arXiv:2602.07185v1 [cs.CE] 6 Feb 2026

最低碳桁架：采用混合整数线性规划实现可建造的多构件设计

Zane Hallowell Schemmer[1] 和 Josephine Voigt Carstensen[1]

[1]麻省理工学院土木与环境工程系

2025年6月27日

摘要

桁架优化是一个内容丰富的研究领域，随着建筑施工碳排放减量需求日益受到关注，该领域也重新焕发了兴趣。然而，如何建造高度优化且往往十分复杂的设计，始终是一项挑战。本文提出并求解了新的混合整数线性规划，使人们能够考量环境影响与可建造性之间的相互作用。具体而言，该方法使设计工程师能够采用多种材料和/或结构构件进行设计，分别设置横截面积上下限，并对结构连接的复杂程度加以约束。在此过程中，还明确考虑了相容性和本构定律。结果表明，施加可施工性约束后，隐含碳最低的设计会发生显著变化，凸显出采用综合优化方法的必要性。在一个示例中，引入一种低碳材料选项几乎不会影响环境性能，而在另一个示例中，环境性能则提升了近29%。本文还以一个预应力张拉整体结构为例，展示了该公式如何扩展至采用三种构件类型进行设计并加入其他约束。

关键词—桁架拓扑优化、张拉整体结构、混合整数线性规划、多材料、可建造性、隐含碳、McCormick包络

1 引言

为将全球平均气温升幅限制在《巴黎协定》规定的 1.5°C 以内，世界需要在2030年前将温室气体排放量减少43% [1]。2022年，建筑约占全球能源消耗总量和过程相关碳排放的37%，相关排放增加约9.8 $GtCO_2$ ，超过了2018年的峰值 [2]。因此，目前建筑与施工行业的碳减排目标被评为“还需加大努力” [3]。建筑相关的 CO_2 排放包括建筑使用过程中的排放（也称为运行碳），以及建筑材料产生的排放，通常称为隐含碳。隐含碳排放源于建筑材料的生产、运输、安装、维护和处置。近年来，由于意识提高以及能效标准的实施，美国建筑的运行碳有所下降，但隐含碳排放尚未出现显著变化 [4]。2022年，建筑材料的全球生产占碳排放总量的7–9%，合计达3.7 $GtCO_2$ [2]。由于结构构件通常构成建筑隐含碳的最大部分[5], , 多项关于隐含碳减排策略的研究指出，通过增加结构优化的应用来减少结构材料消耗，具有巨大潜力 [6], [7], [8], [9], [10]。

采用结构优化时，通常通过自动化方法获得最大的设计收益：将设计问题表述为正式的优化问题，并利用数学规划求解。结构优化可分为三类：尺寸设计、形状优化和拓扑优化 [11]。拓扑优化通常能带来最显著的性能提升，因为与尺寸设计和形状优化不同，它不要求设计工程师预先确定最终设计的布局 [12]。它只要求设计者定义结构可以占据的空间，以及

相关荷载和边界条件。在数学规划的迭代过程中，会对设计性能进行数值评估。离散模型（桁架或框架单元）和连续体有限元离散均有相应的拓扑优化方法 [13], ; 其中，桁架或框架单元的拓扑优化有时也称为布局优化 [14], [15]。

美国土木工程师学会下属结构工程师协会可持续发展委员会近期发布的一份白皮书明确建议，增加拓扑优化的应用，以避免过度设计并减少建筑材料消耗 [16]。这一建议是在近期应用拓扑优化以实现更环保结构的研究不断增多之后提出的 [17], [18], [19]。对于建筑和土木基础设施，相关案例包括通过实验减少钢筋混凝土梁的混凝土用量，表明其环境效益潜力可达 25–30% [20], [21], [22]。这些研究主要依靠减轻混凝土结构重量来降低结构的隐含碳。减少单一材料的重量时，这一做法很直接；但对于多材料结构，环境效益、可施工性约束与结构性能之间的相互作用则复杂得多。因此，针对材料选择问题的结构优化日益受到关注 [23], [24]。尽管多材料设计的拓扑优化文献十分丰富，但为低隐含碳结构实现高效设计而开发的框架相对较少。Ching 和 Carstensen [25] 在明确以最小化木材-钢桁架环境影响为目标时，研究了拓扑优化中的材料选择。Kundu 和 Zhang [26] 提出一种连续体拓扑优化方法，以最小化钢结构和生物质结构的经济与环境影响之和。这两项现有研究均采用应力约束，以两种候选材料进行设计，并通过基于梯度的优化求解设计问题。尽管数值结果显示碳排放有所减少，但两种情况下得到的结构都很复杂，难以实现。事实上，众所周知，可施工性问题是阻碍执业结构工程师采用结构优化的一大障碍 [27]。因此，本文提出一种拓扑优化框架，在降低多构件、多材料结构隐含碳的同时，明确施加若干现实的可施工性约束。本文将构件定义为其行为特征不仅由材料属性所决定的结构杆件。例如，钢缆只能承受拉力，尽管钢材本身具有非零的抗压强度。

本项工作聚焦于采用Dorn等人 [28]提出的地面结构法进行低碳桁架设计。该方法非常适用于大型结构的拓扑优化 [29] ，并且已证明，在设计受到可施工性要求高度约束的情况下 [30], ——土木工程建设中通常如此——其表现优于基于连续体的拓扑优化。可建造性的正式定义指出：“可建造性是在规划、设计、采购和现场作业中最优地运用建筑施工知识与经验，以实现项目总体目标” [31]。在设计阶段，可建造性要求在设计中考虑简洁性、劳动力技能和可获得性等问题 [32]。本文中，优化设计的可建造性被认为受以下因素影响：（i）设计在建筑施工前所需后处理的程度，以及（ii）结构布局的复杂度。在本研究中，后者主要通过结构节点的复杂度来评估，连接许多杆件的节点被视为具有更高的复杂度。此外，连接构件之间的角度也会影响结构复杂度，因为连接少量杆件的节点，可能比连接更多杆件但角间距更大的节点更为复杂。连接单元的数量以及角间距既可由计划采用的节点制造工艺（例如钢接头的铸造相对于焊接或螺栓连接）决定，也可由材料选择决定。图1分别展示了土木基础设施中钢材与木材的两种连接。在图1a中，一座大型钢桁架将摩天大楼的重量传递至位于纽约曼哈顿270 Park Ave的基础。尽管该节点仅连接五根杆件，但由于杆件之间的最小角度约为 $\gamma = 23°$，它看起来仍然复杂。图1b所示为莫伊尼汉连接桥（同样位于纽约曼哈顿）。这是一座大截面木材人行桥，其结构节点最多连接七个单元。然而，由于最小角间距为 $\gamma = 45°$，这些节点看起来复杂度较低。

先前的研究已从不同方面探讨了单材料桁架拓扑优化结构的可建造性。大多数工作致力于通过仅使用市售标准截面来求解所谓的离散桁架拓扑优化问题，从而在规划施工时明确消除后处理需求。读者可参阅 Stolpe [33] ，以全面了解该主题。其他改进可建造性概念的工作包括 Asadpoure 等人 [34] ，他们将单杆成本考量加入目标函数，使设计者能够在将桁架复杂度定义为优化设计中杆件数量时隐式限制其复杂度。Torii 等人 [35] 扩展了这一思路，将复杂度定义为最终设计中杆件和节点的数量。这两种方法都依赖于非线性目标函数形式，并需要最终的后处理步骤来强制结构构件达到最小尺寸。Asadpoure 等人 [36] 提出，可通过引入一组额外的设计变量来消除这一最终后处理步骤，这些设计变量被鼓励取接近 0–1 的值。这些设计变量表示某根杆件在最终解中是否处于激活状态（接近 1 时），并使设计者能够明确设定横截面积的下限。Lu 和 Xie [37] 也



(a) (b)

图1：建筑与土木基础设施中现有复杂桁架节点的示例。(a) 展示了位于纽约 270 Park Avenue 一栋摩天大楼底部、连接五根大型构件的钢节点。(b) 展示了同样位于纽约曼哈顿的莫伊尼汉连接桥，这是一座大规模木材人行桥，每个节点最多连接七根杆件。

着手解决降低结构复杂度的问题，但采用一种新的、扩展的后处理技术，利用聚类来避免出现多种不同的横截面和长度。

近年来，研究人员开始通过桁架的节点来评估其结构复杂度。Lee等人 [38] 建议以节点力需求的变化来量化空间桁架的复杂度。Van Mellaert等人 [39] 采用混合整数线性规划（混合整数线性规划）公式，为具有固定节点连接关系的平面钢桁架尺寸设计问题设置节点复杂度约束。他们采用欧洲规范中的节点约束，并表明，将节点复杂度纳入考量可省去后处理步骤，并使总体材料消耗减少 15%。历史上，桁架拓扑优化很少采用混合整数线性规划公式，因为这类问题通常更难求解，所需计算资源也多于基于梯度的方法 [40]。然而，近年来高级求解器取得了显著进展 [41], ，推动了研究兴趣的增长。若干研究提出了在应力约束 [42], [43], [44], [45], [46]下实现单材料设计最小重量的公式。后续研究建议将屈曲约束 [47], [48] 纳入考量，并将经典柔顺度设计问题表述为混合整数线性规划问题 [49]。近期研究采用混合整数线性规划公式进行基于地面结构的拓扑优化，以纳入增材制造约束 [30], [40]。与本文最相关的是 Fairclough 和 Gilbert [50] 的研究，他们利用混合整数线性规划公式，将节点复杂度约束的理念拓展至单材料桁架拓扑优化。他们的公式允许设计者限制结构中的节点数量，和／或相连杆件之间的最小角度。

将混合整数线性规划桁架拓扑优化扩展到具有多种离散构件（或材料）选项的设计情形，相关研究主要集中于张拉整体结构框架。张拉整体结构的特点是其内部力流遵循Snelson定义的“间断受压、连续受拉”原则 [51]。由此得到的结构通常呈现为索网与“悬浮”的受压撑杆组合。为通过桁架拓扑优化实现张拉整体，Ehara和Kanno [52] 引入一组新的离散（严格为0–1）设计变量，用以判定杆件属于受拉还是受压构件（缆索或撑杆）。随后，Kanno [53] 将外荷载作用下离散截面积的设计问题重新表述为混合整数线性规划，并纳入柔顺度、应力和张拉整体约束。之后，Kanno进一步考虑自重 [54], 以及对杆件长度的约束，以促进所得结构解的对称性 [55]。Liu和Paulino [56] 提出一种混合整数线性规划公式，通过最大化自平衡力之和，隐式地促使相连杆件在节点处形成更大的角度。Xu和Wang的研究考虑了不同的离散横截面尺寸，并在混合整数线性规划中纳入屈曲、大变形和整体稳定性约束 [57], [58], [59]。这些作者还进一步在主动张拉整体设计的混合整数非线性规划（MINLP）公式中考虑非线性项和约束 [60]。Nanayakkara等人 [61] 提出了一种简化的张拉整体桁架拓扑优化方法，在后处理步骤中处理自应力荷载工况。据作者所知，Nanayakkara等人 [61] 率先提出了一种张拉整体混合整数线性规划公式，允许最终设计采用不同的连续变量横截面积。然而，该公式并未考虑

优化阶段的预应力。

借鉴张拉整体拓扑优化的思路，本文显著拓展了低碳桁架拓扑优化的最新研究成果。本研究支持采用多种离散构件类型或材料进行设计，同时 明确施加节点复杂度方面的可施工性约束。这使结构设计师能够确定具有变截面的低碳可建造设计方案。为避免后处理，可为每种构件类型指定可建造横截面积的最小尺寸。设计者还可以明确约束相连杆件之间的最小角度以及 每个节点处相连杆件的数量。为展示所提方法的通用性，本文还将其扩展应用于多构件张拉整体结构的低碳设计。

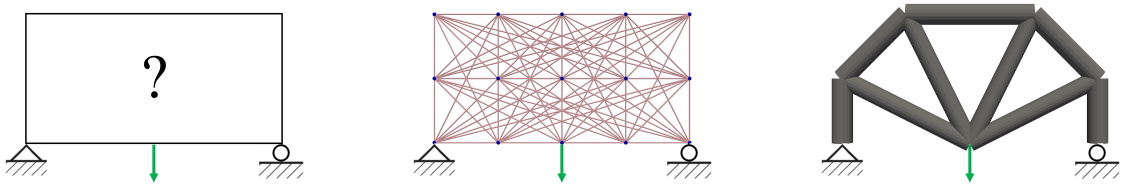
2 方法

如前所述，本研究采用 Dorn 等人 [28] 提出的地面结构法，设计能够使结构隐含碳最小化的桁架拓扑。本文采用 De Wolfe等人 [4] 提出的以下简单关系来量化环境性能：

$$Embodied\ Carbon = \sum_j Q_j C_j \tag{1}$$

根据公式（1），隐含碳通过对所用结构材料求和计算，其中， Q_j 是材料 j的用量， C_j 是特定地点的隐含碳系数。本文以体积衡量材料用量，而隐含碳系数通常以单位体积的 CO_2e（CO_2 当量）表示。本研究计算隐含碳时，仅纳入设计上部结构中结构构件从摇篮到大门的碳排放贡献。因此，不计入施工机械的碳排放、结构连接的制造以及基础的碳排放。维护和维修以及报废处置的碳影响也未纳入计算。

地面结构法要求用户定义一个包含施加载荷和边界条件的设计域，如图 2a 所示。用户还必须定义节点分布和候选桁架杆件。本研究采用全连接网格，将设计空间中的每个节点与其他所有节点相连，如图 2b 所示。这使设计算法在选择最优设计时拥有最大的自由度，但可能导致地面结构中出现重叠杆件。为避免最终解中出现重叠杆件，本研究从地面结构中移除重叠杆件，同时减少了优化问题中的设计变量数量。构建网格后，将求解一个广义尺寸优化问题，其中候选杆件的面积可以趋近于零，如图 2c 所示。



(a) (b) (c)

图 2：拓扑优化中地面结构法的示例。(a) 展示了用户定义的设计空间，其中包含施加载荷和边界条件。(b) 展示了加入一组候选桁架杆件（亦称地面结构）后的设计空间。(c) 展示了最优桁架设计。

2.1 单材料桁架的传统线性问题建模

本文的贡献建立在桁架线性问题最优设计的丰富传统之上。对于单材料桁架，在静力平衡和应力约束下进行截面积连续可变的最小重量设计，并非新问题，自20世纪60年代以来已有大量讨论 [15], [28], [62], [63]。传统的线性问题建模无法考虑每个候选杆件有多种构件或材料选项，也无法纳入可施工性约束。尽管如此，为求完整起见，本文仍作简要介绍。有关内容可参阅几篇关于

如需了解更多详情，请参阅 [64], [65], [66]。桁架单材料低碳设计的线性公式如下：

$$\underset{A_i,\, q_{ih}}{\text{最小化}} \quad \sum_{i=1}^{N} l_i A_i C \tag{2a}$$

$$\text{约束条件为} \quad \sum_{i=1}^{N} B_{ki} q_{ih} = F_{kh} \qquad \forall\, k = 1, \ldots, N^F,\ \forall\, h = 1, \ldots, L^C \tag{2b}$$

$$q_{ih} \le A_i \sigma^t \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N,\ \forall\, h = 1, \ldots, L^C \tag{2c}$$

$$q_{ih} \ge -A_i \sigma^c \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N,\ \forall\, h = 1, \ldots, L^C \tag{2d}$$

$$A_i \le A^{\max} \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N \tag{2e}$$

$$A_i \ge 0 \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N \tag{2f}$$

式 (2) 包含两类变量： A_i，每个候选杆件的横截面积 i；以及 q_{ih}，每个荷载工况 h下各杆件的内力 i 。根据标准符号约定，受压杆件 i 的内力为负值 q_{ih}，而受拉杆件的内力为正值 q_{ih}。这两类设计变量均以 i 为索引，取值范围为 1 至 N，其中 N 表示地面结构中的候选桁架杆件总数。力变量还以 h 为索引，取值范围为 1 至 L^C，其中 L^C 表示地面结构所承受的荷载工况总数。式 (2a) 中的目标函数通过将杆件长度 l_i与该杆件的横截面积及其所用材料的隐含碳系数相乘，从而使结构的总隐含碳最小化。由于这一公式只能考虑一种材料，因此隐含碳只是结构重量按比例换算后的数值。

通过约束式 (2b) 强制满足结构平衡，该式确保桁架杆件内力之和 q_{ih} 等于外加载荷 F_{kh}。此处， k 对结构自由度进行索引，其范围为 1 到总自由度数 N^F。对于平面桁架，每个杆件在每个节点处有两个自由度；而三维桁架杆件在每个节点处有三个自由度。在式 (2b) 中，将内力与平衡矩阵 B_{ki} 中的元素相乘，使内力与外力达到平衡。平衡矩阵是初始地面结构几何形状的一种属性，它将每个杆件的内力投影到全局自由度上。关于 B_{ki} 的构造方法的完整说明，请参阅 He 等人 [64]。

式（2）中的线性桁架设计问题还受到式（2c）和式（2d）的约束，这两式为每个候选桁架构件设定了压应力和拉应力限值 i。对于桁架，杆件内的应力按 $\sigma_{ih} = q_{ih}/A_i$ 计算。为确保杆件所受应力不超过其材料的屈服点 σ^y，本文引入安全系数 φ ，以降低最大应力。因此，压应力和拉应力限值分别取为 $\sigma^c = \varphi\sigma^{y,\,c}$ 和 $\sigma^t = \varphi\sigma^{y,\,t}$。对于多材料和超静定设计，该安全系数还将在修正由 McCormick 约束放宽的力时提供误差裕度，后文将对此进行讨论。

最后，式（2）中的横截面积设计变量受式（2e）和式（2f）约束。因此，所有候选杆件的横截面积都可以趋近于零。当某个杆件出现这种情况时，它实际上会在最终设计方案中变为非活动状态。

2.2 混合整数线性问题公式化

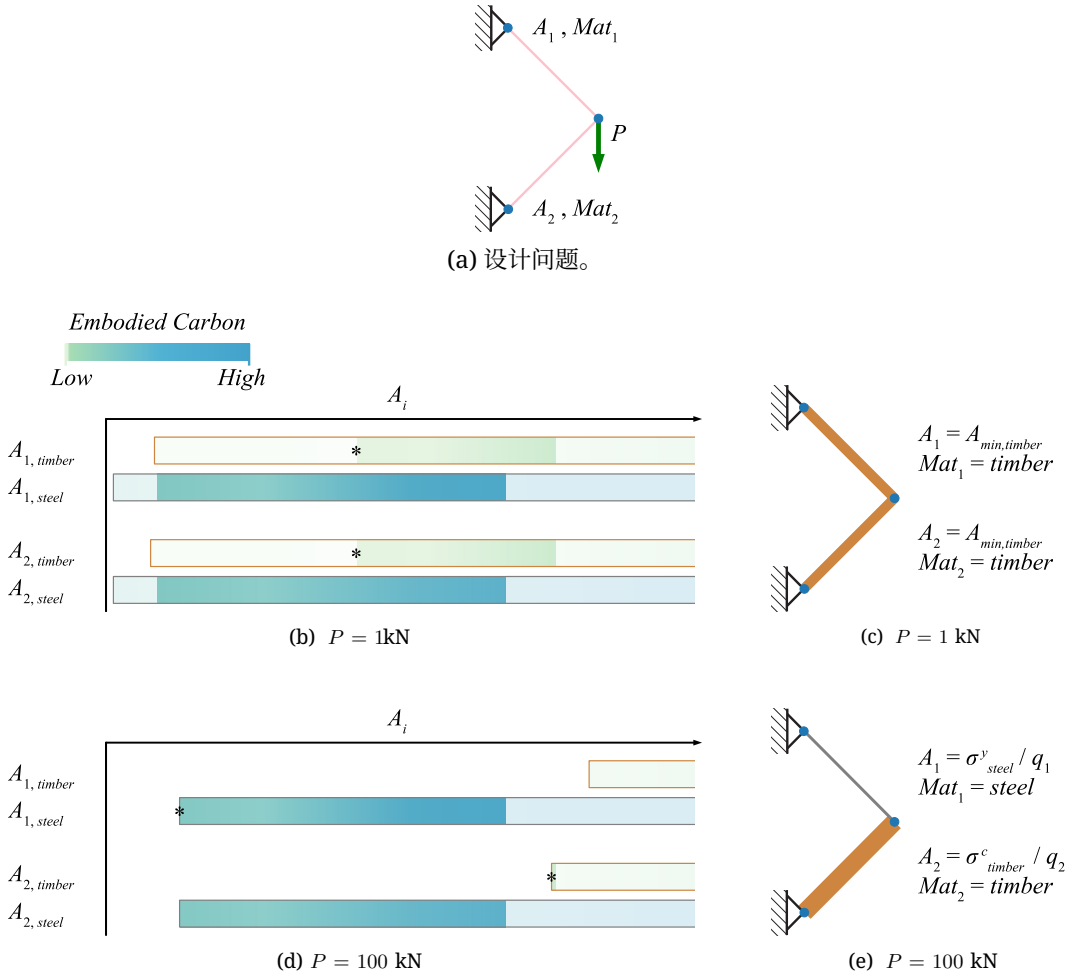
2.2.1 多种构件或材料选项

本研究将式（2）中的隐含碳最小化问题扩展为涵盖所有候选杆件的构件或材料选择。如式（1）所示，且如前所述，考虑多种材料选项会使可建造性、环境因素与结构性能之间的相互作用更加复杂。

