arXiv:2602.07105v1 [math.DS] 6 Feb 2026

具有状态依赖时滞的Caputo分数阶系统的自适应控制与Mittag-Leffler稳定性

Abdallah Alsammani[1,*] 和 Gassan Farah[2]

[1]物理、工程、数学与计算机科学部，
美国特拉华州立大学，多佛，特拉华州

[2]数学与应用数学系，
南非开普敦西开普大学

摘要

本文为具有状态依赖时滞的 Caputo 分数阶非线性系统的 Mittag-Leffler稳定性建立了新的充分条件。核心分析工具是一类包含形如 $\xi^{\alpha-1}$ for $\alpha \in (0,\ 1)$ 的奇异核的 Lyapunov-Krasovskii泛函，该泛函在统一框架下将分数阶记忆效应与时滞诱导动力学联系起来。我们证明，所得稳定性条件可化为便于计算的线性矩阵不等式，并推导出可容忍的最大时滞扰动的显式公式。在此稳定性基础上，我们设计了一种自适应控制器，其参数更新律采用分数阶形式，并结合 σ-修正和基于滤波器的时滞估计机制，从而无需使用经典状态导数；对于分数阶轨迹而言，经典状态导数可能并不存在。收敛性分析证明，闭环系统具有最终有界性，且其界可计算，并会随着正则化参数趋近于零而消失。对具有状态依赖传输时滞的三神经元分数阶霍普菲尔德网络进行数值验证表明，所提出的自适应方案将累积控制能量降低了99.3%，并使渐近状态误差比相当的分数阶滑模控制器小两个数量级。

关键词： Caputo分数阶导数；Mittag-Leffler稳定性；状态依赖时延；自适应控制；奇异李雅普诺夫-克拉索夫斯基泛函；线性矩阵不等式

1 引言

分数阶微分方程已成为标准建模工具，适用于记忆效应和遗传效应至关重要的系统，包括黏弹性响应 [3],复杂介质中的异常输运 [4], 储能设备中的电化学动力学 [5], 以及网络流量中的长程依赖现象 [6]。分数阶算子的一个核心特征是其非局部性：在Caputo形式中，时刻 t 的状态演化取决于整个过去的轨迹，这种依赖通过带有弱奇异核的积分算子体现。这一结构为多尺度时间相关性和具有物理意义的初始条件提供了数学上严谨的表征方式，并已在分数阶微积分的奠基性专著中得到充分论述 [1, 2]。

*通讯作者：aalsammani@desu.edu

时滞是使有限维模型呈现无限维行为的另一种主要机制。在许多应用中，时滞源于信号传输、传感和计算，其对整数阶系统的 destabilizing 影响已得到充分认识 [7, 8]。当分数阶记忆与延迟反馈相结合时，所产生的动力学便取决于两种不同形式的历史信息：分数阶导数所编码的加权历史，以及对滞后自变量处函数值的逐点求取。这种相互作用在神经系统和网络化系统中尤为重要，因为时延可能随活动水平而变化，通信协议也会根据系统状态调整时序 [9, 10]。此类状态依赖时滞会带来额外的分析难题，因为时滞通过解的轨迹隐式地进入系统，从而使稳定性分析和控制综合都更加复杂。

分数阶系统的稳定性理论已取得长足发展，起初主要基于线性等阶模型的特征值判据 [11]，随后逐步发展为能够刻画分数阶动力学自然衰减行为的基于李雅普诺夫的框架。在此背景下，Mittag-Leffler稳定性为指数稳定性提供了恰当的类比，并已成为分数阶非线性系统的基本概念 [12]。分数阶系统的李雅普诺夫方法已沿多个方向得到发展和完善，包括一般二次Lyapunov函数以及向更广泛分数阶动力学类别的扩展 [13, 14]。对于时滞分数阶系统，现有分析已涉及常时滞情形及相关神经网络模型，并提出了基于能量的李雅普诺夫解释 [15–17]。然而，将分数阶记忆与沿状态轨迹变化的时滞幅值相耦合的机制，尚未被标准方法充分刻画。特别是，整数阶时滞文献中通常有效的李雅普诺夫–克拉索夫斯基构造往往采用光滑积分项，而分数阶动力学则自然要求使用能够反映卡普托算子奇异记忆结构的核。同时，分数阶系统中时滞效应的自适应补偿带来了一个微妙的正则性问题：卡普托分数阶微分方程的轨迹通常仅具有阶数为 $\alpha \in (0,1)$ 的H¨older连续性，且可能不存在经典导数，这限制了依赖 $\dot{x}(t)$ [21]的时滞估计或补偿机制的适用性。基于这些考虑，本文针对具有状态依赖时滞的Caputo分数阶非线性系统，构建了一个稳定性与控制框架。我们引入了一类包含与分数阶阶次相匹配的奇异核的Lyapunov–Krasovskii泛函，并利用该构造推导出Mittag-Leffler稳定性的充分条件，将其归结为计算上易于处理的线性矩阵不等式。所得分析给出了以闭式形式表示的显式时滞鲁棒裕度。在稳定性结果的基础上，我们设计了一种带有 σ-修正的分数阶参数更新律的自适应控制器，并结合一种基于滤波器的时滞估计机制，从而避免依赖经典状态导数，并与分数阶轨迹的H¨older正则性相容。最后，在具有状态依赖传输时滞的三神经元分数阶Hopfield网络上进行了数值验证。结果表明，与相应的分数阶滑模控制器相比，所提出的自适应方案显著降低了控制 effort，并显著提高了渐近跟踪精度。

记号。 $\|\cdot\|$ 表示向量的欧几里得范数和矩阵的谱范数。对于对称矩阵 M， $\lambda_{\min}(M)$ 和 $\lambda_{\max}(M)$ 表示其极端特征值。空间 $C^1([-\bar{\tau}, 0]; \mathbb{R}^n)$ 配备上确界范数 $\|\phi\|_\infty = \sup_{\theta\in[-\bar{\tau},0]} \|\phi(\theta)\|$。

2 数学预备知识

2.1 分数阶微积分

我们仅考虑阶数为 $\alpha \in (0,\ 1)$ 的 Caputo分数阶导数，这只要求一阶可微，并允许采用具有物理意义的初始条件 [1]。

定义1 (Riemann-Liouville分数阶积分 [2])。 对于 $f \in L^1[t_0, T]$ 和 $\alpha > 0$,

$$I_{t_0}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, \quad t > t_0. \tag{1}$$

定义2 (Caputo分数阶导数 [1])。 对于绝对连续的 $f\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}$ 和 $\alpha \in (0,1)$,

$$ {}^{C}D_{t_0}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} f'(s)\, ds = I_{t_0}^{1-\alpha} f'(t). \tag{2}$$

