arXiv:2602.07093v1 [math.DS] 6 Feb 2026

具有可验证假设的定量不动点定理：收敛速率与稳定性

CHANDRASEKHAR GOKAVARAPU、DR SRINIVASULU CH、DR DV N S SRIRAM MURTHY 和 RAJEEV MUTHU

摘要。设 (X,d) 是一个完备度量空间，$C \subseteq X$ 是一个闭不变集。我们研究由可验证的压缩模控制的映射 $T\colon C \to C$ 的不动点。该模由压缩规范函数 ω 和可计算工作半径 R 上的经认证常数 $\kappa = \sup_{0<r\le R} \omega(r)/r < 1$ 编码。根据这些数据，我们推导出皮卡迭代项的显式先验界 $\mathrm{d}(x_n, x^*) \le \Phi(n;\kappa,\delta_0)$、残差到误差估计，以及定量数据依赖界 $\mathrm{d}(x^*,y^*) \le (1-\kappa)^{-1}\sup_{x\in C}\mathrm{d}(Tx,Sx)$。我们还讨论了非精确求值 $\mathrm{d}(\tilde{x}_{n+1},T\tilde{x}_n) \le \eta_n$，并以相同的稳定性因子获得经认证的抗扰界。该框架适用于 Hammerstein–Volterra 积分方程，以及通过格林算子求解的边值问题；在这些问题中，核函数界可给出经认证的收敛速率。

1. 引言

设 (X,d) 为一个度量空间，且 $T\colon X \to X$。我们从定量角度研究不动点问题 $x = Tx$：假设必须能在具体算子上检验，结论必须给出显式收敛速率、停止证书以及扰动下的稳定性。我们用于检验的代表性类别包括积分方程和边值问题，其中算子由核函数和非线性项诱导，所有相关常数均可计算。

1.1. 证明的内容。 我们固定一个完备度量空间 (X,d)。我们考虑一类映射 T，它们由显式的压缩规范函数 $\omega\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 和一个显式参数向量 θ 控制。数据 θ 是有限维的，可以根据模型进行估计。所用的基本不等式形式如下：

$$\mathrm{d}(Tx,Ty) \le \omega\big(\mathrm{d}(x,y);\theta\big) \qquad (x,y \in X),$$

以及一个可检验的条件，确保标量递推

$$r_{n+1} = \omega(r_n;\theta)$$

2020年 数学主题分类。 47H10; 54H25; 65J15;45G10; 34B15.关键词与短语。 定量不动点；先验误差界；数据依赖性；稳定性；非精确求值；压缩规范函数；不动点迭代；积分方程；格林算子；边值问题。ORCID： https://orcid.org/0009-0006-5306-371X。

以明确的速率收敛到 0。这个标量递推便成为速率函数。

定理 A（存在性、唯一性与速率）。 在框架假设下，不动点集$(T) = \{x^*\}$。对每个 $x_0 \in X$，皮卡轨道 $x_{n+1} = Tx_n$满足

$$\mathrm{d}(x_n, x^*) \le \Phi(n; \theta, \mathrm{d}(x_0, x_1)).$$

函数 Φ 是显式的。它由 ω 和 θ计算得到。它给出一个先验停止规则。

定理 B（数据依赖性）。设 S 满足相同的框架，具有相同的规范类和参数 θ'。假设 $\|T-S\| := \sup_{x\in X} \mathrm{d}(Tx,\ Sx) < \infty$。则不动点满足

$$\mathrm{d}(x^*, y^*) \le C_{\mathrm{stab}}(\theta, \theta')\, \|T - S\|.$$

常数 C_{stab} 是显式的。

定理 C（非精确求值）。假设计算得到的迭代项满足 $\mathrm{d}(\tilde{x}_{n+1},\ T\tilde{x}_n) \le \eta_n$，且误差预算 $\{\eta_n\}$已知。那么，$\mathrm{d}(\tilde{x}_n,\ x^*)$可用关于 Φ 和 $\{\eta_n\}$的显式界表示。

最终结论见第 4 节至第 7 节。它们涵盖了若干常见情形，也排除了许多时下流行的假设。这些排除是有意为之。

1.2. **可验证模型**。我们讨论两类模型。

积分方程。设 $X = C([a,b])$，并赋予上确界范数。考虑一个 Hammerstein 型算子

$$(Tx)(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s)\, f(s, x(s))\, ds.$$

假设 f 关于第二个自变量是利普希茨连续的，常数为 L_f。假设K 满足 $\sup_t \int_a^b |K(t,\ s)|\, ds \le M_K$。则 T是利普希茨连续的，常数为$L_f M_K$。该常数是可测的。它给出 θ。近期研究经常调用此类应用，但很少将这些常数传递到闭式 Φ中；见 [28, 48, 51, 40, 26, 32]。

边值问题。我们通过格林算子将一个边值问题化为不动点方程。核函数界是显式的。它们以相同方式进入 θ 。稳定性估计转化为参数依赖界。

1.3. **论文结构**。第2—3节确定记号以及可验证的压缩框架。第4—7节包含主要的定量结果（收敛速率、停止规则、稳定性、非精确性）。第8—9节讨论积分方程和边值问题。

第2节规定记号和迭代方案。第3节阐述可验证压缩框架。第4节给出核心定理。第5节推导明确的先验界和停止规则。第 6 节证明数据依赖估计。第7节讨论非精确求值。第8节和9

给出积分方程和边值问题的应用。第11节说明适用范围和局限性。

1.4. **主要贡献**。 本文的主要贡献如下。

(i) 我们提出一种基于压缩规范函数 ω 和可计算工作半径 R 的可验证压缩框架，由此得到经认证的压缩常数

$$\kappa = \sup_{0<r\le R} \frac{\omega(r;\theta)}{r} < 1.$$

我们的假设完全以可检验的数值参数表示（见 定理 4.2）。

(ii) 我们推导出皮卡迭代的 定量先验收敛速率，并建立残差到误差的转换，从而得到经认证的停止准则（见 定理 4.4 和 5.8）。

(iii) 在经认证的模数条件下（见 数据依赖估计 并给出明确的稳定性因子 $(1-\kappa)^{-1}$（见 定理 6.3）。

(iv) 我们研究非精确计算方案 $\mathrm{d}(\tilde{x}_{n+1},\ T\tilde{x}_n) \le \eta_n$，并证明具有相同稳定性常数的定量韧性界（见 定理 7.5）。

(v) 我们将该理论应用于 Hammerstein–Volterra 积分方程以及通过格林算子处理的边值问题，将核/Lipschitz 数据转化为可认证速率和稳定性常数（见 第 8 节和第 9节）。

2. 预备知识与基本假设

2.1. **度量与赋范环境**。A 度量空间是一个二元组 $(X,\ \mathrm{d})$，其中 $\mathrm{d}\colon X\times X\to[0,\infty)$ 满足通常的公理。若有说明，则假定其完备。

记 $\mathbb{B}(x,\ r) := \{y\in X\colon \mathrm{d}(x,\ y)\ \le r\}$。
记不动点集 $(T) := \{x\in X:\ Tx = x\}$ 对于 $T\colon\ X\to X$。

赋范空间是一个对 $(E,\|\cdot\|)$。我们使用度量 $\mathrm{d}(x,y) := \|x-y\|$。当 E 完备时，它是一个巴拿赫空间。

后文将使用两个模型空间。

定义 2.1（连续函数模型空间）。 设 $[a,b]\subset\mathbb{R}$。令$X = C([a,b])$，其范数为 $\|x\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]}|x(t)|$。则 $(X,\|\cdot\|_\infty)$ 是一个巴拿赫空间。

定义 2.2（核算子）。 设 $K\colon\ [a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ 可测。定义

$$(M_K)_{\mathrm{H}} := \sup_{t\in[a,b]}\int_a^b |K(t,s)|\,ds, \qquad (M_K)_{\mathrm{V}} := \sup_{t\in[a,b]}\int_a^t |K(t,s)|\,ds.$$

当 K 关于第二个变量可积且对 t 一致时，这些量是有限的。

Hammerstein 与 Volterra 形式在$C([a,b])$中表现为不动点方程。此类表述在关于积分方程的不动点文献中是标准的；例如，参见 [28, 48, 51, 40, 26, 32]。

2.2. **算子范数与可验证常数。** 可验证性由显式常数加以保证。我们仅使用能够由模型数据或数值方案计算得到的常数。

定义 2.3 (Lipschitz 常数)。 设 (X,d) 是一个度量空间，且$T\colon X \to X$。定义

$$\operatorname{Lip}(T) := \sup_{x \neq y} \frac{\mathrm{d}(Tx, Ty)}{\mathrm{d}(x, y)} \in [0, \infty].$$

如果 $\operatorname{Lip}(T) \leq L$ ，我们称 T 是 L-利普希茨。如果 $L < 1$ ，我们称 T 是一个压缩映射。

定义 2.4 （一致扰动大小）。 设 (X,d) 为一个度量空间。对于 $T, S\colon X \to X$ ，定义

$$\|T - S\|_\infty := \sup_{x \in X} \mathrm{d}(Tx, Sx) \in [0, \infty].$$

当 X 有界，或当 $T - S$ 在关注区域上一致有界时，该量有限。

我们记录两条估计，它们为定量要求和稳定性要求提供依据。这些估计是精确的，揭示了对可测数据的依赖性。稍后我们将推广这些结果；参见 [27, 46, 44]。

命题 2.5 （压缩映射的先验误差界）。 设 (X,d) 是完备的，且 $T\colon X \to X$ 满足 $\operatorname{Lip}(T) \leq L < 1$。固定 $x_0 \in X$ 并定义$x_{n+1} := Tx_n$。则存在唯一的 $x^* \in \operatorname{Fix}(T)$ ，并且对所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{d}(x_n, x^*) \leq \frac{L^n}{1 - L}\, \mathrm{d}(x_0, x_1).$$

命题 2.6 （具有公共压缩模数时的数据依赖性）。设 (X,d) 是完备的，且 $T, S\colon X \to X$ 满足 $\operatorname{Lip}(T) \leq L < 1$ 和$\operatorname{Lip}(S) \leq L < 1$。设 $x^* \in \operatorname{Fix}(T)$ 且 $y^* \in \operatorname{Fix}(S)$。假设 $\|T - S\|_\infty < \infty$。则

$$\mathrm{d}(x^*, y^*) \leq \frac{1}{1 - L}\, \|T - S\|_\infty.$$

下一个引理提取了积分方程应用中使用的可测常数。该陈述是初等的。关键在于明确依赖于 $(M_K)_{\mathrm{H}}$和 $(M_K)_{\mathrm{V}}$。

引理 2.7 （Hammerstein/Volterra 映射的可验证 Lipschitz 常数）。设 $X = C([a,b])$ 且设 $f\colon [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足

$$|f(s,u) - f(s,v)| \leq L_f\, |u - v| \quad \textit{for all } s \in [a,b],\ u, v \in \mathbb{R},$$

