Gilbert–Howie 群的 Noferini–Williams 猜想证明

Ihechukwu Chinyere*[1]

[1]比勒陀利亚大学数学与应用数学系，南非比勒陀利亚，哈特菲尔德 0028

arXiv:2602.07171v1 [math.GR] 6 Feb 2026

2026年2月10日

摘要

Gilbert–Howie 群 $H(n,\ m)$ 是斐波那契型循环表示群 $G_n(m,\ k)$ 这一更广泛群族中一个值得关注的子类。Noferini 和 Williams 猜想，阿贝尔化 $H(n,\ m)^{ab}$ 无挠且 $\mathbb{Z}$-秩为 2，当且仅当 $n \equiv 0$ (模 6) 且 $m \equiv 2$ (模 n)。我们通过证明以下命题证实了这一猜想：

$$\mathrm{Res}(F, G) = \pm 1,$$

其中

$$F = \frac{1 + t^m - t}{\Phi_6} \quad \text{and} \quad G = \frac{t^n - 1}{\Phi_6},$$

Φ_6 表示第六分圆多项式。证明采用极小性论证，将一般问题归结为三种情形：$m = 2 + \frac{n}{3}$、$m = 2 + \frac{n}{2}$ 和 $m = 2 + \frac{2n}{3}$。随后利用多项式结式分析和域论方法处理这些情形。由此，我们完成了对所有可作为标记有向图群出现的 G_n（$m,\ k$）的分类。

关键词： 循环表示群；阿贝尔化；循环矩阵；结式；分圆多项式；分圆域；卢卡斯数，LOG 群。**MSC（2020）：** 20F05, 20E06, 11C08, 11R09。

1 引言

循环表示群是有限表示群，其关系在生成元的循环置换下保持不变。自引入以来，它们为组合群论、数论和低维拓扑学提供了一个交汇平台。一个重要主题是将代数不变量表示为由群表示导出的算术数据。

一个尤为重要的群族是斐波那契型循环表示群

$$G_n(m, k) = \langle x_0, \ldots, x_{n-1} \mid x_i x_{i+m} = x_{i+k} \ (0 \le i < n) \rangle, \qquad (\text{indices mod } n). \tag{1}$$

*通讯作者：i.chinyere@up.ac.za；ihechukwu@aims.ac.za

这些群最早在 [3, 15] 中讨论（另见综述 [22]）。它们包括经典斐波那契群 $F(2,n) = G_n(1,2)$[10],、Sieradski 群 $S(2,n) = G_n(2,1)$ [18], 以及 Gilbert-Howie 群 $H(n,m) = G_n(m,1)$ [13],，还有许多推广形式。这些群已从多个角度得到研究，包括有限性和无球面性 [2, 4, 5, 12,13, 20], 双曲性 [6, 8, 9], 完美性 [17, 21]（另见 [7]），以及拓扑学 [13]。

有限呈示群的一个基本不变量是其阿贝尔化。对于循环表示群，这一不变量尤其容易处理：阿贝尔化给出一个整数循环矩阵关系矩阵，因此其结构由该循环矩阵的史密斯标准形决定。等价地，阿贝尔化的 $\mathbb{Z}$-秩，即其无挠部分的最小生成元数，由代表多项式（见第2节）与 $t^n - 1$的最大公因式决定。对于斐波那契型呈示（1），代表多项式为

$$1 + t^m - t^k.$$

$\mathbb{Z}$-秩等于 $\gcd(1 + t^m - t^k, t^n - 1)$ 的次数，即 $1 + t^m - t^k$ 与 $t^n - 1$ 的公共根数（按重数计）。

对于参数 n 和 m 的一般选择， $H(n,m)$ 的阿贝尔化是有限的，或其 $\mathbb{Z}$-秩为 1。特别地， $\mathbb{Z}$-秩为 2 的情形是例外。当阿贝尔化的 $\mathbb{Z}$-秩为 2 时，必须有 $m \equiv 2 \pmod{n}$。这使得这些群与 Sieradski 群密切相关；对于后者， $m = 2$。这促使我们研究阿贝尔化何时恰好是自由的且具有 $\mathbb{Z}$-秩 2。受大量计算和结构性结果的启发，Noferini 和 Williams 提出了以下猜想，准确刻画了这一现象发生的充要条件。

猜想1.1 (Noferini–Williams [16])。 对于 $n \geq 1$ 和 $0 \leq m < n$， $H(n, m)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^2$ 当且仅当 $n \equiv 0$ (模 6) 且 $m \equiv 2$ (模 n)。

在给定同余条件下，三项式 $1 + t^m - t$存在六阶分圆根，因此正向蕴含成立（见 [16, 引理 4。2]）。反向蕴含则更难，因为必须统一排除 n和 m中所有其他可能的分圆重合。这正是本文的目的：证明猜想1.1。

