加　THMazur 高阶 Heegner 点猜想的开篇

张晓宇

摘要。我们建立了 Mazur 猜想的定量强化版本，研究模曲线和志村曲线上的高阶 Heegner 点的非扭点性质，并分别证实了适用于足够大幂次 n 的垂直版本和适用于素数 $p \gg 1$的水平版本。与 Cornut 和 Vatsal 先前依赖于关于幺幂流的 Ratner 定理、且要求层结构满足严格假设的策略不同，我们通过利用伽罗瓦轨道与 Hecke 轨道之间的相互作用，绕过了这些限制。通过量化这些轨道的相对大小，我们将问题归结为关于海克算子等分布及联结测度分类的遍历性结果。这一方法使我们得以分析同时超奇异约化，而无需要求约化映射具有满射性。

arXiv:2602.07210v1 [math.NT] 6 Feb 2026

目录

1. 引言 概述 记号 2. 可公度性判据 2.1. G单 1
2.2. G 单群的乘积 3. Hecke 算子 4. 测度的汇合 3
5. Hodge 型志村簇 6. 志村曲线上的 Heegner 3
点 7. Hecke 轨道与伽罗瓦群轨道的关系 8. 3
Mazur 猜想-1 的变体 9. Mazur 猜想-2 的变体 4
参考文献 5
7
7
10
13
15
17
19
20

1. 引言

模曲线和志村曲线上的 Heegner 点蕴含着深刻的算术信息，在岩泽理论、Birch–Swinnerton-Dyer 猜想和 Gross–Zagier 公式中发挥着关键作用。

设 L 是判别式为 $D_{L/\mathbb{Q}}$ 的虚二次域，且 N 是一个正整数，使得 N 的每个素因子都在 L 中分裂。存在一个满足 $\mathcal{O}_L/\mathcal{N} \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 的理想 $\mathcal{N} \subset \mathcal{O}_L$。模曲线 $X_0(N)$ 参数化了椭圆曲线 $E_1 \to E_2$ 的同源，其循环核的阶为 N。

对每个正整数 n，令 $\mathcal{O}_n := \mathbb{Z} + n\mathcal{O}_L$ 表示 L 中导子为 n 的阶。设 $\mathcal{N}_n := \mathcal{O}_n \cap \mathcal{N}$，并定义 $X_0(N)$ 上导子为 n 的 Heegner 点为

$$x[n] := [\mathbb{C}/\mathcal{O}_n \to \mathbb{C}/\mathcal{N}_n^{-1}] \in X_0(N).$$

众所周知，$x[n]$ 定义在 L 的导子为 n 的环类域 $L[n]$ 上。令 $J_0(N)$ 为 $X_0(N)$ 的雅可比簇。对于任意由 $J_0(N)$ 作商得到的阿贝尔簇 $A/\mathbb{Q}$，我们将诱导的态射记为

$$\pi\colon X_0(N) \to J_0(N) \to A.$$

对于每个 n，我们设定 $y[n] := \pi(x[n])$。

2020数学主题分类。 11G15、14K22、22D40。 关键词与短语。 阿贝尔簇、Hecke 轨道、伽罗瓦轨道、Mazur 猜想。

取一个素数 p，并令 $L[p^\infty]=\bigcup_n L[p^n]$。令 $H[p^\infty]$ 表示L的最大反圆分 $\mathbb{Z}_p$-扩张；注意，$L[p^\infty]/H[p^\infty]$ 是有限扩张。Mazur 猜想（[Maz83]）这些高阶 Heegner 点具有非扭性，这一结果随后由 Cornut（[Cor02]）证明：

定理 1.1。 存在一个整数 $n\geq 0$ 使得

$$\mathrm{Tr}_{L[p^\infty]/H[p^\infty]}(y[p^n])\notin A(H[p^\infty])_{\mathrm{tors}}.$$

虽然 Cornut 定理证明了非挠点的存在性，但它留下了关于这些点如何分布的定量问题：有多少个整数 n 使得迹 $\mathrm{Tr}_{L[p^\infty]/H[p^\infty]}(y[p^n])$ 是非挠的？特别是，这样的 n 是否有无穷多个？本文将在关于 p的温和假设下，证明 Mazur 猜想的以下强化版本：

定理 1.2 (推论 9.2)。 假设 p 与 $ND_{L/\mathbb{Q}}$互素。对于 $n\gg 1$，有

$$\mathrm{Tr}_{L[p^\infty]/H[p^\infty]}(y[p^n])\notin A(H[p^\infty])_{\mathrm{tors}}.$$