对某个常数 $L_f \geq 0$ 成立。设 $g \in X$。
(i) Hammerstein。定义

$$(Tx)(t) := g(t) + \int_a^b K(t,s)\, f(s, x(s))\, ds.$$

如果$(M_K)_{\mathrm{H}} < \infty$，那么 $T\colon X \to X$ 是利普希茨的，并且

$$\mathrm{Lip}(T) \le L_f\,(M_K)_{\mathrm{H}}.$$

(ii) Volterra。定义

$$(Tx)(t) := g(t) + \int_a^t K(t,s)\,f(s,x(s))\,ds.$$

若 $(M_K)_{\mathrm{V}} < \infty$，则 $T\colon X \to X$ 是利普希茨的，且

$$\mathrm{Lip}(T) \le L_f\,(M_K)_{\mathrm{V}}.$$

这些常数是模型章节中定量界的输入。读者无需解释即可核查这些对象。在应用不动点文献中，它们也以不同形式出现；参见 [28, 51, 40, 26, 32]。

2.3. **本文使用的迭代格式**。所有格式均写成不动点迭代。估计以可计算的残差和扰动预算表示。非扩张型迭代的定量分析以及残差速率仍是活跃的研究领域；例如，参见 [19, 14, 34, 23,35, 15]。

定义 2.8（残差）。设 (X, d) 为一个度量空间，且 $T\colon X \to X$。对于序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，定义残差

$$r_n := \mathrm{d}(x_n, Tx_n).$$

定义 2.9（皮卡迭代）。给定 $x_0 \in X$，定义

$$x_{n+1} := Tx_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

皮卡迭代是基准方法。在压缩情形下，它能给出显式的先验界；见 [27, 46, 44]。它也为更复杂的方案提供了一个标量模板。

定义 2.10（克拉诺谢尔斯基–曼迭代）。设 $(E, \|\cdot\|)$ 为赋范空间，且 $C \subset E$ 为凸集。设 $T\colon C \to C$。给定 $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ 和 $x_0 \in C$，定义

$$x_{n+1} := (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n.$$

这是用于平均映射和分裂映射的自然迭代。近期研究探讨了显式残差速率、扰动鲁棒性和惯性变体；见 [14, 20, 3, 18, 21]。

定义 2.11（哈尔珀恩迭代）。设 $(E, \|\cdot\|)$ 为赋范空间，且 $C \subset E$ 为凸集。设 $T\colon C \to C$。固定一个锚点 $u \in C$ 和一个序列 $\{\beta_n\} \subset [0,1]$。给定 $x_0 \in C$，定义

$$x_{n+1} := (1-\beta_n)u + \beta_n Tx_n.$$

Halpern 型迭代格式出现在单调包含与变分不等式中。它们也是在附加结构下获得显式收敛速率的一种机制；参见 [22, 54, 55, 17, 15, 45]。

定义 2.12（非精确求值）. 设 (X,d) 为一个度量空间，且$T\colon X \to X$。一条非精确轨道 $\{\tilde{x}_n\}$（误差预算为 $\{\eta_n\} \subset [0,\infty)$）满足

$$\mathrm{d}(\tilde{x}_{n+1}, T\tilde{x}_n) \le \eta_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

非精确性并非缺陷，而是计算所处的状态。它将被纳入定量界中，见第7节。加速技术会改变有效迭代映射。它们通常需要单独进行稳定性分析；参见 [33, 16, 37]。

记号 2.13（数据向量）。对于每个定理，我们都会列出一份有限的参数清单。我们将其记为 θ。它酌情包括：

$$\theta = \big(L,\ \mathrm{d}(x_0,x_1),\ \|T-S\|_\infty,\ L_f,\ (M_K)_{\mathrm{H}},\ (M_K)_{\mathrm{V}},\ \{\alpha_n\},\ \{\beta_n\},\ \{\eta_n\}\big).$$

仅包含陈述中用到的组成部分。

3. 可验证压缩框架

我们固定一个完备度量空间 $(X,\ \mathrm{d})$。我们在闭集 $C \subseteq X$ 上工作。所有常数均在 C 上计算。本节规定压缩类，并说明我们接受的数据。

广义压缩条件可编码为一个由控制量驱动的标量不等式，该控制量由有限多个距离构成。这一观点在现代度量不动点理论中很常见；参见 [46, 27, 12]。对不动点迭代进行定量分析，要求标量不等式足够明确，从而能够得出收敛速率；比较 [19, 14, 34, 35, 15]。

3.1. 带可检验参数的压缩条件。

定义 3.1（不变工作集）。设 $T\colon X \to X$。集合 $C \subseteq X$ 是T-不变的，若 C 非空、闭，且 $T(C) \subseteq C$。

我们不对 X 作全局假设，而是选定一个区域 C。在应用中，C 是一个闭球 $\mathbb{B}(x_0,\ R)$。模型问题中的半径 R 根据核函数界和上确界范数计算得出。

定义 3.2（压缩规范函数）。压缩规范函数是一个映射

$$\omega(\cdot;\theta)\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$$

它依赖于有限维参数向量 θ，并满足：

(G1) $\omega(0;\theta) = 0$；(G2) $\omega(\cdot;\theta)$ 非递减；(G3) 对每个 $r > 0$，$\omega(r;\theta) < r$。

迭代的收敛速率由 ω 所诱导的标量递推继承而来。

定义 3.3（标量半径递推）。设 $\omega(\cdot;\theta)$ 是一个规范函数。给定$r_0 \ge 0$，定义 $\{r_n\}$ 为

$$r_{n+1} := \omega(r_n;\theta) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

写出 $\omega^{(n)}(r_0;\theta) := r_n$。

一旦 ω 和 θ 明确给出，对象 $\omega^{(n)}(r_0;\theta)$ 也就明确给出了。这是可计算界背后的基本机制。

我们使用两种可检验的压缩模板。第一种是直接的双点规范函数。第二种是基于有限个距离的最大值的 Proinov 型控制 [46]。

定义 3.4（双点规范压缩）。设 $C \subseteq X$ 是 T 不变的。若存在压缩规范函数 $\omega(\cdot;\theta)$，使得……则称 T 是 C 上具有数据 θ 的双点规范压缩。

$$\mathrm{d}(Tx,Ty) \le \omega(\mathrm{d}(x,y);\theta) \qquad (x,y \in C).$$

定义 3.5（Proinov 型规范压缩）。设 $C \subseteq X$ 是 T 不变的。对 $x,\ y \in C$ 定义控制量

$$M_T(x,y) := \max\Big\{\mathrm{d}(x,y),\ \mathrm{d}(x,Tx),\ \mathrm{d}(y,Ty),\ \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{d}(x,Ty)+\mathrm{d}(y,Tx)\big)\Big\}.$$

若存在压缩规范函数 $\omega(\cdot;\theta)$，使得……则称 T 是具有数据 θ 的 上的 *Proinov* 型规范压缩。

$$\mathrm{d}(Tx,Ty) \le \omega\big(M_T(x,y);\theta\big) \qquad (x,y \in C).$$

参数向量 θ 必须是有限的，且必须能够从模型中计算得出。这排除了包含不可观测模的隐式条件，也排除了仅具存在性、无法显式检验的假设。

下一个常数至关重要。它将一个规范函数转化为有界范围上的类 Banach 模函数。

定义 3.6（局部线性化常数）. 设 $\omega(\cdot;\theta)$ 是一个规范函数，并设 $R>0$。定义

$$\kappa(R;\theta) := \sup_{0<r\le R} \frac{\omega(r;\theta)}{r} \in [0,1].$$

若 $\kappa(R;\theta) < 1$，则对 $r \in [0,R]$，有 $\omega(r;\theta) \le \kappa(R;\theta)\, r$。此不等式可检验，也能得出几何收敛速率。

注 3.7（两个显式规范函数族）. 在应用中，通常只需验证以下其中一种。

（F1）几何规范函数：$\omega(r;\theta) = qr$，其中 $q \in (0,1)$。这是 Banach 情形 [27]。（F2）缺陷规范函数：$\omega(r;\theta) \le r - \psi(r;\theta)$，其中 $\psi(\cdot;\theta)$ 是非递减的，$\psi(r;\theta) > 0$ 对 $r > 0$ 成立，并且 ψ 在 $[0,R]$ 上有可计算的下界。这种形式与具体收敛分析中的非 Hölder 型速率现象相容；参见 [35]。

我们保持框架的抽象性，并使数据保持有限。第 4至 6 节中的定理将陈述所需的定量结论。

3.2. **可容许数据与诊断清单**。现在，我们明确应用主要结果必须提供哪些信息。此清单用于诊断，旨在通过积分方程和边值问题约化来验证。

定义 3.8 (可容许数据包)。 一个可容许数据包 由以下内容组成，用于一个不动点问题

$$\mathcal{D} = (X, \mathrm{d};\ C;\ T;\ \omega(\cdot;\theta);\ R;\ x_0),$$

并具有以下性质。
(D1) (X, d) 是完备的。(D2) C 非空、闭且关于 T 不变。
(D3) $x_0 \in C$ 和 $C \subseteq \mathbb{B}(x_0, R)$，其中某个显式的 $R > 0$。
(D4) T 在 C 上满足定理 3.4 或定理 3.5。(D5) 定理 3.6 中的常数 $\kappa(R;\ \theta)$ 满足 $\kappa(R;\theta) < 1$。

条件 (D5) 是定量关键环节。它将问题归结为显式的标量估计，同时确定了稳定性常数。这与现代对 Mann 型和 Halpern 型迭代格式进行定量分析时，最坏情况残差界所发挥的作用相一致 [19, 34, 14, 15]。

命题 3.9 (诊断清单)。 要验证一个模型定义了可容许数据包，只需检查以下各项。

C1. 空间。 指定 (X,d) 并说明其完备性。***C2.*** 区域。 选择 $C = \mathbb{B}(x_0, R)$ 并通过显式界证明 $T(C) \subseteq C$。***C3.*** 规范函数。 给出 $\omega(\cdot;\theta)$ 并证明以下任一项

$$\mathrm{d}(Tx, Ty) \le \omega(\mathrm{d}(x, y);\theta) \quad (x, y \in C)$$

or

$$\mathrm{d}(Tx, Ty) \le \omega(M_T(x, y);\theta) \quad (x, y \in C),$$

其中 M_T 如定理 *3.5*所述。
C4. 局部模量。 计算 $\kappa(R;\theta)$ 并验证 $\kappa(R;\theta) < 1$。
C5. 扰动。 对于扰动映射 S，计算

$$\varepsilon := \sup_{x \in C} \mathrm{d}(Tx, Sx).$$

该量用于第 *6* 节中的稳定性界。
C6. 初始化。 计算 $\delta_0 := \mathrm{d}(x_0, Tx_0)$。该量用于第 *5* 节中的先验界。

这份检查清单是有限的。每一项都是数值条件，不涉及任何隐含的模。这正是可验证性的本意。这与应用型积分方程和边值问题论文中对不动点算子进行验证的方式相符：通过核函数界和 Lipschitz 常数来控制范数。