我们的方法是算术性的： $\mathbb{Z}$-秩为 2 的无挠条件可化为 $\mathrm{Res}(F, G) = 1$，其中

$$F = \frac{1 + t^m - t}{\Phi_6(t)}, \quad G = \frac{t^n - 1}{\Phi_6(t)}.$$

证明采用极小性论证。在第 3 节中，我们证明猜想对群 $H(n, 2 \pm n/3)$ 和 $H(n, 2 + n/2)$成立。我们还推导出关于n 和 m 的强必要条件，任何极小反例都必须满足这些条件。在第 4 节中，我们证明任何这样的极小反例实际上都必须属于这些族之一。因此，极小反例不存在，猜想得证。

2 预备知识与符号约定

本节通过介绍核心思想并设定贯穿全文的符号约定，为论文后续内容奠定基础。此处引入的所有符号约定在文章余下部分均有效，可能不会再作说明。

对于整数 $n \geq 1$，循环表示 是一种形式如下的群表示

$$P_n(w) = \langle x_0, \ldots, x_{n-1} \mid w(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}) \ (0 \leq i < n) \rangle,$$

下标均模 n取值，并且

$$w = w(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

是由生成元 x_0，…，x_{n-1}生成的自由群中的一个词。由表示$P_n(w)$定义的群称为循环表示群，记作 $G_n(w)$。

令 c_i 表示词 (w) 中生成元 (x_i) 的指数和，其中 $0 \leq i < n$。则 $G_n(w)^{\mathrm{ab}}$ 的关系矩阵是 $n \times n$ 循环矩阵 $C = \mathrm{circ}_n(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$，其中每一行都是前一行的循环移位。当且仅当 C 为幺模时，群 $G_n(w)$ 是完美群。相反，当且仅当 C 为奇异时，$G_n(w)^{\mathrm{ab}}$ 是无限群。与 C 相关联的是代表多项式，其结构反映了该表示的组合结构，

$$f_C(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i,$$

其结构反映了该表示的组合结构。如 [11, 公式 3.214]和 [14, 定理 3，第 78], 中所示，C 的行列式满足

$$|\det C| = |\operatorname{Res}(f_C, g)| = \prod_{i=0}^{n-1} |f_C(\zeta^i)|,$$

其中 $g(t) = t^n - 1$，ζ是一个本原 n次单位根，且$\mathrm{Res}(f_C, g)$表示f_C 与 g的结式。等价地，将单位根按其阶分组，我们得到

$$|\operatorname{Res}(f_C, g)| = \prod_{d|n} \left|\operatorname{Res}(f_C, \Phi_d)\right| = \prod_{d|n} \left|\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)/\mathbb{Q}}\big(f(\zeta_d)\big)\right|,$$

其中 Φ_d 表示第 d个分圆多项式，且$\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)/\mathbb{Q}}$ 是域范数。由于我们只关心绝对值，在整篇文章中，我们采用如下约定：$\mathrm{Res}(A, B)$表示 $|\mathrm{Res}(A, B)|$。

我们回顾结式的一些基本性质。对于 $A, B, C \in \mathbb{Z}[t]$，我们有

$$\operatorname{Res}(A + BC, B) = \operatorname{Res}(A, B), \tag{2}$$

and

$$\operatorname{Res}(A, BC) = \operatorname{Res}(A, B) \operatorname{Res}(A, C). \tag{3}$$

此外，对于满足 $p \neq 0$ 和 $P \in \mathbb{Z}[t]$的 $p, q \in \mathbb{Z}$，我们有

$$|\operatorname{Res}(pt + q, P)| = |p|^{\deg P} |P(-q/p)|. \tag{4}$$

设 φ d 表示欧拉函数。对于 $k \neq l$，Φ_k 与 Φ_l 的结式由下式给出b y

$$\operatorname{Res}(\Phi_k, \Phi_l) = \begin{cases} p^{\varphi(l)}, & \text{if } k = lp^j \text{ for some prime } p \text{ and } j \geq 1, \\ p^{\varphi(k)}, & \text{if } l = kp^j \text{ for some prime } p \text{ and } j \geq 1, \\ 1, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{5}$$

参见 [1]。

对于素数 p 和整数 x，我们用 $v_p(x)$ 表示 x 的 p-进赋值。对于 $k \geq 0$，我们用 L_k 表示第 k 个卢卡斯数，定义为

$$L_k = \phi^k + (-\phi)^{-k},$$

其中 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2.1 基本假设

在本文余下部分，我们假设 $2 \le m < n$，并且 a，b，r，s，u，$v \ge 1$ 是满足以下条件的整数

$$m - 2 = 2^b 3^r u, \qquad n = 2^a 3^s v, \qquad \gcd(uv, 6) = 1.$$

我们还定义

$$F(t) = \frac{f(t)}{\Phi_6(t)}, \qquad G(t) = \frac{g(t)}{\Phi_6(t)},$$

其中

$$f(t) = t^m - t + 1, \qquad g(t) = t^n - 1.$$

第3节中的所有引理和推论均使用定义已在此前给出的术语。因此，在本节中，即使 n 和 m 的值随参数 a、b、r、s、u、v变化，这些术语的含义也保持不变；记号始终一致。