关于精确表述，请参阅推论 9.2。虽然 Mazur 猜想自然可以推广到志村曲线，但在这一情形下，定理 1.2 此前由 Cornut 和 Vatsal [CV07，定理 4.10] 证明，不过需要对层结构附加假设（假设 (H2)，见同上）。他们的证明（[CV05，CV07]）依赖于对四元数代数中单位的阿代尔点上的环面作用进行细致分析。相比之下，我们的方法截然不同，绕开了这些限制。

我们还提出并证明了 Mazur 猜想的一个水平版本。设 $L[\infty]=\bigcup_k L[k]$，并固定一组代表元 $\mathcal{T}\subset$ 伽罗瓦群$(L[\infty]/L)$，它们对应于伽罗瓦群$(L[1]/L)$ 的有限商，其中 $L[1]/L$ 是伽罗瓦群$(L[\infty]/L)$ 的有限商。

Theo注 1.3 （推论 8.4，水平 Mazur 猜想）。 对于任意素数 $p\gg 1$，我们有 e

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{T}}\sigma(y[p])\notin A(L[\infty])_{\mathrm{tors}}.$$

这两个定理都是一个更一般结果的推论。设 $n=\prod_{i=1}^s p_i^{e_i}$ 为一个与 $ND_{L/\mathbb{Q}}$ 互素的正整数。定义密度项

$$d(n):=\prod_{i=1}^s d(p_i^{e_i}),\qquad d(p^e)=\begin{cases}1, & \text{if } p \text{ is inert in } L,\\ \frac{p-1}{p+1}, & \text{if } p \text{ splits in } L.\end{cases}$$

固定一个在 L^1 中惰性的素数 $\ell\gg 1$ （满足 §8 中详述的辅助条件）以及伽罗瓦群$(L[\infty]/L)$ 的有限子集 $\mathcal{T}\subset$。

定理 1.4 （推论 8.2）。 存在一个常数 c（π、ℓ、$\mathcal{T}$）$\in$（0，1），它取决于态射 π、素数 ℓ 和集合 $\mathcal{T}$，使得对于任意与 $\ell ND_{L/\mathbb{Q}}$ 互素且满足 $1-d$（n）$<c$（π、ℓ、$\mathcal{T}$）的 $n\gg 1$，我们有

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{T}}\sigma(y[n])\notin A(L[\infty])_{\mathrm{tors}}.$$

常数 $c(\pi,\ell,\mathcal{T})$ 在 (19) 中给出了显式表达。若n 没有在 L中分裂的素因子，则条件 $1-d(n)<c(\pi,\ell,\mathcal{T})$ 自动满足；因此，定理 1.3 和推论 8.4 可直接得出。

注 1.5. 推论 *8.2*、*8.3* 和 *8.4* 对 $\mathbb{Q}$ 上任意志村曲线均成立，而不仅限于模曲线。

定理 8.2 的证明归结为一个关于海格纳点 $x[n]$ 的伽罗瓦轨道分布问题。具体而言，设 $X_0(N)^{\mathrm{ss}}(\mathbb{F}_\ell)$ 表示 $X_0(N)(\mathbb{F}_\ell)$ 的超奇异轨迹，并对每个 $n>0$ 设 $\mathfrak{G}_n\subset\mathrm{Gal}(L[\infty]/L)$ 为一个特定子集。在定理 8.1 中，我们刻画了如下针对$n\gg 1$的同时超奇异约化映射：

$$\mathbf{R}_{\mathcal{T}}\colon\{\nu(x[n])|\nu\in\mathfrak{G}_n\}\to\prod_{\sigma\in\mathcal{T}}X_0(N)^{\mathrm{ss}}(\overline{\mathbb{F}}_\ell),\quad x\mapsto(\sigma(x)^{(\ell)})_{\sigma\in\mathcal{T}}.$$

这里 $\sigma(x)^{(\ell)}$ 表示将 $\sigma(x)$模 ℓ 约化。在对 $\mathcal{T}$施加适当的可公度条件后，我们证明$\mathbf{R}_{\mathcal{T}}$对 $n\gg 1$是满射的。

定理 8.1 的证明策略依赖于黑克轨道 $T_n(x[1])$ 与伽罗瓦轨道 $\mathfrak{G}_n(x[n])$ 之间的相互作用。我们在定理 7.2 中证明了 $\mathfrak{G}_n(x[n])$ 包含于 $T_n(x[1])$。此外，它们的相对