注 3.10（框架排除的情形）。 该框架排除无法在可计算区域上得出 $\kappa(R;\theta) < 1$ 的条件。它还排除

依赖非构造性选择或未指定辅助函数的假设。此类陈述仍可能为真，但无法由数据予以验证。

4. 主定量不动点定理

在本节中，$(X,\ \mathrm{d})$ 是一个完备度量空间。闭集$C \subseteq X$ 固定不变。映射 $T\colon\ C \to C$ 固定不变。数据包 $\mathcal{D}$ 与定理 3.8中的相同。规范函数为 $\omega(\cdot;\ \theta)$。半径为 R。局部模量为$\kappa(R;\theta)$ ，来自定理 3.6。假设

$$\kappa := \kappa(R;\theta) < 1.$$

令 $x_{n+1} := Tx_n$ ，其中 $x_0 \in C$。用 x^* 表示该不动点。

定性部分遵循经典压缩原理。新意在于明确体现了对 κ 和初始缺陷的依赖。相关的广义压缩原理见 [46, 44, 27]。我们在此陈述的这类定量界，是现代速率分析中的常用工具；参见[19, 14, 34, 23, 35, 15]。

4.1. 框架下的存在性与唯一性。

引理 4.1 (单步缺陷递推)。 假设 T 满足定理 *3.4*或定理 *3.5*在 C上的条件。定义

$$d_n := \mathrm{d}(x_n, x_{n-1}) \qquad (n \geq 1).$$

则:
(a) $d_{n+1} \leq d_n$ 对所有 $n \geq 1$均成立；*(b)*
$d_{n+1} \leq \omega(d_n;\ \theta)$ 对所有 $n \geq 1$均成立；*(c)*
$d_n \leq \omega^{(n-1)}(d_1;\ \theta)$ 对所有 $n \geq 1$均成立。

证明。 首先假设 定理 3.4成立。则

$$d_{n+1} = \mathrm{d}(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \omega(\mathrm{d}(x_n, x_{n-1});\theta) = \omega(d_n;\theta),$$

因此 (b) 成立。由于 $\omega(r;\theta) < r$ 对 $r > 0$成立，所以当$d_n > 0$时，我们得到 $d_{n+1} < d_n$ 。这就证明了 (a)。对 (b) 进行迭代即可得到 (c)。

接下来假设 定理 3.5成立。取 $n \geq 1$。根据 定理 3.5计算 $M_T(x_n, x_{n-1})$ 。我们有

$$\mathrm{d}(x_n, Tx_{n-1}) = \mathrm{d}(x_n, x_n) = 0, \qquad \mathrm{d}(x_n, Tx_n) = \mathrm{d}(x_n, x_{n+1}) = d_{n+1}, \qquad \mathrm{d}(x_{n-1}, Tx_{n-1}) = \mathrm{d}(x_{n-1}, x_n$$

此外，$\mathrm{d}(x_{n-1}, Tx_n) = \mathrm{d}(x_{n-1}, x_{n+1}) \leq d_n + d_{n+1}$，因此

$$\tfrac{1}{2}\big(\mathrm{d}(x_n, Tx_{n-1}) + \mathrm{d}(x_{n-1}, Tx_n)\big) \leq \tfrac{1}{2}(d_n + d_{n+1}) \leq \max\{d_n, d_{n+1}\}.$$

因此，$M_T(x_n, x_{n-1}) = \max\{d_n, d_{n+1}\}$。压缩不等式给出

$$d_{n+1} = \mathrm{d}(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \omega(\max\{d_n, d_{n+1}\};\theta).$$

若 $d_{n+1} > d_n$，则右侧等于 $\omega(d_{n+1};\theta) < d_{n+1}$，矛盾。因此 $d_{n+1} \leq d_n$。于是 $\max\{d_n, d_{n+1}\} = d_n$ ，且 $d_{n+1} \leq \omega(d_n;\theta)$。由此得到 (a) 和 (b)，进而通过迭代得到 (c)。□

定理 4.2（框架不动点）。 假设 $\mathcal{D}$ 按照定理 3.8的含义是一个可容许数据包。假设 T 在 C上满足定理 3.4 或 定理 3.5 。令 $\kappa = \kappa(R;\ \theta) < 1$。则 不动点集$(T) \cap C$是单元素集 $\{x^*\}$。皮卡轨道 (x_n) 收敛于 x^* 中的 C。

证明。 设 $d_n = \mathrm{d}(x_n, x_{n-1})$ 对于 $n \geq 1$。根据 定理 4.1，序列 (d_n)单调不增，且满足 $d_{n+1} \leq \omega(d_n; \theta)$。

由于 $C \subseteq \mathbb{B}(x_0,\ R)$，我们有 $\mathrm{d}(x_n,\ x_{n-1}) \leq 2R$对于所有 n。可容许的数据包给出 $\kappa(R;\theta) < 1$，因此

$$\omega(r;\theta) \leq \kappa r \qquad \text{for all } r \in [0, R].$$

特别地，一旦 $d_n \leq R$ 我们就得到 $d_{n+1} \leq \kappa d_n$。如果 $d_1 > R$，则在 κ 的定义中用$2R$ 替换 R 。这不会改变论证。我们保留记号 κ。

因此，对于所有 $n \geq 1$， $d_{n+1} \leq \kappa d_n$，并且

$$d_{n+1} \leq \kappa^n d_1 \qquad (n \geq 0).$$

对于 $m > n$,

$$\mathrm{d}(x_m, x_n) \leq \sum_{j=n}^{m-1} \mathrm{d}(x_{j+1}, x_j) = \sum_{j=n}^{m-1} d_{j+1} \leq \sum_{j=n}^{m-1} \kappa^j d_1 \leq \frac{\kappa^n}{1-\kappa}\, d_1.$$

因此（x_n）是柯西序列。 C 的完备性（在完备空间中为闭集）给出一个极限 $x^* \in C$。

我们证明 $Tx^* = x^*$。映射 T 在 C 上、于工作范围内以常数 $\leq \kappa$ 满足利普希茨条件，因此连续。因此

$$\mathrm{d}(Tx^*, x^*) \leq \mathrm{d}(Tx^*, Tx_n) + \mathrm{d}(x_{n+1}, x^*) \leq \kappa\, \mathrm{d}(x^*, x_n) + \mathrm{d}(x_{n+1}, x^*) \to 0.$$

所以 $x^* \in$ 不动点集$(T) \cap C$。

唯一性立即可得。若 $y^* \in$ 不动点集$(T) \cap C$，则在两点情形下

$$\mathrm{d}(x^*, y^*) = \mathrm{d}(Tx^*, Ty^*) \leq \omega(\mathrm{d}(x^*, y^*); \theta) \leq \kappa\, \mathrm{d}(x^*, y^*),$$

故 $\mathrm{d}(x^*, y^*) = 0$。在 Proinov 型情形中， $M_T(x^*, y^*) = \mathrm{d}(x^*, y^*)$，且同一不等式成立。□

4.2. **显式速率陈述**。 定理 定理 4.2在其证明中包含定量内容。我们现在将其固化为速率函数。这是计算所需的形式。它类似于不动点迭代的定量分析中显式残差界所起的作用；参见 [19, 14, 34, 23,15]。

定义 4.3 (初始缺陷)。 设

$$\delta_0 := \mathrm{d}(x_1, x_0) = \mathrm{d}(Tx_0, x_0).$$

定理 4.4 (先验误差和残差界)。 在 定理 *4.2* 的假设下，对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{d}(x_n, x^*) \le \Phi(n; \kappa, \delta_0) := \frac{\kappa^n}{1-\kappa}\,\delta_0,$$

$$\mathrm{d}(x_n, Tx_n) = \mathrm{d}(x_n, x_{n+1}) \le \kappa^n\,\delta_0.$$

证明。 上述证明表明 $d_{n+1} \le \kappa^n \delta_0$。 于是

$$\mathrm{d}(x_n, x^*) \le \sum_{j=n}^{\infty} d_{j+1} \le \sum_{j=n}^{\infty} \kappa^j \delta_0 = \frac{\kappa^n}{1-\kappa}\,\delta_0.$$

此外，$\mathrm{d}(x_n,\ Tx_n) = \mathrm{d}(x_n,\ x_{n+1}) = d_{n+1} \le \kappa^n \delta_0$。 □

推论 4.5 （可认证停止准则）。 不动点集 $\varepsilon > 0$。假设 $\delta_0 > 0$。定义

$$N(\varepsilon) := \begin{cases} 0, & \text{if } \ \delta_0 \le (1-\kappa)\varepsilon, \\ \left\lceil \dfrac{\ln\left(\dfrac{(1-\kappa)\varepsilon}{\delta_0}\right)}{\ln(\kappa)} \right\rceil, & \text{if } \ \delta_0 > (1-\kappa)\varepsilon. \end{cases}$$

于是对每个 $n \ge N$ （ε） ， 都有 $\mathrm{d}(x_n, x^*) \le \varepsilon$。

证明。 根据定理 4.4，只需证明 $\kappa^n \delta_0/(1-\kappa) \le \varepsilon$。若 $\delta_0 \le (1-\kappa)\varepsilon$，则结论对 $n = 0$成立。否则，令 $q := {}_{(1-\kappa)\ \delta_0}{}^{\ \varepsilon} \in (0,\ 1)$。不等式$\kappa^n \le q$等价于 $n \ln(\kappa) \le \ln(q)$。由于 $\ln(\kappa) < 0$，这等价于

$$n \ge \frac{\ln(q)}{\ln(\kappa)}.$$

向上取整得到满足条件的最小整数。 □

备注 4.6（规范迭代界）。 如果希望继续用 ω 本身表示这个界，定理 4.1 给出

$$\mathrm{d}(x_n, x^*) \le \sum_{j=n}^{\infty} \omega^{(j)}(\delta_0; \theta).$$

这是精确的。当 $\omega^{(j)}$ 具有闭式时，这一结果很有用。定理 4.4 的几何界是通用证书。

5. 迭代项的先验误差界

本节提炼出可计算的误差界。该界是一个函数，以迭代索引和有限数据向量为输入，输出一个可认证半径。它是验证所需的对象。近期的定量研究聚焦于残差速率和显式的迭代复杂度；参见 [19, 14, 34, 23, 35, 15]。

5.1. **形如 $\mathrm{d}(x_n, x^*) \le \Phi(n;$数据$)$ 的界。** 我们沿用 第4节 的记号。特别地，$\kappa = \kappa(R;\theta) < 1$ 以及 $\delta_0 = \mathrm{d}(x_1, x_0)$。我们从通用几何证书开始。

定义 5.1 (几何先验界)。 对 $n \in \mathbb{N}$ 定义，

$$\Phi_{\mathrm{geo}}(n;\kappa,\delta_0) := \frac{\kappa^n}{1-\kappa}\,\delta_0.$$

命题 5.2 (通用几何证书)。 在以下假设下：*定理 4.2*，

$$\mathrm{d}(x_n, x^*) \le \Phi_{\mathrm{geo}}(n;\kappa,\delta_0) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

证明。 这是定理 4.4。 □

当相关范围内 ω 严格小于κr 时，几何证书给出的界较为保守。通过对规范函数本身进行迭代，可以得到更紧的界。这仍然是可验证的，只需计算 ω。

定义 5.3 (规范函数迭代先验界)。 定义

$$\Phi_\omega(n;\theta,\delta_0) := \sum_{j=n}^{\infty} \omega^{(j)}(\delta_0;\theta),$$

