arXiv:2602.07172v1 [math.GR] 6 Feb 2026

关于超 M_p-群的一些评论

XIAOYOU CHEN 和 ALI REZA MOGHADDAMFAR

Abstract. 设 G 为有限群，p 为 $|G|$ 的一个素数因子。若每个诱导出 φ 的本原 p- 布劳尔特征标都是线性的，则称不可约 p- 布劳尔特征标 φ （属于 G ）为超单项。若 G 的每个不可约 p-布劳尔特征标都是超单项的，则称群 G 为超M_p-群。本文研究有限群 G 成为超 M_p-群的条件。我们证明，奇数阶超M_p-群的每个正规子群都是 M_p-群。

1. Introduction

本文中所考虑的所有群均假定为有限群。有关记号和术语，请参阅 [3], [5] 和 [9]。回顾一下，若有限群 G 的特征标 χ 是由 G 的某个子群的线性特征诱导得到的，则称其为单项 。如果 G 的所有不可约复特征标都是单项的，则称 G 为-群 M。

Taketa [11] 的一个基本结果表明， M-群必然是可解的。关于 M-群的一个著名问题是： M-群的正规子群是否总是 M-群。Dade在 [2] 中构造了一个例子，表明 M-群的正规子群不必是 M-群。然而，Loukaki [8] 证明了：若 M-群 G的阶为 p^aq^b，其中 p 与 q 为奇素数，则 G 的每个正规子群仍是M-群。Lewis在 [6]中进一步简化了Loukaki的证明。

我们用Irr(G)表示 G 的所有不可约特征的集合。若每个诱导 χ 的本原特征标都是线性的，则不可约特征标 $\chi \in$ Irr(G)称为超单项 。需要注意的是，特征标 $\chi \in$ Irr(G)是超单项的，当且仅当每个诱导 χ 的特征标都是单项的。若每个不可约特征标 $\chi \in$ Irr(G)都是超单项的，我们把群 G 定义为超 M-群 。因此，超 M-群也必然是M-群。

Isaacs [4] 猜想，所有奇数阶的 M-群都是超 M-群。Lewis [7] 通过证明 Isaacs'

日期：2026年2月10日。2010年数学主题分类。主要分类 20C20；次要分类 20C15。
关键词和短语。 M-群；超单项布劳尔特征；超 M_p-群。

猜想在某些条件下成立，在超 -群这一课题上取得了进展。此外，如果 Isaacs' conjecture 成立，那么奇数阶 M-群的每个正规子群也是一个 M-群。

设 p 为一个素数。记 IBr(G) 为有限群 G 的不可约 p-布劳尔特征标集合。若有限群 G 的一个 p-布劳尔特征标是由其某个子群（不一定是正规子群）的线性 p-布劳尔特征标诱导得到的，则称该特征标为单项 。这一概念由 Okuyama [10] 运用模论提出。若群 G 的每个不可约 p-布劳尔特征标都是单项的，则称群 G 为 M_p群 。特别地，Okuyama [10] 证明了 M_p-群也是可解群。根据 Fong-Swan 定理，对于每个素数p， M-群必定是 M_p-群；然而，M_p-群未必是 M-群；例如，GL(2，3) 是 M_2-群，而不是 M-群。Bessenrodt [1] 证明， M_p-群的正规 Hall 子群也是 M_p-群。

类似于超单项式特征标的定义，我们称一个 p-布劳尔特征标 $\varphi \in$ IBr(G) 是超单项的，如果每个诱导出 φ的本原 p-布劳尔特征标都是线性的。（如果一个不可约 p-布劳尔特征标不能由真子群的 p-布劳尔特征标诱导而来，就称它是本原的。）如果群 G的每个不可约 p-布劳尔特征标都是超单项的，则称群 G为超 M_p群。

在本文中，我们讨论有限群 G 成为超 M_p群的条件。

定理 1.1。设 G 是一个群， p是 $|G|$的一个素数因子。

(i)如果所有本原布劳尔特征标都是线性的，并且 G 的每个真子群都是一个 M_p群，那么 G 是一个超 M_p群。

(ii) 如果 G 是一个超 M群，那么对于每个素数 p， G 都是一个超 M_p群。

请注意，超 M_p-群不一定是超 M-群。例如，SL(2，3) 是超 M_2-群，但不是 M- 群。

类似于关于奇数阶 M-群的 Isaacs 猜想，我们提出以下问题。

问题1.2。 设 G 是一个群， p是一个素数。若 G 是一个奇数阶 M_p-群，是否可以断定 G 是超 M_p-群?