图3展示了平面双杆桁架尺寸设计示例中增加的复杂性，其中设计者旨在找到碳排放最低的方案。为简化起见，此处忽略屈曲。每个杆件有两个设计变量：横截面积 A_i，以及由 $j = timber$ 还是 $j = steel$ 制成（图3a）。为便于施工，最小和最大横截面积受限于 $A_{timer}^{\min}$、 $A_{timer}^{\max}$、 $A_{steel}^{\min}$和$A_{steel}^{\max}$。在当前示例中，所有杆件均由圆杆制成；木材和钢材的最小与最大半径分别设为25–45 mm和5–40 mm。桁架构件的设计依据材料的抗压和抗拉屈服应力限值 σ_j^y。此示例使用的数值将在后文表1中给出。因此，横截面积取决于施加载荷 P，且两种材料选项对应的横截面积不同。此外，木材在受拉和受压时适用不同的屈服限值。图3b绘出了 $P = 1$ kN时的隐含碳。沿 y轴，图中分别展示了采用木材和钢材制成的两个桁架构件。横截面积增加

沿 x轴从 $A_i = 0$ mm^2 增加到 $A_i = 60^2\pi$ mm^2。图中的条形表示为满足受压或受拉屈服要求（$A_i = q_i/\sigma_j^y$ ）而设计时可采用的横截面积，其内部的色彩图则显示根据公式（1）计算得出的相应隐含碳。对于违反可施工性限制的设计选项，条形内部的颜色会淡化。符合直觉的是，图3b显示，在 $P = 1$ kN荷载下碳排放最低的设计方案（以星号标示）是两个杆件均采用木材，且 $A_1 = A_2 = A_{timber}^{\min}$ （图3c）。图3d展示了施加载荷增至 $P = 100$ kN时设计选项的变化。对于两个杆件，更高的施加载荷都会增加抵抗屈服所需的面积。正如预期，木材所需面积的增幅大于钢材。现处于受拉状态的杆件一的木材选项，所需横截面积已大于 $A_{timer}^{\max}$。因此，整个$A_{1,\ timer}$ 条形均淡化，表示该选项不可行。因此，杆件1必须采用钢材，其碳影响最低时为 $A_1 = \sigma_{steel}^y/q_1$；而杆件2采用木材仍是碳影响最低的可行方案（图3e）。

受单材料张拉整体设计理念的启发，本研究通过构建一种显式最小化隐含碳的新型混合整数线性规划问题，解决构件或材料选择问题。因此，本研究扩展了线性问题，使每个候选杆件都可以由 M 多个构件选项中的一种制成。这些选项指的是应力限值不同的结构构件，其差异可能源于材料不同，



(a) 设计问题。

(b) $P = 1$kN

(c) $P = 1$ kN

(d) $P = 100$ kN

(e) $P = 100$ kN

图3：针对(a)中所示问题的双杆件尺寸设计与材料选择示例。设计选项和最低碳方案分别见(b-c)中的 $P = 1$ kN情况，以及(d-e)中的 $P = 100$ kN情况。(b)和(d)中的图沿 y轴展示杆件1和杆件2采用木材和钢材时的情况，横截面积沿 x轴增大。杆件表示压溃设计下可能的横截面积，颜色映射表示相应的隐含碳。对于违反设计者可施工性限制的设计选项，杆件内的颜色会淡化。星号表示最低碳设计方案，如(c)和(d)所示。

也可能是由构件类型导致的行为差异。后者的一个例子是钢缆和压杆：压杆能够承受压力荷载，而钢缆则不能。如前所述，除 Nanayakkara等人 [61], 之外，现有关于多构件的文献中，所有以混合整数线性规划形式构建的研究都考虑了采用离散截面积进行设计。本研究不受此限制。此外，现有关于张拉整体拓扑优化的文献仅限于采用 $M = 2$ 单材料构件选项进行设计，而本研究方法则由设计者自行决定选项数量（以及候选材料数量）。为在采用多种构件选项进行设计时实现隐含碳最小化目标，采用以下关系：

$$
\begin{aligned}
&\underset{A_{ij},\, q_{ih},\, z_{ij}}{\text{最小化}} && \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} l_i A_{ij} C_j && && (3a)\\
&\text{约束条件} && \sum_{i=1}^{N} B_{ki} q_{ih} = F_{kh} && \forall\ k = 1,\dots,N^F,\ \forall\ h = 1,\dots,L^C && (3b)\\
& && q_{ih} \le \sum_{j=1}^{M} A_{ij}\sigma_j^t && \forall\ i = 1,\dots,N,\ \forall\ h = 1,\dots,L^C && (3c)\\
& && q_{ih} \ge -\sum_{j=1}^{M} A_{ij}\sigma_j^c && \forall\ i = 1,\dots,N,\ \forall\ h = 1,\dots,L^C && (3d)\\
& && \sum_{j=1}^{M} z_{ij} \le 1 && \forall\ i = 1,\dots,N && (3e)\\
& && A_{ij} \le A_{ij}^{\max} z_{ij} && \forall\ i = 1,\dots,N,\ \forall\ j = 1,\dots,M && (3f)\\
& && A_{ij} \ge 0 && \forall\ i = 1,\dots,N,\ \forall\ j = 1,\dots,M && (3g)\\
& && z_{ij} \in \{0,1\} && \forall\ i = 1,\dots,N,\ \forall\ j = 1,\dots,M && (3h)
\end{aligned}
$$

本文采用的混合整数公式通过引入额外的离散二元（严格取 0–1）变量 z_{ij}，确定最终设计中应包含哪些杆件。当 $z_{ij} = 1$ 时，类型为 j 的单元（或材料）候选杆件 i 将存在于最终设计中。相反，如果 $z_{ij} = 0$，该候选杆件将不会出现在最终解中。相应的横截面积 A_{ij} 则作为连续设计变量。

式 (3) 中的约束与式 (2) 中的传统线性公式大体相似。不过，式 (3f) 中的最大面积约束有了显著修改。它现在变成了连接约束，强制二元决策变量 z_{ij} 判断杆件是否具有非零横截面积 A_{ij}。另一个关键区别是引入了两个约束，即式 (3e) 和式 (3h) 中规定的 z_{ij} 二元条件。加入式 (3e) 是为了确保当 $M \ge 2$ 时，地面结构中的给定杆件仅分配一种材料或构件选项。请注意，当 $M = 1$ 时，本文在式 (3) 中提出的公式与 Fairclough 和 Gilbert [50] 中的公式相同。

协调条件与本构定律——对于单材料设计问题，已知最小化材料体积（和隐含碳）会得到静定解。因此，无需应用协调条件，也无需考虑材料响应。然而，扩展到多材料设计后，优化设计不再必然是静定的。在考虑多种材料或构件选项时，仍可采用单材料设计中使用的弹性—理想塑性材料响应假设。为了确保正确计算静力不定结构的结构内力，必须明确考虑协调条件和本构定律。对于桁架，这些约束定义如下：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N^F} A_{ik}^f u_{kh} = v_{ih} && \forall\ i = 1,\dots,N,\ \forall\ h = 1,\dots,L^C && (4a)\\
&\sum_{j=1}^{M} \left(\frac{E_j A_{ij}}{l_i}\right) v_{ih} = q_{ih} && \forall\ i = 1,\dots,N,\ \forall\ h = 1,\dots,L^C && (4b)
\end{aligned}
$$

这里引入了两个新的设计变量： u_{kh}，每个荷载工况 h下各自由度 k 处的位移；以及 v_{ih}，每个荷载工况 h下各杆件 i 的伸长量。在公式 (4a) 中，运动学矩阵（即平衡矩阵的转置）由 u_{kh}

表示每个杆件 i 和自由度 k对应的元素。在公式 (4b) 的本构关系中，材料 j 的杨氏模量记为 E_j。可以看出，该关系将两个设计变量 A_{ij} 和 v_{ih}相乘，因此公式 (4b) 中的公式将优化问题从线性公式转变为非凸双线性形式。当杆件从预定义截面积库中分配面积时，Xu 等人 [57] 指出了如何重新表述公式 (4b) 以保持线性规划。然而，所提出的重新表述不适用于本文考虑的可变截面积。

本文通过引入 McCormick 包络来近似公式 (4b) 中的本构定律，同时保持线性问题建模，从而实现了对可变截面积设计的扩展。Leyffer 和 Manns 指出，拓扑优化是一种现实应用，可利用 McCormick 包络为混合整数偏微分方程约束优化问题提供紧致松弛 [67]。据作者所知，此前尚未在与本文所研究问题类似的桁架问题中应用 McCormick 包络。本文将 McCormick 包络定义为：

$$q_{ih} \leq \frac{E_j}{l_i}\left(A_{ij}^{\max} v_{ih} + v_{ij}^{\min} A_{ij} - A_{ij}^{\max} v_{ij}^{\min}\right) + \mathcal{M}\left(1 - z_{ij}\right) \quad \forall\, i = 1, \ldots, N,\ \forall\, j = 1, \ldots, M,\ \forall\, h = 1, \ldots, L^C \tag{5a}$$

$$q_{ih} \leq \frac{E_j}{l_i}\left(A_{ij}^{\min} v_{ih} + v_{ij}^{\max} A_{ij} - A_{ij}^{\min} v_{ij}^{\max}\right) + \mathcal{M}\left(1 - z_{ij}\right) \quad \forall\, i = 1, \ldots, N,\ \forall\, j = 1, \ldots, M,\ \forall\, h = 1, \ldots, L^C \tag{5b}$$

$$q_{ih} \geq \frac{E_j}{l_i}\left(A_{ij}^{\min} v_{ih} + v_{ij}^{\min} A_{ij} - A_{ij}^{\min} v_{ij}^{\min}\right) - \mathcal{M}\left(1 - z_{ij}\right) \quad \forall\, i = 1, \ldots, N,\ \forall\, j = 1, \ldots, M,\ \forall\, h = 1, \ldots, L^C \tag{5c}$$

$$q_{ih} \geq \frac{E_j}{l_i}\left(A_{ij}^{\max} v_{ih} + v_{ij}^{\max} A_{ij} - A_{ij}^{\max} v_{ij}^{\max}\right) - \mathcal{M}\left(1 - z_{ij}\right) \quad \forall\, i = 1, \ldots, N,\ \forall\, j = 1, \ldots, M,\ \forall\, h = 1, \ldots, L^C \tag{5d}$$

在公式 (5) 中，常数 $v_{ij}^{\min}$和 $v_{ij}^{\max}$表示每个构件 i 由材料 j制成时的最小和最大允许伸长量。在本文的大部分内容中，这些界限定义为构件在压应力和拉应力限值 σ^c 和 σ^t下保持弹性时的最小和最大允许伸长量。常数 $\mathcal{M}$ 必须足够大，以确保未被选入最终设计、横截面积为零的杆件能够任意变形。由于对此不存在明确的紧致界限，因此难以确定 $\mathcal{M}$ 的精确值，也难以将其作为大 M 约束进行计算实现。因此，公式 (5) 中的约束在计算中以指示约束的形式实现。将其写成指示约束后，可去掉最后的 $\mathcal{M}(1 - z_{ij})$，并且仅当 $z_{ij} = 1$时才激活约束的其余部分。

式 (5) 中的 McCormick包络对杆件的横截面积 (A_{ij})、伸长量 (v_{ih}) 和内力 (q_{ih}) 之间的关系进行了松弛。在以下情况下，它能为所有变量提供精确解：

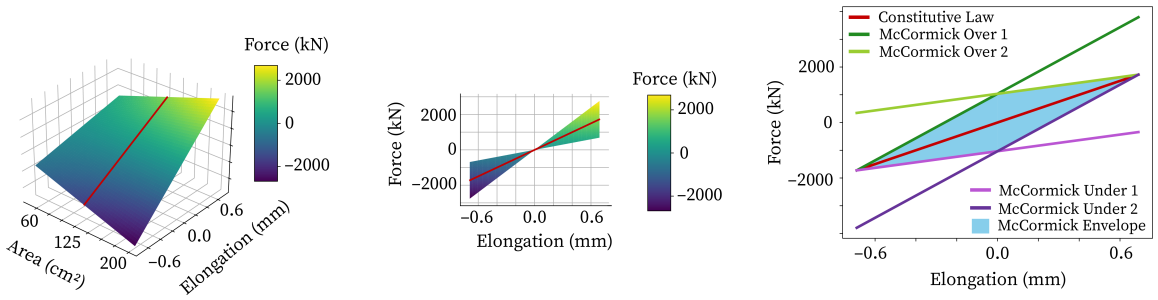
1. 最终设计中的每根杆件，其横截面积均等于面积下界或上界，因为 McCormick包络在极值界限处能提供精确解。
2. 面积下界与上界相等 $\left(A_{ij}^{\min} = A_{ij}^{\max}\right)$。这一特殊情况将杆件的横截面积从变量变为常数，并将非凸双线性本构定律简化为线性函数。这与 Xu 等人采用的公式等价 [57]。3. 优化后的结构为静定结构，且由单一材料制成。

在上述情况之外，McCormick包络仍能为部分变量提供精确解，而其他变量则存在较小误差。由于目标函数直接取决于横截面积，因此假定该变量是准确的。对于多材料静定桁架，由于只可能存在一条荷载路径，单元力始终是精确的。对于单材料结构，所有杆件的刚度相同，因此杆件伸长量是精确的。然而，桁架由多种材料制成时，伸长量可能不准确，因为在相同荷载作用下，它们不再必须成比例变化。这种自由度可能导致存在多个满足协调条件和本构定律的 McCormick松弛、但违反本构定律严格强制执行的运动学可容许解。

当截面积和伸长量的界限更严格时，单元力和伸长量的误差会减小。由于伸长量的界限较小且严格，以保持线弹性，作者发现这种近似通常具有足够的精度。力和伸长量变量中的任何误差，都可以通过后处理步骤，使用优化后的面积重新求解结构来修正。

本文所用 McCormick包络的数值可视化示例见图4。该示例考察与单个杆件相关的变量。这里假设该杆件材料的弹性模量为 $E = 200{,}000$ MPa，长度为 $l = 1$ 米，最小和最大允许伸长量分别为 $v^{\min} = -0.69$ mm 和 $v^{\max} = 0.69$ mm。

图4a展示了三维空间中桁架本构定律的双线性特性。当同时将面积和伸长量视为变量时，图4b表明该集合是非凸的。这是因为存在许多



(a) (b) (c)

图4：本构定律及相应 McCormick 约束的示例可视化。(a) 展示了在桁架本构定律下，所有可行变量值在各自界限内对应的精确曲面。(b) 展示了从力-伸长平面观察同一曲面的效果，其中正面积朝向页面外侧。(a) 和 (b) 中的色彩图均表示相应面积和伸长量下的杆件内力。浅黄色表示较大的拉力，深紫色表示较大的压力。在 $A = 125\ \text{cm}^2$, 处截取曲面的一条切片，如 (a) 和 (b) 中的红线所示。(c) 中以红线绘出了完全相同的切片。此外，还绘出了在 $A = 125\ \text{cm}^2$, 处截取的全部四个 McCormick 平面的切片。青绿色高亮区域即为 McCormick 包络。

无法用完全位于该集合内部的直线段连接的点。然而，当面积或伸长量变量之一保持不变时，如 $A = 125\ \text{cm}^2$, 处的红色直线切片所示，剩余变量与力之间的关系是线性的。

图4c 展示了在 $A = 125\ \text{cm}^2$处截取的四个 McCormick 约束平面切片。绿色的两个上估计器分别对应式 (5a) 和 (5b)。紫色的两个下估计器分别对应式 (5c) 和 (5d)。青绿色高亮区域内的任意点都属于 McCormick 包络。红色曲线绘出了 $A = 125\ \text{cm}^2$ 时本构定律的精确关系。显然，McCormick 包络所产生的方案无需严格遵循本构定律。若要在严格强制执行本构定律的条件下满足可行性，结果必须恰好落在红线上。由于 McCormick 包络中包含许多不在红线上的点，优化器可以自由选择其中任意一点作为“可行”的力值，尽管这些值并不符合物理实际。然而可以看出，靠近变量界限时，这些误差较小。观察图4c中沿纵轴绘出的力值可知，McCormick 上估计器和下估计器直线在伸长量的最小值和最大值附近与本构定律最为接近。在变量界限处（即精确的最小值和最大值），McCormick 包络恰好与本构定律重合，从而得到精确结果。因此，设置紧致的变量界限是确保 McCormick 包络精度的一种有效方法。

公式（6）概述了用于封装多种材料选项的完整混合整数线性公式。该公式考虑了相容性，以及对本构定律的 McCormick 松弛。

$$\underset{A_{ij},\, q_{ih},\, u_{kh},\, v_{ih},\, z_{ij}}{\text{最小化}} \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} l_i A_{ij} C_j \tag{6a}$$

约束条件为

$$\sum_{i=1}^{N} B_{ki} q_{ih} = F_{kh} \qquad \forall\ k,\ \forall\ h \tag{6b}$$

$$\sum_{k=1}^{N^F} A^f_{ik} u_{kh} = v_{ih} \qquad \forall\ i,\ \forall\ h \tag{6c}$$

$$q_{ih} \le \frac{E_j}{l_i}\left(A^{\max}_{ij} v_{ih} + v^{\min}_{ij} A_{ij} - A^{\max}_{ij} v^{\min}_{ij}\right) + \mathcal{M}\left(1 - z_{ij}\right) \qquad \forall\ i,\ \forall\ j,\ \forall\ h \tag{6d}$$

$$q_{ih} \le \frac{E_j}{l_i}\left(A^{\min}_{ij} v_{ih} + v^{\max}_{ij} A_{ij} - A^{\min}_{ij} v^{\max}_{ij}\right) + \mathcal{M}\left(1 - z_{ij}\right) \qquad \forall\ i,\ \forall\ j,\ \forall\ h \tag{6e}$$

$$q_{ih} \ge \frac{E_j}{l_i}\left(A^{\min}_{ij} v_{ih} + v^{\min}_{ij} A_{ij} - A^{\min}_{ij} v^{\min}_{ij}\right) - \mathcal{M}\left(1 - z_{ij}\right) \qquad \forall\ i,\ \forall\ j,\ \forall\ h \tag{6f}$$

$$q_{ih} \geq \frac{E_j}{l_i}\left(A_{ij}^{\max} v_{ih} + v_{ij}^{\max} A_{ij} - A_{ij}^{\max} v_{ij}^{\max}\right) - \mathcal{M}\,(1 - z_{ij}) \qquad \forall\, i,\, \forall\, j,\, \forall\, h \qquad (6g)$$

$$q_{ih} \leq \sum_{j=1}^{M} A_{ij}\sigma_j^t \qquad \forall\, i,\, \forall\, h \qquad (6h)$$

$$q_{ih} \geq -\sum_{j=1}^{M} A_{ij}\sigma_j^c \qquad \forall\, i,\, \forall\, h \qquad (6i)$$

$$\sum_{j=1}^{M} z_{ij} \leq 1 \qquad \forall\, i \qquad (6j)$$

$$A_{ij} \leq A_{ij}^{\max} z_{ij} \qquad \forall\, i,\, \forall\, j \qquad (6k)$$

$$A_{ij} \geq 0 \qquad \forall\, i,\, \forall\, j \qquad (6l)$$

$$z_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall\, i,\ \ \forall\, j \qquad (6m)$$