当级数收敛时。

命题 5.4 (规范迭代证书)。 假设 *定理 4.2*的假设成立。那么对每个 $n \in \mathbb{N}$，

$$\mathrm{d}(x_n, x^*) \le \Phi_\omega(n;\theta,\delta_0).$$

此外，

$$\Phi_\omega(n;\theta,\delta_0) \le \Phi_{\mathrm{geo}}(n;\kappa,\delta_0).$$

证明。根据定理 4.1，$\mathrm{d}(x_{j+1}, x_j) \le \omega^{(j)}(\delta_0;\ \theta)$ 对于 $j \ge 0$。因此

$$\mathrm{d}(x_n, x^*) \le \sum_{j=n}^{\infty} \mathrm{d}(x_{j+1}, x_j) \le \sum_{j=n}^{\infty} \omega^{(j)}(\delta_0;\theta) = \Phi_\omega(n;\theta,\delta_0).$$

对于第二个结论，在工作范围内使用 $\omega(r;\theta) \le \kappa r$，因此 $\omega^{(j)}(\delta_0;\theta) \le \kappa^j \delta_0$，并对几何级数求和。□

这给出了两个可用的界。第一个只使用 κ。第二个使用 ω。现在，我们将抽象数据转化为应用所需的模型数据。关键在于这些参数是可检验的。

命题 *5.5*（积分算子的模型层面数据）。设 $X = C([a,b])$，且满足 $\|\cdot\|_\infty$，并令 T 为定理 *2.7* 中的 *Hammerstein* 或 *Volterra*。假设 $C = \mathbb{B}(x_0, R)$ 是 T-不变的。设 $L := L_f(M_K)$，其中 (M_K) 表示 $(M_K)_{\mathrm{H}}$或 $(M_K)_{\mathrm{V}}$，视具体情况而定。则 T在 C上是 L-利普希茨的，且可以取几何规范函数 $\omega(r) = Lr$。若 $L < 1$，则 $\kappa = L$ 并

$$\mathrm{d}(x_n, x^*) \le \frac{L^n}{1-L}\,\mathrm{d}(Tx_0, x_0).$$

证明。 这是定理 2.7 和 定理 5.2。 □

5.2. **由界导出的停止规则**。 停止规则是一种确定性规则，可给出有保证的 ε-解。我们依据该界来定义它。该规则仅使用数据和迭代计数器。

定义 5.6 (先验 ε-停止指标)。 固定 $\varepsilon > 0$。定义

$$N_{\mathrm{geo}}(\varepsilon;\kappa,\delta_0) := \min\Big\{n \in \mathbb{N} : \Phi_{\mathrm{geo}}(n;\kappa,\delta_0) \le \varepsilon\Big\}.$$

类似地定义

$$N_{\omega}(\varepsilon;\theta,\delta_0) := \min\Big\{n \in \mathbb{N} : \Phi_{\omega}(n;\theta,\delta_0) \le \varepsilon\Big\},$$

当 Φ_ω 可用时。

第一个指标是闭式的。第二个指标通过计算部分和，直至不等式成立而求得。

命题 5.7 (闭式认证指标)。 假设 $\kappa \in (0,1)$ 且 $\delta_0 > 0$。则

$$N_{\mathrm{geo}}(\varepsilon;\kappa,\delta_0) = \begin{cases} 0, & \text{if } \ \delta_0 \le (1-\kappa)\varepsilon, \\ \left\lceil \dfrac{\ln\!\left(\dfrac{(1-\kappa)\varepsilon}{\delta_0}\right)}{\ln(\kappa)} \right\rceil, & \text{if } \ \delta_0 > (1-\kappa)\varepsilon. \end{cases}$$

此外，对于每个 $n \ge N_{\mathrm{geo}}(\varepsilon;\ \kappa,\delta_0)$，

$$\mathrm{d}(x_n, x^*) \le \varepsilon.$$

证明。 这就是定理 4.5。 □

下一个规则在实践中往往更有用，因为它完全避免了 x^*。它使用残差。基于残差的认证是现代不动点迭代和分裂格式分析的核心；参见 [14, 19, 20, 3]。

命题 5.8 (残差到误差的转换)。 在定理 *4.2*的假设下，

$$\mathrm{d}(x_n, x^*) \le \frac{1}{1-\kappa}\,\mathrm{d}(x_n, Tx_n) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

证明。 使用估计 $\mathrm{d}(x_n,x^*) \le \sum_{j=n}^{\infty} \mathrm{d}(x_{j+1},x_j)$ 以及压缩映射递推关系 $\mathrm{d}(x_{j+1}, x_j) \le \kappa^{j-n}\mathrm{d}(x_{n+1},x_n) = \kappa^{j-n}\mathrm{d}(x_n,Tx_n)$。求和即可得到所述界。□

推论 5.9 (基于残差的停止规则)。 取 $\varepsilon > 0$。假设定理 *4.2*的假设成立。若对某个 n，

$$\mathrm{d}(x_n, Tx_n) \le (1-\kappa)\varepsilon,$$

则 $\mathrm{d}(x_n, x^*) \le \varepsilon$。

证明。 由 定理 5.8立即得出。 □

注 5.10（两种证书）。 先验指标 N_{geo} 可在计算前证明精度。残差判据可在计算过程中证明精度。两者均由同一个可验证模量 κ 推导而来。这就是该框架的定量含义。

6. 数据依赖性与稳定性

我们量化了对映射进行扰动所产生的影响。该论述是代数性的，只使用可验证模量和一致扰动大小。我们利用产生收敛速率的同一个经认证的模数，推导出数据依赖性。

6.1. 映射的扰动：$\mathrm{d}(x^*, y^*) \le C_{\mathrm{stab}} \|T - S\|$。

设度量空间 (X, d) 完备。设 $C \subseteq X$ 是非空闭集。设 $T, S\colon C \to C$。

定义 6.1 （C 上的一致扰动大小）。 定义

$$\varepsilon_C(T, S) := \sup_{x \in C} \mathrm{d}(Tx, Sx) \in [0, \infty].$$

我们在第3节所用的同一可验证模量下陈述稳定性界。该模量是局部的，并在同一工作区域上计算。

定义 6.2 （经认证的局部模量）。 设 $T\colon C \to C$ 在定理 3.4 或 定理 3.5 中 C 上满足条件，规范函数为 $\omega_T(\cdot; \theta_T)$。设 $R > 0$ 满足 $C \subseteq \mathbb{B}(x_0, R)$ 对某个 $x_0 \in C$ 成立。定义

$$\kappa_T := \kappa(R; \theta_T) = \sup_{0 < r \le R} \frac{\omega_T(r; \theta_T)}{r} \in [0, 1).$$

定理 6.3 （经认证模量下的数据依赖性）。 假设 T 具有经认证的局部模量 $\kappa_T \in [0, 1)$，其含义见定理 6.2。假设 S 至少有一个不动点 $y^* \in$ 不动点集$(S) \cap C$。假设 T 有一个不动点 $x^* \in$ 不动点集$(T) \cap C$。假设 $\varepsilon_C(T, S) < \infty$。则

$$\mathrm{d}(x^*, y^*) \le C_{\mathrm{stab}}\, \varepsilon_C(T, S), \qquad C_{\mathrm{stab}} := \frac{1}{1 - \kappa_T}.$$

证明。 由于 $x^* = Tx^*$ 和 $y^* = Sy^*$，

$$\mathrm{d}(x^*, y^*) = \mathrm{d}(Tx^*, Sy^*) \le \mathrm{d}(Tx^*, Ty^*) + \mathrm{d}(Ty^*, Sy^*).$$

我们将第一项界定为 $\kappa_T \mathrm{d}(x^*, y^*)$。在双点规范函数情形下，这由下式推出

$$\mathrm{d}(Tx^*, Ty^*) \le \omega_T(\mathrm{d}(x^*, y^*); \theta_T) \le \kappa_T\, \mathrm{d}(x^*, y^*),$$

因为当 $C \subseteq \mathbb{B}(x_0, R)$ 时，$\mathrm{d}(x^*, y^*) \le R$ 成立。在 Proinov 型规范函数情形下，由于 $Tx^* = x^*$ 和 $Ty^* = y^*$，$M_T(x^*, y^*) = \mathrm{d}(x^*, y^*)$，因此同样的界成立。对于第二项，

$$\mathrm{d}(Ty^*, Sy^*) \le \sup_{x \in C} \mathrm{d}(Tx, Sx) = \varepsilon_C(T, S).$$

因此

$$\mathrm{d}(x^*, y^*) \le \kappa_T \mathrm{d}(x^*, y^*) + \varepsilon_C(T, S),$$

重新整理即可得到所述结论。 □

该定理是局部的。它只使用 κ_T 于 C。这就是可验证性的本意。这也是定量不动点理论中将显式残差转换为误差的基础机制；参见 [19, 14, 34, 15]。

推论 6.4 (双向经认证的稳定性)。 假设 T 和 S在同一集合 C上满足该框架，且具有经认证的模数 $\kappa_T, \kappa_S \in [0,1)$，因此分别有唯一的不动点 $x^* \in \mathrm{Fix}(T) \cap C$ 和 $y^* \in \mathrm{Fix}(S) \cap C$。令$\kappa :=$ 最大值$\{\kappa_T, \kappa_S\}$。则

$$\mathrm{d}(x^*, y^*) \le \frac{1}{1-\kappa}\, \varepsilon_C(T, S).$$

证明。 应用 定理 6.3，使用 κ 作为 T 在 C上的有效模数，因为$\kappa_T \le \kappa$。 □

备注 6.5（模型层面的解释）。 在积分方程和边值问题的情形中，$\varepsilon_C(T, S)$由核与非线性项的偏差计算得出。它是一个数。稳定性界于是成为参数敏感性估计。此类结论见于迭代格式论文中，但对经认证的模数的依赖往往是隐含的；参见 [32, 56, 43]。

6.2. **锐性与不可避免的常数**。 因子 $(1-\kappa_T)^{-1}$ 并非装饰性的。实例表明，它是必需的。对于整个 κ-压缩映射类，无法统一改进该因子。

命题 6.6 （$(1-\kappa)^{-1}$）。 设 $\kappa \in [0,1)$。令 $X = \mathbb{R}$ 满足$\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$。令 $C = \mathbb{R}$。定义

$$T(x) := \kappa x, \qquad S(x) := \kappa x + \varepsilon,$$

其中某个 $\varepsilon \ge 0$。则 $x^* = 0$ 是 T 的唯一不动点，而 $y^* = \varepsilon/(1-\kappa)$ 是 S的唯一不动点。此外，

$$\varepsilon_C(T, S) = \varepsilon, \qquad \mathrm{d}(x^*, y^*) = \frac{1}{1-\kappa}\, \varepsilon_C(T, S).$$

证明。这两个映射都是压缩映射，其 Lipschitz 常数为 κ。不动点满足 $x = \kappa x$ 和 $y = \kappa y + \varepsilon$，因此 $x^* = 0$ 和 $y^* = \varepsilon/(1-\kappa)$。此外，对于所有 x，$|T(x) - S(x)| = \varepsilon$，因此 $\varepsilon_C(T, S) = \varepsilon$。等号由此得出。□

注 6.7（为何爆炸不可避免）。 当 $\kappa \uparrow 1$ 时，映射趋近于非扩张性。此时，微小扰动也可能使不动点发生大幅移动。这正是正确的几何图景。在 Banach 情形中，这一点已清晰可见，并且在现代推广中依然成立；参见 [27, 46, 12]。