定义3 (Mittag-Leffler函数 [22])。 双参数*Mittag-Leffler*函数为 $E_{\alpha,\ \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/\Gamma(\alpha k + \beta)$ 其中 $\alpha, \beta > 0$ 和 $z \in \mathbb{C}$。简记为 $E_{\alpha}(z) = E_{\alpha,\ 1}(z)$满足渐近展开

$$E_{\alpha}(-t^{\alpha}) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + O(t^{-2\alpha}) \quad as\ t \to \infty, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{3}$$

引理1 (二次型的Caputo导数 [13])。 若 $x\colon\ [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ 连续可微且 $P \succ 0$，则

$$ {}^{C}D_{t_0}^{\alpha} \left(x^{\top} P x \right) \le 2 x^{\top} P\, {}^{C}D_{t_0}^{\alpha} x, \quad \alpha \in (0,1). \tag{4}$$

引理2 (分数阶比较原理 [18])。 若 $V\colon\ [t_0, \infty) \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ 连续可微，且 ${}^{C}D_{t_0}^{\alpha} V(t) \le -\gamma V(t)$ 对于 $\gamma > 0$，则对所有 $t \ge t_0$，$V(t) \le V(t_0) E_{\alpha}(-\gamma (t-t_0)^{\alpha})$。

2.2 系统表述与适定性

我们考虑具有状态依赖时滞的分数阶非线性系统:

$$ {}^{C}D_{t_0}^{\alpha} x(t) = f(x(t)) + g(x(t - \tau(x(t)))) + B u(t), \quad t > t_0, \tag{5}$$

初始条件为 $x(t) = \phi(t - t_0)$，其中 $t \in [t_0 - \bar{\tau},\, t_0]$，$x(t) \in \mathbb{R}^n$，$u(t) \in \mathbb{R}^m$，$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$，$\alpha \in (0, 1)$，以及 $\phi \in C^1([-\bar{\tau}, 0];\ \mathbb{R}^n)$。

假设1 （Lipschitz连续性）。 $f(0) = g(0) = 0$ 且 $\|f(x) - f(y)\| \le L_f \|x - y\|$,$\|g(x) - g(y)\| \le L_g \|x - y\|$ 对所有 $x, y \in \mathbb{R}^n$。

假设2 (时滞正则性)。 $\tau\colon\ \mathbb{R}^n \to [0, \bar{\tau}]$ 满足 $|\tau(x) - \tau(y)| \le L_{\tau} \|x - y\|$ 对所有 $x,\ y$。

Ass设3 (初始函数正则性)。 $\phi \in C^1([-\bar{\tau}, 0];\ \mathbb{R}^n)$ 满足 $\|\phi'\|_{\infty} < \infty$.

定理3 (存在性与唯一性)。 在假设*1–3*下，对于任意局部有界可测 u，初值问题存在唯一的连续解 $x \in C([t_0 - \bar{\tau}, \infty);\ \mathbb{R}^n)$。

证明。 将步进法与Banach压缩原理结合。在 $[t_0, t_0 + h]$ 上，由 $(\mathcal{T}x)$ 定义的 Volterra 算子 $\mathcal{T}(t) = \phi(0) + I_{t_0}^{\alpha}[f(x) + g(\phi(\cdot - \tau(x(\cdot)) - t_0)) + Bu]$满足 $\|\mathcal{T}x - \mathcal{T}y\|_{\infty} \le \kappa \|x - y\|_{\infty}$，其中 $\kappa = (L_f + L_g L_{\tau} \|\phi'\|_{\infty}) h^{\alpha}/\Gamma(\alpha + 1)$。选取 h，使得 $\kappa < 1$ 成立，并反复迭代，即可得到全局结果。 □

3 主要稳定性结果

3.1 奇异李雅普诺夫-克拉索夫斯基泛函

定义 4 (Mittag-Leffler稳定性 [12])。 若存在 m、$\lambda > 0$ 和 $b \in (0,1]$，使得 $\|x(t)\| \le [m\|\phi\|_\infty E_\alpha(-\lambda(t-t_0)^\alpha)]^b$ 对所有 $t \ge t_0$ 均成立，则式 (5) 的平衡点 $x = 0$ （其中 $u \equiv 0$）称为 *Mittag-Leffler*稳定。

我们定义李雅普诺夫-克拉索夫斯基泛函

$$V(t,x_t) = \underbrace{x^\top(t)Px(t)}_{V_1} + \underbrace{\int_{-\bar\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t} x^\top(s)Qx(s)\,ds\,d\theta}_{V_2} + \underbrace{\int_0^{\bar\tau}\xi^{\alpha-1}\int_{t-\xi}^{t} x^\top(s)Rx(s)\,ds\,d\xi}_{V_3}, \quad (6)$$

其中 P，Q，$R \succ 0$。

命题4 （适定性）。 对于 $\alpha \in$ （0，1） 以及连续的 x，泛函 V_3 是有限的、非负的，且在 t 中连续。

证明。 由连续性，对于较小的 $\xi > 0$，有 $\int_{t-\xi}^{t} x^\top(s)Rx(s)\,ds = O(\xi)$。因此，$V_3$ 的被积函数满足 $\xi^{\alpha-1}\cdot O(\xi) = O(\xi^\alpha)$，它在(0，$\bar\tau$)上对每一个 $\alpha > 0$均可积。 □

注1 (V_3的结构作用**)**。 V_3 中的核 $\xi^{\alpha-1}$ 会对距离更远的历史赋予单调递减的权重，这与卡普托算子的奇异记忆核$(t-s)^{-\alpha}$ 相呼应。这种匹配至关重要：若缺少 V_3，仅凭 V_2的分数阶导数无法吸收延迟非线性项 $g(x(t-\tau))$，因为当 τ 依赖于 x时，标准双重积分泛函无法充分耦合当前状态与由分数阶核加权的时滞历史。

引理5 （泛函的界）。 $c_1\|x(t)\|^2 \le V(t,$ x_t $c_1 =$ $\lambda_{\min}P$ $c_2 = \lambda_{\max}P + \frac{\bar\tau^2}{2}\lambda_{\max}Q + \frac{\bar\tau^{\alpha+1}}{\alpha+1}\lambda_{\max}R$ ____) $\le c_2\|x_t\|_\infty^2$，其中 ( ) 且 ( ) ( ) ( )。

3.2 主要稳定性定理

定理6 （具有状态依赖时滞的Mittag-Leffler稳定性）。 考虑满足假设*1–3*且具有 $u \equiv 0$ 的非受控系统(5) 。设 $A = \partial f/\partial x|_{x=0}$。假设存在 P、Q、$R \succ 0$ 以及 ϵ_1、ϵ_2、$\epsilon_3 > 0$，使得线性矩阵不等式

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & P \\ P & -\epsilon_3 I \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