[1] ℓ 在 L 中为惰性的条件确保所有海格纳点 $x[n]$ 在 ℓ处都具有超奇异 约化。

大小可由 $d(n)$ 量化：随着 $1-d(n)$ 减小，伽罗瓦轨道在黑克轨道中所占的比例增大。因此，假设 $1-d(n) < c(\pi,\ \ell,\ \mathcal{T})$，只需证明黑克轨道（ $T_n(x[1])$ ） $_n$ 在 $\prod_{\sigma\in\mathcal{T}} X_0(N)^{\mathrm{ss}}(\mathbb{F}_\ell)$ 的特定子集上等分布。

为了实现这一点，我们将 Clozel–Oh–Ullmo [COU01] 的等分布结果与 Einsiedler–Lindenstrauss [EL19]的测度分类结合起来。启发式地，前者确立了 $T_n(x[1]^{(\ell)})$ 在 $X_0(N)^{\mathrm{ss}}(\mathbb{F}_\ell)$ 的单个副本上的等分布，而后者表明，（经 $\mathcal{T}$ 扭变的）同时超奇异约化随着 $n\to+\infty$ 生成一个代数测度（[EL19，定义 1.2]）。随后，我们运用简单非交换群自积的子群分类结果来得出结论。

通过细化这些论证，我们证明推论 8.2 的如下更强版本，它蕴含定理 1.2 与推论 9.2：

定理 1.6（定理 9.1）。固定由素数 ℓ 组成的无限集 $\mathcal{S}^\circ$，使得 $x[1]$ 在每个$\ell\in\mathcal{S}^\circ$处都具有超奇异约化。于是，对任意 $0<c\ll 1$，存在 n_0，使得对任意与 $\mathcal{S}^\circ$ 中的素数互素的 $n>n_0$，以及满足 $1-d(n)<c$ 的 $\mathfrak{N}D_{L/\mathbb{Q}}$，我们有

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{T}} \sigma(y[n]) \notin A(L[\infty])_{\mathrm{tors}}.$$

值得注意的是，该定理的证明并不需要$\mathbf{R}_{\mathcal{T}}$在$\mathfrak{G}_n(x[n])$上的满射性；相反，它利用了从无限集 $\mathcal{S}^\circ$ 中任意选取足够大的素数 ℓ 这一灵活性（见 §9）。

这项工作将数论问题转化为遍历理论和分布问题，这一主题已见于[Cor02、Vat02、CV05、CV07]。然而，以往的研究利用了拉特纳定理关于幺幂流的结果，而我们采用了联结测度的分类（改进了 [EL19]）以及海克算子等分布（[COU01]）。我们的关键创新在于利用海克轨道与伽罗瓦轨道之间的密切关系，推导后者的分布性质。我们指出， [EL19] 也已应用于 [ALMW22]中的椭圆曲线同时超奇异约化问题。

Mazur 的原始猜想对岩泽主猜想有重要应用（[Ber95、NS99、How04]）。我们的结果可能有助于证明 $\mathrm{Gal}(\underline{L[p]}/L[p])$ 的伽罗瓦模在 $p\gg 1$上的科雷瓦金系统非平凡。此外，我们的方法或可在更广泛的背景下，得到自守表示经导子足够大的特征扭曲后的 Rankin–Selberg L 值不消失的结果，类似于 [CV07，定理 1。13] 我们计划在未来的工作中探索这些方向。

来自 [Cor02] 的遍历论证在 [Zha25],中得到了简化，并推广到 Hodge 型志村簇； [CV05, §2]的结果则在 [Zha25b, Appendix]中从 SL_2 推广到约化群。如 §7 所示，Hecke 轨道与伽罗瓦轨道之间的关系可以自然地推广到高秩群。

提纲。本文结构如下。从 §2 到 §5，我们在一般框架下进行讨论。§2 中，我们对非交换单群的自乘积的子群进行分类，并将结果推广到单群的乘积。第 3 节介绍海克算子。§4 中，我们建立双陪集空间$\Gamma\backslash G(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}})/U^{\mathcal{S}'}$的多个副本上的 Hecke 轨道分布结果。第 5 节将这些结果应用于 Hodge 型志村簇，得出明确的等分布结论。§6 中，我们定义志村曲线上的海格纳点。第 7 节探讨 Hecke 轨道与伽罗瓦轨道之间的关系。§8 中，我们应用前述结果证明 Mazur 猜想的若干变体。最后，§9 对 §8 中的论证作进一步改进，以证明更强的结果。