注 6.8（局部性至关重要）。 该常数使用了 C 上的一个模。如果扩大 C，经认证的模可能会变差。这是实际存在的影响，也是实现可验证性所付出的代价。

7. 非精确评估下的鲁棒性

理想轨道 $x_{n+1} = Tx_n$ 很少能够直接获得。实际计算的是 $\tilde{x}_{n+1}$，并带有误差。误差可能来自数值计算，也可能来自测量噪声。忽略这一点的理论，就不是计算理论。关于扰动、惯性格式和随机 Halpern 型迭代的近期研究探讨了相关的稳定性现象；参见 [20, 45, 17, 3]。我们采用初等的设定，并明确给出各项常数。

7.1. **非精确迭代项与残差控制。** 我们在第 3 节和第 4节的$(X,\ \mathrm{d})$ 是完备的，$C \subseteq X$ 是闭的且T-不变的，并且 T满足具有经认证模数的框架 $\kappa \in [0, 1)$ 在 C上。

定义 7.1 （非精确 Picard 轨道）。 设 $\{\eta_n\}_{n\geq 0} \subset [0, \infty)$ 。序列$\{\tilde{x}_n\} \subset C$ 是 T 的非精确 *Picard* 轨道，其误差预算为 $\{\eta_n\}$，若对所有$n \geq 0$,

$$\mathrm{d}(\tilde{x}_{n+1}, T\tilde{x}_n) \leq \eta_n.$$

下面的不等式是后文唯一用到的计算。它是一个扰动压缩递推。

引理 7.2 （单步扰动递推）。 设 $\{\tilde{x}_n\} \subset C$ 满足 定理 *7.1*。设 $x^* \in$ 不动点集 $(T) \cap C$。则对每个 $n \geq 0$,

$$\mathrm{d}(\tilde{x}_{n+1}, x^*) \leq \kappa\, \mathrm{d}(\tilde{x}_n, x^*) + \eta_n.$$

证明。 由于 $Tx^* = x^*$ 且 T 在 C 上是 κ-利普希茨的,

$$\mathrm{d}(\tilde{x}_{n+1}, x^*) \leq \mathrm{d}(\tilde{x}_{n+1}, T\tilde{x}_n) + \mathrm{d}(T\tilde{x}_n, Tx^*) \leq \eta_n + \kappa\, \mathrm{d}(\tilde{x}_n, x^*).$$

□

残差控制常被用作不动点算法定量分析中的认证机制；参见 [19, 14, 34]。对于非精确轨道，我们使用混合残差。

定义 7.3 （非精确残差）。 对于非精确轨道 $\{\tilde{x}_n\}$，定义

$$\tilde{r}_n := \mathrm{d}(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}_n).$$

引理 7.4 (非精确情形下的残差界**)**。 设 $\{\tilde{x}_n\}$ 满足 定理 *7.1*。则对于任意 $n \geq 0$,

$$\tilde{r}_n \leq \kappa\, \tilde{r}_{n-1} + \eta_n + \eta_{n-1} \qquad (n \geq 1),$$

and

$$\tilde{r}_n \leq \kappa^n \tilde{r}_0 + \sum_{j=1}^{n} \kappa^{n-j}(\eta_j + \eta_{j-1}) \qquad (n \geq 1).$$

证明。对于 $n \geq 1$,

$$\tilde{r}_n = \mathrm{d}(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}_n) \leq \mathrm{d}(\tilde{x}_{n+1}, T\tilde{x}_n) + \mathrm{d}(T\tilde{x}_n, T\tilde{x}_{n-1}) + \mathrm{d}(T\tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_n).$$

第一项和第三项分别由 η_n 和 η_{n-1} 界定。中间项由 $\kappa \mathrm{d}(\tilde{x}_n,\ \tilde{x}_{n-1}) = \kappa\,\tilde{r}_{n-1}$ 界定。这就得到了单步不等式。迭代得到第二个不等式。□

7.2. **对数值误差/测量误差的定量鲁棒性。** 定理 7.2 中的递推 给出了一个闭式界。它是预解式估计的离散类比，并将压缩衰减与误差累积分开。

定理 7.5 (非精确轨道的先验误差界)。 假设满足 定理 *4.2* 的条件，且经认证的模为 $\kappa \in [0,1)$。令 $x^* \in \mathrm{Fix}(T) \cap C$。令 $\{\tilde{x}_n\} \subset C$ 满足 定理 *7.1*，其误差预算为 $\{\eta_n\}$。则对每个 $n \geq 0$,

$$\mathrm{d}(\tilde{x}_n, x^*) \leq \kappa^n \mathrm{d}(\tilde{x}_0, x^*) + \sum_{j=0}^{n-1} \kappa^{n-1-j} \eta_j.$$

证明。 应用 定理 7.2，并通过归纳法展开递推。 □

该定理表明，当误差预算可求和或一致有界时，系统具有鲁棒性。这两种情形在计算中都会出现。

推论 7.6 (可求和误差)。 假设满足 定理 *7.5*的条件。若 $\sum_{j\geq 0} \eta_j < \infty$，则 $\mathrm{d}(\tilde{x}_n,\ x^*) \to 0$。更准确地说，

$$\mathrm{d}(\tilde{x}_n, x^*) \leq \kappa^n \mathrm{d}(\tilde{x}_0, x^*) + \sum_{j=0}^{\infty} \kappa^{n-1-j} \eta_j \quad (n \geq 1).$$

证明。 该界为 定理 7.5。由于 $\kappa^n \to 0$ 且收敛级数的尾项在几何加权下趋于 0，结论得证。 □

推论 7.7 （一致有界误差）。 假设满足 定理 *7.5*的假设。设 $\sup_{j\geq 0} \eta_j \leq \bar{\eta}$。那么对每个 $n \geq 0$,

$$\mathrm{d}(\tilde{x}_n, x^*) \leq \kappa^n \mathrm{d}(\tilde{x}_0, x^*) + \frac{1-\kappa^n}{1-\kappa}\,\bar{\eta},$$

因此

$$\limsup_{n\to\infty} \mathrm{d}(\tilde{x}_n, x^*) \leq \frac{\bar{\eta}}{1-\kappa}.$$

证明。 将 定理 7.5 中的和估计为 $\bar{\eta} \sum_{j=0}^{n-1} \kappa^{n-1-j} = \bar{\eta}\ (1-\kappa^n)\ /\ (1-\kappa)$。 □

这与稳定性定理定理 6.3中的常数相同。这种巧合具有结构性。两个结果都是同一预解式不等式的推论。因子 $(1-\kappa)^{-1}$ 正是在此处引入的。

现在，我们为非精确计算给出一条可认证停止准则。该准则结合了残差和误差预算，避免了 x^*。

命题 7.8 (非精确条件下的基于残差的认证)。 假设满足 定理 *4.2* 的假设，且其模为 $\kappa \in [0,1)$。令 $\{\tilde{x}_n\}$ 满足定理 *7.1*。那么对每个 $n \geq 0$，

$$\mathrm{d}(\tilde{x}_n, x^*) \leq \frac{1}{1-\kappa}\Big(\mathrm{d}(\tilde{x}_n, T\tilde{x}_n)\Big) \leq \frac{1}{1-\kappa}\left(\tilde{r}_n + \eta_n\right).$$

因此，如果

$$\tilde{r}_n + \eta_n \leq (1-\kappa)\varepsilon,$$

则 $\mathrm{d}(\tilde{x}_n, x^*) \leq \varepsilon$。

证明。 第一个不等式与定理 5.8中的残差到误差转换相同，应用于精确映射 T 在点 $\tilde{x}_n$处：

$$\mathrm{d}(\tilde{x}_n, x^*) \leq \frac{1}{1-\kappa}\,\mathrm{d}(\tilde{x}_n, T\tilde{x}_n).$$

对于第二个不等式，

$$\mathrm{d}(\tilde{x}_n, T\tilde{x}_n) \leq \mathrm{d}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}) + \mathrm{d}(\tilde{x}_{n+1}, T\tilde{x}_n) \leq \tilde{r}_n + \eta_n.$$

停止条件的推论随之成立。 □

注 7.9（模型中的解释）。 在积分方程设定中，η_n 可表示 $f(s、\cdot)$中的求积误差或求值噪声。在边值问题约化中，它可表示格林算子的离散化。定理 7.7 中的界给出了可认证误差下限。该界关于 κ是显式的，因此根据定理 2.7，也可由核函数界和利普希茨常数显式确定。

注 7.10（与加速格式和随机格式的关系）。 在加速或随机不动点方案中，非精确性可能是内在的。本文的估计将确定性核心单独剥离出来。它们可以作为稳定性模块嵌入更复杂的分析中；参见 [45, 17, 37]。

8. 应用 I：非线性积分方程

我们在巴拿赫空间 $X = C([a,b])$ 中工作，该空间配备了 $\|\cdot\|_\infty$ 和度量 $\mathrm{d}(x,\ y) = \|x - y\|_\infty$。不动点表述在近期应用文献中很常见；见 [28, 48, 51, 40, 26, 32]。

8.1. Hammerstein 型：核函数界与利普希茨非线性。

考虑汉默斯坦方程

$$x(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s)\, f(s, x(s))\, ds, \qquad t \in [a,b]. \tag{1}$$

定义 $T\colon\ X \to X$ 如下

$$(Tx)(t) := g(t) + \int_a^b K(t,s)\, f(s, x(s))\, ds. \tag{2}$$

假设 8.1 （汉默斯坦数据）。假设：
(H1) $g \in X$。(H2) K 可测，且 $(M_K)_{\mathrm{H}} := \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,\ s)|\, ds < \infty$。

(H3) $f\colon\ [a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 关于第二个变量连续，并满足 Lipschitz界

$$|f(s,u)-f(s,v)|\le L_f|u-v| \qquad (s\in[a,b],\ u,v\in\mathbb{R})$$

对于某个明确的 $L_f\ge 0$。

(H4) $f_0(s):=f(s,\ 0)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且 $M_{f_0}:=\sup_{s\in[a,b]}|f_0(s)|<\infty$。

引理 8.2 (不变球与 Lipschitz 模数)。 假设 定理 *8.1*。令 $M\colon\ =(M_K)_{\mathrm{H}}$ 且 $L\colon\ =L_fM$。假设 $L<1$。定义

$$R:=\frac{\|g\|_\infty+M\,M_{f_0}}{1-L}. \tag{3}$$

令 $C\colon\ =\mathbb{B}(0,R)=\{x\in X\colon\ \ \|x\|_\infty\le R\}$。则 $T(C)\subseteq C$ 且 $\mathrm{Lip}(T|_C)\le L$。

证明。 令 $x\in C$。利用 $|f(s,\ x(s))|\le|f(s,\ 0)|+L_f|x(s)|$，我们得到

$$\|Tx\|_\infty\le\|g\|_\infty+\sup_t\int_a^b|K(t,s)|\,(|f(s,0)|+L_f\|x\|_\infty)\,ds\le\|g\|_\infty+M(M_{f_0}+L_fR).$$

由（3）可得 R。因此 $T(C)\subseteq C$。对于 $x,\ y\in C$,

$$\|Tx-Ty\|_\infty\le\sup_t\int_a^b|K(t,s)|\,|f(s,x(s))-f(s,y(s))|\,ds\le ML_f\|x-y\|_\infty=L\|x-y\|_\infty.$$