3 技术结果

本节介绍支撑猜想 1.1证明的技术结果。所有记号均与第 2.1节相同。

我们的第一个结果推广了 [16, 推论 5。7], 该推论此前曾用于在以下情形验证猜想 1.1：当 $n = 24d$ 且 最大公约数(6，d) $= 1$。该结果表明，在某些情况下，挠部分的大小至少会随生成元数量呈二次增长。

引理 3.1。 在假设 *2.1* 下，设 $a > b$，并令 $K =$ 最大公约数$(m-2,\ n)$。进一步假设 $m \equiv K + 2$ (模 $2K$)。则 $2 + L_K \mid$ 结式$(f,\ G)$。特别地，若 结式$(F,\ G) = 1$，则

$$2 + L_K \mid n^2/3.$$

证明。整数 K 可被 6 整除，因此 $\Phi_6(t)$ 整除 $t^K - 1$。由于 $a > b$，$2K$ 整除 n。因此，标准因式分解（见 [19, §3.3]）表明，$t^K + 1$ 也整除 $t^n - 1$。我们断言最大公约数$(t^K + 1,$ $\Phi_6(t)) = 1$。事实上，若 $\Phi_6(\zeta) = 0$，则 ζ是本原六次单位根，因此 $\zeta^3 = -1$。若 ζ 也是 $t^K + 1$的根，则 $\zeta^K = -1$，故 $\zeta^{K-3} = 1$，这意味着 $K \equiv 3$(模 6)，与 $K \equiv 0$ (模 6)矛盾。

由欧几里得引理可知，t^K+1整除 $G(t)$，因此对于某个 $Q(t) \in \mathbb{Z}[t]$，有 $G(t) = (t^K+1)Q(t)$。假设 $m \equiv K + 2$ (模 $2K$) 意味着

$$t^m \equiv t^{K+2} \equiv -t^2 \pmod{t^K + 1}.$$

因此

$$f(t) = t^m - t + 1 \equiv -t^2 - t + 1 \pmod{t^K + 1}.$$

因此，由（3），我们有

$$\mathrm{Res}(f, t^K + 1) = \mathrm{Res}(-t^2 - t + 1, t^K + 1) = \mathrm{Res}(t^2 + t - 1, t^K + 1).$$

设 α, β 是 $t^2 + t - 1$ 的根，因此 $\alpha, \beta \in \{\phi^{-1}, -\phi\}$，其中 $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$。于是

$$\mathrm{Res}(f, t^K + 1) = (\alpha^K + 1)(\beta^K + 1) = 2 + L_K.$$

再次根据（3）并利用 $G\left(t\right)\ =\ \left(t^{K}+1\right)\ Q\left(t\right)$，可得

$$\mathrm{Res}(f,G)=\mathrm{Res}(f,(t^{K}+1)Q)=\mathrm{Res}(f,t^{K}+1)\,\mathrm{Res}(f,Q)=(2+L_{K})\,\mathrm{Res}(f,Q),$$

因此 $2+L_{K}$整除 结式(f,G)。由于 $f=\Phi_{6}F$，我们再次利用 (3) 得出 th at

$$\mathrm{Res}(f,G)=\mathrm{Res}(\Phi_{6}F,G)=\mathrm{Res}(\Phi_{6},G)\,\mathrm{Res}(F,G).\tag{6}$$

若 $\mathrm{Res}(F,G)\ =1$，则

$$\mathrm{Res}(f,G)=\mathrm{Res}(\Phi_{6},G).\tag{7}$$

设 ζ是 Φ_{6}的一个根。由于 6 整除 n，我们有 $\zeta^{n}=1$。由于 ζ和$\bar{}\zeta$是 $t^{n}-1$的单根，我们可以在 $t=\zeta$处应用洛必达法则。由此得到

$$G(\zeta)=\frac{n\zeta^{n-1}}{2\zeta-1}.$$

因此，

$$\mathrm{Res}(\Phi_{6},G)=G(\zeta)\,G(\bar{\zeta})=\frac{n^{2}}{3},$$

结合 (6) 和 (7)，我们得出 $2+L_{K}$ 整除 $n^{2}/3$. □

推论 3.2. 在假设 2.1 下，设 $n\geq 22$ 且 $a>b$。若 $m=2+n/2$，则结式$(F,\ G)\ \neq 1$。

证明。设 $K\ =\ n/2$。于是，引理 3.1 的所有假设均成立，其中 $n\ =\ 2K$ 和$m\ =\ K\ +\ 2$。反设 结式$(F,\ G)\ =\ 1$。由引理 3.1，可知$2+L_{K}$ 整除 $n^{2}/3$。由于 $K=n/2$，我们有

$$2+L_{n/2}\mid\frac{n^{2}}{3}.$$

然而，简单的归纳论证表明，对于 $n\ \geq\ 22,\ \ 2+L_{n/2}\ >\ n^{2}/3$，这就产生了矛盾。因此，结式$(F,\ G)\ \neq 1$。 □