需要特别指出的是，若素数 p 不整除群 $|G|$的阶，则 IBr(G) $=$ Irr(G)。因此，如果问题1.2得到肯定回答，就能证实 Isaacs 猜想。

此外，我们还有以下定理。

定理 1.3。 假设每个奇数阶的 M_p-群都是超 M_p-群。那么，奇数阶 M_p-群的每个正规子群也都是一个 M_p-群。

特别地，如果 p 不整除 G的阶，则 IBr(G) = Irr(G)，这引出了下面的推论，与 [7, 推论 2.2]一致。

推论 1.4. 如果 *Isaacs* 猜想成立，那么奇数阶M-群的正规子群也都是 M-群。

2. 证明

我们首先给出一个引理，该引理将在定理 1.1 的证明中用到。在继续之前，我们需要引入一些额外的记号。设 G 为一个群， p 为素数，且 $\chi \in$Irr(G)表示 G的一个不可约特征标。我们将 χ^0 记为 χ 在 G 的 p-正则元素集上的限制（即阶不被 p整除的元素）。此外，如果对于 G的任意真子群的任意特征标 θ，都有$\chi \neq \theta^G$，则称 χ 是本原的。

根据 Fong-Swan 定理，如果 φ 是 p-可解群 G的一个不可约 p-布劳尔特征标，那么存在一个特征标 $\chi \in$ Irr(G)，使得$\chi^0 = \varphi$。

根据上文引入的记号，我们给出以下引理 .

引理 2.1. 设 G 是一个 p-可解群。假设 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ 且 $\chi^0 = \varphi \in$IBr(G)。如果 φ 是本原的，那么 χ 也是本原的。

证明. 此结果可由将 $\pi = p'$ 代入 [7, 引理 3.3]，得出，其中 p' 是 p 在全体素数集合中的补集。□

接下来，我们给出定理 1.1 的证明。

定理 *1.1* 的证明. (i) 设 $\varphi \in$ IBr(G)。若 φ 是本原的，则根据假设，φ 是线性的，因此是超单项的。

现在，假设 φ 不是本原的。在这种情况下，存在 G 的一个真子群 H，以及某个 $\lambda \in$IBr(H)，使得 $\lambda^G = \varphi$。由于 H 是一个 M_p-群，因此 λ 是单项的。因此， φ 是超单项的，这意味着 G 是一个超 M_p-群。

(ii) 设 $\varphi \in$ IBr(G)，并假设 $\varphi = \lambda^G$，其中 λ是子群 H of G的一个本原 p-布劳尔特征标。注意，由于 G 可解， H 可解。因此，存在 $\mu \in$ Irr(H)，使得 $\mu^0 = \lambda$。由于 λ 是本原的，根据引理 2.1， μ 也必定是本原的。此外，我们有:

$$\varphi = \lambda^G = (\mu^0)^G = (\mu^G)^0.$$

需要注意的是，由于 φ 是不可约的， μ^G 必须是 G 的一个不可约特征标。由于 G 是一个超 M-群，因此 μ 是线性的，这意味着 λ 也是线性的。因此， φ 是超单项的，从而 G 是一个超 M_p-群。□

接下来，我们将概述证明定理 1.3 时所要用到的几个引理。设 χ 是群 G 的一个特征标。设 H 是 G 的一个子群，且设 η 是 H 的一个特征标。我们将 χ 在 H 上的限制记为 χ_H，并将从 η 诱导的特征标记为 η^G。

下述引理称为麦基定理，可见 [9,习题 8.5]。

引理 2.2 (G.W. Mackey)。设 H 和 K 是 G的子群，且 T 是关于 H 和 K的一组双陪集代表元，使得

$$G = \bigcup_{t\in T} HtK,$$

是一个不交并。设 φ是 H的布劳尔特征标。对于任意元素 $g \in G$，我们用 φ^g 表示由以下方式定义的 H^g 的布劳尔特征标

$$\varphi^g(h^g) = \varphi(h) \quad for\ every\ h \in H.$$

于是，我们有

$$(\varphi^G)_K = \sum_{t\in T} (\varphi^t_{H^t\cap K})^K.$$

特别地，若 $G = HK$，则 $(\varphi^G)_K = (\varphi_{H\cap K})^K$。此外，若 $(\varphi^G)_K$不可约，则可得 $G = HK$。

引理 2.3。设 φ是群 G的单项式布劳尔特征标，$K \leq G$ 是 G的一个子群。若 φ_K 不可约，则 φ_K 也是单项式布劳尔特征标。

证明。由于 φ 是单项式布劳尔特征标，存在 G的一个子群 H 以及一个线性布劳尔特征标 $\lambda \in$IBr(H)，使得 $\lambda^G = \varphi$。根据假设，$(\lambda^G)_K \in$ IBr(K)，由引理 2.2可得 $G = HK$。因此，我们有:

$$\varphi_K = (\lambda^G)_K = (\lambda_{H\cap K})^K,$$

这表明 φ_K 确实是单项式布劳尔特征标。 □

引理 2.4。设 $\mathcal{G}$ 是一个对正规子群封闭的群类， $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{G}$中 M_p-群构成的类。假设 $\mathcal{M}$ 中的每个群都是超 M_p-群。那么， $\mathcal{M}$ 对正规子群封闭。