□

定理 8.3 (Hammerstein：唯一可解性与先验收敛速率)。 假设定理 *8.1* 以及 $L=L_f(M_K)_{\mathrm{H}}<1$。令 R如 (3) 中所述，且 $C=\mathbb{B}(0,R)$。则 (1) 有唯一解 $x^*\in C$。对于任意 $x_0\in C$，皮卡迭代$x_{n+1}\colon\ =Tx_n$ 满足

$$\|x_n-x^*\|_\infty\le\Phi_{\mathrm{H}}(n;L,\delta_0):=\frac{L^n}{1-L}\,\delta_0,\qquad \delta_0:=\|Tx_0-x_0\|_\infty.$$

证明。 根据 定理 8.2， $T\colon\ \ C\to C$ 是一个 L-压缩映射。应用 定理 4.4，取 $\kappa=L$。 □

推论 *8.4*（*Hammerstein*：扰动下的稳定性）。假设定-~ ~ ~理 *8.1* 以及 $L<1$，并令 T如（2）中所述。令 $\widetilde{g}$、 K、 f按照相同的~ ~公式定义 T。假设 $T(C)\subseteq C$ 且 $\mathrm{Lip}(T|_C)\le L$。令 $x^*\in$不动点集 $\mathrm{Fix}(T)\cap C$ 且~ $\widetilde{x}^*\in$不动点集 $\mathrm{Fix}(\widetilde{T})\cap C$。则

$$\|x^*-\widetilde{x}^*\|_\infty\le\frac{1}{1-L}\,\varepsilon_C(T,\widetilde{T}),$$

~ ~ ~其中 $\varepsilon_C(T,\widetilde{T})=$上确界$_{x\in C}\|Tx-\widetilde{T}x\|_\infty$。特别地，若 $f=f$，则

$$\varepsilon_C(T,\widetilde{T})\le\|g-\widetilde{g}\|_\infty+\Big(\sup_{t\in[a,b]}\int_a^b|K(t,s)-\widetilde{K}(t,s)|\,ds\Big)\,(M_{f_0}+L_fR).$$

证明。应用定理 6.3 并取$\kappa_T\ =\ L$。要得到显式界，记作~$(Tx)(t)-(Tx)(t)$，并利用三角不等式和一致核界进行估计。□

这类显式依赖估计在应用型不动点论文中常被隐含使用，但因子$(1-L)^{-1}$通常未明确写出；可参见 [32, 56]。

8.2. **伏尔泰拉型：单调性与预解式估计**。考虑伏尔泰拉方程

$$x(t) = g(t) + \int_a^t K(t,s)\, f(s, x(s))\, ds, \qquad t \in [a,b]. \tag{4}$$

定义 $T\colon\ X \to X$ 为

$$(Tx)(t) := g(t) + \int_a^t K(t,s)\, f(s, x(s))\, ds. \tag{5}$$

假设 8.5 (Volterra 数据)。 假设 定理 8.1(H1)、(H3)、(H4)，并且满足：

(V1) K 可测，且 $(M_K)_{\mathrm{V}} := \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t |K(t,s)|\, ds < \infty$。

令 $M := (M_K)_{\mathrm{V}}$，并令 $L := L_f M$。

引理 8.6 (Volterra：不变球与模)。 假设 定理 *8.5*以及 $L < 1$。定义 R，其公式与 (3) 相同，其中 $M = (M_K)_{\mathrm{V}}$。令$C = \mathbb{B}(0,R)$。则 $T(C) \subseteq C$且 $\mathrm{Lip}(T|_C) \le L$。

证明。 证明与 定理 8.2相同，只需将 $\int_a^b$ 替换为 $\int_a^t$ 并使用$(M_K)_{\mathrm{V}}$。 □

定理 8.7 (Volterra：唯一可解性与先验收敛速率)。 假设 定理 *8.5* 以及 $L = L_f (M_K)_{\mathrm{V}} < 1$。设 $x^* \in C$为 (4)的唯一解。对于任意 $x_0 \in C$，皮卡迭代满足

$$\|x_n - x^*\|_\infty \le \Phi_{\mathrm{V}}(n; L, \delta_0) := \frac{L^n}{1-L}\,\delta_0, \qquad \delta_0 := \|Tx_0 - x_0\|_\infty.$$

证明。 应用 定理 8.3 结合 定理 8.6。 □

压缩映射不需要单调性，但单调性仍有诊断作用。它无需求解 R，即可给出不变序区间。

假设 8.8 （序结构）。 假设 $K(t,s) \ge 0$ 对 $a \le s \le t \le b$成立，且 $f(s,\cdot)$ 对每个 s 都是非递减的。

引理 8.9 （单调不变性）。 假设 定理 *8.8*成立。令 $m, M \in X$满足 $m \le Tm$ 且 $TM \le M$在 $[a,b]$上逐点成立。那么序区间$[m,M] := \{x \in X\colon\ m \le x \le M\}$是 T-不变的。

证明。 若 $x \in [m,M]$，则 $f(s,m(s)) \le f(s,x(s)) \le f(s,M(s))$。乘以 $K \ge 0$ 并积分，得到 $Tm \le Tx \le TM$。因此 $m \le Tx \le M$。□

当 $L < 1$时，可以将序区间与不变球 C相交。随后，压缩映射论证可得交集中的唯一不动点。这是将单调性诊断与定量证书相结合的最简洁方法。

命题 *8.10*（*Volterra*预解式估计）。设定理 *8.5* 满足$\sim L < 1$。令 T 和 T 为定义在同一$\widetilde{}$不变集 $C = \mathbb{B}(0, R)$上的两个具有形式（*5*）的 *Volterra*算子。假设 $\mathrm{Lip}(T|_C) \le L$ 且 $\mathrm{Lip}(T|_C) \le L$。令 $\sim x^* \in$ 不动点集 $(T) \cap C$ 且 $\widetilde{x}^* \in$ 不动点集 $(T) \cap C$。则

$$\|x^* - \widetilde{x}^*\|_\infty \le \frac{1}{1-L}\,\varepsilon_C(T, \widetilde{T}).$$

证明。 这是 定理 6.4 具有 $\kappa = L$。 □

近期研究通过各种广义压缩映射，利用不动点方案处理积分方程的存在性与逼近问题；参见 [28, 48, 51,40, 26]。本文关注的重点不同。我们将常数纳入一个显式的 Φ（n；数据）以及一个显式的稳定性因子。

9. 应用II：边值问题

我们通过格林算子处理一个边值问题。基于不动点的约化是经典方法。本文的目标更为具体：我们将模型常数传递到一个显式的先验界和一个显式的稳定性因子中。近期针对微分方程和边值问题的不动点方法也采用类似思路，但往往止步于证明存在性或收敛性，而不进一步给出经认证的 Φ；可比较 [29, 51, 32]。

9.1. 格林算子表述与显式界。 令 $[a, b] \subset \mathbb{R}$。在 $X = C([a, b])$中工作，其中 $\|\cdot\|_\infty$。考虑如下形式的二阶问题

$$x''(t) = F(t, x(t)), \qquad t \in [a, b], \tag{6}$$

满足下文所述的边界条件。假设相应线性边界算子的格林核$G(t,\ s)$ 存在。那么，方程(6的解满足积分方程

$$x(t) = \ell(t) + \int_a^b G(t, s)\, F(s, x(s))\, ds, \tag{7}$$

其中 ℓ 是相关线性非齐次问题的解（或边界强迫项）。定义格林算子

$$(Tx)(t) := \ell(t) + \int_a^b G(t, s)\, F(s, x(s))\, ds. \tag{8}$$

压缩模由核的界控制

$$M_G := \sup_{t \in [a,b]} \int_a^b |G(t, s)|\, ds.$$

这与$(M_K)_{\mathrm{H}}$ 中相同的量：定理2.2。一旦已知 G ，它便是显式的。

假设9.1 （边值问题数据）。假设：
(B1) $\ell \in X$。

(B2) G 可测且 $M_G < \infty$。(B3) $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在第二个自变量上满足 Lipschitz界：

$$|F(t,u)-F(t,v)| \le L_F|u-v| \qquad (t\in[a,b],\ u,v\in\mathbb{R}),$$

对于某个显式常数 $L_F \ge 0$。

(B4) $F_0(t) := F(\{v4,\ 0)$ 有界且 $M_{F_0} := \sup_{t\in[a,b]}|F_0(t)| < \infty$。设 $L := L_F M_G$。

引理 9.2 (格林算子的不变球与模)。 假设定理 *9.1*。设 $L<1$。定义

$$R := \frac{\|\ell\|_\infty + M_G\, M_{F_0}}{1-L}, \qquad C := \mathbb{B}(0,R)\subset X. \tag{9}$$

则 $T(C)\subseteq C$，且 $\mathrm{Lip}(T|_C)\le L$。

证明。 证明与定理 8.2 完全相同，只需将 K 替换为 G，并将 f替换为 F。 □

9.2. **原型边值问题的一个定量定理**。 我们陈述一个原型定理。它具有代表性，并保留了各常数的显式形式。

例 9.3 （狄利克雷问题）。 设 $a<b$。考虑

$$x''(t) = F(t,x(t)), \qquad x(a)=\alpha, \quad x(b)=\beta. \tag{10}$$

假设 F 满足 定理 9.1 (B3)–(B4)。设 ℓ为线性插值函数

$$\ell(t) := \alpha + \frac{t-a}{b-a}(\beta-\alpha).$$

令 G 为 $[a,b]$上的狄利克雷格林核。则任意解都满足（7）。 (10)

该定量定理仅使用 M_G 和 L_F。界是显式的。停止指标是显式的。

定理 9.4 （狄利克雷边值问题：经验证的存在性、唯一性与收敛速率）。假设满足 定理 *9.3* 的条件。假设 $M_G<\infty$ 且 $L := L_F M_G < 1$。令 R 和 C 如 （9）所示。则 （10）有唯一解 $x^*\in C$。对任意$x_0\in C$，皮卡迭代 $x_{n+1} := Tx_n$ 满足

$$\|x_n - x^*\|_\infty \le \Phi_{\mathrm{BVP}}(n;L,\delta_0) := \frac{L^n}{1-L}\,\delta_0, \qquad \delta_0 := \|Tx_0 - x_0\|_\infty.$$

特别地，若 $n\ge N_{\mathrm{geo}}(\varepsilon;\ L,\ \delta_0)$ 来自 定理 *5.7*，则 $\|x_n-x^*\|_\infty\le\varepsilon$。

证明。根据 定理 9.2， $T\colon C\to C$ 是一个 L-压缩映射。应用 定理 4.4，取 $\kappa = L$。停止判据见 定理 5.7。□

该定理是边值问题的对应定理，对应于定理 8.3。文献中有许多关于边值问题在广义压缩映射和迭代格式下的不动点证明。这里的独特之处在于，数据$(L_F,\ M_G,\ \delta_0)$被纳入一个显式界中。关于相关情形下迭代格式的视角和稳定性结论，参见 [29, 1, 32, 51]。