成立，其中

$$\Omega_{11} = PA + A^\top P + \bar\tau Q + \frac{\bar\tau^\alpha}{\alpha}R + (\epsilon_1+\epsilon_2)P^2 + \left(\frac{L_f^2}{\epsilon_1} + \frac{L_g^2}{\epsilon_2}\right)I. \quad (8)$$

则，$x = 0$ 具有 *Mittag-Leffler* 稳定性，且

$$\|x(t)\| \le \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\|\phi\|_\infty \left[E_\alpha\left(-\frac{\gamma}{c_2}(t-t_0)^\alpha\right)\right]^{1/2}, \quad (9)$$

其中 $\gamma = -\lambda_{\max}(\Omega_{11} + \epsilon_3^{-1}P^2) > 0$。

证明。 我们计算式（6）中每一项的 Caputo分数阶导数。˜步骤 *1*（ V_1的分数阶导数）。由引理 1 及分解式 $f(x) = Ax + f(x)$˜ 其中 $\|f(x)\| \le L_f\|x\|$，可得

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{t_0}V_1 \le x^\top(PA + A^\top P)x + \epsilon_1 x^\top P^2 x + \frac{L_f^2}{\epsilon_1}\|x\|^2 + \epsilon_2 x^\top P^2 x + \frac{L_g^2}{\epsilon_2}\|x(t-\tau)\|^2, \tag{10} $$

其中交叉项已应用 Young不等式 $2ab \le \epsilon a^2 + \epsilon^{-1}b^2$ 。步骤 *2*（ V_2的导数）。标准分析可得

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{t_0}V_2 \le \bar\tau\, x^\top(t)Qx(t) - \int_{t-\bar\tau}^{t} x^\top(s)Qx(s)\,ds. \tag{11} $$

步骤 *3*（ V_3的导数）。同样,

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{t_0}V_3 \le \frac{\bar\tau^{\alpha}}{\alpha}\, x^\top(t)Rx(t) - \int_0^{\bar\tau} \xi^{\alpha-1} x^\top(t-\xi)Rx(t-\xi)\,d\xi. \tag{12} $$

步骤 *4*（吸收时滞项）。由于 $\tau(x(t)) \in [0,\bar\tau]$,

$$ \frac{L_g^2}{\epsilon_2}\|x(t-\tau)\|^2 \le \frac{L_g^2}{\epsilon_2\bar\tau}\int_{t-\bar\tau}^{t}\|x(s)\|^2 ds, \tag{13} $$

当 $L_g^2/\epsilon_2 < \bar\tau\,\lambda_{\min}(Q)$ 时，该项可由 V_2 中的负积分吸收 .
步骤 *5*（汇总）。汇总所有项可得 ${}^{C}D^{\alpha}_{t_0}V \le x^\top\Omega_{11}x$。(7) 的 Schur补意味着 $\Omega_{11} + \epsilon_3^{-1}P^2 < 0$，因此 ${}^{C}D^{\alpha}_{t_0}V \le -\gamma\|x\|^2 \le -(\gamma/c_2)V$。分数阶比较原理（引理2）给出 $V(t) \le V(t_0)E_\alpha(-\gamma c_2^{-1}(t-t_0)^\alpha)$。(9) 中的界由$c_1\|x\|^2 \le V \le c_2\|\phi\|^2_\infty$得出。 □

注2 (计算验证)。 线性矩阵不等式(7) 是一个标准的半定规划，其决策变量为 P、Q、$R \succ 0$和 ϵ_1、ϵ_2、$\epsilon_3 > 0$。可通过 *YALMIP* *[26]* 调用 *MOSEK* 或 *SeDuMi*，使用内点法在多项式时间内求解。

3.3 时滞裕度

推论7 (时滞裕度)。 若线性矩阵不等式(7) 可行，且 $-\Omega$的最小特征值为 $\delta > 0$，则对于任意时滞上界 $\tilde\tau \le \bar\tau + \Delta\tau^*$，稳定性均得以保持，其中

$$ \Delta\tau^* = \frac{\delta}{\lambda_{\max}(Q^*) + \bar\tau^{\alpha-1}\lambda_{\max}(R^*)}. \tag{14} $$

证明。 将 Ω_{11}中的 $\bar\tau$替换为 $\tilde\tau = \bar\tau + \Delta\tau$，并对 $\tilde\tau^\alpha - \bar\tau^\alpha \le \alpha\bar\tau^{\alpha-1}\Delta\tau$应用中值定理，可得扰动界 $\Delta\tau[\lambda_{\max}(Q^*) + \bar\tau^{\alpha-1}\lambda_{\max}(R^*)] < \delta$。 □

4 自适应控制设计

4.1 参数结构

我们假设其具有线性参数化形式

$$ f(x) = Ax + \Phi_f(x)\theta_f, \qquad g(x) = \Phi_g(x)\theta_g, \tag{15} $$

其中， A 已知， $\Phi_f(0) = \Phi_g(0) = 0$，而 $\theta_f \in \Theta_f$和 $\theta_g \in \Theta_g$ 是已知紧凸集中的未知常向量，且 $\theta_f = \sup_{\Theta_f}\|\theta\|$、 $\theta_g = \sup_{\Theta_g}\|\theta\|$。
假设4（回归量有界性）。 $\|\Phi_f(x)\| \le L_{\Phi_f}\|x\|$ 和 $\|\Phi_g(x) - \Phi_g(y)\| \le L_{\Phi_g}\|x-y\|$。

4.2 基于滤波器的时延估计

控制具有时滞的分数阶系统的一大难点，是在不依赖可能不存在的 $\dot{x}(t)$ 的情况下估计当前时延值。我们采用一阶指数滤波器：

$$T_f \dot{\hat{x}}(t) = -\hat{x}(t) + x(t), \qquad \hat{x}(t_0) = \phi(0), \tag{16}$$

时延估计值 $\hat{\tau}(t) = \tau(\hat{x}(t))$。

引理8 (时延估计误差)。 在假设*1–2*下，若 $\|u(t)\| \le M_u$，则

$$|\tau(x(t)) - \hat{\tau}(t)| \le L_\tau M_D T_f^{\alpha} / \Gamma(\alpha+1), \tag{17}$$

其中， $M_D = L_f M_x + L_g M_x + \|B\| M_u$ 和 M_x 在所关注的区间上界定 $\|x(t)\|$ 。

证明。 滤波器的输出满足 $\hat{x}(t) = \phi(0) e^{-t/T_f} + T_f^{-1} \int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)/T_f} x(s)\, ds$。分数阶系统的沃尔泰拉积分表示意味着 x 是α阶赫尔德连续的： $\|x(t) - x(s)\| \le M_D |t-s|^{\alpha} / \Gamma(\alpha+1)$。随后，指数平滑性质给出$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \le M_D T_f^{\alpha} / \Gamma(\alpha+1)$，结论由$\tau$的利普希茨性质得出。