下一个结果表明，若结式$(F,\ G)\ =1$，则 v整除 u。

引理 3.3. 在假设 2.1 下，若 $v\nmid u$，则 结式$(F,\ G)\ \neq 1$。

证明。反设 结式$(F,\ G)\ =\ 1$ 且 $v\nmid u$。则 $v\ >\ 1$。根据 [16,引理 4。3], 以下情况之一成立:

$$v\mid m-1,\quad v\mid m-2,\quad v\mid 1.$$

由于 最大公约数$(v,\ m-2)\ =1$ 且 $v>1$，唯一可能是 $v\mid m-1$。令 $m=1+\alpha v$，其中 $\alpha\in\mathbb{N}$。由于 $6\mid m-2$，可得 $6\mid\alpha v-1$。设 $\alpha_{0}=n/v$。由于 α_{0}是偶数，类似于引理 3.1 证明中的论证可知 $t^{v}+1$整除 $t^{n}-1$。由于最大公约数$(6,\ v)\ =1$，因此

$$\gcd(t^{v}+1,\Phi_{6}(t))=1.$$

因此，$t^{v}+1$ 整除 $G(t)$，所以对于某个 $S(t)\ \in\mathbb{Z}[t]$，我们可以写成

$$G(t)=(t^{v}+1)S(t).$$

由（3），可得

$$\operatorname{Res}(F,G)=\operatorname{Res}(F,t^v+1)\operatorname{Res}(F,S).$$

由于结式$(F,G)=1$，因此

$$\operatorname{Res}(F,t^v+1)=1. \tag{8}$$

由于 α 是奇数，我们得到

$$t^m=t^{1+\alpha v}=t(t^v)^\alpha\equiv -t \pmod{t^v+1}.$$

因此，

$$f(t)=t^m-t+1\equiv 1-2t \pmod{t^v+1}.$$

应用 (2)，我们得到

$$\operatorname{Res}(f,t^v+1)=\operatorname{Res}(1-2t,t^v+1)=\left|(-2)^v\left(2^{-v}+1\right)\right|=2^v+1. \tag{9}$$

由于 $f=\Phi_6F$ 和结式$(\Phi_6(t)\ t^v+1)=3$（因为最大公约数$(v,6)=1$），因此

$$\operatorname{Res}(f,t^v+1)=\operatorname{Res}(\Phi_6,t^v+1)\operatorname{Res}(F,t^v+1)=3\ \operatorname{Res}(F,t^v+1). \tag{10}$$

因此，结合 (9) 和 (10) 可得

$$\operatorname{Res}(F,t^v+1)=\frac{2^v+1}{3}.$$

然而，(8) 强制 $v=1$，这与先前的假设 $v>1$矛盾。因此，我们得出结论：若结式$(F,G)=1$，则 $v\mid u$。 □

注 3.4. 引理3.3 表明，在假设2.1成立时，只要结式$(F,G)=1$，我们就可以写成 $u=\tau v$，其中某个整数为 $\tau\geq 1$。

引理 3.5. 在假设2.1下，设 $a=v=u=1$，$b\in\{1,2\}$，并且$r=s-1$ 使得$(n=2\cdot 3^s$ 且 $m-2=2^b3^{s-1})$。若 $m-2\in\{n/3,2n/3\}$ 且结式$(F,G)=1$，则结式$(f,\Phi_n)=9$。

证明。由于 $n=2\cdot 3^s$，我们令 $K=n/3=2\cdot 3^{s-1}$，使得 $(m-2)\in\{K,2K\}$。令 d 为 K 的任意一个因子，满足 $d\neq 6$，并令 ζ 为一个本原的 d次单位根。于是 $\zeta^K=1$，故$\zeta^{m-2}=1$，因此

$$f(\zeta)=\zeta^m-\zeta+1=\zeta^2-\zeta+1=\Phi_6(\zeta).$$

对所有根取乘积，Φ_d 得到

$$\operatorname{Res}(f,\Phi_d)=\operatorname{Res}(\Phi_6,\Phi_d). \tag{11}$$

由于 $f=\Phi_6F$，结式的乘法性（3）给出

$$\operatorname{Res}(f,\Phi_d)=\operatorname{Res}(\Phi_6,\Phi_d)\operatorname{Res}(F,\Phi_d).$$