2.2.2 可施工性约束

混合整数公式的优势在于能够纳入高度具体的设计约束。因此，本文的公式允许设计者控制与可建造性相关的多个方面。具体而言，通过明确应用最小横截面积要求，消除了对毛发状细构件进行后处理的需要。此外，还对最终设计中节点的复杂性进行多方面控制。

最小横截面积要求 — 正如 Asadpoure 等人 [36], 所讨论的，可建造性的一项关键实际要求是：最终设计中出现的杆件必须达到最小尺寸。不同材料和不同类型的单元，其最小尺寸通常各不相同。例如，钢制杆件可以比木制杆件制造得更小，而缆索通常也可以比杆件做得更小。这项要求意味着，如果候选杆件 i 属于类型 j 且处于激活状态（$z_{ij} = 1$），那么其横截面积应大于某个规定限值。Asadpoure 等人 [36] 提出了一种方法，可消除非线性连续桁架拓扑优化问题中的丝状单元。与之不同，本文提出了一组新颖的方程，可在混合整数线性规划桁架拓扑优化问题中实现最小面积要求。

图5展示了本文所采用的方法如何应用于仅含一根钢制杆件的桁架结构。图5a展示了横截面积所需的跳跃不连续性。如果候选杆件不存在于最终设计中（$z_{1,\ steel} = 0$），则应将其横截面积设为零（$A_{1,\ steel} = 0$）。相反，如果候选杆件是最终设计中的有效构件（$z_{1,\ steel} = 1$），则其横截面积必须在$A_{1}^{\min}{}_{,\ steel}$至$A_{1}^{\max}{}_{,\ steel}$的范围内选取。为此，使用两个变量来描述杆件的面积。图5b展示了这两个变量的变化情况。注意，它们都是连续的。这里，$a_{1,\ steel}$称为中间面积，而$A_{1,\ steel}$是设计中采用的最终横截面积。最终横截面积在0至$A_{1}^{\max}{}_{,\ steel}$之间连续变化，而中间面积在$A_{1}^{\min}{}_{,\ steel} \leq a_{1,\ steel} \leq A_{1}^{\max}{}_{,\ steel}$之间变化。式（7）中的线性关系集合旨在为图5中的单根钢制杆件示例构建最小面积约束：

$$A_{1,\,steel} \leq A_{1,\,steel}^{\max} z_{1,\,steel} \qquad (7a)$$

$$A_{1,\,steel} \geq a_{1,\,steel} - A_{1,\,steel}^{\max}\,(1 - z_{1,\,steel}) \qquad (7b)$$

$$A_{1,\,steel} \geq 0 \qquad (7c)$$

$$a_{1,\,steel} \leq A_{1,\,steel}^{\max} \qquad (7d)$$

$$a_{1,\,steel} \geq A_{1,\,steel}^{\min} \qquad (7e)$$

连续中间面积$a_{1,\,steel}$由式(7d)和式(7e)界定。连续最终横截面积$A_{1,\,steel}$可根据式(7a)和式(7c)在0与$A_{1}^{\max}{}_{,\,steel} z_{1,\,steel}$之间变化。这确保了：若钢材杆件1在最终设计中处于非活动状态（$z_{1,\,steel} = 0$），则最终横截面积被强制为零（$0 \leq A_{1,\,steel} \leq 0$）。相反，若钢材杆件1在最终设计中处于活动状态（$z_{1,\,steel} = 1$），则最终横截面积的上界为非零，并取用户指定值 $A_{steel}^{\max}$。$A_{1,\,steel}$ 的下界由式(7b)改变，使得$A_{1,\,steel} \geq a_{1,\,steel} \geq A_{1}^{\min}{}_{,\,steel}$，从而按预期将最终横截面积推至最低要求之上。

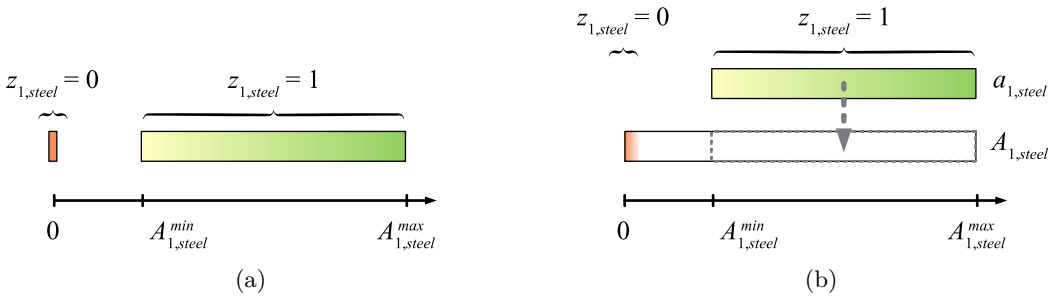


图5：以单根钢杆为例，说明如何通过定义两个设计变量，将最小面积要求纳入最终设计中处于激活状态的单元。所需的横截面积跳跃不连续性如(a)所示。(b)展示了中间面积$a_{1,\,steel}$与最终横截面积$A_{1,\,steel}$如何组合以实现所需要求。$a_{1,\,steel}$与$A_{1,\,steel}$均连续变化。

限制节点连接的复杂性 — 拓扑优化桁架方案可施工性的一个同样重要的限制因素是节点的复杂性。在本研究中，节点的复杂性既由其所连接的单元数量决定，也由这些单元之间的角度决定。

图6说明了在二维地面结构中一个节点的两个示例里，相连杆件之间的角度如何影响节点复杂度。在这两个示例中，该节点均连接16根候选桁架杆件，其中仅有四根作为单元出现在最终设计中。在图6a中，四根选定的设计构件以相对较小的角度相连，其中最小角度仅为 $\gamma = 19°$。当单元之间具有足够大的角度时，结构连接通常更易于设计。图6b中的示例即属此类，其连接中构件之间的最小夹角为 $\gamma = 67°$。在本研究中，该足够大的角度是一个用户定义的参数，可根据给定项目的具体可施工性要求进行调整。

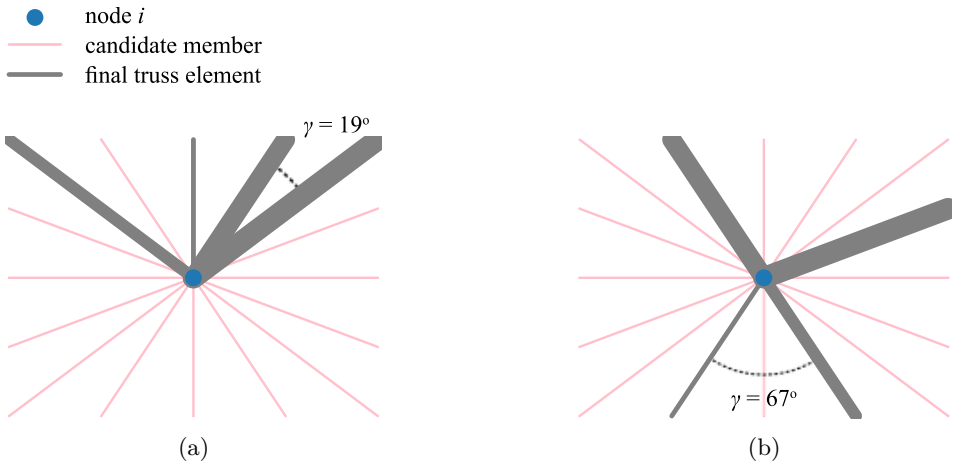


图6：根据杆件分离角说明接头复杂性示意图。(a) 和 (b) 均展示了由4根杆件组成的连接。(a) 中所示的节点由于连接构件之间的分离角较小，被认为建筑施工难度更高；而 (b) 中所示的节点由于连接构件之间的分离角较大，被认为建筑施工难度较低。

本文提出了一种约束形式，使设计工程师能够指定连接到节点的单元数量，以及连接单元之间的夹角。据作者所知，尽管 Fairclough 和 Gilbert [50] 提出了用于限制连接单元夹角的约束，但尚无研究直接将连接到一个节点的杆件总数限制为指定值。为此，本文定义了一个预分配节点约束矩阵，其元素为 n_{pi}。节点约束矩阵包含二进制信息，用于映射候选桁架杆件与设计空间中各个 N^{NP} 节点之间的连接关系。如果节点 p 是杆件 i的一个节点，则 $n_{pi} = 1$。如果节点 p 未与杆件 i相连，则 $n_{pi} = 0$。

简单地面结构中，节点约束矩阵 n_{pi} 的每个条目对应的一种建筑施工示例，见图 .

7 如式（8）所示。该地面结构由四个节点和六个候选杆件组成。因此，节点约束矩阵的大小为 4×6。在节点 1 处，候选杆件 1、2 和 3 与该节点相连。这意味着 $n_{1,\ 1} = n_{1,\ 2} = n_{1,\ 3} = 1$。由于没有其他候选杆件连接到该节点，因此第 1 行的其余元素均填入零（$n_{1,\ 4} = n_{1,\ 5} = n_{1,\ 6} = 0$）。通过遍历地面结构中的节点 2–4，并在对应相连候选杆件的列中赋值 1，即可填入 n_{pi} 第 2–4 行的元素。

$$n_{pi} = \begin{array}{c} \\ p=1 \\ p=2 \\ p=3 \\ p=4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} i=1 & i=2 & i=3 & i=4 & i=5 & i=6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{8}$$

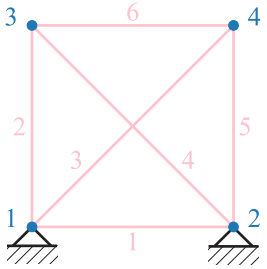


图 7：用于展示节点约束矩阵和关系约束矩阵中各项构造方式的简单地面结构，n_{pi} 分别见公式 (8) 和 Γ_{xi} 公式 (12)。

节点约束矩阵的构造使公式 (9) 中提出了一种新颖的约束，用于限制连接到节点 p 的单元数量：

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} n_{pi} z_{ij} \leq \eta_p^{\max} \qquad \forall\ p = 1, \ldots, N^{NP} \tag{9}$$

其中，$\eta_p^{\max}$是设计者允许连接到一个节点的单元最大数量 p。

连接到一个节点的杆件数量也可能取决于构件或材料。例如，数量较多的小型钢缆构件汇聚到同一点或许是可行的。然而，大型木材截面则不能如此。若要按构件或材料控制连接到节点 p 的杆件总数，可对公式 (9) 中的约束稍作修改：

$$\sum_{i=1}^{N} n_{pi} z_{ij} \leq \eta_{pj}^{\max} \qquad \forall\ p = 1, \ldots, N^{NP},\ \forall\ j = 1, \ldots, M \tag{10}$$

请注意，公式 (9) 和 (10) 几乎相同，区别在于公式 (10) 针对每种构件类型 j 分别应用，而不是对 M 构件类型求和。

为确保结构中的所有节点都满足节点约束，必须防止地面结构中的相交杆件在最终设计中共存。图 7 展示了相交杆件的一个示例：候选杆件 3 和 4 在地面结构中部交叉，而该处未定义节点。先前的研究表明，对于此问题，采用混合整数公式可以轻松防止一组相交杆件共存，方法是确保最终设计中最多只存在其中一个。通常的做法是，为设计空间中每一对相交的杆件生成一个约束 [50], [53], [48]。

本研究不再添加用于标识哪些杆件不能同时存在的约束对，而是提出一种防止杆件相交的新公式。通过在预先分配的对称关系矩阵 Γ_{xi} 中生成条目，标识所有相交杆件的集合，从而避免杆件相交。这减少了问题中的约束总数，但与先前文献 [50] 中定义的问题构建相比，问题构建可能更宽松。问题构建较宽松可能导致计算时间更长。不过，这种关系矩阵的构建方式更容易扩展到杆件之间更复杂的存在关系。第 2.2.4 节将结合张拉整体结构的应用对此进行更详细的讨论。本文采用的公式定义于

式 (11) 中。这里， x 和 i 的取值范围均为 1 到 N，其中 N 是地面结构中候选杆件的总数。

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\Gamma_{xi}z_{ij} \le \Gamma_{xx} \qquad \forall\, x = 1, \dots, N \tag{11}$$

式（12）给出了图7中简单地面结构的关系矩阵 Γ_{xi}各项的构造示例。该关系矩阵是一个 $N \times N$矩阵，在候选杆件可以共存的位置填入零。若某候选杆件与地面结构中另一根杆件在未定义节点处相交，则赋值为1。对角元素（Γ_{xi} 其中 $i = x$）被设为等于该行所有其他元素之和（$\Gamma_{xx} = \sum_{i=1}^{N}\Gamma_{xi}$）。在图7的示例中，候选杆件 $x = 1$ 和 $x = 2$ 不与任何其他杆件相交。因此，前两行中的元素 Γ_{xi} 保持为零。若单元1在最终解中处于激活状态（$z_{1,\,j} = 1$），则式（11）表明，无论其他 z_{ij} 变量取何种0–1值， $\sum_{i=1}^{N}\Gamma_{xi}z_{ij} = 0 \le 0$ 均成立。由于该约束得到满足，单元1与其他候选杆件的共存因此不受限制。相比之下，候选杆件 $x = 3$ 和 $x = 4$ 相交，不能共存。因此，在关系矩阵的第 $x = 3$ 行中，第 $i = 4$ 列放置1（$\Gamma_{3,\,4} = 1$）。同样，在第 $x = 4$行、第 $i = 3$ 列放置1（$\Gamma_{4,\,3} = 1$），从而使关系矩阵对称。第3行和第4行的元素之和均为1，因此对角元素为$\Gamma_{3,\,3} = \Gamma_{4,\,4} = 1$。这可防止候选杆件3和4同时处于激活状态（$z_{3,j} = z_{4,j} = 1$），因为式（11）将对 $x = 3$ 和 $x = 4$都给出无效的 $\sum_{i=1}^{N}\Gamma_{xi}z_{ij} = 1 + 1 \le 1$。

$$\Gamma_{xi} = \begin{array}{c} \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=4 \\ x=5 \\ x=6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} i=1 & i=2 & i=3 & i=4 & i=5 & i=6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{12}$$

该公式的优点在于，对于任何涉及多个候选杆件之间关系的可建造性约束，都可以生成关系矩阵 Γ_{xi} 中的各项。需要考虑多个关系约束时，只需更新各项 Γ_{xi}，无论考虑多少个关系约束，约束总数都保持不变。

一个例子是实现基于杆件之间角度关系的约束。可以更新关系矩阵 Γ_{xi} 中的各项，在防止杆件相交的同时，确保连接构件之间的角度足够大。正如前文所述，以往研究也曾确保连接构件之间具有较大的角度 [50]。然而，这种方法是比较成对的杆件，而不是将一个杆件与所有其他杆件进行比较。

式（13）给出了图 7 中简单地面结构的关系矩阵构造示例，用于防止杆件相交以及角度小于 $\gamma^{\min} = 50°$。首先，将式（12）中的关系矩阵作为基准，以防止杆件相交。接下来，检查所有仍为零的索引，判断相应角度是否允许共存。对于杆件 $x = 1$，杆件 $i = 3$ 和 $i = 4$ 之间的角度均为 $\gamma = 45°$。由于该角度小于规定值 $\gamma^{\min} = 50°$，因此当杆件 3 或 4 处于激活状态时，候选杆件 1 不能处于激活状态。因此，将第 $x = 1$ 行第 $i = 3$ 列和第 $i = 4$ 列中的零替换为 1（$\Gamma_{1,\ 3} = \Gamma_{1,\ 4} = 1$）。由于杆件 $i = 2$ 和 $i = 5$ 与杆件 $x = 1$ 相连，且夹角为 $90°$，因此第 $i = 2$ 列和第 $i = 5$ 列中的项仍为 0（$\Gamma_{1,\ 2} = \Gamma_{1,\ 5} = 0$）。最后，杆件 $i = 6$ 与杆件 $x = 1$ 不相连，因此无需检查是否存在潜在的角度冲突。其余各行也按相同方式填入。对角线上的值初始化为零，并更新为该行各项之和。

$$\Gamma_{xi} = \begin{array}{c} \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=4 \\ x=5 \\ x=6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} i=1 & i=2 & i=3 & i=4 & i=5 & i=6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \tag{13}$$

含可施工性约束的混合整数线性规划公式 — 综上所述，本研究构建了一个桁架拓扑优化问题，在采用可施工性约束的同时，通过使用多个构件选项来最小化隐含碳。完整的问题构建如下：

$$\underset{A_{ij},\, a_{ij},\, q_{ih},\, u_{kh},\, v_{ih},\, z_{ij}}{\text{最小化}} \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} l_i A_{ij} C_j \tag{14a}$$

满足约束

$$\sum_{i=1}^{N} B_{ki} q_{ih} = F_{kh} \qquad \forall\, k,\, \forall\, h \tag{14b}$$

$$\sum_{k=1}^{N^F} A_{ik}^{f} u_{kh} = v_{ih} \qquad \forall\, i,\, \forall\, h \tag{14c}$$

$$q_{ih} \le \frac{E_j}{l_i}\left(A_{ij}^{\max} v_{ih} + v_{ij}^{\min} A_{ij} - A_{ij}^{\max} v_{ij}^{\min}\right) + \mathcal{M}\left(1 - z_{ij}\right) \qquad \forall\, i,\, \forall\, j,\, \forall\, h \tag{14d}$$

$$q_{ih} \le \frac{E_j}{l_i}\left(A_{ij}^{\min} v_{ih} + v_{ij}^{\max} A_{ij} - A_{ij}^{\min} v_{ij}^{\max}\right) + \mathcal{M}\left(1 - z_{ij}\right) \qquad \forall\, i,\, \forall\, j,\, \forall\, h \tag{14e}$$

$$q_{ih} \ge \frac{E_j}{l_i}\left(A_{ij}^{\min} v_{ih} + v_{ij}^{\min} A_{ij} - A_{ij}^{\min} v_{ij}^{\min}\right) - \mathcal{M}(1 - z_{ij}) \qquad \forall\, i,\, \forall\, j,\, \forall\, h \tag{14f}$$

$$q_{ih} \ge \frac{E_j}{l_i}\left(A_{ij}^{\max} v_{ih} + v_{ij}^{\max} A_{ij} - A_{ij}^{\max} v_{ij}^{\max}\right) - \mathcal{M}(1 - z_{ij}) \qquad \forall\, i,\, \forall\, j,\, \forall\, h \tag{14g}$$

$$q_{ih} \le \sum_{j=1}^{M} A_{ij} \sigma_j^{t} \qquad \forall\, i,\, \forall\, h \tag{14h}$$

$$q_{ih} \ge -\sum_{j=1}^{M} A_{ij} \sigma_j^{c} \qquad \forall\, i,\quad \forall\, h \tag{14i}$$

$$\sum_{j=1}^{M} z_{ij} \le 1 \qquad \forall\, i \tag{14j}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} n_{pi} z_{ij} \le \eta_p^{\max} \qquad \forall\, p \tag{14k}$$

$$\sum_{i=1}^{N} n_{pi} z_{ij} \le \eta_{pj}^{\max} \qquad \forall\, p,\, \forall\, j \tag{14l}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \Gamma_{xi} z_{ij} \le \Gamma_{xx} \qquad \forall\, x \tag{14m}$$

$$A_{ij} \le A_{ij}^{\max} z_{ij} \qquad \forall\, i,\quad \forall\, j \tag{14n}$$

$$A_{ij} \ge a_{ij} - A_{ij}^{\max}\left(1 - z_{ij}\right) \qquad \forall\, i,\quad \forall\, j \tag{14o}$$

$$A_{ij} \ge 0 \qquad \forall\, i,\quad \forall\, j \tag{14p}$$

$$a_{ij} \le A_{ij}^{\max} \qquad \forall\, i,\quad \forall\, j \tag{14q}$$

$$a_{ij} \ge A_{ij}^{\min} \qquad \forall\, i,\, \forall\, j \tag{14r}$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i,\, \forall\, j \tag{14s}$$