记号。对于 $\mathbb{Q}$的有限处集 $\mathcal{S}$，我们记

$$\mathbb{Q}_{\mathcal{S}}=\prod_{\ell\in\mathcal{S}}\mathbb{Q}_p,\quad \mathbb{A}^{\mathcal{S}}=\prod_{v\notin\mathcal{S}}{}'\mathbb{Q}_v.$$

对于抽象群/代数群 G，我们用 G^1 表示 G 的导出抽象群/代数子群，并用 Z_G 表示 G的中心。

2. 可公度性判据

回顾一下，群 G 的两个子群 $G_1,\ G_2$ 是可公度的，当且仅当 $G_1\cap G_2$ 在 G_1 和 G_2 中的指数都有限。G_1 在 G 中的可公度化子是满足 G_1 与 gG_1g^{-1} 可公度的元素 $g\in G$ 组成的集合；我们将其记为 $\mathcal{C}(G_1)$。若存在某个 $g\in G$ 使得 $G_2=gG_1g^{-1}$，那么 G_1 与 G_2 可公度，当且仅当 $g\in\mathcal{C}(G_1)$。

对于群 G和有限集 $\mathcal{T}$，记

$$\Delta = \Delta^{\mathcal{T}} \colon G \to \prod_{\sigma\in\mathcal{T}} G$$

对于对角映射。对于任意 $\sigma_0 \in \mathcal{T}$，记

$$\mathrm{pr}_{\sigma_0} \colon \prod_{\sigma\in\mathcal{T}} G \to G$$

σ_0个分量的投影。对于非空子集 $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$，定义 $\prod_{\sigma\in\mathcal{T}} G$ 的一个子群为为到

$$G^{\mathcal{T}'} = \left\{ (g_\sigma) \in \prod_{\sigma\in\mathcal{T}} G \mid g_\sigma = 1 \text{ for all } \sigma \notin \mathcal{T}' \right\}.$$

我们用 $\Delta^{\mathcal{T}'} \colon G \to G^{\mathcal{T}'} \hookrightarrow G^{\mathcal{T}}$表示部分对角映射。

$G^{\mathcal{T}}$的子群 H称为对角子群的乘积，如果存在两两不交的非空子集 $\mathcal{T}_1$，$\cdots$，$\mathcal{T}_r$属于 $\mathcal{T}$，使得$H = \prod_{i=1}^{r} \Delta^{\mathcal{T}_i}($ G)。（我们不要求 $\mathcal{T}_i$ 的并集等于整个 $\mathcal{T}$。）于是有

命题 2.1。设 G 是单且非交换的。那么 $G^{\mathcal{T}}$的子群 H 被 $\Delta^{\mathcal{T}}$（G）正规化，当且仅当它是对角子群的乘积。

证明。这是 [Cor02，命题 3.10]。 □

在接下来的两个小节 §2.1 和 §2.2 中，我们分别讨论 G 是单群以及 G 是单群的乘积的情形；后一种情形建立在前一种情形的基础上。

2.1. G **单群**。从现在起，我们假设 G 是一个单的非交换 p-进李群，并且由单参数伴随幺幂子群生成（按 [Rat95] 的意义）。设 $(\Gamma_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{T}}$ 是 G 的有限族离散余紧子群，并令

$$\Gamma = \prod_{\sigma\in\mathcal{T}} \Gamma_\sigma.$$

那么 $\Gamma\backslash G^{\mathcal{T}}$ 是紧致的。接下来，我们将有限集 $\mathcal{T}$ 划分为

$$\mathcal{T} = \bigsqcup_{i=1}^{r} \mathcal{T}_i, \tag{1}$$

使得 σ，$\sigma' \in \mathcal{T}_i$ 当且仅当 Γ_σ 和 $\Gamma_{\sigma'}$ 可公度（这一定义良好，因为可公度是一种等价关系）。

引理 2.2。假设 取 $\mathcal{T} = \{\sigma, \sigma'\}$ 并记 $\Gamma_{\sigma,\ \sigma'} = \Gamma_\sigma \times \Gamma_{\sigma'}$。$\Gamma_{\sigma,\ \sigma'}\Delta(G)$ 在 $G^2 = G^{\mathcal{T}}$中的闭包为 [2]

$$\begin{cases} G^2, & \text{if } \Gamma_\sigma \text{ and } \Gamma_{\sigma'} \text{ are not commensurable;} \\ \Gamma_{\sigma,\sigma'}\Delta(G), & \text{if } \Gamma_\sigma \text{ and } \Gamma_{\sigma'} \text{ are commensurable.} \end{cases}$$