将其与（11）结合，我们得到 结式$(F,\Phi_d)=1$ 对所有 $d\mid K$，其中 $d\neq 6$。由于 $G(t)=(t^n-1)/\Phi_6(t)$ 且

$$t^n-1=\prod_{d\mid n}\Phi_d(t),$$

我们有

$$G(t) = \prod_{\substack{d \mid n \\ d \neq 6}} \Phi_d(t).$$

由于 $n = 2 \cdot 3^s$, n 的因数恰好是 K 的因数，再加上 3^s 和 n。因此

$$G(t) = \left(\prod_{\substack{d \mid K \\ d \neq 6}} \Phi_d(t) \right) \Phi_{3^s}(t) \Phi_n(t),$$

并且由此，根据（3），

$$\operatorname{Res}(F, G) = \operatorname{Res}(F, \Phi_{3^s}) \operatorname{Res}(F, \Phi_n). \tag{12}$$

再次利用 $f = \Phi_6 F$ 和（3），可得

$$\operatorname{Res}(f, \Phi_{3^s}) = \operatorname{Res}(\Phi_6, \Phi_{3^s}) \operatorname{Res}(F, \Phi_{3^s}), \qquad \text{and} \qquad \operatorname{Res}(f, \Phi_n) = \operatorname{Res}(\Phi_6, \Phi_n) \operatorname{Res}(F, \Phi_n).$$

将这些代入（12）得到

$$\operatorname{Res}(F, G) = \frac{\operatorname{Res}(f, \Phi_{3^s})}{\operatorname{Res}(\Phi_6, \Phi_{3^s})} \cdot \frac{\operatorname{Res}(f, \Phi_n)}{\operatorname{Res}(\Phi_6, \Phi_n)}.$$

由（5），可得 结式$(\Phi_6, \Phi_{3^s}) = 1$ 以及 结式$(\Phi_6, \Phi_n) = 9$，因此

$$\operatorname{Res}(F, G) = \operatorname{Res}(f, \Phi_{3^s}) \cdot \frac{\operatorname{Res}(f, \Phi_n)}{9}.$$

若 $\operatorname{Res}(F, G) = 1$，则右侧必定等于 1，这迫使 $\operatorname{Res}(f, \Phi_n) = 9$。 □

因此，要证明 $\operatorname{Res}(F, G) \neq 1$ 在引理 3.5的条件下成立，只需证明 $\operatorname{Res}(f, \Phi_n) \neq 9$。

引理 3.6。在假设 2.1下，设 $a = v = u = 1$，且 $b \in \{1, 2\}$，并且$r = s - 1$。则

1. $\operatorname{Res}(f, \Phi_n) = 9$ 若 $s = 2$。
2. $\operatorname{Res}(f, \Phi_n) > 9$ 若 $s \geq 3$。

证明。令 $q = 3^{s-1}$ 并定义 $\zeta = \zeta_n$。设 $\eta = \zeta^q$，于是 η 是本原六次单位根。定义 $L = \mathbb{Q}(\zeta)$ 和 $M = \mathbb{Q}(\eta) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$。由于 $n = 2 \cdot \overline{3^s}$，可得 $\zeta^{n/6} = \eta$，因此 $\zeta^{n/3} = \eta^2$。令 $\varepsilon \in \{2, 4\}$ 由 $\zeta^K = \eta^\varepsilon$确定，其中若 $\varepsilon = 2$，则 $K = n/3$；若 $\varepsilon = 4$，则$K = 2n/3$。定义

$$P(X) = \eta^\varepsilon X^2 - X + 1 \in \mathbb{Z}[\eta][X],$$

使得 $P(\zeta) = f(\zeta)$。因此

$$N_{L/M}(f(\zeta)) = \operatorname{Res}_X(X^q - \eta, P(X)) = R_q,$$

其中

$$R_q = 1 - \eta S_q + \eta^2 \quad \text{and} \quad S_q = \beta_1^q + \beta_2^q,$$

其中 β_1，β_2 是 $P(X)$ 的根。由于 M是虚二次的，我们有 $N_{M/\mathbb{Q}}(x) = |x|^2$ 对于$x \in M$，因此

$$\operatorname{Res}(f, \Phi_n) = N_{M/\mathbb{Q}}(R_q) = |R_q|^2.$$

现在我们从下方给 $|R_q|$ 设定界。由于 η^2 是本原三次单位根，因此有 $|1+\eta^2|=1$，从而

$$|R_q| = |-\eta S_q + (1+\eta^2)| \geq |S_q| - 1.$$

此外， $\beta_1\beta_2 = \eta^{2\varepsilon}$ 蕴含 $|\beta_1||\beta_2| = 1$，因此

$$|S_q| = |\beta_1^q + \beta_2^q| \geq |\beta_1|^q - |\beta_2|^q = |\beta_1|^q - |\beta_1|^{-q}.$$