将公式（14）与公式（3）中不含可施工性约束的多组件混合整数线性规划设计构造进行比较，显著的区别在于新增了连续设计变量 a_{ij}。引入这些中间截面积变量，是为了确保所有有效杆件均满足公式（7）中定义的最小截面积约束。公式（14n）、（14o）、（14q）和（14r）对所有 N 候选杆件和所有 M 构件选项施加了最小截面积约束。

通过将连接元素的总数限制为式 (9) 中的 $\eta_p^{\max}$，并将每种构件类型的单元总数限制为式 (10) 中的 $\eta_{pj}^{\max}$，来限制连接复杂度。对于地面结构中的所有 N^{NP} 个节点，这些约束分别应用于式 (14k) 和 (14l)。此外，式 (11) 禁止相交构件共存，也禁止在夹角小于 $\gamma^{\min}$ 的角度处连接的单元共存。该约束作为混合整数线性规划中的约束应用于式 (14m)。

请注意，节点约束矩阵的元素定义为 n_{pi}（见公式 (14k) 和 (14l)），关系矩阵的元素定义为 Γ_{xi}（见公式 (14m)）；这两个矩阵仅取决于地面结构的初始构型。由于它们在优化过程中不会发生变化，因此会在优化过程开始前预先分配。

2.2.3 预应力约束

在各种结构应用中，考虑预应力都很重要，包括张拉整体结构，后文将对此进行更详细的讨论。为纳入预应力，必须更新杆件的总内力，以同时计入外荷载引起的弹性力贡献和初始预应力。其描述如下：

$$q_{ih} = q^e_{ih} + q^0_i \qquad \forall\, i = 1, \dots, N,\ \forall\, h = 1, \dots, L^C \tag{15}$$

方程 (15) 引入了两个新的设计变量：q^e_{ih}，表示每个杆件 i 在每种荷载工况 h 下由施加的外荷载产生的内弹性力；以及 q^0_i，表示每个杆件 i 中的初始预应力。预应力不按每种荷载工况 h 分别索引，因为实际中结构的每个杆件只能施加一个预应力。值得注意的是，每个杆件中的弹性力正是此前由方程 (5) 中的 McCormick包络定义的量。因此，必须对该方程稍作修改，以明确这些界限仅适用于每个杆件中的弹性力。修改后得到以下关系：

$$q^e_{ih} \le \frac{E_j}{l_i}\left(A^{\max}_{ij} v_{ih} + v^{\min}_{ij} A_{ij} - A^{\max}_{ij} v^{\min}_{ij}\right) + \mathcal{M}\left(1 - z_{ij}\right) \quad \forall\, i = 1, \dots, N,\ \forall\, j = 1, \dots, M,\ \forall\, h = 1, \dots, L^C \tag{16a}$$

$$q^e_{ih} \le \frac{E_j}{l_i}\left(A^{\min}_{ij} v_{ih} + v^{\max}_{ij} A_{ij} - A^{\min}_{ij} v^{\max}_{ij}\right) + \mathcal{M}\left(1 - z_{ij}\right) \quad \forall\, i = 1, \dots, N,\ \forall\, j = 1, \dots, M,\ \forall\, h = 1, \dots, L^C \tag{16b}$$

$$q^e_{ih} \ge \frac{E_j}{l_i}\left(A^{\min}_{ij} v_{ih} + v^{\min}_{ij} A_{ij} - A^{\min}_{ij} v^{\min}_{ij}\right) - \mathcal{M}\left(1 - z_{ij}\right) \quad \forall\, i = 1, \dots, N,\ \forall\, j = 1, \dots, M,\ \forall\, h = 1, \dots, L^C \tag{16c}$$

$$q^e_{ih} \ge \frac{E_j}{l_i}\left(A^{\max}_{ij} v_{ih} + v^{\max}_{ij} A_{ij} - A^{\max}_{ij} v^{\max}_{ij}\right) - \mathcal{M}\left(1 - z_{ij}\right) \quad \forall\, i = 1, \dots, N,\ \forall\, j = 1, \dots, M,\ \forall\, h = 1, \dots, L^C \tag{16d}$$

请注意，方程 (5) 与方程 (16) 的唯一区别在于，每个不等式的左侧都经过更新，以明确表示弹性杆件力 q^e_{ih}，而非杆件总力 q_{ih}。

要采用混合整数公式设计预应力结构，必须引入一个额外的二元变量，用于确定杆件是受压还是受拉。也可以对总内力变量 q_{ih} 使用符号函数，但这会使问题变成非线性问题，因此无法作为混合整数线性规划求解。本文定义了一个新的二元设计变量 $z^{(2)}_i$；当 $z^{(2)}_i = 1$ 时，该变量表示杆件受压。该变量通过本文提出的以下约束形式赋予每个候选桁架杆件 i：

$$q_{ih} \le \left(\sigma^t_{\max} A^{\max}_{\max} + \frac{\sigma^t_{\max} A^{\max}_{\max} \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)\left(1 - \varepsilon - z^{(2)}_i\right) \qquad \forall\, i = 1, \dots, N,\ \forall\, h = 1, \dots, L^C \tag{17a}$$

$$q_{ih} \ge -\sigma^c_{\max} A^{\max}_{\max} z^{(2)}_i \qquad \forall\, i = 1, \dots, N,\ \forall\, h = 1, \dots, L^C \tag{17b}$$

其中，所有构件选项中的最大拉应力和压应力限值以及最大允许横截面积定义如下：

$$\sigma^t_{\max} = \max\left\{\sigma^t_j\right\} \tag{18a}$$

$$\sigma^c_{\max} = \max\left\{\sigma^c_j\right\} \tag{18b}$$

$$A^{\max}_{\max} = \max\left\{A^{\max}_{ij}\right\}. \tag{18c}$$

请注意，式（17）中没有 j 索引，因为无论杆件的构件或材料类型如何，杆件受压这一情况都成立。这组不等式确保只有受压杆件的 $z^{(2)}_i$ 才取值为 1。当 $z^{(2)}_i = 1$ 时，式（17）简化为 $-\sigma^c_{\max} A^{\max}_{\max} \le q_{ih} \le -\sigma^t_{\max} A^{\max}_{\max} \varepsilon/(1-\varepsilon)$，其中所有应力和横截面积均为正的常数。该不等式仅在 q_{ih} 为负值、即表示压力时成立。反之，当 $z^{(2)}_i = 0$ 时，这些不等式简化为 $0 \le q_{ih} \le \sigma^t_{\max} A^{\max}_{\max}$。这里，$\varepsilon$ 是一个较小的常数，用于确保零力杆件（$q_{ih} = 0$）对应的二元变量取值为零。本研究中将其设为 1×10^{-6}。这一点很重要，因为大多数候选桁架杆件不会用于最终设计，因此其中的内力为零。

为确保预应力结构在没有外荷载作用时处于自平衡状态，公式（19）被纳入公式中。该方程使用与之前相同的平衡矩阵 B_{ki}。将右侧设为零表示没有外力作用。

$$\sum_{i=1}^{N} B_{ki} q_i^0 = 0 \qquad \forall\ k = 1, \dots, N^F \tag{19}$$

公式（20）也被纳入公式中，以验证每个杆件的预应力是否达到设计者规定的最小值。受压构件按照公式（20a）施加预应力，受拉构件则按照公式（20b）施加预应力。常数 q^{0_c} 和 q^{0_t} 是用户指定的值，分别表示最小受压预应力和受拉预应力。

$$q_i^0 \leq -q^{0_c} z_i^{(2)} + A_{\max}^{\max} \sigma_{\max}^t \left(1 - z_i^{(2)}\right) \qquad \forall\ i = 1, \dots, N \tag{20a}$$

$$q_i^0 \geq \left(q^{0_t} + \sigma_{\max}^c A_{\max}^{\max}\right) \left(\sum_{j=1}^{M} z_{ij} - z_i^{(2)}\right) - \sigma_{\max}^c A_{\max}^{\max} \qquad \forall\ i = 1, \dots, N \tag{20b}$$

预应力过程中需要满足的最后一个条件是防止杆件应力过大。为此，问题构建中纳入了公式（21）。这些约束遵循与公式（2c）和公式（2d）中应力约束相同的逻辑。

$$q_i^0 \leq \sum_{j=1}^{M} A_{ij} \sigma_j^t \qquad \forall\ i = 1, \dots, N \tag{21a}$$

$$q_i^0 \geq -\sum_{j=1}^{M} A_{ij} \sigma_j^c \qquad \forall\ i = 1, \dots, N \tag{21b}$$

更新后的完整问题公式包含所有预应力和张拉整体约束，可见下文一节末尾的公式（27）。

2.2.4 张拉整体约束

为展示当前公式的通用性，我们将问题扩展至低碳张拉整体结构的设计。本文在 Nanayakkara等人 [61] 和 Kanno [55] 的研究基础上，采用三构件库考察变截面。此外，本文所用的实现方式允许将受压构件堆叠起来，只要它们位于同一直线上，即可组成更长的连续杆件。这样做可以通过去除重叠杆件，缩减地面结构的初始规模。

张拉整体的严格定义指出，每个节点最多只能存在一根受压构件，如图8a所示。为了能够在不含重叠候选杆件的简化地面结构上求解，本文提出了一个略作修改的定义。本研究仅在两根受压构件位于同一直线上、因而可以合并为一根更长的单元时，才允许它们在同一节点共存，如图8b所示。在这些连接两根共线受压构件的特殊情况节点处，必须确保不存在其他单元。

为实现这一略有改动的张拉整体定义，创建了一个条目为 $\Gamma_{xi}^{(2)}$ 的新违反关系矩阵。图 9 中简单地面结构的每个条目 $\Gamma_{xi}^{(2)}$ 的构造示例见公式（22）。条目 $\Gamma_{xi}^{(2)}$ 的设置方式类似于公式（11）中为最小角度约束构造条目 Γ_{xi} 的方式。对于单元 x，所有与 x共享一个节点的单元 i，其非对角行条目均设为 1。在当前示例中，单元 $x = 1$ 与单元 $i = 2$、$i = 3$、$i = 4$和 $i = 5$共享一个节点。因此，第 1 行的非对角元素定义为 $\Gamma_{1}^{(2)}{}_{,2} = \Gamma_{1}^{(2)}{}_{,3} = \Gamma_{1}^{(2)}{}_{,4} = \Gamma_{1}^{(2)}{}_{,5} = 1$。若单元 x 与 i 共线，则该条目保持为零，但被标记为重要 $\Gamma_{xi}^{(2)} = 0^*$。单元 $x = 3$ 与 $i = 8$ 即属此情形，因此 $\Gamma_{3}^{(2)}{}_{,8} = 0^*$。这一调整允许两个受压构件在共线时存在于同一节点。对角元素 $\Gamma_{xx}^{(2)}$ 的填充方式与公式（11）中的条目 Γ_{xx} 相同，即对该行中的所有构件求和。

$$\Gamma_{xi}^{(2)} = \begin{array}{c} \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=4 \\ x=5 \\ x=6 \\ x=7 \\ x=8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} i=1 & i=2 & i=3 & i=4 & i=5 & i=6 & i=7 & i=8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0^* \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0^* & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0^* & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0^* & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \tag{22}$$

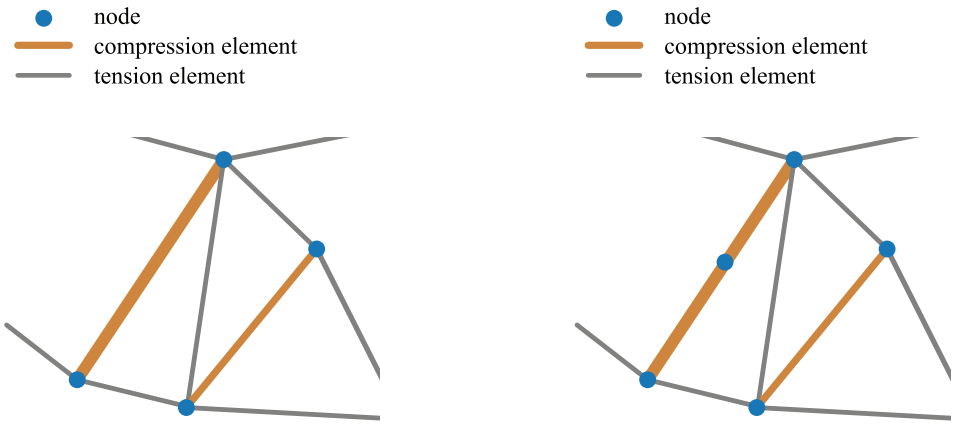


图 8：图示 (a) 传统张拉整体定义，以及 (b) 本文采用的略作修改的张拉整体定义。在传统张拉整体定义中，每个节点只允许有一个受压杆件。本文采用略作修改的定义，允许存在仅包含两个共线受压杆件的特殊情况节点。

在定义条目 $\Gamma^{(2)}_{xi}$ 后，本研究通过以下约束形式确保每个节点仅有一个受压构件，除非该节点是具有两个共线受压杆件的特殊情形节点：

$$\sum_{i=1}^{N} \Gamma^{(2)}_{xi} z^{(2)}_{i} \leq \Gamma^{(2)}_{xx} \qquad \forall\ x = 1, \ldots, N \tag{23}$$

其中，$\Gamma^{(2)}_{xx}$ 是 $\Gamma^{(2)}_{xi}$ 的对角元素。

根据公式（23）中的张拉整体约束，在连接共线受压杆件的特殊情况节点处仍可能存在受拉构件。为避免这种情况，我们在公式中加入了一个新的关系矩阵方程。在此，将两个关系矩阵中的元素分别定义为 J_{gxi} 和 Υ_{gxi}较为方便。每个单元的各节点与其他杆件的连接情况存储在元素 J_{gxi}中，而元素 Υ_{gxi} 描述每个单元的各节点连接了多少其他杆件，以及该节点处是否存在共线杆件。 J_{gxi} 和Υ_{gxi} 中的 g 下标指每个候选杆件的起始节点和末端节点。杆件 x 的起始节点记为 $g = 1$，末端节点记为 $g = 2$。在本文中，所有候选杆件的定义均保证起始节点编号始终小于末端节点编号。

元素 J_{gxi} 的建筑施工（从其作为零矩阵的初始化开始）针对图 9 中的地面结构在公式（24）中加以说明。结构中的杆件 $x = 1$ 在节点 $g = 1$ 处与杆件 $i = 2$ 和 $i = 3$ 相连。因此，$J_{1,1,2} = J_{1,1,3} = 1$ 在公式（24a）中被定义。在杆件 $x = 1$ 另一端的节点 $g = 2$ 处，该杆件与杆件 $i = 4$ 和 $i = 5$ 相连。在公式（24b）中，$J_{2,1,4} = J_{2,1,5} = 1$ 随之被定义。该过程用于所有单元。这种填充模式唯一发生变化的时候，是当两根杆件共用一个节点并落在

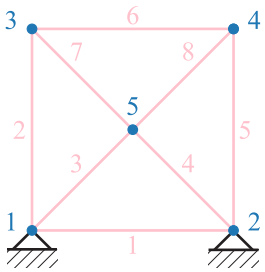


图 9：用于说明张拉整体关系约束矩阵中各项构造的简单地面结构，$\Gamma^{(2)}_{xi}$ 源自公式（22）、J_{gxi} 源自公式（24），Υ_{gxi} 源自公式（25）。

同一直线上。这种情况发生在节点 $g=2$ 处的杆件 $x=3$，它连接到杆件 $i=4$、$i=7$ 和 $i=8$。此处，杆件 $i=8$ 与杆件 $x=3$ 位于同一直线上。对于 $x=3$ 与 $i=8$ 之间的连接，矩阵元素保持为零，并被标记为重要（$J_{2,3,8}=0^{*}$），如 $\Gamma^{(2)}_{xi}$ 中所示。

$$J_{1,\,xi}=\begin{array}{c} \\ x=1\\ x=2\\ x=3\\ x=4\\ x=5\\ x=6\\ x=7\\ x=8 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} i=1 & i=2 & i=3 & i=4 & i=5 & i=6 & i=7 & i=8 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{24a}$$

$$J_{2,\,xi}=\begin{array}{c} \\ x=1\\ x=2\\ x=3\\ x=4\\ x=5\\ x=6\\ x=7\\ x=8 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} i=1 & i=2 & i=3 & i=4 & i=5 & i=6 & i=7 & i=8 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0^{*}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0^{*} & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0^{*} & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0^{*} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{24b}$$

类似地，同一地面结构的条目 Υ_{gxi} 的构造过程如公式（25）所示。与之前一样，该矩阵以零初始化。只有对角元素以及在构造条目 J_{gxi}时标记的位置会被更新。对于每个杆件 x的每个节点 g，对角元素（$i=x$）以及满足 $J_{gxi}=0^{*}$的所有已标记索引，均填入关系矩阵 J_{gxi}（$\Upsilon_{gxx}=\Upsilon_{gxi^{*}}=\sum_{i=1}^{N}J_{gxi}$）中对应行的总和。在杆件 $x=3$的节点 $g=2$处，关系矩阵行的总和为 $\sum_{i=1}^{N}J_{2,\,3,\,i}=2$。因此，第 3 行的对角元素为 $\Upsilon_{2,\,3,\,3}=2$，而标记的条目为 $\Upsilon_{2,\,3,\,8}=2$。

$$\Upsilon_{1,\,xi}=\begin{array}{c} \\ x=1\\ x=2\\ x=3\\ x=4\\ x=5\\ x=6\\ x=7\\ x=8 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} i=1 & i=2 & i=3 & i=4 & i=5 & i=6 & i=7 & i=8 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \tag{25a}$$

$$\Upsilon_{2,\,xi}=\begin{array}{c} \\ x=1\\ x=2\\ x=3\\ x=4\\ x=5\\ x=6\\ x=7\\ x=8 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} i=1 & i=2 & i=3 & i=4 & i=5 & i=6 & i=7 & i=8 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \tag{25b}$$

构建条目 J_{gxi} 和 Υ_{gxi} 后，定义更新后的张拉整体约束，以允许共线受压杆件与节点处不存在其他活动单元的情况共存：

$$\sum_{i=1}^{N}\Upsilon_{gxi}z_{i}^{(2)}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}J_{gxi}z_{ij}\le 2\Upsilon_{gxx}\qquad\qquad\forall\ x=1,\dots,N,\ \forall\ g=1,\,2 \tag{26}$$

其中，Υ_{gxx} 是 Υ_{gxi}的对角元素。公式（26）的第一项通过将条目 Υ_{gxi} 与压缩变量 $z_{i}^{(2)}$ 的条目相乘，检查两个共线杆件是否确实受压。请注意，

如果杆件为零力或受拉，则 $z_i^{(2)} = 0$。公式（26）的第二项通过将条目 J_{gxi}与 $z_{ij} = 1$ 相乘，识别其他活跃杆件。公式（26）的右端项确保在没有共线杆件的节点处始终满足约束。当节点处存在共线杆件时，右端项保证：若这些共线杆件处于活跃状态且受压，则不能存在其他单元。这是通过将对角项乘以系数 2 实现的，因为它要检查两个杆件是否共线。

含预应力和张拉整体约束的混合整数线性规划公式 — 加入所有预应力和张拉整体约束后，问题公式扩展为以下形式：

$$\underset{A_{ij},\, a_{ij},\, q_{ih},\, q_i^0,\, q_{ih}^e,\, u_{kh},\, v_{ih},\, z_{ij},\, z_i^{(2)}}{\text{minimize}} \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} l_i A_{ij} C_j \tag{27a}$$