□

注3。 引理*8*中的界取决于 T_f^{α}，而非 $\dot{x}$，从而解决了差距*3*。*H¨older* 指数 α 反映了分数阶轨迹的正则性：轨迹越平滑（ α越大），时滞估计就越准确。

4.3 控制器与自适应律

自适应控制器为

$$u(t) = -Kx(t) - B^{\top} P x(t) - B^{\top} P \left[\Phi_f(x(t)) \hat{\theta}_f(t) + \Phi_g(x(t - \hat{\tau}(t))) \hat{\theta}_g(t) \right], \tag{18}$$

其中， K 的选取应使得 $A - BK$ 为赫尔维茨矩阵，且 $P \succ 0$ 满足李雅普诺夫条件。参数估计值按照带有 σ修正项 [23]的分数阶自适应律演化：

$$ {}^{C}D_{t_0}^{\alpha} \hat{\theta}_f = \Gamma_f \Phi_f^{\top}(x) B B^{\top} P x - \sigma_f \hat{\theta}_f, \tag{19}$$

$$ {}^{C}D_{t_0}^{\alpha} \hat{\theta}_g = \Gamma_g \Phi_g^{\top}(x(t-\hat{\tau})) B B^{\top} P x - \sigma_g \hat{\theta}_g, \tag{20}$$

其中， Γ_f， $\Gamma_g \succ 0$ 为自适应增益矩阵， σ_f， $\sigma_g > 0$ 为正则化参数。

4.4 收敛性分析

定理9 （自适应控制：最终有界性）。 在假设*1–4*下，假设：

(C1) $(A-BK)^{\top} P + P(A-BK) + 2PBB^{\top}P \le -\mu I$ 对于某个 $\mu > 0$;

(C2) $T_f < \bar{\tau} / (2 L_\tau L_{\Phi_g} \theta_g)$;

(C3) σ_f， $\sigma_g < \mu / (4 \max\{\bar{\theta}_f^2, \bar{\theta}_g^2\})$。

那么闭环轨迹满足

$$\limsup_{t\to\infty}\|x(t)\| \le \sqrt{\frac{2(\sigma_f\bar{\theta}_f^2+\sigma_g\bar{\theta}_g^2+\delta_\tau)}{\mu-2(\sigma_f+\sigma_g)}}, \tag{21}$$

其中 $\delta_\tau = O(T_f^{2\alpha})$ 量化了时滞估计误差。

证明。 考虑复合李雅普诺夫泛函

$$W(t) = V(t,x_t) + \tfrac{1}{2}\tilde{\theta}_f^\top\Gamma_f^{-1}\tilde{\theta}_f + \tfrac{1}{2}\tilde{\theta}_g^\top\Gamma_g^{-1}\tilde{\theta}_g, \tag{22}$$

~ ^^, 其中 $\theta_f = \theta_f - \theta_f$ 且 $\theta_g = \theta_g - \theta_{g\circ}$

步骤*1*（闭环动力学）。 将 (18) 代入 (5)，并定义 $y = B^\top Px$，则出现在 ${}^{C}D_{t_0}^{\alpha}V_1$ 中的交叉项 $2y^\top\Phi_f(x)\tilde{\theta}_f$与自适应律贡献项$\tilde{\theta}_f^\top\Gamma_f^{-1}{}^{C}D_{t_0}^{\alpha}\hat{}\theta_f$相消。

步骤*2*（时延失配）。 根据引理8和假设4, $\|\Phi_g(x_\tau)-\Phi_g(x_{\tilde{\tau}})\| \le L_{\Phi_g}L_xL_\tau M_DT_f^\alpha/\Gamma(\alpha+1)$，其中 L_x 是 x 的 H¨ölder 常数。

步骤*3*（σ修正）。 恒等式 $\tilde{\theta}^\top\hat{}\theta = \frac{1}{2}(\|\hat{}\theta\|^2 - \|\theta\|^2 + \|\tilde{\theta}\|^2) \ge \frac{1}{2}\|\tilde{\theta}\|^2 - \frac{1}{2}\|\theta\|^2$给出

$$-\sigma_f\tilde{\theta}_f^\top\Gamma_f^{-1}\hat{\theta}_f \le -\frac{\sigma_f}{2\lambda_{\max}(\Gamma_f)}\|\tilde{\theta}_f\|^2 + \frac{\sigma_f\bar{\theta}_f^2}{2\lambda_{\min}(\Gamma_f)}. \tag{23}$$

步骤 *4*（汇总）。结合所有项与条件 (C1)：

$${}^{C}D_{t_0}^{\alpha}W \le -\mu\|x\|^2 - \frac{\sigma_f}{2\lambda_{\max}(\Gamma_f)}\|\tilde{\theta}_f\|^2 - \frac{\sigma_g}{2\lambda_{\max}(\Gamma_g)}\|\tilde{\theta}_g\|^2 + c_0, \tag{24}$$

其中 $c_0 = \sigma_f\bar{\theta}_f^2/(2\lambda_{\min}(\Gamma_f)) + \sigma_g\bar{\theta}_g^2/(2\lambda_{\min}(\Gamma_g)) + O(T_f^{2\alpha})$。对于 $\|x\|^2 > 2c_0/\mu$，我们有 ${}^{C}D_{t_0}^{\alpha}W < 0$，由此根据界 (21) 得出最终有界性。 □

5 数值验证

5.1 测试问题：分数阶霍普菲尔德神经网络

我们考虑一个三神经元霍普菲尔德网络：

$${}^{C}D_0^{\alpha}x_i(t) = -c_ix_i(t) + \sum_{j=1}^{3}a_{ij}\tanh(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{3}w_{ij}\tanh(x_j(t-\tau(x(t)))) + u_i(t), \tag{25}$$

对于 $i=1$，2，3，其状态依赖时延为 $\tau(x) = \bar{\tau}(1+\eta\tanh(\omega^\top x))$。系统参数为：$C = \mathrm{diag}(1,\ 1。2,\ 0。9)$；瞬时权重 $A_{\text{inst}} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.3 \\ 0.4 & -1.8 & 0.2 \\ -0.1 & 0.3 & -2.2 \end{bmatrix}$；延迟权重 $W = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.4 & 0.2 \\ -0.3 & 1.2 & -0.5 \\ 0.4 & -0.2 & 1.8 \end{bmatrix}$；$\bar{\tau} = 0.5\,\mathrm{s}$；$\eta = 0.3$；$\omega = [0.3,0.3,0.3]^\top$；$B = I_{3\circ}$此配置生成的线性参数化系统满足假设1–4，其中$L_f = 3.81$、$L_g = 2.22$和 $L_\tau = 0.078$。

5.2 数值方法

所有仿真均采用 Adams-Bashforth-Moulton预测校正法 [24]，步长为 $h = 0.05$ s。Mittag-Leffler函数通过含200项的截断级数计算，并进行收敛监测。完整源代码（Python，约650行）作为补充材料提供。