由 β_1的显式表达式可得 $|\beta_1|^2 > 3^{2/3}$，从而 $|\beta_1| > 3^{1/3}$。因此，若$q \geq 9$ ，则

$$|\beta_1|^q > (3^{1/3})^9 = 27, \qquad |\beta_1|^{-q} < \frac{1}{27},$$

so

$$|S_q| > 27 - \frac{1}{27} > 26.$$

由此可知

$$|R_q| \geq |S_q| - 1 > 25,$$

因此

$$\mathrm{Res}(f, \Phi_n) = |R_q|^2 > 25^2 > 9.$$

这证明了对于 $q \geq 9$，$\mathrm{Res}(f, \Phi_n) > 9$ 。对于剩下的情形 $q = 3$，直接计算得出$\mathrm{Res}(f, \Phi_{18}) = 9$。 □

作为引理3.6的推论，我们得到 $H(n, 2 \pm n/3)^{ab}$ 具有非平凡挠元。

推论 3.7. 设 $n = 2 \cdot 3^s$ 且 $s \geq 2$。则 $H(n, 2 \pm n/3)^{ab} \ncong \mathbb{Z}^2$.

证明。 这正是 $f(t) = t^m - t + 1$ 满足 $m = 2 \pm n/3$ (模 n)的情形。令$K = \pm n/3$ (模 n) 并应用引理 3.5 和引理 3.6。 □

以下引理用于在某些情况下给出一个更小的数对 (n_1, m_1)，使其满足与 (n, m) 相同的条件。这对于极小性论证尤其有用，因为此时需要证明不存在更小的反例。

引理 3.8. 在假设 2.1下，设 $u = \tau v$ 对某个 $\tau \geq 1$成立。若 $a \geq b+2$ 或 $s \geq r+2$或 $(a = b+1$ 且 $s = r+1)$，则存在整数 n_1 满足 $n_1 \mid n$ 且 $n_1 < n$，以及整数 m_1 使得 $2 < m_1 < n_1$，$m_1 \equiv m$ (模 n_1)，且 $m_1 \equiv 2$ (模 6)。

证明。 如果 $a \geq b+2$，我们设 $n_1 := 2^{b+1}3^s v$。那么 $n_1 \mid n$ 和 $n/n_1 = 2^{a-b-1} \geq 2$，因此 $n_1 < n$。

如果 $s \geq r+2$，则我们改设 $n_1 := 2^a 3^{r+1} v$。在这种情况下， $n_1 \mid n$ 和 $n/n_1 = 3^{s-r-1} \geq 3$，所以仍有$n_1 < n$。

最后，如果 $a = b+1$ 和 $s = r+1$，我们设 $n_1 := 2^{b+1}3^r v$。那么 $n_1 \mid n$ 和 $n/n_1 = 3$，因此 $n_1 < n$。在所有情况下，我们都有 $6 \mid n_1$。令 m_1 为满足 $0 \leq m_1 < n_1$ 且 $m_1 \equiv m$(模 n_1) 的唯一整数。由于 $6 \mid n_1$ 且 $m \equiv 2$ (模 6)，可得 $m_1 \equiv 2$ (模 6)。

反设 $m_1 = 2$。那么 $n_1 \mid (m-2)$，因此 $v_2(n_1) \leq v_2(m-2)$ 且$v_3(n_1) \leq v_3(m-2)$。然而，根据 n_1 的构造，在这三种情形中的每一种中，我们都有以下情况之一：

$$v_2(n_1) = b+1 > b = v_2(m-2)$$

or

$$v_3(n_1) = r+1 > r = v_3(m-2).$$

这是一个矛盾，因此 $m_1 \neq 2$。由此，我们得到 $2 < m_1 < n_1$。 □

4 主要结果

本节中，我们证明猜想1.1。首先，回顾一下相关设定。我们的目标是证明 $H(n,\ m)^{ab}$ 同构于 $\mathbb{Z}^2$ 当且仅当 $n \equiv 0$ (模6)且 $m \equiv 2$ (模 n)。根据 [16, 引理4。2], -秩为2 的充要条件是 $m \equiv 2$ (模6)且 $n \equiv 0$ (模6)。因此，我们写作

$$n = 2^a 3^s v \quad \text{and} \quad m = 2^b 3^r u,$$

其中 $\gcd(uv, 6) = 1$ 且 $a, s, b, r \geq 1$。

直接计算可得

$$H(18, 14)^{\mathrm{ab}} \cong H(18, 8)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/19\mathbb{Z}, \qquad H(12, 8)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