满足以下约束

$$\sum_{i=1}^{N} B_{ki} q_{ih} = F_{kh} \qquad \forall\, k,\, \forall\, h \tag{27b}$$

$$\sum_{i=1}^{N} B_{ki} q_i^0 = 0 \qquad \forall\, i \tag{27c}$$

$$\sum_{k=1}^{N^F} A_{ik}^f u_{kh} = v_{ih} \qquad \forall\, i,\, \forall\, h \tag{27d}$$

$$q_{ih} = q_{ih}^e + q_i^0 \qquad \forall\, i,\quad \forall\, h \tag{27e}$$

$$q_{ih}^e \le \frac{E_j}{l_i}\left(A_{ij}^{\max} v_{ih} + v_{ij}^{\min} A_{ij} - A_{ij}^{\max} v_{ij}^{\min}\right) + \mathcal{M}\left(1 - z_{ij}\right) \qquad \forall\, i,\, \forall\, j,\, \forall\, h \tag{27f}$$

$$q_{ih}^e \le \frac{E_j}{l_i}\left(A_{ij}^{\min} v_{ih} + v_{ij}^{\max} A_{ij} - A_{ij}^{\min} v_{ij}^{\max}\right) + \mathcal{M}\left(1 - z_{ij}\right) \qquad \forall\, i,\, \forall\, j,\, \forall\, h \tag{27g}$$

$$q_{ih}^e \ge \frac{E_j}{l_i}\left(A_{ij}^{\min} v_{ih} + v_{ij}^{\min} A_{ij} - A_{ij}^{\min} v_{ij}^{\min}\right) - \mathcal{M}\left(1 - z_{ij}\right) \qquad \forall\, i,\, \forall\, j,\, \forall\, h \tag{27h}$$

$$q_{ih}^e \ge \frac{E_j}{l_i}\left(A_{ij}^{\max} v_{ih} + v_{ij}^{\max} A_{ij} - A_{ij}^{\max} v_{ij}^{\max}\right) - \mathcal{M}\left(1 - z_{ij}\right) \qquad \forall\, i,\, \forall\, j,\, \forall\, h \tag{27i}$$

$$q_i^0 \le -q^{0_c} z_i^{(2)} + A_{\max}^{\max} \sigma_{\max}^t \left(1 - z_i^{(2)}\right) \qquad \forall\, i \tag{27j}$$

$$q_i^0 \ge \left(q^{0_t} + \sigma_{\max}^c A_{\max}^{\max}\right)\left(\sum_{j=1}^{M} z_{ij} - z_i^{(2)}\right) - \sigma_{\max}^c A_{\max}^{\max} \qquad \forall\, i \tag{27k}$$

$$q_i^0 \le \sum_{j=1}^{M} A_{ij} \sigma_j^t \qquad \forall\, i \tag{27l}$$

$$q_i^0 \ge -\sum_{j=1}^{M} A_{ij} \sigma_j^c \qquad \forall\, i \tag{27m}$$

$$q_{ih} \le \sum_{j=1}^{M} A_{ij} \sigma_j^t \qquad \forall\, i,\quad \forall\, h \tag{27n}$$

$$q_{ih} \ge -\sum_{j=1}^{M} A_{ij} \sigma_j^c \qquad \forall\, i,\quad \forall\, h \tag{27o}$$

$$\sum_{j=1}^{M} z_{ij} \le 1 \qquad \forall\, i \tag{27p}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} n_{pi} z_{ij} \le \eta_p^{\max} \qquad \forall\, p \tag{27q}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \Gamma_{xi} z_{ij} \le \Gamma_{xx} \qquad \forall\, x \tag{27r}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \Gamma_{xi}^{(2)} z_i^{(2)} \le \Gamma_{xx}^{(2)} \qquad \forall\, x \tag{27s}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \Upsilon_{gxi} z_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} J_{gxi} z_{ij} \le 2\Upsilon_{gxx} \qquad \forall\, x,\, \forall\, g \qquad (27t)$$

$$q_{ih} \le \left(\sigma_{\max}^{t} A_{\max}^{\max} + \frac{\sigma_{\max}^{t} A_{\max}^{\max} \varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\left(1 - \varepsilon - z_i^{(2)}\right) \qquad \forall\, i,\, \forall\, h \qquad (27u)$$

$$q_{ih} \ge -\sigma_{\max}^{c} A_{\max}^{\max} z_i^{(2)} \qquad \forall\, i,\, \forall\, h \qquad (27v)$$

$$A_{ij} \le A_{ij}^{\max} z_{ij} \qquad \forall\, i,\, \forall\, j \qquad (27w)$$

$$A_{ij} \ge a_{ij} - A_{ij}^{\max}\left(1 - z_{ij}\right) \qquad \forall\, i,\, \forall\, j \qquad (27x)$$

$$A_{ij} \ge 0 \qquad \forall\, i,\, \forall\, j \qquad (27y)$$

$$a_{ij} \le A_{ij}^{\max} \qquad \forall\, i,\, \forall\, j \qquad (27z)$$

$$a_{ij} \ge A_{ij}^{\min} \qquad \forall\, i,\, \forall\, j \qquad (27aa)$$

$$z_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall\, i,\, \forall\, j \qquad (27ab)$$

$$z_i^{(2)} \in \{0,1\} \qquad \forall\, i \qquad (27ac)$$

将公式（27）与公式（14）中含可施工性约束的多构件混合整数线性规划公式进行比较，可以明显看出新增了二元变量 $z_i^{(2)}$，用于检测杆件是否受压。该变量通过公式（27u）和公式（27v）中定义的约束进行赋值。这些约束适用于所有 L^C 荷载工况下的所有 N 候选杆件，且与其材料无关。其他新增变量 q_i^0 和 q_{ih}^e 为连续变量，分别表示预应力和外荷载作用所产生的弹性力。正如公式（27e）所示，杆件中的总力现在定义为这两个变量之和。由于McCormick松弛作用于弹性力，公式（27f）、（27g）、（27h）和（27i）现在对弹性力变量 q_{ih}^e 而非总力变量 q_{ih} 进行界定。公式（27c）确保预应力平衡。预应力的界限由公式（27j）、（27k）、（27l）和（27m）定义。

此外，可以注意到，公式 (14l) 未被沿用。这是因为，当张拉整体约束严格限制进入节点的受压构件数量时，每个构件的节点限值并没有特别大的实用价值。由于张拉整体结构中的受拉构件通常为缆索，而缆索允许采用更复杂的整体连接设计，因此，公式 (27q) 通过限制每个节点的杆件总数，在减少节点处有效杆件数量方面已被认为足够。通过构建公式 (22)、(24) 和 (25) 中关系矩阵 $\Gamma_{xi}^{(2)}$、J_{gxi} 和 Υ_{gxi} 的条目，可以遵循张拉整体原理。这些条目确保节点处仅存在一个受压构件，除非两个受压构件位于同一直线上。在这种特殊情况下，两个受压构件可以共存，从而允许受压构件堆叠，并使用简化的地面结构。然而，如果两个受压构件共享一个节点，则该共享节点处不允许存在其他杆件。这些规则通过公式 (27s) 和 (27t) 中列出的约束加以实施。优化流程以及所有约束的构建过程如图10所示。

3 结果与讨论

本文提出的混合整数线性规划公式用于求解若干二维和三维桁架示例的低碳设计问题。所有问题均使用商业求解器 Gurobi 12.0.1 [68] 求解，运行设备为一台配备 Apple M3 Max 芯片的 2023 款 MacBook Pro，该芯片包含 16 核 CPU、40 核 GPU 和 48 GB 内存。

本文的公式允许设计工程师预先设定其希望用于设计中所有候选构件或材料的材料属性。本文展示了最多包含三种构件选项的情形：木材或钢制杆件（或压杆），以及钢缆。木杆的属性设定为模拟花旗松，钢杆和钢缆的属性设定为模拟 50级钢。如前所述，为确保所有材料的应力保持在其力学性能的线弹性范围内，每种材料的最大允许应力均按安全系数 $\varphi = 2.5$ 进行折减。这也为修正通过 McCormick包络近似材料本构关系时计算误差所导致的力值提供了充足的灵活性。所采用的隐含碳系数以及抗拉和压应力限值列于表1。对于张拉整体设计，木杆和钢杆的抗拉承载力设为零。这样做是为了更清楚地展示最终设计中的力流。

3.1 带有可施工性约束的单材料设计 s

在扩展到多材料或构件设计之前，我们先研究施加可施工性约束的影响：这些约束可消除细丝状横截面并降低节点复杂度。为此，考虑一个宽8米、高6米的二维矩形设计空间。其左侧边缘由两个铰支座支撑，且

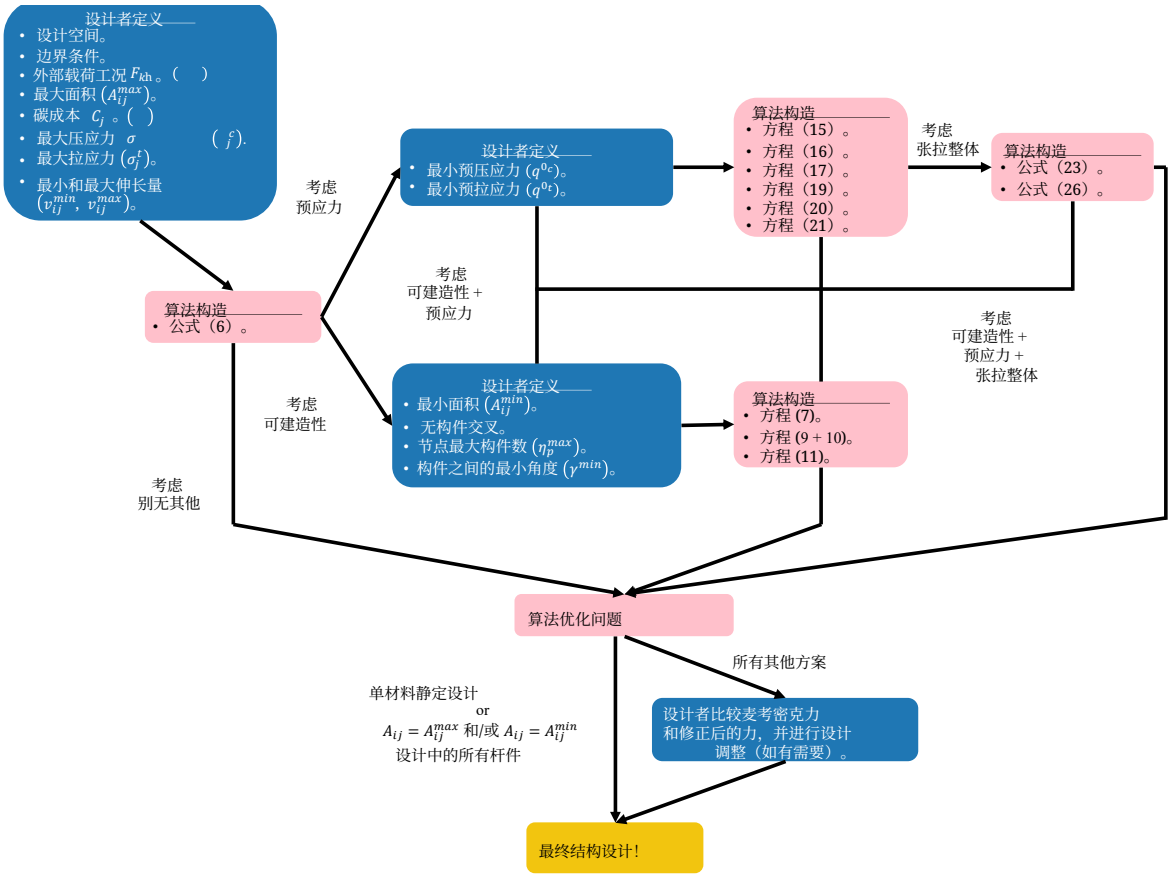


图1：优化流程与所有设计约束的实施。

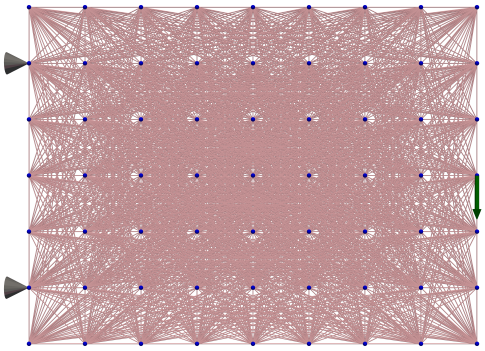
	C 千克二氧化碳当量/平方米	σ^t MPa	σ^c MPa	E MPa
木杆	269.5	3.861	4.552	13,100
钢杆	11,382.5	138	138	200,000
钢索	11,382.5	138	0	200,000

表1：用于数值结果的隐含碳系数、应力限值和弹性模量。

在右侧边缘的中心节点施加一个1,000 kN的集中荷载。边界条件和荷载条件旨在模拟经典的悬臂Michell桁架解。该设计只有一个荷载工况 $(L^C = 1)$。设计空间采用图11所示的地面结构进行离散，其中包含 9×7 个节点，以及由1,234个候选杆件组成的全连接网格。所有候选杆件 i 和材料 j 的McCormick约束所用伸长界限分别设为 $v_{ij}^{\min} = -\sigma_j^c l_i / E_j$ 和 $v_{ij}^{\max} = \sigma_j^t l_i / E_j$。

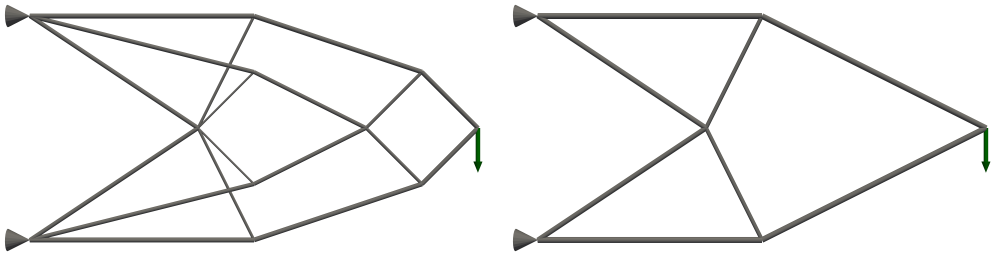
3.1.1 钢材设计

所有钢试件的设计结果如图 12 所示。图 12a 中的结果仅通过施加最大面积可施工性约束 $A_{ij}^{max} = 1{,}000\ \text{cm}^2$ 得到。由于没有施加最小面积要求，且仅使用一种材料（$M = 1$），该问题可简化为公式（2）所述的线性规划，其中包含 2,468 个连续变量。然而，采用公式（6），使求解器能够在不存在满足弹性强度和伸长要求的可行静定解时，自由生成超静定解，以满足最大面积要求。这样一来，变量数量增至 3,891 个连续变量和 1,234 个二元变量。该设计用时 3 分 49 秒得出。正如预期，所得设计方案呈对称形状。请注意，与传统的最小柔度 Michell 悬臂结构问题相比，该设计的杆件数量更少。这是因为本研究的目标是最大限度地减少隐含碳；对于这个采用 $A_{ij}^{max} = 1$ 的示例而言，这等同于最大限度地减少材料消耗。



Fig图11：用于悬臂Michell桁架的二维地面结构，包含1,234根候选杆件 .

尽管从杆件总数来看，该设计似乎并不过于复杂，但其中一些连接的制造难度较大。左中节点尤其如此，三根大型横截面的杆件以尖角汇聚于一个节点。在设计的左中部，另一个复杂节点连接了 6 根杆件，其中一些杆件之间仅相隔 14.0°。此外，由于该设计为单一材料的静定结构，所有杆件的 McCormick力与伸长近似误差均为 0%。



隐含碳 $= 2$，375 $\mathrm{kgCO_2e}$
质量 $= 1$，638 kg

(a)

隐含碳 $= 2$，392 $\mathrm{kgCO_2e}$
质量 $= 1$，650 kg

(b)

图12：钢制Michell悬臂结构的最小隐含碳设计结果；(a) 无可施工性约束，(b) 有可施工性约束，分别通过求解公式（6）和公式（14）得到。

为解决图 12a 中解所面临的一些复杂难题，我们采用公式（14）中的混合整数线性规划公式，在考虑可施工性约束的情况下求解该设计。现在，该优化问题包含 5,125 个连续变量和 1,234 个二元变量。与之前一样，最大面积要求仍为 $A_{ij}^{max} = 1{,}000\ \mathrm{cm}^2$。此外，还规定了最小面积为 $A_{ij}^{min} = 10\ \mathrm{cm}^2$，每个节点最多连接 $\eta_p^{max} = 6$ 根杆件，且杆件之间的最小分离角为 $\gamma^{\min} = 22.5°$。该设计结果为全局最优解，耗时 5 分钟 25 秒得到，如图 12b 所示。与之前类似，该解为静定结构，且仅由 1 种材料构成，因此 McCormick包络能够给出精确的力和伸长量结果。比较施加和未施加新增可施工性约束的两种拓扑时，可以发现一个相似的美学特征：两种设计均具有对称性。然而，混合整数线性规划桁架拓扑优化的一个已知特性是，设计结果可能并不对称 [49]。因此，即使设计者使用拉伸和压缩性能相同的各向同性材料，在施加可施工性约束时，也不能总是期待得到对称结果。采用混合整数线性规划公式且希望获得对称设计的设计者，必须通过施加对称约束或仅对设计域的一半进行建模，来明确实现这一点。

这两种拓扑之间一个显著的区别是，图 12b 中受可建造性约束的设计所用杆件更少，而且更重要的是，节点复杂度有所降低。最复杂的节点连接了 4

根杆件，杆件之间的最小角度为 33.7°。支座节点仍然汇集了多个较大的横截面，但这些横截面之间的角度如今显著增大。所有这些改进都以设计的隐含碳和重量略微增加 0.70% 为代价。

3.1.2 木材设计

对纯木材设计运行相同的优化方案，结果如图13所示。图 13a 展示了通过求解公式（6）中所构建的问题得到的方案，其中最大面积为 $A_{ij}^{max} = 1{,}000\ \text{cm}^2$。与上文的钢桁架示例类似，使用该方程而非线性公式，在最大面积约束下不存在满足弹性强度和伸长要求的可行静定解时，可以得到超静定解。与钢桁架相同，该问题包含 3,891 个连续变量和 1,234 个二元变量。求解耗时 3 分 36 秒。与图12a所示的无约束钢结构解不同，该设计并不对称。不过，这是意料之中的，因为木材的抗压强度高于其抗拉强度。在相同荷载下，这要求受拉构件比受压构件使用更多材料，因此从单位材料强度的角度来看，受压更具吸引力。此外，该设计采用可变截面积，且为静力不定结构，因此在 McCormick约束下的内力计算会产生一定误差。通过重新计算最终设计中的精确杆件内力来评估误差程度。正确内力与估算内力之间的绝对差中位数为 1.97%。最后，该设计看起来很难制造。支座处的连接有 7 根杆件汇聚于一点，其中一些杆件之间的间距仅为 1.8°。

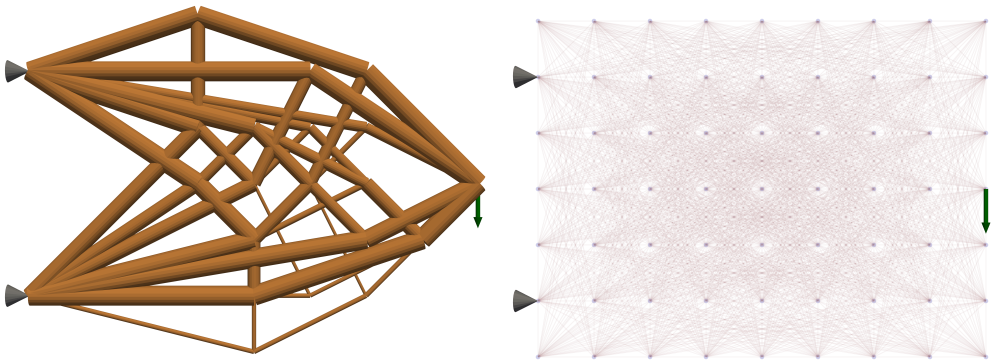


图13：Michell悬臂结构采用木材的最低隐含碳设计结果；（a）未施加可施工性约束，（b）施加可施工性约束，分别通过求解公式（6）和公式（14）得到。

将公式（14）中的可施工性约束应用于该问题，旨在解决难以处理的连接问题。与钢材示例相同，每个节点的杆件数最多为 $\eta_p^{max} = 6$，且杆件之间的分离角不得小于 $\gamma^{\min} = 22.5°$。为木材设定更合适的最小面积界限，规定最小面积为 $A_{ij}^{min} = 100\ \text{cm}^2$。此时，优化问题包含5,125个连续变量和1,234个二元变量。然而，如图13b所示，应用这组现实约束后，设计问题变得不可行。证明该问题不可行耗时5分14秒。由于不存在满足可施工性约束的方案，且无约束方案也难以直接建造，因此，对于这一设计问题，全木材设计可能极不理想。