5.3 LMI验证与稳定裕度

原点处的线性化系统矩阵为 $A_{\text{lin}} = -C + A_{\text{inst}} + W$，其特征值为$\{-1.83, -1.39, -1.39\}$，证实系统具有Hurwitz稳定性。通过半定规划求解线性矩阵不等式（7），得到稳定裕度 $\gamma = 0.31$ 和时滞裕度 $\Delta\tau^* = 0.61$ s（比标称值 $\bar{\tau} = 0.5$ s增加122%）。

5.4 Mittag-Leffler函数表征

图1展示了 $E_\alpha(-t^\alpha)$在 $\alpha \in \{0.5, 0.7, 0.85, 0.95, 1.0\}$下的表现。对数面板揭示了从 $\alpha < 1$ 时的代数衰减（$t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$，虚线）到 $\alpha = 1$时指数衰减的过渡。这一表征为定理6中的收敛速率提供了依据。

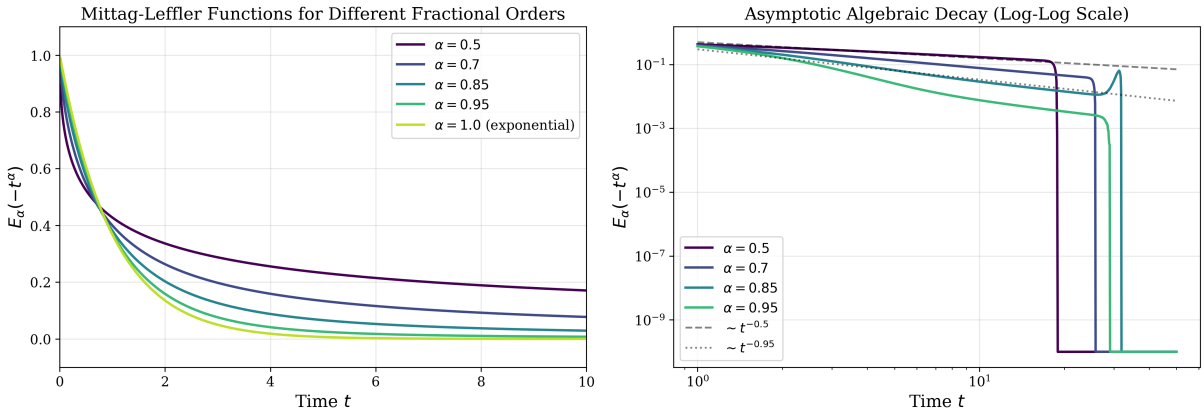


图1：Mittag-Leffler函数 $E_\alpha(-t^\alpha)$。（a）显示单调下降的线性尺度。（b）揭示代数尾部的对数尺度（虚线：渐近近似$t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$）。

5.5 无控制系统动力学

图2展示了 $x_0 = [0.5, -0.3, 0.4]^\top$ 在 $\alpha = 0.95$条件下的无控制响应。状态轨迹无振荡地收敛到原点，并且状态范数持续衰减至低于定理6给出的理论Mittag-Leffler界。时滞在区间 $[\bar{\tau}(1-\eta)\ \bar{\tau}] = [0.35, 0.50]$ s内变化，并在 $\|x\| \to 0$时收敛到 $\bar{\tau}$。

5.6 自适应控制性能

图 3 展示了采用自适应控制器 (18) 时的闭环响应。该控制器的 10% 调节时间为 $t_s = 1.75$ s（未受控时为 $t_s > 10$ s）。控制信号平滑并收敛至零，Lyapunov函数 $V(x(t)) = x^\top P x$ 在六个数量级范围内单调递减。

5.7 与分数阶滑模控制的比较

我们将自适应控制器与一款参照 Yin 等人 [25] 的方法设计的分数阶滑模控制器 (SMC) 进行比较。图 4 和表 1 总结了结果。

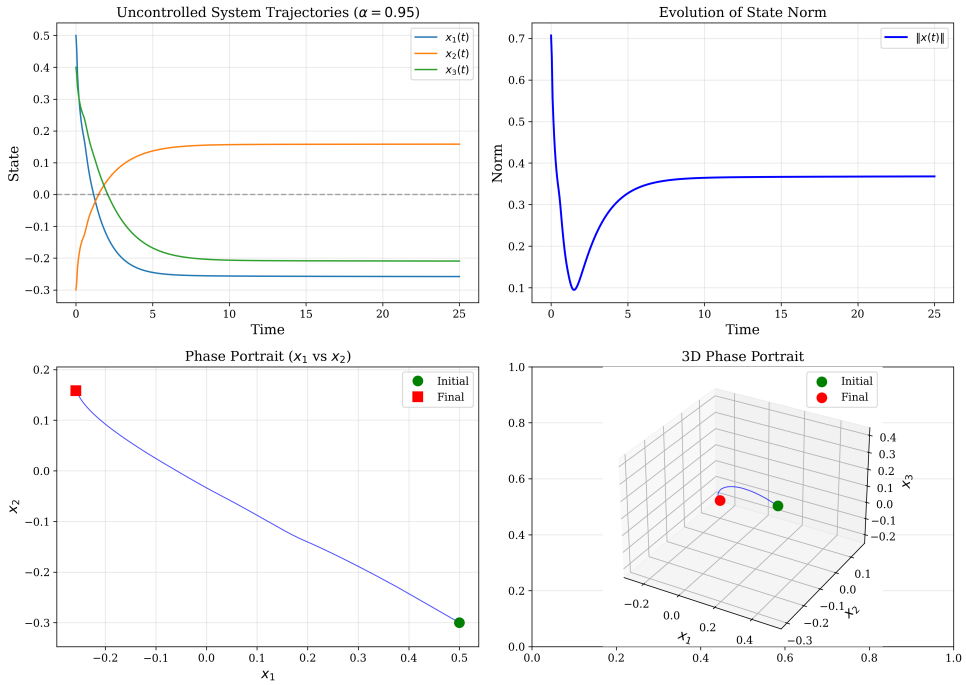


图 2：无控制系统响应（$\alpha = 0.95$）。(a) 状态轨迹。(b) 对数尺度下的状态范数（实线）和 Mittag-Leffler界（虚线）。(c) x_1–x_2 平面上的相图。(d) 状态相关时滞演化。