9.3. **参数依赖性。** 现在，我们将模型扰动下的稳定性形式化。该陈述是对定理 6.3的直接特化。我们将其限定在可验证量的层面。

设 T为格林算子（8），由 (ℓ, G, F)诱导。设 T由 $(\widetilde{\ell}, \widetilde{G}, \widetilde{F})$诱导，$(\ell, G, F)$ 作用于同一定义域 $[a, b]$。假设 $C = \mathbb{B}(0, R)$ 对两个映射均为不变球，且两个映射在 $\leq L < 1$ 上具有相同的利普希茨模 C。

定理 9.5 （边值问题参数依赖性）。 假设 定理 *9.1* 对 $L < 1$ 以及 T和 T在同一个不变球 C上成立。设 $x^* \in$ 不动点集$(T) \cap C$ 且 $\widetilde{x}^* \in$ 不动点集$(T) \cap C$。则

$$\|x^* - \widetilde{x}^*\|_\infty \leq \frac{1}{1-L}\, \varepsilon_C(T, \widetilde{T}), \qquad \varepsilon_C(T, \widetilde{T}) := \sup_{x \in C} \|Tx - \widetilde{T}x\|_\infty.$$

证明。 应用 定理 6.4 ，取 $\kappa = L$。 □

量 $\varepsilon_C(T, T)$ 可根据数据偏差进行界定。由此可得明确的参数灵敏度界。

命题 9.6 （模型参数的显式扰动界）。 假设定理 *9.5*的假设成立。此外假设 $F = F$ 与$C = \mathbb{B}$（0， R）。令

$$\Delta_\ell := \|\ell - \widetilde{\ell}\|_\infty, \qquad \Delta_G := \sup_{t \in [a,b]} \int_a^b |G(t,s) - \widetilde{G}(t,s)|\, ds, \qquad B_F := M_{F_0} + L_F R.$$

Then

$$\varepsilon_C(T, \widetilde{T}) \leq \Delta_\ell + \Delta_G\, B_F,$$

从而

$$\|x^* - \widetilde{x}^*\|_\infty \leq \frac{1}{1-L}\, (\Delta_\ell + \Delta_G\, B_F).$$

证明。 对于 $x \in C$ 与 $t \in [a, b]$,

$$(Tx)(t) - (\widetilde{T}x)(t) = (\ell(t) - \widetilde{\ell}(t)) + \int_a^b (G(t,s) - \widetilde{G}(t,s))\, F(s, x(s))\, ds.$$

取绝对值，并使用 $|F$（s， x（s）$)| \leq |F$（s， 0）$| + L_F|x$（s）$| \leq M_{F_0} + L_F R = B_F$（对 $x \in C$）。然后对 t 以及对 $x \in C$取上确界。□

注9.7（常数的含义）。 因子（$1 - L$）$^{-1}$ 不可避免；参见定理 6.6。其余各量均可测。 Δ_G 是核偏差。 B_F 是 C上强迫项值域的一个界。该估计是预解式稳定性界的度量类比。它正是数值实现中数据扰动所需的精确陈述。

10. 算例与数值验证

我们记录两个具体模型，以说明核/Lipschitz 数据如何通过 定理 4.4 产生可认证速率，以及如何通过 定理 6.3实现稳定性。

10.1. **Hammerstein 示例。** 设 $X = C([0,1])$，其中 $\|\cdot\|_\infty$。令 $g(t) = t$，$K(t,s) = t+s$，且 $f(s,u) = \frac{1}{3}u$。那么 $(M_K)_{\mathrm{H}} = \sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 (t+s)\,ds = \frac{3}{2}$ 且 $L_f = \frac{1}{3}$，因此经认证的模为

$$\kappa = L_f (M_K)_{\mathrm{H}} = \frac{1}{2}.$$

任选一个 $x_0 \in C = \mathbb{B}(0,R)$，满足 $R = \|g\|_\infty/(1-\kappa) = 2$，则皮卡迭代满足

$$\|x_n - x^*\|_\infty \le \frac{\kappa^n}{1-\kappa}\,\delta_0 \qquad \text{with} \quad \delta_0 = \|Tx_0 - x_0\|_\infty,$$

且残差证书 $\|x_n - Tx_n\|_\infty \le (1-\kappa)\varepsilon$ 推出 $\|x_n - x^*\|_\infty \le \varepsilon$由 定理 5.8。

10.2. **边值问题示例。** 考虑一个化简为（7）的二阶边值问题，其格林核为 G，非线性项为 F，如第 9 节所示。若$M_G =$上确界$_t \int_a^b |G(t,\ s)|\,ds$，且 F关于第二个自变量满足利普希茨条件，常数为 L_F，则 $\kappa = L_F M_G$。只要 $\kappa < 1$，不变球中的解就是唯一的，并且适用同样经过认证的先验界和稳定性界，稳定性因子为 $(1-\kappa)^{-1}$。

11. 统一定理的范围与局限

该框架是一种筛选器。它接受能够进行定量认证的映射；对于仅能根据数据得到定性存在性结论的映射，则予以排除。本节将记录这两方面的事实。关于丰富型和广义压缩映射的综述性论述为这些包含关系提供了背景；参见 [12, 27, 46]。

11.1. **经典压缩类的包含关系。** 我们列出由第3节所涵盖的标准类。判据是明确的。必须给出一个规范函数ω 并在可验证的工作集 C上计算 κ；θ）。

命题 *11.1*（巴拿赫压缩映射）。设 (X, d) 为度量空间，且 $T\colon X \to X$ 满足 $d(Tx,Ty) \le q\,d(x,y)$，其中 $q \in (0,1)$。令 $C \subseteq X$ 为任意闭的 T-不变集。则 T 是定义在 C 上的双点规范压缩，且对于任意 $R > 0$，$\omega(r) = qr$，$\kappa(R) = q$。因此，第*4*至*7*节的所有结论均成立。

证明。由定义及定理 4.4、6.3 和7.5可立即得出。 □

命题 11.2（Proinov型广义压缩映射）。设（X,d）为完备度量空间，令 $C \subseteq X$ 为闭且 T-不变，并假设

$$\mathrm{d}(Tx,Ty) \le \omega(M_T(x,y);\theta) \qquad (x,y \in C),$$

其中 M_T 如定理 *3.5* 所述，且具有压缩规范函数 $\omega(\cdot;\ \theta)$。假设$C \subseteq \mathbb{B}$（x_0，R）对某个明确的 R 成立，且 $\kappa(R;\ \theta) < 1$。则 T 满足该框架。

证明。 这由定理 3.8直接得出。 □

这里的内容并非包含关系本身，而是显式证书$\kappa(R;\ \theta)$。这个量将定性的 Proinov 型条件转化为可计算速率。Proinov 型类是实现这种控制的典型起点；参见 [46]。

命题 11.3 (Reich–Suzuki型Lipschitz推论)。 设$(X, \|\cdot\|)$是一个赋范空间，且 $C \subseteq X$ 是凸的。假设 $T\colon C \to C$ 属于某个 *Reich–Suzuki*型类，且可以验证其在 C 上的 *Lipschitz* 常数为 $L_C < 1$（例如，通过一个显式不等式推出对所有 $x, y \in C$ 均有 $\|Tx - Ty\| \le L_C\|x - y\|$）。那么 T 满足该框架，其中 $\omega(r) = L_C r$ 和 $\kappa = L_C$。

证明。 一旦 $\|Tx - Ty\| \le L_C\|x - y\|$ 在 C 上得到验证，就应用 定理11.1。□

这个命题特意采用了条件式表述。有些 Reich–Suzuki 条件导出的是非扩张性，而非压缩性。此时无法使用 $\kappa < 1$ 。在这种情况下，需要采用不同的模和不同的收敛速率。关于 Reich–Suzuki 非扩张映射及其逼近的近期研究展现了假设的多样性；参见 [50, 26]。

命题 11.4 （平均算子情形作为压缩子情形）。 设H 是一个*Hilbert*空间，且 $T\colon H \to H$ 是 α- 平均的，其中 $\alpha \in (0,1)$。若能验证 T 在闭不变集 C 上是严格压缩，且 *Lipschitz* 常数为 $L_C < 1$，则该框架适用于 C，其中 $\kappa = L_C$。

证明。 应用定理11.1。 □

平均算子在分裂方法中至关重要，定量结果通常追踪残差速率，而非严格压缩；参见 [18, 20, 3,21]。我们的框架涵盖了那些能够在工作区域上验证严格压缩模的情形。

11.2. **可验证性要求所排除的情形**。 排除并非缺陷，而是“可验证”一词的含义。无法根据数据检验的假设，不能支持经认证的 Φ。

命题 11.5 （非扩张情形）。 假设 T 在C上是非扩张的，即对所有 x、$y \in C$，都有 $\mathrm{d}(Tx, Ty) \le \mathrm{d}(x, y)$。那么，仅凭这一不等式无法认证 $\kappa(R;\ \theta) < 1$。因此，当前框架无法给出几何速率和稳定性常数 $(1-\kappa)^{-1}$。

证明。 该不等式允许 $\kappa = 1$。若无额外结构，则无法推出严格不等式。□

非扩张映射的定量理论通常借助不同的机制展开。它以渐近正则性、Fejér单调性或误差界取代压缩映射。关于Mann迭代与Halpern型迭代残差速率的近期定量研究说明了这一转变；参见 [19, 14, 34, 15, 45]。

命题11.6 （隐式或不可计算模）。 假设某不动点定理假定存在辅助函数 φ（或比较函数），却未在可验证范围内给出 φ 的可计算界。那么，即使存在性与唯一性成立，认证界$\Phi(n;$数据$)$ 也无法仅从该假设中提取出来。

证明。 经认证的 Φ 需要对规范函数或 $\kappa(R;\theta)$进行显式求值。如果控制函数无法从模型数据中计算得出，那么这两个量都无法计算。□

命题11.7 (工作集未获认证)。 如果无法给出一个闭的T-不变集 C，并在其上认证该模，那么此框架就无法应用。特别是，如果不变集是通过非构造性论证（例如，没有显式界的紧性）得到的，那么 Φ 和稳定性常数就无法得到认证。

证明。 定理 3.8 的数据包 定理 3.8包含 C 和一个半径界。若这些内容不明确，模计算便无从定义。□

备注 11.8（方法边界）。 这一边界是锐利的。当$\kappa \uparrow 1$时，稳定性必然急剧恶化；见 定理 6.6。若仅有 $\kappa = 1$ 可用，该方法便不作更多保证。此时需要不同的定量工具。

备注 11.9（这一限制为何有其原则依据）。 一个只断言存在、却不提供证书的定理，只有偶然情况下才与计算相容。一个能提供 Φ 和 C_{stab} 的定理，则是按设计与计算相容的。本框架选择了后一种方案。

12. 结论

我们固定了一个完备度量空间（X，d）和一个闭不变集 C。我们在 C 上施加了一个带有可计算模的压缩不等式。我们将该模记为 κ。我们假设 $\kappa < 1$。这一条不等式产生了三个定量结果。

第一个结果是先验误差界。它是明确的：

$$\mathrm{d}(x_n, x^*) \le \Phi_{\mathrm{geo}}(n;\kappa,\delta_0) = \frac{\kappa^n}{1-\kappa}\,\delta_0, \qquad \delta_0 = \mathrm{d}(Tx_0, x_0),$$

当规范函数具有已知的闭式表达时，还可以通过对规范函数进行迭代来进一步改进。这揭示了不动点陈述中的计算内容。它遵循了近期关于残差界和迭代复杂度的定量研究方向 [19, 14, 34, 23, 15]。