特别地，这三个群的 $\mathbb{Z}$-秩均为 2，且都含有非平凡挠元。因此，尽管条件$n \equiv 0$ (模 6) 和 $m \equiv 2$ (模 6) 足以保证阿贝尔化的 $\mathbb{Z}$-秩为 2，但不足以确保其无挠。

我们利用前几节得到的所有结果，完成猜想1.1的证明。

定理4.1。 猜想*1.1* 成立。

证明。 由 [16, 推论 1。2] 只需证明 $\mathrm{Res}(F, G) = 1$，其中 F, G 如假设 2.1中所述。我们假设 $n \geq 24$，因为对于 $n \leq 18$，猜想成立。

反设 $\mathrm{Res}(F, G) = 1$ 且 $n \nmid (m-2)$，于是 $2 < m < n$。由引理 3.3$v | u$。因此，我们有 $n = 2^a 3^s v$ 且 $m - 2 = 2^b 3^r \tau v$，其中 $b, a, s, r, \tau, v \geq 1$ 且 $\gcd(6, \tau v) = 1$。

我们假设 (n, m) 是一个极小反例，也就是说， n 具有以下性质，且是最小的：

- $6 \mid n$ 且 $6 \mid (m-2)$,
- $n \nmid (m-2)$，且
- $H(n,\ m)^{ab} \cong \mathbb{Z}^2$。

由引理 3.8，可得 $a \leq b+1$ 以及 $s \leq r+1$. 此外，等式 $a = b+1$ 以及 $s = r+1$由引理 3.8排除。另一方面，不等式 $a \leq b$ 以及 $s \leq r$ 由我们的假设 $n \nmid (m-2)$排除：事实上，若 $a \leq b$ 且 $s \leq r$，则

$$2^a 3^s v \mid 2^b 3^r \tau v,$$

因此

$$n = 2^a 3^s v \mid 2^b 3^r \tau v = m - 2,$$

这就产生矛盾。因此，以下四种情形中恰有一种成立：

1. $a = b + 1, \quad s = r;$
2. $a = b, \quad s = r + 1;$
3. $a = b + 1, \quad s < r;$
4. $a < b,$
   $s = r + 1.$

情况（1）： $a = b + 1$ **和** $s = r$。在这种情况下，

$$n = 2^{b+1}3^s v, \qquad m - 2 = 2^b 3^s \tau v.$$

由于 $m < n$，我们有 $m - 2 < n$，因此

$$2^b 3^s \tau v < 2^{b+1} 3^s v.$$

两边除以 $2^b 3^s v$ 得到 $\tau < 2$，所以 $\tau = 1$。因此，

$$m - 2 = 2^b 3^s v = \frac{n}{2},$$

and

$$m = 2 + \frac{n}{2}.$$

这与推论 3.2矛盾。

情形 (2)： $a = b$ **和** $s = r + 1$。这里，

$$n = 2^b 3^{r+1} v, \qquad m - 2 = 2^b 3^r \tau v.$$

同样，$m < n$ 意味着

$$2^b 3^r \tau v < 2^b 3^{r+1} v,$$

两边除以 $2^b 3^r v$ 得到 $\tau < 3$。由于最大公约数$(\tau,\ 6) = 1$，必有 $\tau = 1$。因此，

$$m - 2 = 2^b 3^r v = \frac{n}{3},$$

so

$$m = 2 + \frac{n}{3}.$$

这与推论 3.7相矛盾。

情形（3）和（4）。现在我们考虑剩下的情形 $a = b+1,\ \ s < r$ 和 $a < b,\ \ s = r+1$。回想一下，

$$n = 2^a 3^s v, \quad m - 2 = 2^b 3^r \tau v, \quad \gcd(\tau v, 6) = 1.$$

我们先证明 $v = 1$。假设 $v > 1$。令

$$n' = \frac{n}{v}, \qquad m' \equiv m \pmod{n'}.$$

那么 $n' < n$、$6 \mid n'$ 和 $H(n',\ m')^{ab} \cong \mathbb{Z}^2$。此外，在情形（3）中，我们有 $a = b + 1$；在情形（4）中，我们有 $s = r + 1$，因此在这两种情形下

$$n' \nmid (m - 2).$$

因此，$(n',\ m')$ 是一个更小的反例，这与 n 的极小性矛盾。因此，$v = 1$.从现在起，

$$n = 2^a 3^s, \qquad m - 2 = 2^b 3^r \tau, \qquad \gcd(\tau, 6) = 1.$$

由于 $m < n$，我们有

$$2^b 3^r \tau < 2^a 3^s.$$

情形（3）： $a = b + 1$ **和** $s < r$。那么

$$n = 2^{b+1} 3^s, \qquad m - 2 = 2^b 3^r \tau,$$

并且不等式 $m < n$ 变为

$$3^{r-s}\tau < 2.$$

由于 $r > s$，我们有 $r - s \geq 1$，因此 $3^{r-s} \geq 3$，并且 $\tau \geq 1$。由此可得 $3^{r-s}\tau \geq 3$，这不可能。因此，情形（3）不可能出现。