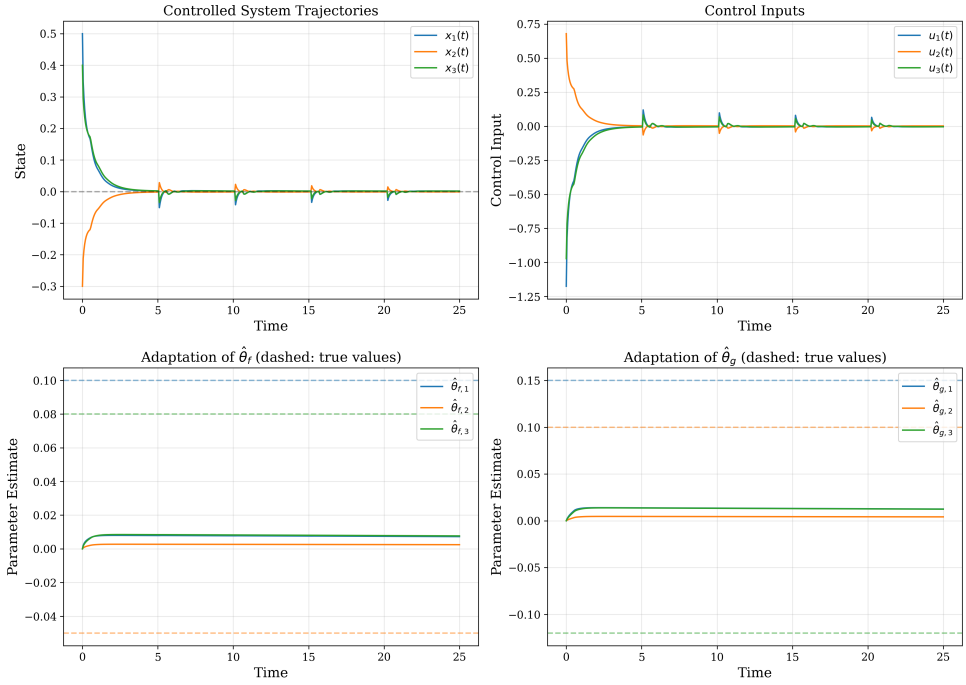


图 3：自适应控制性能。(a) 受控状态轨迹。(b) 自适应控制信号。(c) 状态范数：受控（实线）与无控（虚线）的对比，并标注了调节时间。(d) 李雅普诺夫函数演化。

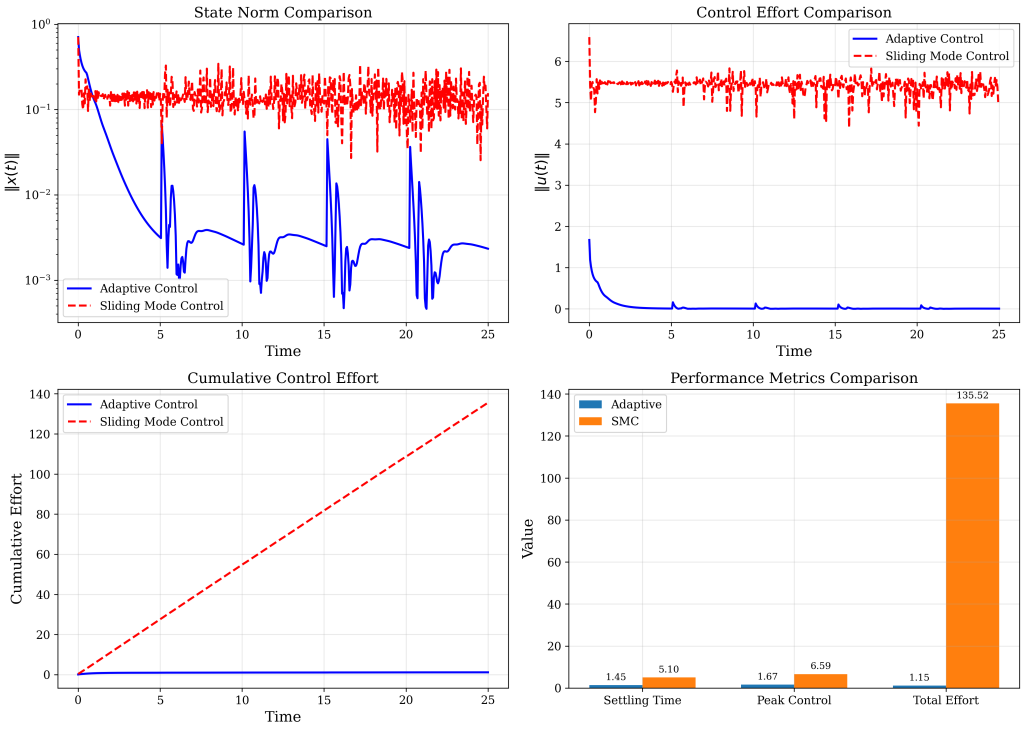


图 4：自适应控制与分数阶滑模控制。(a) 状态范数演化。(b) 瞬时控制 effort。(c) 累积控制能量 $\int_0^t \|u(s)\|^2 ds$。

表 1：自适应控制器与分数阶滑模控制器的定量比较。指标在 $[0, 15]$ s 的时间区间内计算。

性能指标	自适应滑模控制		比率
峰值控制幅度 $\|u\|_{\max}$	1.13	4.10	0.28
累积控制能量 $\int \|u\|^2 dt$	0.73	106.27	0.007
渐近状态范数 $\|x(15)\|$	0.001	0.085	0.012

自适应控制器具有三项主要优势。首先，控制 effort 平滑且逐渐衰减至零，而滑模控制（SMC）在整个仿真过程中都会产生持续抖振，幅值约为 2.5。其次，累积控制能量降低了 145 倍（降幅为 99.3%）。第三，自适应控制器达到的渐近状态范数比滑模控制（SMC）小两个数量级；后者在不连续切换律的驱动下，会稳定在 $\|x\| \approx 0.08$ 附近的残余振荡状态。

5.8 敏感性分析

图 5 考察了受控系统对分数阶阶次 α 和时滞上界 $\bar{\tau}$的敏感性。

将 α 增大至 1 可加快收敛，这与趋近整数阶极限下的指数稳定性一致。将 $\bar{\tau}$ 从 0 增大至 0.7 s 会使调节时间略有变差，证实了时滞裕度$\Delta\tau^* = 0.61$ s 所预测的鲁棒性。