3.2 带可建造性约束的双材料设计

采用相同的设计空间、荷载、边界条件和地面结构来设计新的桁架，其中所有构件均可为木材或钢材。如表1所示，木材的隐含碳系数远低于钢材。其弹性模量和最大应力承载能力也大幅降低，且最大应力承载能力在拉伸和压缩时有所不同。这些设计通过设置 $M = 2$获得。

图14展示了三种不同约束情景下木钢混合结构的设计结果。相应的应力分布见图15。图 14a 中的结果给出了公式（6）所示、不含可施工性约束的简单混合整数线性规划公式的解。公式（6）要求给定地面结构包含5,125个连续变量和

2,468个二元变量。除满足应力限值外，设计的唯一约束是最大横截面积上限为 $A^{max} = 1{,}000\ \text{cm}^2$, ，且与材料无关。该设计在6分12秒内生成。如图所示，全局最优解中钢材的体积占比为0%。还可以观察到，此处得到的解与图 13a 中的解完全相同。这是因为对于隐含碳目标而言，使用大量木材更为有利。因此，该解在满足应力约束的同时，尽可能多地使用木材。如前所述，从施工角度来看，该结构可被认为非常复杂。结构共有56个杆件，其中多个杆件至少部分重叠或直接相交，使节点变得极其复杂。

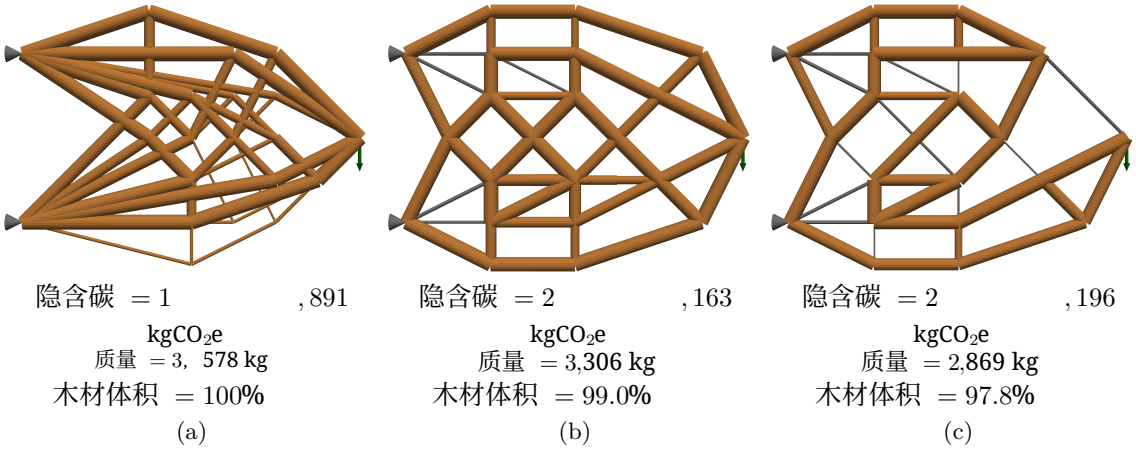


图14：木材-钢米歇尔悬臂结构的最小隐含碳设计结果：(a) 不考虑可施工性约束（公式（3））， (b) 考虑可施工性约束（公式（14））， 以及 (c) 额外限制每个节点处木构件数量的情况。

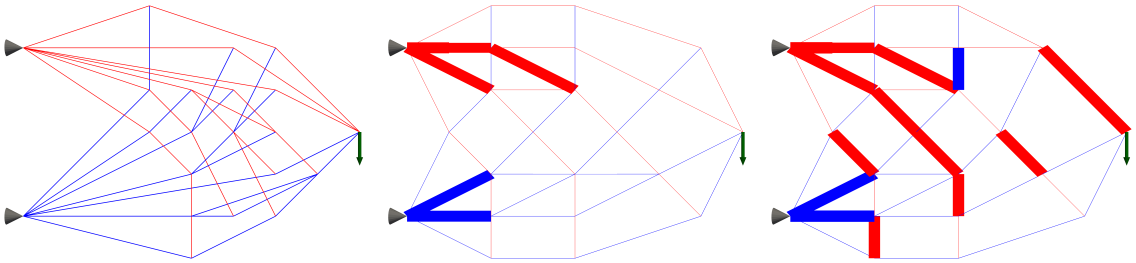


图15：图14中设计 (a)、(b) 和 (c) 分别对应的设计结果的构件应力。应力图中，蓝色表示压应力，红色表示拉应力。应力大小通过直线粗细表示。(b) 和 (c) 展示了钢构件承受的应力远高于木构件。

图14b展示了在施加额外的可施工性约束并求解公式（14）后得到的解。引入最小面积界限后，连续变量总数增至7,593。二元变量数量保持不变，为2,468。木材和钢材的最小横截面积分别设为$A_{ij}^{\min} = 100\ \text{cm}^2$ 和 $A_{ij}^{\min} = 10\ \text{cm}^2$, 。每个节点最多连接 $\eta_p^{\max} = 6$ 个杆件。由于木材和钢材的节点复杂度没有单独的限制，因此本例不采用公式（14l）。杆件之间的最小分离角设为 $\gamma^{\min} = 22.5^\circ$ ，且不允许相交构件共存。该设计耗时15小时14分钟得出。对于这个问题，力误差略高于McCormick松弛，但绝对差中位数仍低于5%（4.77%）。与未施加可施工性约束的设计相比，图14b中的结果明显更容易建造。其杆件数量少得多，而且最复杂的节点也只连接

6个杆件，最小分离角为$\gamma = 26.6°$。请注意，这高于允许的 $\gamma^{\min}$。为降低节点复杂度，算法用少量强度更高的钢构件替换了大量强度较低的木构件。图15b中的应力图显示，在多股较大的力汇聚于一点的支座附近，钢材替代了木材。图中还显示，替换受拉构件时略微倾向于使用钢材。考虑可施工性约束后，设计发生了变化，使设计中的相对钢材体积从0%小幅增加至1.0%，因此隐含碳增加了14.4%。与此同时，结构重量减少了7.61%。

最后，在增加一项约束后进行了重新设计：每个节点仅允许 $\eta_p^{\max,\ timber} = 3$ 木构件共存。通常，木结构连接比钢结构连接需要更精细的构造处理，因此难以在一个节点上连接大量木构件。在求解公式（14）时加入公式（14l），这一细微变化得到了图14c所示的设计。此示例的计算时间增加至79小时5分钟。McCormick松弛下计算出的力与修正后的力之间的绝对差中位数为3.59%。尽管该设计与图14b中的解相似，但仍存在一些显著差异。结构中的单元总数有所减少，但新设计中的钢构件总数增至13个，因此钢材体积增至2.2%。图15c中的应力图显示，大多数钢构件承受拉力。虽然增加最后一项可建造性约束导致拓扑发生明显变化，但与图14b中的解相比，隐含碳仅增加了1.54%。与图14a中的初始设计相比，结构重量进一步降低了19.8%。最复杂的节点连接了5根杆件，其中3根为木材制成，2根为钢材制成。没有任何节点连接超过3根木构件。观测到的杆件之间的最小夹角仍为26.6°。

图14b和图14c所示的两种满足可施工性约束的木钢混合设计，与图12b所示满足可施工性约束的全钢设计相比，隐含碳分别减少了9.57%和8.19%。然而，这两种设计的重量分别增加了100.4%和73.9%。尽管整体设计满足所有可施工性约束，但其复杂程度也高于图12b所示的8杆件钢悬臂结构。对于这个Michell悬臂结构示例，隐含碳减排并不一定能使多材料方案明显胜出。

3.3 单项可施工性约束的影响

第3.1节和第3.2节的结果表明，采用本文定义的所有可施工性约束与不采用这些约束所得到的设计之间存在显著差异。本节探讨逐项应用这些考量因素所产生的影响。本文采用一个受洛克波特铁路桁架桥启发的三维设计示例进行分析，如图16所示。该桥横跨纽约州布法罗附近的伊利运河。设计空间的尺寸取为 $30 \times 5 \times 10\,\mathrm{m}^3$。

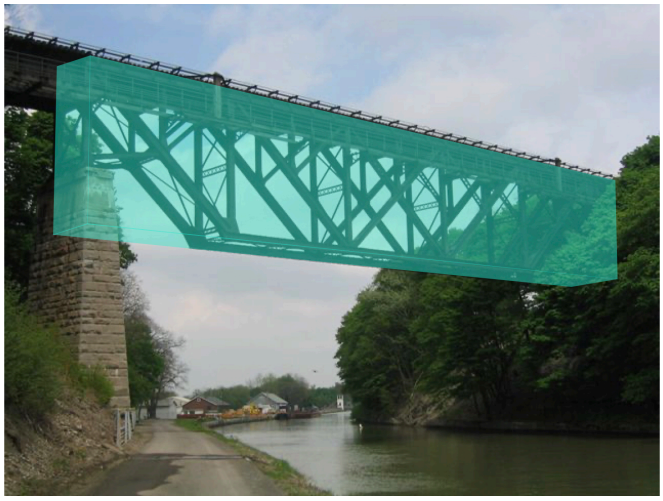


图16：洛克波特桁架桥跨越纽约布法罗附近的伊利运河。以下示例中用于模拟该结构的设计空间以蓝绿色突出显示。

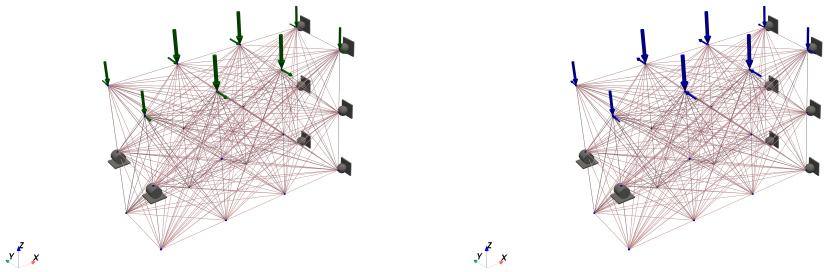
以下所有设计均通过求解公式（14）的不同版本得到。为确保桥面得到妥善支撑，桁架的上弦杆被强制设置为必选构件。由于上弦杆的材料并未预先确定

本文中，其 因此，通过施加以下附加约束，确保其存在于设计方案中 ：

$$\sum_{j=1}^{M} z_{ij} = 1 \qquad \forall\, i \in S \tag{57}$$

其中， S 是包含地面结构两个上弦杆中所有候选杆件的集合。

对于此示例，期望设计结果具有对称性。如前所述，除非明确施加对称性约束，否则求解混合整数线性规划时无法保证对称性。因此，本研究利用设计空间的对称性，仅对桥梁的一半进行建模，同时也降低了计算复杂度。与前文一样，设计空间采用地面结构进行离散，如图17所示。此示例采用 $5 \times 1 \times 2$ 节点离散，并划分为包含242个候选杆件的网格。McCormick约束所用的伸长界限，对于所有候选杆件 i 和材料 j均设为 $v_{ij}^{\min} = -\sigma_j^c l_i \,/\, E_j$ 和 $v_{ij}^{\max} = \sigma_j^t l_i \,/\, E_j$。桥梁设计考虑两个独立的荷载工况 $\left(L^C = 2\right)$。两个荷载工况均承受来自铁路交通的 $w = 0.1$ MPa分布荷载，该荷载沿设计空间顶面竖直向下作用。此分布荷载作为集中荷载施加在地面结构顶部的节点上，中心节点处的荷载大小为 $P = 1250$ kN，角节点处为 $P = 625$ kN。此外，沿上弦杆水平方向作用着较小的水平线荷载，大小为$p = 25$ kN/m，以模拟交通振动引起的静态横向荷载。这些荷载以集中荷载的形式施加，中心节点处为 $P = 125$ kN，角节点处为 $P = 62.5$ kN。如图17a和图17b所示，两个荷载工况下线荷载的方向不同。地面结构由部分滚动支座支承，这些支座在 $y-$ 和 $z-$方向受到约束，并沿桥梁深度方向居中布置，以模拟图16中石墩的位置。通过仅在设计空间右侧面所有节点处施加沿 $x-$方向受约束的滚动支座来实现对称性。请注意，位于对称线和角节点处的所有集中荷载大小均经过调整。



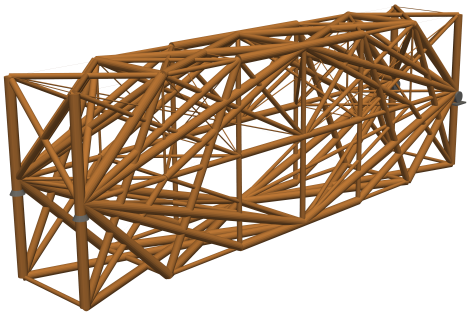
(a) (b)

图17：用于模拟洛克波特桁架桥设计空间的三维地面结构。该设计包含两个荷载工况，在这两种工况下，上弦杆均承受较大的竖向力，以及一个较小的线荷载，该荷载分别（a）水平朝向纸面外作用，（b）水平朝向纸面内作用。

3.3.1 单材料设计

纯木材设计 第一个设计尝试仅使用木材构件建造桥梁。然而，只有在采用最大允许横截面积 $A_{timber}^{\max} = 2,\ 000\ \text{cm}^2$ 时，才存在可行方案。加入防止构件相交的约束后，问题变得不可行。这意味着，进一步加入公式（14）中所应用的可施工性约束后，问题同样不存在可行方案。无约束设计如图18所示，其隐含碳值为4.01×10^4 kgCO_2e。由于使用的木材数量较多，该值高于稍后讨论的无约束木材—钢材混合设计。为生成可行方案，还需要对结构杆件内力进行大幅放宽。该方案是静力不定的，使用McCormick包络计算内力时，中位误差为26.1%。修正部分内力会消耗木材强度限值中预设的安全系数，或导致部分杆件需要重新确定尺寸。

纯钢设计 接下来，仅使用钢构件对桥梁进行设计。最初仅通过约束单元的最大截面面积来实现（$A^{\max}$）。随后，防止相交构件（+ 不相交），强制规定最小截面积（$+A^{\min}$），限制每个节点的构件数（$+\eta_p^{\max}$），最后还约束节点处构件之间的夹角（$+\gamma^{\min}$）。所得全部设计均



$A^{\max}$

图18：铁路桥示例在考虑最大截面面积约束（$A^{\max}$）时的纯木材设计结果。对全木材设计施加其他约束时，不存在可行方案。

如图19所示，并在表2中进行比较。由于本节中的所有钢结构解均为静定结构，且由单一材料制成，因此在使用McCormick包络计算时，所有内力的误差均为0%。

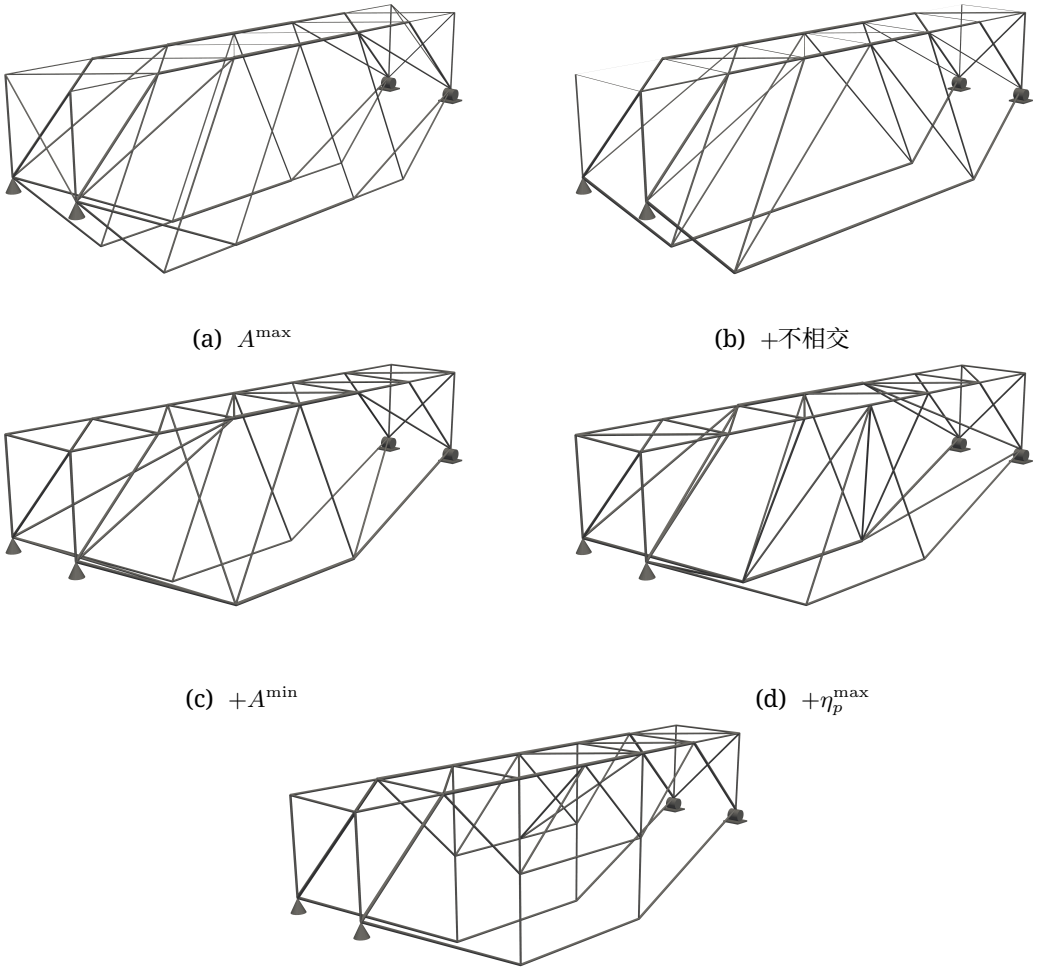
仅考虑 $A^{\max} = 500$ cm^2 的最大截面积上限时，约 18 秒即可得到图19a所示的设计结果。其隐含碳值为 4.27×10^4 kgCO$_2$e。最终设计中的钢构件截面积介于 6.40 cm^2 和 258 cm^2 之间，因此未达到上限。乍看之下，除了出现截面积非常小的单元外，该结果并不显得过于复杂。该设计共有 64 个单元，其中 44 个单元的截面积小于 100 cm^2。如表2所示，任一节点处的杆件最大数量为 $\eta_p = 6^*$，杆件之间的最小分离角为 $\gamma = 18.4°^*$。不过，这些数值带有星号，因为该设计并未禁止相交构件的存在，而这些构件在设计经过后处理后会产生新节点。所列数值未将这些新节点计入。

为防止杆件相交（如图19a底角处所示），启用约束(14m)。设计结果的隐含碳排放值为4.33×10^4 kgCO$_2$e，如图19b所示，耗时23秒得出。与初始设计相比，隐含碳排放和重量增加了1.53%。汇交于同一节点的杆件总数增加至7，分离角仍为18.4°。不过，这些数值不再需要星号，因为禁止杆件相交可以防止设计过程中生成新节点，并减少后处理。虽然防止相交可以明确控制设计中的所有杆件，但仍存在一些问题。上弦杆中的两个杆件必须贯穿整个跨度，但其横截面积仅为0.1 cm^2, , 小到可以忽略；设置这一数值仅是为了保证数值稳定性。算法识别出一条不经过这些杆件的荷载路径，实质上将其移除，以节省材料，同时满足连续性约束。

接下来，针对设计问题施加了 $A^{\min} = 100$ cm^2 的最小截面积明确限制。加入这一约束后，得到图19c所示的设计结果，用时略超 13 分钟，隐含碳值为 5.78×10^4 kgCO$_2$e。虽然隐含碳和结构重量比先前的设计高出 33%，但新设计中的钢构件横截面积范围为 100 cm^2 至 353 cm^2。请注意，现在两根上弦杆在整个跨度范围内均保持连续，且截面积均不可忽略。如表2所示，节点并未变得比采用最大面积约束并防止相交的示例更复杂。不过，这一要求并未明确定义，因此节点仍可能比预期更复杂。