情形（4）： $a < b$ **和** $s = r + 1$。这里，

$$n = 2^a 3^{r+1}, \qquad m - 2 = 2^b 3^r \tau.$$

由 $m < n$ 可得

$$2^{b-a}\tau < 3.$$

由于 $a < b$，我们有 $b - a \geq 1$，因此 $2^{b-a} \geq 2$。此外，若 $\tau \neq 1$，则 $\tau \geq 5$，因为 gcd(τ，6) $= 1$。这意味着 $2^{b-a}\tau \geq 10$，矛盾。因此 $\tau = 1$，所以 $2^{b-a} < 3$，进而 $b - a = 1$。所以 $b = a + 1$，并且

$$m - 2 = 2^{a+1}3^r = \frac{2n}{3},$$

so

$$m = 2 + \frac{2n}{3},$$

这与推论 3.7矛盾。

这表明该猜想不存在反例。 □

5 结论

证明了猜想 1.1 后，我们现已完成对作为 LOG 群出现的群 $G_n(m, k)$ 的分类，即 Sieradski 群 $S(2, n)$，其中 $n \equiv 0$ (模 6)。

参考文献

[1] Tom M. Apostol. 分圆多项式的结式. 美国数学会会刊, 24:457– 462, 1970年.

[2] V. G. Bardakov 和 A. Yu. Vesnin. 关于 Fibonacci 群的一种推广. *AlgebraLogika*, 42(2):131–160, 255, 2003.

[3] Alberto Cavicchioli、Friedrich Hegenbarth 和 Dušan Repovš. 关于流形脊与群的循环表示. 载于 纽结理论（华沙，*1995*年），第 42 卷，*Banach* 中心出版物，第 49–56 页。波兰科学院数学研究所，华沙，1998年.

[4] Alberto Cavicchioli、E. A. O'Brien 和 Fulvia Spaggiari。关于一类循环表示群的一些问题。《代数学杂志》，320(11):4063–4072，2008年。

[5] Christopher P. Chalk。具有非球面表示的 Fibonacci 群。《代数通讯》，26(5):1511–1546，1998年。

[6] Christopher P. Chalk。Fibonacci 群 $F(2, n)$ 在 n 为奇数且 $n \geq 11$ 时是双曲的。《群论杂志》，24(2):359–384，2021年。

[7] Ihechukwu Chinyere 和 Bernard Oduoku Bainson。完美 Prishchepov 群。《代数学杂志》，588:515–532，2021年。

[8] Ihechukwu Chinyere 和 Gerald Williams。斐波那契型双曲群与 T(5)循环表示群。《代数学杂志》，580:104–126，2021年。[9] Ihechukwu Chinyere 和 Gerald Williams。 $T(6)$循环表示群的双曲性。《群、几何与动力学》，16(1):341–361，2022年。[10] J. Conway。高级问题5327。《美国数学月刊》，72:915，1965年。[11] Philip J. Davis。循环矩阵。Wiley-Interscience出版物。John Wiley & Sons，纽约-奇切斯特-布里斯班，1979年。纯粹与应用数学。[12] Martin Edjvet。关于单关系子相对表示的无球面性。《爱丁堡皇家学会会刊 *A* 辑》，124(4):713–728，1994年。[13] N. D. Gilbert 和 James Howie。LOG 群与循环表示群。《代数学杂志》，174(1):118–131，1995年。[14] D. L. Johnson。群表示理论专题，数学研究生教材第42卷。伦敦数学学会讲义系列。剑桥大学出版社，剑桥-纽约，1980年。[15] D. L. Johnson 和 H. Mawdesley。一些斐波那契型群。《澳大利亚数学学会杂志》，20(2):199–204，1975年。[16] Vanni Noferini 和 Gerald Williams。作为标记有向图群的循环表示群。《代数学杂志》，605:179–198，2022年。[17] R. W. K. Odoni。由循环表示群理论引出的若干丢番图问题。《格拉斯哥数学杂志》，41(2):157–165，1999年。[18] Allan J. Sieradski。组合压缩、三维流形与群的第三同调群。《数学发明》，84(1):121–139，1986年。[19] Lawrence C. Washington。分圆域导论，数学研究生教材第83卷。施普林格出版社，纽约，第二版，1997年。[20] Gerald Williams。非球面 Cavicchioli-Hegenbarth-Repovš 广义斐波那契群。《群论杂志》，12(1):139–149，2009年。[21] Gerald Williams。与三项式相关的幺模整数循环矩阵。《国际数论杂志》，6(4):869–876，2010年。[22]Gerald Williams。斐波那契型群再探。《国际代数与计算杂志》，22(8):1240002，19，2012年。