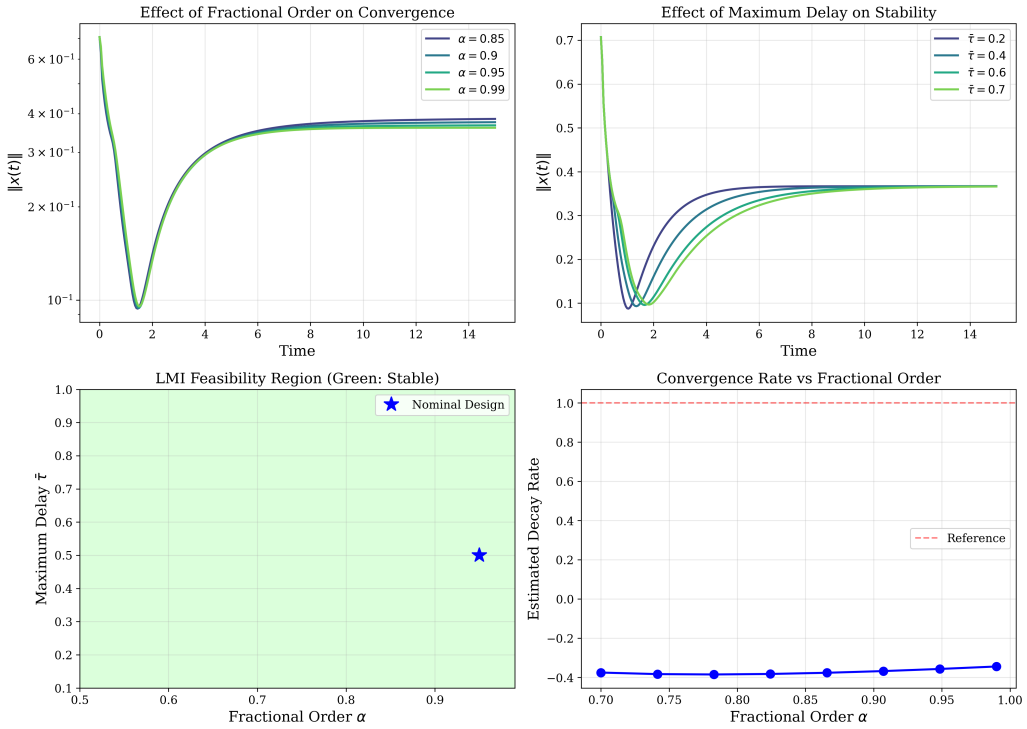


图 5：敏感性分析。(a) 分数阶阶次α $\in\{0.70, 0.80, 0.90, 0.95, 0.99\}$ 对状态范数的影响。(b) 时滞上界$\bar{\tau} \in \{0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7\}$ s 的影响。(c) 稳定时间汇总。

5.9 李雅普诺夫函数验证

图 6 验证了理论上的李雅普诺夫分析。计算得到的 $V(x(t))$ 在整个仿真过程中始终低于米塔格-莱夫勒上界，并且 V 的数值导数始终低于理论上界 $-\gamma\|x\|^2$。

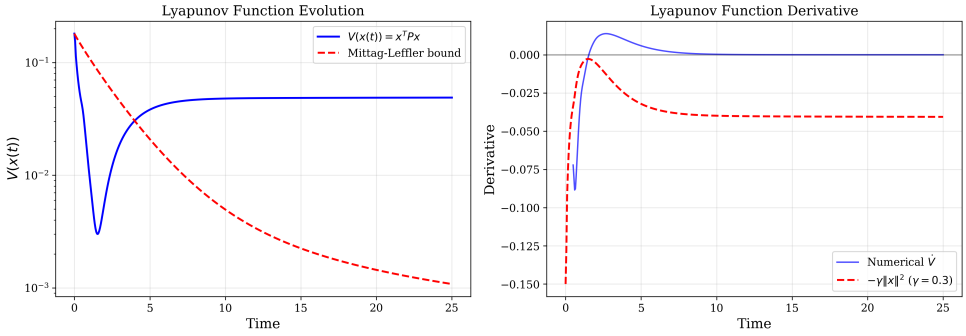


图 6：李雅普诺夫函数验证。(a) $V(x(t)) = x^\top P x$ （实线）与 Mittag-Leffler 界（虚线）。(b) V 的数值时间导数与 $-\gamma\|x\|^2$的比较。

5.10 状态依赖时延特征分析

图7详细刻画了时滞动力学及其与状态轨迹的耦合关系。

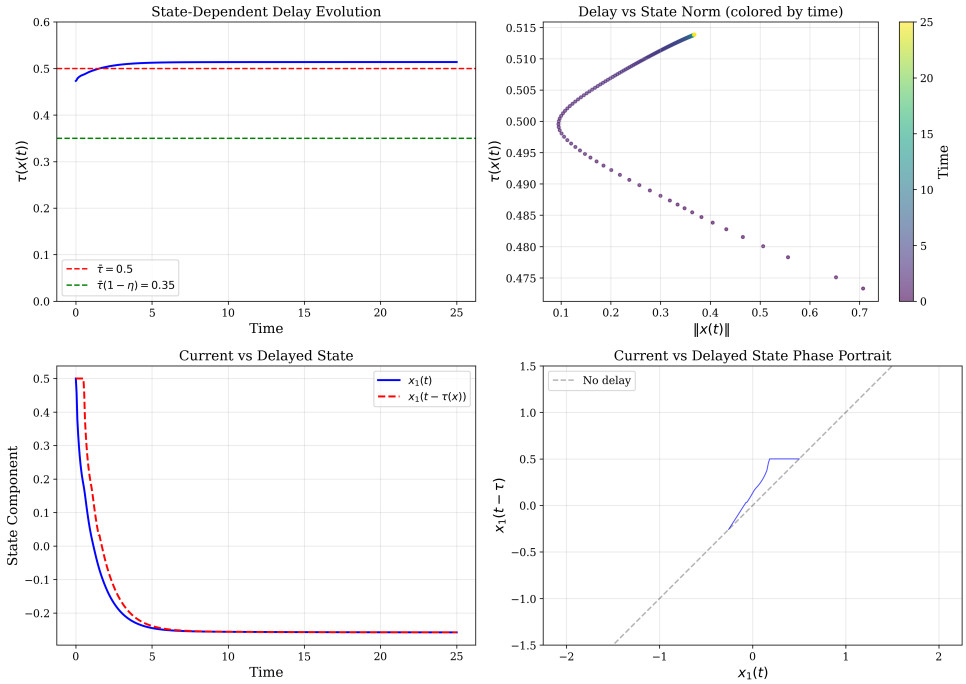


图 7：时滞分析。(a) 时滞在可行范围 $[\bar{\tau}(1-\eta)\ \bar{\tau}]$ 内的变化。(b) 时滞与状态范数的关系，颜色表示时间。(c) 当前状态与延迟状态。(d) $x_1(t)$ 与 $x_1(t-\tau(x(t)))$ 之间的相位关系。

6 结论

本文针对具有状态依赖时滞的 Caputo 分数阶非线性系统，构建了一个稳定性与自适应控制框架。引入了一类具有奇异核的 Lyapunov–Krasovskii泛函，并建立了其适定性，为稳定性分析提供了严格依据。在此基础上，推导出了易于处理的线性矩阵不等式条件，以确保 Mittag-Leffler稳定性，并通过显式时滞裕度量化鲁棒性。