第二项成果是数据依赖性。它是显式的：

$$\mathrm{d}(x^*, y^*) \le C_{\mathrm{stab}}\,\varepsilon_C(T,S), \qquad C_{\mathrm{stab}} = \frac{1}{1-\kappa}, \qquad \varepsilon_C(T,S) = \sup_{x\in C}\mathrm{d}(Tx, Sx).$$

该常数由基本示例所必然确定。因此，这并非偏好问题。这与迭代格式论文中处理稳定性的方式一致，但对 κ的依赖 [56, 32, 43]已不可避免。

第三项结果是非精确评估下的鲁棒性。非精确轨道$\mathrm{d}(\tilde{x}_{n+1},\ T\tilde{x}_n)\ \le \eta_n$满足封闭递归。在一致有界噪声下，它给出阶为 $\bar{\eta}/(1-\kappa)$ 的可认证误差下限。这将不动点集陈述与计算联系起来。关于扰动的相关观点也出现在对惯性 Halpern 型格式和随机 Halpern 型格式的现代分析中 [20, 45, 17,3]。

这些应用的选取以可验证性为准。对于 Hammerstein 和 Volterra 积分方程，数据可简化为 $(M_K, L_f, M_{f_0}, \|g\|_\infty)$ 以及所选的初始化。对于边值问题，数据可简化为 $(M_G, L_F, M_{F_0}, \|\ell\|_\infty)$。在这两种情况下，这些常数都能给出经认证的收敛速率和稳定性因子。算例证实，这些界限可以按原文所示直接计算。

研究范围受“可验证”一词的限定。除非加入误差界机制，否则不考虑非扩张情形。除非能够在可认证区域上计算 $\kappa(R;\theta)$，否则不考虑隐式模函数。这一限制有其原则依据。无法给出 Φ 的定理，不能认证精度。

仍有两个研究方向。第一，在非扩张情形下，以误差界假设取代严格压缩，同时保留显式 Φ，并遵循渐近正则性和残差速率方面的定量研究文献 [19,34, 35]。第二，将本研究的稳定性模块与单调包含问题中的算子分裂构造相结合，因为不动点表述在此具有结构性作用 [18, 21, 3]。这两个方向都遵循同一标准：假设必须可检验，常数必须明确。

致谢

作者衷心感谢**Ramachandra R. K. 博士，**印度安得拉邦拉贾蒙德里 Government College (Autonomous)校长为该机构提供支持性研究环境，并持续鼓励、坚定支持研究活动。

资助

作者未就本工作获得任何外部资助。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

伦理声明

本文不包含任何作者开展的涉及人类参与者或动物的研究。未收集或处理任何个人数据。

.

参考文献

1. A. Aldosary 等，一类广义压缩映射的惯性迭代法及其应用，《不等式与应用杂志》（2024年）。2. Koji Aoyama 和 Shigeru Iemoto，*Hilbert*空间中拟非扩张映射的并行方法，2024年。3. Felipe Atenas、Minh N. Dao 和 Matthew K. Tam，变步长分布式前向-后向分裂：一种用于公共不动点问题和分布式非线性优化的快速迭代方法，2026年。4. Felipe Atenas、Frank Hernández、Minh N. Dao 和 Matthew K. Tam，重定位不动点迭代及其在凸可行性中的应用，2025年。5. ，具有显式正则化参数界的*Halpern*迭代新算子设计，2026年。6. Felipe Atenas、Farhana Ahmed Simi 和 Matthew K. Tam，重定位不动点迭代的线性收敛，2025年。7. Haifeng Bao、Donal O’Regan、Tao Ding 和 Fen Sun，可测映射的不动点及其应用，2026年。8. Haifeng Bao、Fen Sun、Tao Ding 和 Donal O’Regan，*Kannan*型压缩映射的压缩迭代原理与不动点定理，2026年。9. Laura Bargetz 和 Simeon Reich，典型非扩张映射的不动点，2020年。10. Zouaoui Bekri、Nicola Fabiano、Abdulaziz Khalid Alsharidi 和 Mohammed Ahmed Alomair，将*Singh*框架应用于迭代 ρ-*ćirić*压缩映射而得到的新不动点定理，《AIMS数学》**11**（2026年），第1期，1653–1674页。11. Vasile Berinde，关于*Hilbert*空间中联系拟非扩张映射与拟压缩映射的一个有用引理，2024年。12. Vasile Berinde 和 Mădălina Păcurar，富化压缩映射不动点理论的最新进展：综述，2024年。13. P. Bishwambhar 等， θ-度量空间中广义*Wardowski*型压缩映射的新不动点定理，《AIMS数学》（2023年）。14. Florian A. Bot 和 Dang-Khoa Nguyen，具有 $\mathcal{O}(1/n)$ 收敛速率的快速*Krasnosel’skii–Mann*算法：以不动点残差为依据，2022年。15. Mario Bravo、Roberto Cominetti 和 Jongmin Lee，针对*Lipschitz*映射的极小极大最优*Halpern*迭代，2026年。16. Chunchun Chen、Andrew D. Abrahamsen、Jonas Hallam、Christoffer O. Jensen 和 Mads S. Andersen，采用优化系数的非平稳*Anderson*加速，2022年。17. Pietro Colao、Nicolas Flammarion 和 Tylène Thibaut de Maisières，论*HalpernSGD*的收敛性，2026年。18. Patrick L. Combettes，单调算子分裂方法的几何学，2023年。19. Jose Pablo Contreras 和 Roberto Cominetti，赋范空间中非扩张不动点迭代的最优误差界，2021年。20. Daniel Cortild 和 Juan Peypouquet，*Krasnoselskii–Mann*迭代：惯性、扰动与逼近，2024年。21. Nicholas Di、Eric C. Chi 和 Samy Wu，采用基于*Hamilton–Jacobi*方程的近端算子的算子分裂，2026年。22. Georgios B. Diakonikolas，用于近乎最优且无需参数的单调包含问题及变分不等式强解的*Halpern*迭代，2020年。23. Valentina Foglia，不动点问题迭代方法的收敛速率，2025年。24. Faruk Hacıoğlu 和 Feyzi Gürsoy，多值映射不动点的存在性与数据依赖性结果，2021年。25. A. Hussain 等，正交 f-压缩映射的模糊不动点结果及其在模糊积分方程中的应用，《AIMS数学》（2025年）。

26. Tehreem Ishtiaq, Afshan Batool, Aftab Hussain 等，非扩张映射的不动点逼近及其在时滞积分方程中的应用，《不等式与应用杂志》**2025年**(2025), 19. 27. Jacek Jachymski, 巴拿赫不动点定理：百年应用中的若干选题，《西班牙皇家精确、物理与自然科学学院杂志 A 辑：数学》 (2024). 28. A. Jubair 等，广义压缩映射的新不动点结果及其在积分方程中的应用，《不等式与应用杂志》(2021). 29. E. Kalkan 和 H. Laiki，正交映射的公共不动点定理及其在非线性分数阶微分方程中的应用，《AIMS数学》(2024). 30. Yekun Ke, Xiaoyu Li, Yingyu Liang, Zhenmei Shi 和 Zhao Song，深入理解深度神经网络中的不动点迭代：一项详尽的分析研究，2024年。31. Nicholas Krämer，无需状态增广的数值稳健不动点平滑，2024年。32. V. Kumar 等，一种稳健的隐式 *Jungck* 迭代格式：稳定性、数据依赖性及其在非线性积分方程中的应用，《边值问题》(2025年)。33. Nicolas Lepage-Saucier，通过自适应松弛加速收敛不动点迭代，2024年。34. Laurenţiu Leuştean 和 Andrea Pia Pinto，交替 *Halpern–Mann* 迭代的渐近正则性收敛速率，2022年。35. Tianxiang Liu 和 Bruno F. Lourenço，卡拉马塔正则性条件下公共不动点问题的具体收敛速率，2024年。36. Nida Izhar Mallick 和 Izhar Uddin，一种更简单、更高效的不动点迭代格式，2026年。37. David Martin、Moussa Diallo 和 François-Xavier Vialard，学习加速平均算子的不动点迭代，2026年。38. Juan Javier Maulén、Matías N. Navarro 和 Boris S. Mordukhovich，惯性克拉斯诺谢尔斯基–曼迭代，2022年。39. Nabil Medjic，关于紧值压缩映射的逐次逼近，2022年。40. M. Nawaz 等，广义压缩映射的不动点结果及其在非线性积分方程中的应用，《不等式与应用杂志》(2024). 41. Talat Nazir 和 Sergei Silvestrov，有序偏度量空间中四个广义压缩映射的唯一公共不动点，2023年。42. Yahya Ould Hamma，*CAT(0)*空间中非扩张映射的克拉斯诺谢尔斯基–曼迭代：收敛性及相关性质，2020年。43. A. Panja 等，弱 k-非扩张映射的不动点，以及带有应用的 不动点迭代过程稳定性结果，《不等式与应用杂志》(2022). 44. R. Pant、A. Pant 和 K. Jha，度量空间中隐式压缩条件下的不动点定理，《不动点理论与应用杂志》(2020). 45. Nicholas Pischke 和 Thomas Powell，广义随机 *Halpern* 格式的渐近正则性，2024年。46. Petko D. Proinov，度量空间中广义压缩映射的不动点定理，《不动点理论与应用杂志》(2020). 47. Badr Eddine Rossafi 和 Noureddine Kari，(φ, F)-压缩映射在(α, b)-完备度量空间中的新不动点定理，2022年。48. A. Sagheer 等，涉及 α-可容许性的新的多值 f-压缩映射及其应用，《不等式与应用杂志》(2023). 49. Rajiv Sambharya、Georgina Hall、Brandon Amos 和 Bartolomeo Stellato，学习对不动点优化算法进行热启动，2023 年。50. A. Shammaky 等，一类新的 *Reich–Suzuki* 非扩张映射的一些不动点结果，《AIMS数学》(2025)。

51. D. Singh 等，利用涉及 f-压缩映射的不动点结果求解积分方程和微分方程，《不等式与应用杂志》(2024). 52. Defeng Sun、Yancheng Yuan、Guojun Zhang 和 Xinyuan Zhao，通过退化近端点映射加速预条件 *ADMM*，2024年。53. Youssef Touail、Amine Jaid 和 Driss El Moutawakil，非紧性测度意义下 F-扩张映射的不动点，2023年。54. Quoc Tran-Dinh 和 Kejun Luo，用于单调包含的 *Halpern* 型加速算法与分裂算法，2021年。55. ，从 *Halpern* 不动点迭代到 *Nesterov* 加速方法，2022年。56. Akansha Tyagi 和 Sachin Vashistha，*AT* 迭代算法对数据依赖性、收敛性和稳定性的影响，2024年。57. F. Uddin 等，一种新迭代过程的收敛分析及若干应用，《差分方程进展》(2022). 58. Jel mer van Treek，带欧几里得范数正则项的优化问题的线性收敛与误差界，2025年。59. Tian Xu 和 Harsh Aggarwal，稳定马尔可夫链泊松方程的不动点迭代，2026年。

数学讲师，Government College (Autonomous)，拉贾蒙德里，安得拉邦，印度电子邮箱：chandrasekhargokavarapu@gmail.com