需要指出的是， $\mathcal{G}$ 是一个对正规子群封闭的群类。这意味着，如果 $G \in \mathcal{G}$ 且 $N \lhd G$，那么 $N \in \mathcal{G}$。此外，由于 $\mathcal{M}$ 由 $\mathcal{G}$中的 M_p-群组成，因此如果 $G \in \mathcal{M}$ 且 $N \lhd G$，那么$N \in \mathcal{G}$。因此，如果我们能证明 $\mathcal{M}$ 对正规子群封闭，就可以得出 $N \in \mathcal{M}$。

引理 *2.4* 的证明。 取一个群 $G \in \mathcal{M}$，并设 N 是G的正规子群。如果 $N = G$，结论显然成立。因此，我们假设 $N < G$，且存在 G 的一个极大正规子群 M，使得 $N \leq M < G$。由于 G 是一个 M_p-群，因此 G 是可解的。于是， $|G:$ 对于某个素数 r，有 $M| = r$ 。注意到 $M \in \mathcal{G}$ ，因为 $\mathcal{G}$ 对正规子群封闭。

设 θ 是 M 的一个不可约 p-布劳尔特征标。定义 G 中 θ 的惯性群为

$$T = \mathrm{I}_G(\theta) = \{g \in G \mid \theta^g = \theta\}.$$

由于 $|G\colon M|$ 是一个素数，我们得出 $T = G$ 或 $T = M$。根据标准的克利福德理论，可知 θ 可扩张到 G ，或 θ 不可约地归纳到G。

若 θ 可扩张到 G，则存在一个布劳尔特征标 $\varphi \in \in\mathrm{IBr}(G)$，使得 $\varphi_M = \theta$。由于 G 是一个 M_p-群，我们可以应用引理 2.3，得出 θ 是单项的。若 θ 不可约地归纳到 G，则 $\theta^G \in\in\mathrm{IBr}(G)$。鉴于 G 是一个超 M_p-群，我们也可推出 θ 是单项的。因此，我们得出 M 是一个 M_p-群，这意味着 $M \in \mathcal{M}$。

注意， $|M\colon N| < |G\colon N|$。对 $|G$ 进行归纳并结合前面的证明，可得 $N \in \mathcal{M}$。因此，我们可以说 $\mathcal{M}$ 在正规子群下封闭。□

定理 *1.3* 的证明。我们注意到，奇数阶群类在正规子群下封闭，因为奇数阶群的正规子群也具有奇数阶。因此，该定理由引理 2.4 得证。□

Acknowledgments

作者衷心感谢审稿人提出的宝贵意见，这些意见极大地完善了本文。作者还感谢河南工业大学项目（2024PYJH019）、河南省自然科学基金（252300421983）以及美国数学会 Ky and Yu-Fen Fan 基金（253H2023LC253）的资助。

References

[1] C. Bessenrodt，单项表示及其推广，《澳大利亚数学会杂志 *A* 辑》，**48(2)**（1990），264–280。[2] E. C. Dade，M 群的正规子群未必是 M 群，《数学杂志》，**133** （1973），313–317。[3] I. M. Isaacs，《有限群特征标理论》，学术出版社，纽约，1976。[4] I. M. Isaacs，《可解群的特征标》，《阿卡塔有限群表示会议论文集》（加利福尼亚州阿卡塔，*1986*），103–109，《纯数学专题讨论会论文集》第47卷第1部分，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1987。[5] I. M. Isaacs，《可解群的特征标》，《数学研究生读物》第189卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2018。

[6] M. L. Lewis，阶为 p^aq^b 的 M 群：Loukaki定理，《代数及其应用杂志》，**5(4)**（2006），465–503。[7] M. L. Lewis，所有不可约特征标均为超单项的群，《美国数学学会会刊》，**138(1)**（2010），9–16。[8] M. Loukaki，奇数阶单项 p^aq^b-群的正规子群，博士学位论文，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校，2001。[9] G. Navarro，有限群的特征标与块，剑桥大学出版社，剑桥，1998。[10] T. Okuyama，有限群中的模对应，《北海道数学杂志》，**10(3)**（1981），299–318。.[11] K. Taketa，关于其表示均可变换为单项形式的群，《东京帝国学士院纪要》，**6**（1930），31–33。

School of Mathematics and Statistics, Henan University of Technology, Zhengzhou450001, China电子邮箱地址：cxymathematics@hotmail.com

Faculty of Mathematics, K. N. Toosi University of Technology, P. O. Box16765–3381, Tehran, Iran电子邮箱地址：moghadam@kntu.ac.ir