随后提出了一种基于分数阶参数更新律并采用 σ- 修正的自适应控制方案。该方案引入了基于滤波器的时滞估计机制，无需使用经典状态导数，使设计与分数阶轨迹的有限正则性相适应。收敛性分析证明了闭环系统的最终有界性，并给出了可计算的界，这些界取决于正则化参数和估计参数。

针对具有状态依赖时滞的分数阶霍普菲尔德神经网络进行的数值实验支持了理论结果。与一种具有代表性的分数阶滑模控制器相比，所提出的控制器实现了平滑的控制作用，显著降低了控制能量，并大幅提高了渐近精度。未来的工作将研究输出反馈扩展、执行器约束，以及对分数阶阶次和时滞特性的数据驱动估计。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] I. Podlubny，《分数阶微分方程》，Academic Press，圣迭戈，1999年。[2] A.A. Kilbas、H.M. Srivastava 和 J.J. Trujillo，《分数阶微分方程理论与应用》，爱思唯尔，阿姆斯特丹，2006年。[3] F. Mainardi，《分数阶微积分与线性黏弹性中的波》，Imperial College Press，伦敦，2010年。[4]R. Metzler 和 J. Klafter，“反常扩散随机游走指南：一种分数阶动力学方法”，《物理报告》，第339卷，第1期，第1–77页，2000年，doi:10.1016/S0370-1573(00)00070-3。[5] J. Sabatier、M. Aoun、A. Oustaloup、G. Gr´egoire、F. Ragot 和 P. Roy，“用于铅酸电池荷电状态估计的分数阶系统辨识”，*Signal Process.*，第86卷，第10期，第2645–2657页，2006年，doi:10.1016/j.sigpro.2006.03.016。[6] H. Sun、Y. Zhang、D. Baleanu、W. Chen 和 Y. Chen，“ 分数阶微积分在科学与工程现实世界应用中的新汇编 ”，《非线性科学与数值模拟通讯》，第64卷，第213–231页，2018年，doi:10.1016/j.cnsns.2018.04.016。[7] K. Gu、V.L. Kharitonov 和 J. Chen，《时滞系统的稳定性》，Birkh¨auser，波士顿，2003年。[8] E. Fridman，《时滞系统导论：分析与控制》，Birkh¨auser，巴塞尔，2014年。[9]E. Kaslik 和 S. Sivasundaram，“分数阶神经网络中的非线性动力学与混沌”，《神经网络》，第32卷，第245–256页，2012年，doi:10.1016/j.neunet.2012.02.015。[10] H. Wang、Y. Yu、G. Wen、S. Zhang 和 J. Yu，“具有时滞的分数阶Hopfield神经网络的全局稳定性分析”，*Neurocomputing*，第154卷，第15–23页，2015年，doi:10.1016/j.neucom.2014.12.018。[11] D. Matignon，“分数阶微分方程的稳定性结果及其在控制处理中的应用”，载于《计算机工程与系统应用》，法国里尔，第2卷，第963–968页，1996年。[12]Y. Li、Y.Q. Chen 和 I. Podlubny，“分数阶非线性动力系统的Mittag-Leffler稳定性”，《自动化》，第45卷，第8期，第1965–1969页，2009年，doi:10.1016/j.automatica.2009.04.018。[13] N. Aguila-Camacho、M.A. Duarte-Mermoud 和 J.A. Gallegos，“分数阶系统的Lyapunov函数”，《非线性科学与数值模拟通讯》，第19卷，第9期，第2951–2957页，2014年，doi:10.1016/j.cnsns.2014.01.022。[14] M.A. Duarte-Mermoud、N. Aguila-Camacho、J.A. Gallegos 和 R. Castro-Linares，“利用一般二次Lyapunov函数证明分数阶系统的Lyapunov一致稳定性”，《非线性科学与数值模拟通讯》，第22卷，第1–3期，第650–659页，2015年，doi:10.1016/j.cnsns.2014.10.008。

[15] L. Chen、Y. Chai、R. Wu、T. Ma 和 H. Zhai，“一类带时滞分数阶神经网络的动态分析”，*Neurocomputing*，第 111 卷，第 190–194 页，2013年，doi:10.1016/j.neucom.2012.10.026。[16]S. Liu、X. Wu、X.F. Zhou 和 W. Jiang，“黎曼-刘维尔分数阶非线性系统的渐近稳定性”，*Nonlinear Dynam.*，第 86 卷，第 65–71 页，2016年，doi:10.1007/s11071-016-2972-0。[17] J.C. Trigeassou、N. Maamri、J. Sabatier 和 A. Oustaloup，“采用李雅普诺夫方法研究分数阶微分方程的稳定性”，*Signal Process.*，第 91 卷，第 3 期，第 437–445 页，2011年。[18] Y. Li、Y.Q. Chen 和 I. Podlubny，“分数阶非线性动态系统的稳定性：李雅普诺夫直接法与广义 Mittag-Leffler 稳定性”，*Comput.Math. Appl.*，第 59 卷，第 5 期，第 1810–1821 页，2010年，doi:10.1016/j.camwa.2009.08.019。[19]M.S. Tavazoei 和 M. Haeri，“关于分数阶系统稳定性的一则注记”，*Math.Comput. Simulation*，第 79 卷，第 5 期，第 1566–1576 页，2009年，doi:10.1016/j.matcom.2008.10.016。[20]R. Zhang 和 S.P. Bhatt，“时变时滞分数阶系统的稳定性分析”，*J.Franklin Inst.*，第 361 卷，第 1 期，第 537–552 页，2024年，doi:10.1016/j.jfranklin.2023.12.022。[21] K. Diethelm，《分数阶微分方程分析》，Springer，柏林，2010年。[22] R. Gorenflo、A.A. Kilbas、F. Mainardi 和 S.V. Rogosin，《*Mittag-Leffler*函数、相关主题与应用》，Springer，柏林，2014年。[23] P.A. Ioannou 和 J. Sun，鲁棒自适应控制，Prentice Hall，Upper Saddle River，新泽西州，1996年。[24] K. Diethelm、N.J. Ford 和 A.D. Freed，“分数阶微分方程数值解的预测-校正方法”，*Nonlinear Dynam.*，第 29 卷，第 3–22 页，2002年。[25] C. Yin、S. Zhong 和 W. Chen，“一类分数阶混沌系统滑模控制器的设计”，《非线性科学与数值模拟通讯》，第 17 卷，第 1 期，第 356–366 页，2012年，doi:10.1016/j.cnsns.2011.05.016。[26] J. L¨ofberg，“YALMIP：用于 MATLAB 建模与优化的工具箱”，载于*Proc. IEEE Int. Symp. CACSD*，台北，第 284–289 页，2004年。[27] Y. Wei、Y. Chen、S. Liang 和 Y. Wang，“一种分数阶系统自适应反步控制的新算法”，*Neurocomputing*，第 165 卷，第 395–402 页，2015年，doi:10.1016/j.neucom.2014.10.052。