为确保节点连接的单元数量有限，通过启用式（14k）中的约束重新求解设计。现在，严格限制每个节点处的元素最大数量为 $n_p^{\max} = 6$。图19d所示的设计结果用时略少于 92 分钟，隐含碳评分为 6.08×10^4 kgCO$_2$e。与图19a中的初始设计相比，这一数值增加了 42%。然而，设计中的所有杆件都具有足够大的截面积，无需在后处理中处理相交构件，并且可以保证每个节点连接的单元数量有限。不过，在桥梁跨中后部右下方，可以看到有 6 根杆件以尖角相交，其中一些角度为 $\gamma = 18.4°$。

最后，式（14m）中的违约矩阵 Γ_{xi}条目经过更新，以防止出现尖锐的角度连接。禁止包含间距小于 $\gamma^{\min} = 30°$ 的杆件的设计。图19e中的设计结果约在106分钟内获得，其目标值为6.31×10^4 kgCO$_2$e。该设计在计算上最为



(a) $A^{\max}$

(b) $+$不相交

(c) $+A^{\min}$

(d) $+\eta_p^{\max}$

(e) $+\gamma^{\min}$

图19：铁路桥示例的纯钢设计结果，分别考虑了：(a) 仅对最大截面面积施加约束（$A^{\max}$）；(b) 禁止相交构件共存（$A^{\max}$和 $+$不相交）；(c) 强制要求最小截面积（$A^{\max}$、 $+$不相交，以及 $A^{\min}$）；(d) 限制每个节点的构件数（$A^{\max}$、 $+$不相交、 $A^{\min}$和 $\eta_p^{\max}$）；以及(e) 还确保节点处构件之间的最小夹角（$A^{\max}$、 $+$不相交、 $A^{\min}$、 $\eta_p^{\max}$和 $\gamma^{\max}$）。

昂贵，与初始无约束设计相比，目标值提高了47.6%。然而，该设计满足本文列出的所有主要可施工性问题。杆件截面范围为100 cm^2 至293 cm^2, ，避免了相交构件，节点最多连接6个杆件，且任意两根杆件之间的最小角度为 $\gamma = 35.3°$。

考察表2中当前示例的相对隐含碳值时，可以发现，各设计之间最显著的差异出现在施加最小截面积约束时。如前所述，该数值增加了33%。进一步限制节点处的构件数量所产生的相对影响较小（增加5.3%），而要求最小角间距仅导致较小变化（进一步增加3.7%）。可以看出，纳入可施工性约束会直接影响计算时间，其数值分别约为无约束设计的1.3倍、44倍、306倍和352倍。对于该示例，计算成本出现了两次显著跃升：第一次是在加入最小截面积约束时，第二次是在限制每个节点的构件最大数量时。进一步同时施加最小角间距约束也会增加计算时间，但增幅并不明显。总而言之，从难以施工的无约束钢桁架设计方案，转变为满足所有

可施工性约束 可施工性约束 可施工性约束	$A^{\max}$	+不相交不相交不相交	$+A^{\min}$	$+\eta_p^{\max}$	$+\gamma^{\min}$
运行时间	18s	23s	13分钟18秒	91分钟52秒	105分钟40秒
最小钢材尺寸 (cm^2)	6.4	0.1	100	100	100
最大钢材尺寸 (cm^2)	258	240	353	326	293
节点处最大构件数	6*	7	7	6	6
构件之间的最小角度	18.4°*	18.4°	18.4°	18.4°	35.3°
质量（千克）	29,461	29,912	39,829	41,927	43,486
隐含碳 ($kgCO_2e$)	42,719	43,373	57,752	60,794	63,055

表2：图19中随着可施工性约束水平提高，纯钢铁路桥桁架设计的性能属性。*星号表示不禁止存在相交构件的设计，因此在设计经过后处理后，可能会出现带有其他复杂情况的新节点。

此处定义的可施工性约束会使隐含碳增加47.6%，并额外增加105分钟的计算时间。

3.3.2 木材—钢材设计

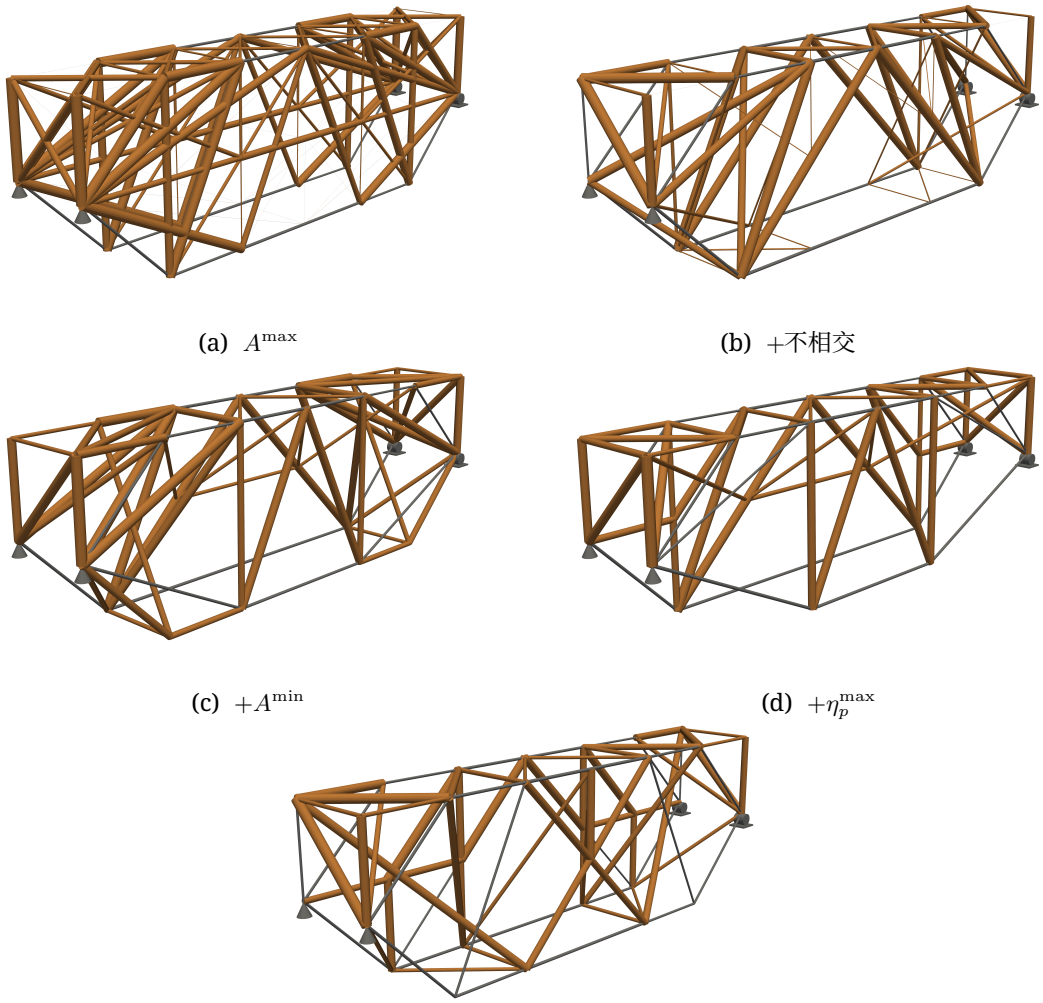
现在使用 $M = 2$求解铁路桁架桥设计问题，材料选项为木材和钢材。图20展示了施加不同约束时各方案的结果。所有设计均通过求解公式（14）中的混合整数线性规划得出，并在表3中进行了比较。

与纯钢设计类似，最初仅施加最大截面面积上限作为唯一的可施工性约束。钢材和木材杆件的最大允许面积分别设为 $A_{steel}^{\max} = 500\ \text{cm}^2$ 和 $A_{timber}^{\max} = 2{,}000\ \text{cm}^2$。设计结果在47秒内获得，如图20a所示。该结果的 McCormick中位误差为40.6%，非常高。较大的面积上限和极少的可施工性约束是造成这一结果的主要原因。如第3.2节中的米歇尔桁架示例所示，该设计趋于采用大量木材的解。钢材仅占结构体积的1.88%。木材被大量用于受压构件，而钢构件则主要用于受拉部位。钢材主要用于桁架的底部受拉弦杆。该设计存在诸多可施工性问题。上弦杆端部以及在钢制底弦杆中部汇聚处的最小木材截面，其横截面积仅为0.1 cm^2。此外，支座附近的节点较为复杂，因为它们连接了许多单元，并且就在 $8°$ 上方形成尖角。

接下来，应用防止构件相交的约束。结果如图20b所示，与初始设计相比，隐含碳值增加了6.1%。内力计算中McCormick误差的中位数降至16.7%。虽然面积界限并未收紧，但防止构件相交减少了力流中的卷积，从而降低了McCormick包络的自由度。添加这一约束还使该设计的钢材体积占比增加至5.26%。尽管这些改进相较初始设计十分显著，且杆件总数大幅减少，但仍有许多截面较小的杆件，例如上弦杆端部的杆件；此外，还有一些难以处理的连接。

对钢材和木材分别施加 $A_{steel}^{\min} = 100\ \text{cm}^2$ 和 $A_{timber}^{\min} = 300\ \text{cm}^2$ 的最小面积界限后，得到图20c所示的设计。该设计用时不到92分钟，目标值较图20a中的基准解增加了8.5%。钢材体积占设计总体积的比例增至3.94%，内力计算中的McCormick误差中位数再次低于5%（4.52%）。在该设计中，上弦杆中较小的木材截面具有了不可忽略的截面尺寸。跨度中心附近的一些细木构件也被移除。经过这些小幅调整，该设计看起来仍然十分复杂，结构构件仍大量采用木材。设计中存在若干复杂节点，例如上弦杆中心附近连接了7根大型木构件的节点，或构件以略高于 $18°$的角度汇交的支座节点。

现在重新设计该问题，禁止相交构件共存，并施加最多包含 $\eta_p^{\max} = 6$ 个单元的节点约束。仅用时略多于76分钟，便得到了图20d所示的设计。与无约束木钢设计相比，该设计的隐含碳目标增加了10.4%。设计中的钢材体积进一步增至6.87%，McCormick误差中位数则降至2.17%。重要的是，该设计现在看起来明显不那么复杂。最复杂的节点连接了6个单元，单元间的最小分离角为18.4°。此外，有趣的是，与之前的方案相比，该设计更轻。尽管结构中的钢材体积仅增至6.87%，其结构重量却比无约束方案减少了20.0%。这表明，无约束设计使用了许多受拉木构件，才能达到仅用相对少量钢材便可实现的相同抗拉承载力。



(a) $A^{\max}$ (b) $+$不相交

(c) $+A^{\min}$ (d) $+\eta_p^{\max}$

(e) $+\gamma^{\min}$

图 20：铁路桥示例的木钢混合设计结果，分别考虑：(a) 仅对最大截面面积施加约束（$A^{\max}$）；(b) 防止相交构件共存（$A^{\max}$和 $+$不相交）；(c) 强制设定最小截面积（$A^{\max}$、 $+$不相交和 $A^{\min}$）；(d) 限制每个节点的构件数（$A^{\max}$、 $+$不相交、 $A^{\min}$和 $\eta_p^{\max}$）；以及(e) 还确保节点处杆件间最小夹角（$A^{\max}$、 $+$不相交、 $A^{\min}$、 $\eta_p^{\max}$和 $\gamma^{\max}$）。

少量钢材即可实现的抗拉承载力。这也进一步印证了例如 Feickert 和 Mueller [69] 提出的观点：在追求低碳设计时，考虑下部结构十分重要，因为较重的无约束方案需要更大的基础，而本文未将其纳入考量。

最后，在 $\gamma_{\min} = 30°$ 的单元之间施加最小分离角，得到图20e所示的设计。该方案耗时230分钟8秒生成，与基准设计相比，目标值增加了19.2%。该设计的内力计算中，McCormick误差中位数仍然较低，为2.40%。其钢材体积达到7.46%，是所有木材-钢材混合设计中最高的。与图20d中的前一个方案相比，虽然没有发生显著变化，但该设计中杆件之间的最小角度几乎翻倍，达到35.3°。或许出乎意料的是，结构重量略有增加。不过，它仍显著低于无约束设计。

如第3.3.1节所示，在这个铁路桥示例中，只有采用钢材进行设计，才可能得到可建造的单一材料方案。比较图18、图19a和图20a中的无约束单材料与多材料桁架设计，可以看出，纯钢方案似乎复杂度较低，也更容易建造。对于无约束设计，这种表面上的复杂度降低是有碳成本的，因为纯钢设计的隐含

可施工性约束 可施工性约束 可施工性约束	$A^{\max}$	+不相交不相交不相交	$+A^{\min}$	$+\eta_p^{\max}$	$+\gamma^{\min}$
运行时间	47s	1分钟 51秒	91分钟 46秒	76分钟 1秒	230分8秒
最小木材尺寸 (cm^2)	0.1	0.1	300	300	300
最大木材尺寸 (cm^2)	2,000	2,000	2,000	2,000	1,961
最小钢材尺寸（cm^2）	0.1	84.9	100	109	107
最大钢材尺寸（cm^2）	205	241	242	243	255
节点处最大构件数	12*	8	7	6	6
构件之间的最小角度	8.13°*	18.4°	18.4°	18.4°	35.3°
质量（千克）	51,492	42,293	46,557	41,199	43,603
隐含碳 ($kgCO_2e$)	38,003	40,306	41,219	41,952	45,288

表3：图20中可施工性约束水平逐步提高的纯钢铁路桥桁架设计的性能特性。*星号指的是未禁止相交构件存在的设计，因此在设计经过后处理后，可能会出现具有其他复杂性的新节点。

碳目标比木材—钢材方案高12.4%。然而，与米歇尔桁架设计示例相反，随着施加可施工性约束，采用混合设计的优势显著增加。施加本文考虑的所有可施工性要求后，木材—钢材方案优于纯钢桁架，隐含碳降低了28.2%。两种结构的重量相近，木材—钢材设计仅重117千克。值得注意的是，双材料设计的计算时间差异远大于单材料方案。这说明混合整数线性规划的求解时间高度取决于问题本身，难以预测。有时增加约束会缩短计算时间，有时则会延长计算时间。

3.4 三构件张拉整体设计

本文提出的设计框架可用于采用任意数量的候选材料或构件进行设计。为展示该框架处理 $M = 3$ 个候选构件的能力，本文以一个张拉整体为例进行说明。该设计可选用钢缆，以及钢杆或木杆。为确保所有拉力均由缆索承担，木杆和钢杆的抗拉强度设为零。

张拉整体设计示例所用的地面结构如图 21 所示，共有 $2 \times 2 \times 2$ 个节点，跨度为 1.5 m × × 1.5 m × × 3 m。网格由 302 个候选杆件组成。设计空间底部由三个铰支座支撑，按等腰三角形布置。设计空间顶部的三个节点上分别施加竖向荷载，每个荷载的大小为 $P_z = -75$ kN。其中两个竖向荷载位于顶部的两个角点，这两个角点分别与底部设有铰支座的角点相对。在这两个节点上，还分别有两个大小为 $P_x = P_y = \pm 10$ kN、沿水平面向外作用的力。第三个竖向荷载施加于顶部边缘中央，该边缘与底部仅设有一个铰支座的角点相对。此处还施加了大小为 $P_y = -10$ kN 的侧向力。

所有候选杆件 i 以及材料/构件 j的 McCormick 约束所用伸长界限设为 $v_{ij}^{\min} = -0.001 l_i$ 和 $v_{ij}^{\max} = 0.001 l_i$ 。这与之前不同，因为压杆的抗拉承载力设为零，而缆索的抗压承载力设为零。沿用前例中基于最大允许压应力的相同数值，会导致缆索无法在施加载荷作用下弹性收缩。然而，只要初始预应力足够大，预应力索便能在施加载荷作用下收缩，同时仍保持受拉。采用 McCormick 松弛设计的预应力结构，在实际建造前可能需要进行后处理。除了施加外荷载产生的杆件内力变量外，再引入预应力变量，并不一定能提供一种清晰的方法来量化松弛误差。如果总内力被松弛得过多，则由设计者决定是否调整初始预应力、检查修正后的总内力是否仍低于可接受值，或重新确定杆件尺寸，以弥补最终内力计算中的任何误差。

除张拉整体约束外，本例还采用了可施工性约束。钢缆、钢杆和木杆的最小允许面积分别设为 $A^{\min}_{steel\,cable} = 1$ cm^2、 $A^{\min}_{steel\,bar} = 30\,cm^2$, 和 $A^{\min}_{timber\,bar} = 30\,cm^2$。钢缆、钢杆和木杆的最大允许面积分别设为 $A^{\max}_{steel\,cable} = 30$ cm^2、 $A^{\max}_{steel\,bar} = 200\,cm^2$, 和 $A^{\max}_{timber\,bar} = 200\,cm^2$。节点处允许的杆件最大数量限制为 $\eta_p^{\max} = 8$。节点处杆件之间的最小分离角限制为 $\gamma^{\min} = 10°$。与前面的示例相比，节点复杂度约束明显宽松得多。请注意，此处的张拉整体约束确保每个节点处只有一个受压构件，并且节点将

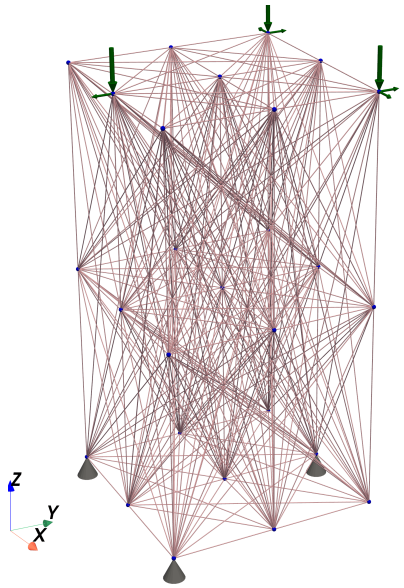


图21：用于最低隐含碳张拉整体塔设计的三维地面结构，包含302个候选杆件。

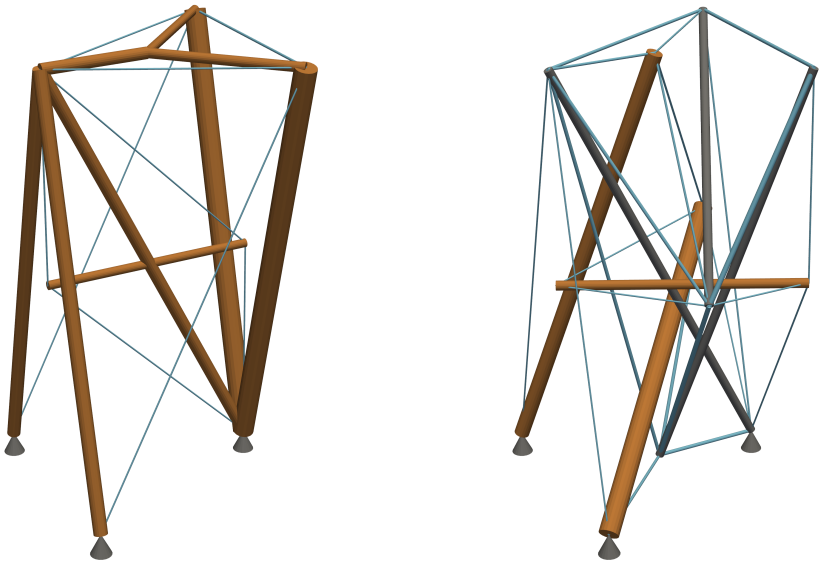
因此主要连接缆索。所有受拉和受压杆件的最小初始预应力设为 $q^{0_t} = q^{0_c} 5$ kN

为了提供基准结果，通过求解公式（27），但不包含公式（27s）或公式（27t），得到一个不含张拉整体约束的预应力桁架设计。该设计问题包含3,101个连续变量和1,208个二元变量。所得设计如图22a所示，设计的部分属性列于表4第一列。如表中所示，该设计耗时70分钟，隐含碳为76.0 kg CO_2e，质量为115 kg。值得注意的是，尽管钢杆是可选项，结构却不需要任何钢杆。木杆截面的范围为30 $cm^2 \leq A_{timber\ bar} \leq 181$ cm^2，钢缆截面的范围为1 $cm^2 \leq A_{steel\ cable} \leq 2.1$ cm^2。该设计包含九根钢缆和十一个受压木材构件。最复杂的节点位于顶边中央所施加的竖向荷载正下方，与底部的单个铰支座相对；四根大型木构件在此连接。竖向构件之间仅相隔14.0°。由于该结构采用预应力，施加任何荷载之前，所有缆索均处于受拉状态。

设计类型设计类型设计类型	预应力桁架预应力桁架预应力桁架	张拉整体张拉整体张拉整体
运行时间	45分钟23秒	255分钟57秒
钢索数量	9	22
钢杆数量	0	3
木杆数量	11	3
质量（千克）	115	333
隐含碳（千克CO_2e）	76.0	447

Tab表4：图22中预应力桁架和张拉整体结构设计的性能属性 .

