\,x_3x_1^*x_2x_0^* + x_0x_2^*x_2x_0^*,\\
\tfrac{1}{4}X_2X_2^* &= q^2\,x_0x_3^*x_3x_0^* - q^{3/2}\,x_0x_3^*x_1x_2^* - q^{3/2}\,x_2x_1^*x_3x_0^* + q\,x_2x_1^*x_1x_2^*,\\
\tfrac{1}{4}(1-X_0^2) &= x_0x_0^*x_2x_2^* + x_0x_0^*x_3x_3^* + x_1x_1^*x_2x_2^* + x_1x_1^*x_3x_3^*.
\end{aligned}$$

然后，利用（32）和（33）：

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4}\big(q\,X_1X_1^* + q^{-1}X_2X_2^* + X_0^2 - 1\big)\\
&\quad = (x_3x_1^*x_1x_3^* - x_1x_1^*x_3x_3^*) + (q\,x_0x_3^*x_3x_0^* - x_0x_0^*x_3x_3^*) + q^{1/2}(x_3x_1^*x_2x_0^* - x_2x_1^*x_3x_0^*)\\
&\qquad + q^{1/2}(x_0x_2^*x_1x_3^* - x_0x_3^*x_1x_2^*) + (q\,x_0x_2^*x_2x_0^* - x_0x_0^*x_2x_2^*) + (x_2x_1^*x_1x_2^* - x_1x_1^*x_2x_2^*)\\
&\quad = (1-q^2)\big\{x_3x_0^*x_0x_3^* - q^{-1/2}\,x_1x_2^*x_0x_3^* - x_0x_0^*x_3x_3^* + q\,x_0x_2^*x_2x_0^* + q^{1/2}\,x_0x_2^*x_1x_3^*\\
&\qquad\qquad - x_2x_2^*x_0x_0^* - x_0x_0^*x_2x_2^* + x_0x_0^*x_2x_2^*\big\}\\
&\quad = (1-q^2)\big\{(x_3x_0^*x_0 - x_0x_0^*x_3)x_3^* - q^{-1/2}(x_1x_2^*x_0 - q\,x_0x_2^*x_1)x_3^*\big\}\\
&\quad = q^{-3/2}(1-q^2)^2(x_0x_2^*x_1x_3^* - q\,x_1x_2^*x_0x_3^*) = 0.
\end{aligned}
$$

致谢

作者感谢纯粹与应用数学研究中心通过哥斯达黎加大学的研究项目 #821–C4–162 提供支持。

参考文献

[1] F. Bonechi、N. Ciccoli 和 M. Tarlini，“来自量子群的 4-球面上的非交换瞬子”，《Communications in Mathematical Physics》**226** (2002), 419–432.[2] S. Brain 和 G. Landi，“量子霍普夫纤维化的微分几何与扭量几何”，《Communications in Mathematical Physics》**315**(2012), 489–530.[3] D. Calow 和 R. Matthes，“局部平凡量子主丛上的联络”，《Journal of Geometry and Physics》**41**(2002), 114–165.[4] L. Dąbrowski，“量子球面花园”，载于《非交换几何与量子群》，P. M. Hajac 和 W. Pusz 编，波兰科学院数学研究所，华沙，2003；第 37–48 页。[5] L. Dąbrowski、G. Landi 和 T. Masuda，“量子 4-球面上的瞬子 S^4_q”，《Communications in Mathematical Physics》**221**(2001), 161–168.[6] L. Dąbrowski、G. Landi、A. Sitarz、W. D. van Suijlekom 和 J. C. Várilly，“SU$_q$(2) 上的狄拉克算子”，《Communications in Mathematical Physics》**259** (2004), 729–759.[7] L. Dąbrowski 和 A. Sitarz，“标准 Podleś 量子球面上的狄拉克算子”，载于《非交换几何与量子群》，同上，第 49–58 页。[8] F. D’Andrea，“量子球面的同构”，arxiv:2406.17288v2，那不勒斯，2024。[9] J. H. Hong 和 W. Szymański，“作为图代数的量子球面与射影空间”，《Communications in Mathematical Physics》**232**(2002), 157–188。

[10] J. Kaad 和 D. Kyed，量子 *SU(2)* 的量子度量结构，《欧洲数学学会回忆录》**18**，EMS Press，柏林，2025。[11] A. U. Klimyk 和 K. Schmüdgen，量子群及其表示，Springer，柏林，1997。[12] G. Landi 和 W. van Suijlekom，“来自非交换球面的主纤维化”，《Communications in Mathematical Physics》**260**(2005), 203—225.[13] G. Landi、C. Pagani 和 C. A. Reina，“来自辛群的量子四维球面上的霍普夫丛”，《Communications in Mathematical Physics》**263** (2006), 65—88.[14] M. H. Mikkelsen 和 J. Kaad，“Vaksman–Soibelman 量子球面上的 Haar 态”，Math. Scand. **129**(2023), 337—356.[15] S. Neshveyev 和 L. Tuset，紧量子群及其表示范畴，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2014。[16] P. Podleś，“量子球面”，Lett. Math. Phys. **14** (1987), 521–531。[17] H. J. Schneider，“任意 Hopf 代数的主齐次空间”，Israel J. Math. **72**(1990), 167–195。[18] S. P. Sontz，主丛：量子情形，Springer，沙姆，2015。[19] L. L. Vaksman 和 Y. S. Soibelman，“量子 SU($n+1$) 群上的函数代数与奇数维量子球面”（俄文），《代数与分析》**2** (1990), 101–120。[20] S. L. Woronowicz，“紧矩阵伪群”，《Communications in Mathematical Physics》**111** (1987), 613– 665。