在满足公式（27）中的所有约束条件下求解设计问题，可得到图22b所示的设计。该问题使用的连续变量和二元变量数量相同。获得所示结果的计算时间接近256分钟，比图22a中的结果明显增加。该设计的隐含碳和质量分别增加了488%和190%。这与Nanayakkara等人的发现一致：张拉整体结构的荷载路径效率较低，因此需要更多材料，并会增加隐含碳。请注意，该设计方案现在用到了全部三种构件选项。图23展示了分别突出显示三种不同构件类型的设计。图23a中可以看到，大量小截面的钢缆构成了连续的拉力网络，将多个节点连接在一起。受拉缆索单元的数量是受压杆单元的三倍多。缆索的横截面积在1 $cm^2 \leq A_{steel\ cable} \leq 10.5$ cm^2之间变化。图23b显示，该设计仅有三根较长的受压钢杆。



(a) (b)

图22：三构件设计的结果：（a）预应力桁架；（b）张拉整体结构。每个单元的颜色表示其构件类型：青色表示钢缆，灰色表示受压钢杆，棕色表示木材。

它们的横截面积均为30 cm^2。最后，图23c展示了其余受压构件的位置，即三根木杆。木杆尺寸较大，横截面积范围为35.5 $\text{cm}^2 \leq A_{timber\,bar} \leq 154\ \text{cm}^2$。将图23b和图23c叠加后可以看出，受压构件之间既不共用节点，也不相交。因此，张拉整体条件得以满足。最复杂的节点连接了七个单元；最终设计中，杆件之间的最小分离角为 12.5°。该节点位于结构左侧中央，在高度方向上处于底部两个铰支座与左侧施加的荷载之间的中点。



(a) (b) (c)

图23：图22b所示的张拉整体设计，突出显示了最终设计中的不同构件类型，即：（a）钢缆；（b）受压钢构件；（c）受压木材构件。

4 结论

本文提出了新颖的混合整数线性规划（MILP），用于设计采用多种候选材料或构件类型、隐含碳最低的桁架和张拉整体结构。本文开发的公式纳入了可建造性约束，使设计者能够限制每种材料或构件类型的横截面积下限和上限，明确限制连接于同一节点的杆件数量，并确保所有杆件之间至少满足最小角度要求。在采用多种材料或构件时，设计者还可以限制每个节点处特定构件类型的数量。结果表明，该设计方法能够满足本文为单材料、多材料和多构件设计定义的所有可建造性约束。问题构建还可扩展至其他设计约束，例如预应力和张拉整体特性。

正如预期，本文表明，环境因素与可建造性因素之间的相互作用十分复杂。可建造性约束对桁架设计总隐含碳的影响因项目而异，且差异很大。对于单材料结构，在本文考察的案例中，隐含碳增加了 1–48%。对于多材料桁架（本文展示的是木材与钢材的设计），应用所有可建造性约束后，两个案例的碳成本均增加约 16–19%。这些数值并不具有普遍适用性，因为纳入可建造性因素的影响很大程度上取决于项目特定要求，包括兼容截面尺寸和期望的连接设计复杂度。比较可建造的单材料与多材料桁架设计方案时，本文案例表明，无法提出普遍适用的设计建议。在二维米歇尔桁架设计示例中，引入第二种材料所带来的益处较小（8.2%）；而在三维铁路桥设计案例中，结合木材和钢构件则可将环境性能提升超过 28%。

利用混合整数线性规划公式纳入可施工性约束，往往会增加计算时间。这一趋势在本文中同样可见：计算时间取决于具体问题，且目前尚无严谨的方法能够预先预测给定问题所需的计算量。对于本文研究的桁架问题，计算时间从几秒（无约束问题）到极端受约束情况下的数小时不等。本文考虑的计算量最大的设计案例，是受到可施工性约束的双材料 Michell悬臂结构，确定其全局最小值约需 79 小时。不过，混合整数线性规划求解器的性能持续改进仍是一个活跃且不断发展的研究领域，未来或可降低将混合整数线性规划用于结构设计的计算开销。

此外，本文对材料本构关系采用了 McCormick松弛。这样既能实现对超静定结构和多材料结构的设计，也能使问题公式保持线性，即使将横截面积作为连续设计变量也是如此。但这也带来了两项主要代价。首先，与忽略这些条件并假设材料呈弹性—理想塑性响应相比，在公式中纳入协调条件和本构定律通常会增加计算时间。这是因为问题中的变量和约束都会增多。其次，通过对非线性本构定律进行线性松弛，结构内力的计算可能会不准确。虽然大多数误差较小（低于 5%），可通过对最大材料许用应力采用安全系数予以控制，但某些设计中的误差可能会大到不可接受。如第 3.3 节中无约束的木材桥梁和木材—钢材桥梁设计所示，在荷载路径灵活性较大的高度超静定方案中往往会出现较大误差。McCormick包络利用这种灵活性，通过高估和低估杆件内力来改善目标函数。由于可施工性约束通常会降低设计高度超静定桁架的可能性，因此有助于 McCormick约束给出更准确的杆件力近似值。未来工作可进一步收紧这些 McCormick约束的界限，在提高准确性的同时，避免设计过于保守。

当前研究仍有一些局限，例如设计公式中未考虑屈曲。然而，针对单一材料桁架的屈曲与稳定性约束混合整数线性规划桁架设计此前已有相关研究 [47], [48]。尽管尚未经过测试，现有文献中的方法应当能够与本研究的问题构建兼容。此外，本研究仅最小化与设计生命周期产品阶段相关的结构构件隐含碳 [4]。其他与结构设计环境影响相关的重要因素并未纳入，例如制造连接或基础所产生的隐含碳。未来可通过多目标优化扩展当前研究，同时最小化结构构件的碳排放、全部连接的碳排放制造成本，以及直接影响基础设计所需材料用量的结构重量。

参考文献

[1] 联合国环境规划署，“2023年度报告：信守承诺”，联合国环境规划署，技术报告，2023年。[2] 联合国环境规划署，“建筑与施工全球状况报告：超越基础”，联合国环境规划署，技术报告，2024年。[3] 国际能源署，“清洁能源进展追踪2023”，国际环境署，技术报告，2023年。[4] C. De Wolf、F. Pomponi 和 A. Moncaster，“建筑隐含二氧化碳当量的测量：对当前行业实践的综述与批判”，《能源与建筑》，第140卷，第68–80页，2017年。[5] S. Kaethner、J. Burridge 等，“结构框架的隐含二氧化碳”，《结构工程师》，第90卷，第5期，第33–40页，2012年。[6] F. Pomponi 和 A. Moncaster，“建成环境中的隐含碳减排：证据表明了什么？”《环境管理杂志》，第181卷，第687–700页，2016年。[7] X. Shi 和 W. Yang，“从建筑师视角出发的性能驱动建筑设计与优化技术”，《建筑自动化》，第32卷，第125–135页，2013年。[8] T. Häkkinen、M. Kuittinen、A. Ruuska 和 N. Jung，“在建筑设计过程中减少隐含碳”，《建筑工程杂志》，第4卷，第1–13页，2015年。[9] D. Fang、N. Brown、C. De Wolf 和 C. Mueller，“减少结构系统中的隐含碳：早期设计策略综述”，《建筑工程杂志》，第76卷，第107 054页，2023年。[10] N. Alaux 等，“建筑全生命周期温室气体减排与清除策略：对欧盟成员国的影响及推广潜力”，《环境管理杂志》，第370卷，第122 915页，2024年。[11] M. P. Bendsoe 和 O. Sigmund，拓扑优化：理论、方法与应用。施普林格科学与商业媒体，2013年。[12] H. A. Eschenauer 和 N. Olhoff，“连续体结构的拓扑优化：综述*”，《应用力学评论》，第54卷，第4期，第331–390页，2001年。doi: https://doi.org/10.1115/1.1388075[13] O. Sigmund 和 K. Maute，“拓扑优化方法：比较综述”，《结构与多学科优化》，第48卷，第6期，第1031–1055页，2013年。[14] M. P. Bendsøe、A. Ben-Tal 和 J. Zowe，“桁架几何形状与拓扑设计的优化方法”，《结构优化》，第7卷，第141–159页，1994年。[15] G. Rozvany、M. Bendsoe 和 U. Kirsch，“结构布局优化”，1995年。[16] M. D. Webster 等，“到2050年实现结构材料隐含碳净零”，美国土木工程师学会：美国弗吉尼亚州雷斯顿，2020年。[17] B. Li、J. Hong 和 Z. Liu，“基于低碳制造考量的焊接箱形梁结构新型拓扑优化方法”，《清洁生产杂志》，第142卷，第2792–2803页，2017年。[18] Y. Wang 和 O. Sigmund，“多材料主动结构的拓扑优化：降低能源消耗与碳足迹”，《结构与多学科优化》，第67卷，第1期，第5页，2024年。[19] L. Zhang、Y. Zheng 和 J. Feng，“从材料选择到结构拓扑优化：基于碳足迹分配的可持续产品设计”，《机械设计杂志》，第146卷，第12期，2024年。[20] Y. Liu、J. L. Jewett 和 J. V. Carstensen，“混凝土体积减少的拓扑优化深型钢筋混凝土梁的实验研究”，载于第二届*RILEM*混凝土与数字化制造国际会议：数字混凝土*2020 2*，施普林格，2020年，第601–611页。[21] B. Wethyavivorn、S. Surit、T. Thanadirek 和 P. Wethyavivorn，“基于拓扑优化的钢筋混凝土梁：设计与实验”，《结构工程杂志》，第148卷，第10期，第04022 154页，2022年。

[22] N. Pressmair 和 B. Kromoser，《助力资源高效型建造：结构优化混凝土梁的设计流程与实验研究》，《工程结构》，第 281 卷，文章编号 115757，2023 年。[23] A. Chandrasekhar、S. Sridhara 和 K. Suresh，《通过神经网络将材料选择融入设计优化》，《计算机辅助工程》，第 38 卷，第 5 期，第 4715–4730 页，2022 年。[24] K. J. Lee、Y. Huang 和 C. T. Mueller，《用于高性能设计优化的可微结构分析框架》，arXiv 预印本 arXiv:2409.09247，2024 年。[25] E. Ching 和 J. V. Carstensen，《面向低隐含碳设计的木材—钢结构桁架拓扑优化》，《工程结构》，第 252 卷，2022 年。doi: https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113540[26] R. D. Kundu 和 X. S. Zhang，《面向可持续发展的多材料拓扑优化：融合环境影响的高效结构设计》，《结构与多学科优化》，第 68 卷，第 1 期，第 1–20 页，2025 年。[27] M. S. Smith、D. Fang、C. Mueller 和 J. V. Carstensen，《结构工程实践中的材料优化如何降低隐含碳：认知障碍与机遇》，《建筑工程杂志》，第 95 卷，文章编号 109 943，2024 年。[28] W. Dorn、R. E. Gomory 和 H. Grenberg，《最优结构的自动设计》，1964 年。[29] H. Deng 和 A. C. To，《采用基于投影的地基结构法（p-gsm）进行线性与非线性拓扑优化设计》，《国际工程数值方法杂志》，第 121 卷，第 11 期，第 2437–2461 页，2020 年。doi: https://doi.org/10.1002/nme.6314 [30] J. V. Carstensen、H. Kim-Tackowiak 和 M. Y. Liang，《利用混合整数线性规划提高材料限制严格的拓扑优化设计的可制造性》，《工程结构》，第 284 卷，文章编号 115 955，2023 年。[31] 建筑业研究院（CII），《可建造性概念文件》，可建造性工作组，技术报告，1986 年。[32] G. Jergeas 和 J. V. d. Put，《可建造性对建设项目的益处》，《建筑工程与管理杂志》，第 127 卷，第 4 期，第 281–290 页，2001 年。[33] M. Stolpe，《离散设计变量下的桁架优化：批判性综述》，《结构与多学科优化》，第 53 卷，第 349–374 页，2016 年。[34] A. Asadpoure 、 J. K. Guest 和 L. Valdevit，《将制造成本纳入离散结构与晶格的拓扑优化》，《结构与多学科优化》，第 51 卷，第 385–396 页，2015 年。[35] A. J. Torii、R. H. Lopez 和 L. F. F. Miguel，《桁架优化中的设计复杂度控制》，《结构与多学科优化》，第 54 卷，第 289–299 页，2016 年。[36] A. Asadpoure、M. Harati 和 M. Tootkaboni，《增广空间中的离散拓扑优化：集成单元移除以实现最小尺寸与网格敏感性控制》，《结构与多学科优化》，第 62 卷，第 2615–2627 页，2020 年。doi: https://doi.org/10.1007/s00158-020-02630-3[37] H. Lu 和 Y. M. Xie，《减少桁架布局优化中不同杆件的数量》，《结构与多学科优化》，第 66 卷，第 3 期，文章编号 52，2023 年。[38] K. J. Lee、R. Danhaive 和 C. T. Mueller，《用于量化空间桁架连接复杂度的节点力需求球谐形状描述符》，《建筑、结构与建造》，第 2 卷，第 1 期，第 145–164 页，2022 年。[39] R. Van Mellaert、G. Lombaert 和 M. Schevenels，《考虑位移、杆件和节点约束的静定桁架全局尺寸优化》，《结构工程杂志》，第 142 卷，第 2 期，文章编号 04 015 120，2016 年。[40] C. Reintjes 和 U. Lorenz，《衔接桁架拓扑优化的混合整数线性规划与增材制造》，《优化与工程》，第 22 卷，第 2 期，第 849–893 页，2021 年。doi: https://doi.org/10.1007/s11081-020-09541-8

[41] J. Kronqvist、D. E. Bernal、A. Lundell 和 I. E. Grossmann，《凸混合整数非线性规划求解器的综述与比较》，《优化与工程》，第 20 卷，第 397–455 页，2019 年。doi: https://doi.org/10.1007/s11081-018-9411-8[42] I. E. Grossmann、V. Voudouris 和 O. Ghattas，《若干非线性离散设计优化问题的混合整数线性规划重构》，载于《全局优化最新进展》，1992 年，第 478–512 页。[43] S. Bollapragada、O. Ghattas 和 J. N. Hooker，《基于逻辑的分支切割法在桁架结构最优设计中的应用》，《运筹学》，第 49 卷，第 1 期，第 42–51 页，2001 年。[44] A. M. Faustino、J. J. Júdice、I. M. Ribeiro 和 A. S. Neves，《桁架拓扑优化的整数规划模型》，《运筹研究》，第 26 卷，第 1 期，第 111–127 页，2006 年。[45] M. H. Rasmussen 和 M. Stolpe，《采用并行切割分支法对离散桁架拓扑设计问题进行全局优化》，《计算机与结构》，第 86 卷，第 13–14 期，第 1527–1538 页，2008 年。doi: https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.05.019[46] M. Shahabsafa 等，《采用混合整数邻域搜索求解离散桁架设计问题的新方法》，《结构与多学科优化》，第 58 卷，第 2411–2429 页，2018 年。[47] K. Mela，《采用混合变量方法解决桁架拓扑优化中的杆件屈曲问题》，《结构与多学科优化》，第 50 卷，第 6 期，第 1037–1049 页，2014 年。[48] Q. Cai、R. Feng、Z. Zhang 和 X. Wang，《基于混合整数规划方法、考虑运动稳定性的桁架结构拓扑优化》，《结构与多学科优化》，第 67 卷，第 7 期，文章编号 112，2024 年。[49] M. Stolpe，《将拓扑优化问题重构为线性或凸二次混合 0–1 规划问题》，《优化与工程》，第 8 卷，第 2 期，第 163–192 页，2007 年。[50] H. Fairclough 和 M. Gilbert，《采用混合整数线性规划和约束运行时生成的简化桁架布局优化》，《结构与多学科优化》，第 61 卷，第 1977–1999 页，2020 年。doi: https://doi.org/10.1007/s00158-019-02449-7[51] K. Snelson，《张拉整体的艺术》，《国际空间结构杂志》，第 27 卷，第 2–3 期，第 71–80 页，2012 年。[52] S. Ehara 和 Y. Kanno，《通过混合整数规划进行张拉整体结构拓扑设计》，《国际固体与结构杂志》，第 47 卷，第 5 期，第 571–579 页，2010 年。[53] Y. Kanno，《柔度约束下的张拉整体结构拓扑优化：一种混合整数线性规划方法》，《优化与工程》，第 14 卷，第 61–96 页，2013 年。doi:https://doi.org/10.1007/s11081-011-9172-0[54] Y. Kanno，《自重荷载作用下张拉整体结构的拓扑优化》，《日本运筹学会杂志》，第 55 卷，第 2 期，第 125–145 页，2012 年。[55] Y. Kanno，《通过混合整数规划探索新型张拉整体结构》，《结构与多学科优化》，第 48 卷，第 95–114 页，2013 年。[56] K. Liu 和 G. H. Paulino，《基于任意基础结构、通过力最大化进行张拉整体拓扑优化》，《结构与多学科优化》，第 59 卷，第 2041–2062 页，2019 年。[57] X. Xu、Y. Wang、Y. Luo 和 D. Hu，《考虑屈曲约束的张拉整体结构拓扑优化》，《结构工程杂志》，第 144 卷，第 10 期，文章编号 04 018 173，2018 年。[58] Y. Wang、X. Xu 和 Y. Luo，《考虑几何刚度的张拉整体及预应力索杆结构拓扑优化》，《结构工程杂志》，第 151 卷，第 6 期，文章编号 04 025 055，2025 年。[59] Y. Wang、X. Xu 和 Y. Luo，《考虑整体稳定条件的张拉整体结构拓扑寻优》，《结构工程杂志》，第 146 卷，第 12 期，文章编号 04 020 260，2020 年。[60] Y. Wang、Z. Han、X. Xu 和 Y. Luo，《主动张拉整体结构的拓扑优化》，《计算机与结构》，第 305 卷，文章编号 107 513，2024 年。

[61] K. Nanayakkara、L. He、H. E. Fairclough 和 M. Gilbert，“承载张拉整体结构的简单布局优化公式”，《结构与多学科优化》，第 62 卷，第 2935–2949 页，2020 年。[62] W. S. Hemp，《最优结构》。牛津大学出版社，1973 年。[63] M. Ohsaki，《有限维结构的优化》。CRC出版社，2016 年。[64] L. He、M. Gilbert 和 X. Song，“用于桁架自适应布局优化的 Python脚本”，《结构与多学科优化》，第 60 卷，第 835–847 页，2019 年。doi： https://doi.org/10.1007/s00158-019-02226-6[65] T. Zegard 和 G. H. Paulino，“Grand——基于地面结构的任意二维域 MATLAB拓扑优化”，《结构与多学科优化》，第 50 卷，第 861–882 页，2014 年。[66] T. Zegard 和 G. H. Paulino，“Grand3——基于地面结构的任意三维域 MATLAB拓扑优化”，《结构与多学科优化》，第 52 卷，第 1161–1184 页，2015 年。[67] S. Leyffer 和 P. Manns，“混合整数偏微分方程约束优化中的 McCormick包络”，《数学规划》，第 1–46 页，2025 年。[68] Gurobi Optimization, LLC，《Gurobi优化器参考手册》，12.0版，2024 年。 [在线]。可访问：https://www.gurobi.com[69] K. Feickert 和 C. T. Mueller，“薄壳基础：通过材料高效几何形态量化隐含碳减排”，《建筑、结构与建造》，第 4 卷，第 1 期，第 15–36 页，2024 年。