证明。根据假设，G由单参数伴随幺幂子群生成，因此我们可以应用关于幺幂流的 Ratner 定理（[Rat95，定理 2]），得到 $\Gamma_{\sigma,\ \sigma'}\Delta(G)$ 在 G^2 中的闭包具有形式 $\Gamma_{\sigma,\ \sigma'}H$，其中 H 是 G^2的某个闭子群。显然，H 被 $\Delta^{\mathcal{T}}(G)$ 正规化，因此根据命题 2.1，H 要么是 $\Delta(G)$，要么是 G^2（集合 $\{\sigma, \sigma'\}$ 只有两种划分）。

注意，下面的自然双射是一个同胚

$$\left(\Gamma_\sigma \bigcap \Gamma_{\sigma'}\right)\backslash G \to \left(\Delta(G) \bigcap \Gamma_{\sigma,\sigma'}\right)\backslash \Delta(G).$$

另一方面，由于 $\Gamma_{\sigma,\ \sigma'}$ 在 G^2中是离散的，$\Delta(G)$ 在 $\Gamma_{\sigma,\ \sigma'}\Delta(G)$ 中是开的，并且下面的双射再次是一个同胚（因为它是一个开连续映射）

$$\left(\Delta(G) \bigcap \Gamma_{\sigma,\sigma'}\right)\backslash \Delta(G) \to \Gamma_{\sigma,\sigma'}\backslash \Gamma_{\sigma,\sigma'}\Delta(G).$$

特别地，$(\Gamma_\sigma \bigcap \Gamma_{\sigma'})\backslash G$ 是紧致的，当且仅当$\Gamma_{\sigma,\ \sigma'}\backslash \Gamma_{\sigma,\ \sigma'}\Delta(G)$是紧致的；当且仅当$\Gamma_{\sigma,\ \sigma'}\backslash \Gamma_{\sigma,\ \sigma'}\Delta(G)$在$\Gamma_{\sigma,\ \sigma'}\backslash G^2$中是闭的。

[2]本文中的闭包均是相对于自然拓扑（p 进拓扑或阿代尔拓扑）而言的。

现在，如果 Γ_σ 和 $\Gamma_{\sigma'}$ 可公度，那么$(\Gamma_\sigma \bigcap \Gamma_{\sigma'})\backslash G$ 是紧致的，因此$\Gamma_{\sigma,\ \sigma'}\backslash\Gamma_{\sigma,\ \sigma'}\Delta(G)$在$\Gamma_{\sigma,\ \sigma'}\backslash G^2$中是闭的，于是 $H=\Delta(G)$。如果它们不可公度，那么$(\Gamma_\sigma \bigcap \Gamma_{\sigma'})\backslash G$ 不是紧致的，因此$\Gamma_{\sigma,\ \sigma'}\backslash\Gamma_{\sigma,\ \sigma'}\Delta(G)$在 G^2中不是闭的，所以我们必有 $H=G^2$。□

命题 2.3. $\Gamma\Delta^{\mathcal{T}}(G)$ 在 $G^{\mathcal{T}}$中的闭包具有如下形式： ΓH，其中 H 是如上所述的对角子群的乘积 $\prod_{i=1}^{r}\Delta^{\mathcal{T}_i}(G)$，且 $\mathcal{T}_i$ 如上所述。特别地，若每个 $\mathcal{T}_i$ 只包含一个元素，则 $\Gamma\Delta^{\mathcal{T}}(G)$ 在 $G^{\mathcal{T}}$中稠密。

证明。与前一个引理中一样，闭包具有如下形式： ΓH ，其中 H 是 $G^{\mathcal{T}}$的某个闭子群，且具有形式 $H=\prod_{i=1}^{r'}\Delta^{\mathcal{T}_i'}(G)$，其中 $\mathcal{T}$的某个划分 为：

$$\mathcal{T}=\bigsqcup_{i=1}^{r'}\mathcal{T}_i'.$$

现在任取两个元素 $\sigma,\sigma'\in\mathcal{T}$，并考虑到 σ 和 σ'的分量上的投影：

$$\mathrm{pr}_\sigma\times\mathrm{pr}_{\sigma'}\colon G^{\mathcal{T}}\to G^2.$$

显然， ΓH 在此投影映射下的像等于$\Gamma_{\sigma,\sigma'}\Delta(G)$的闭包。由引理 2.2 可知， $\sigma,\sigma'\in\mathcal{T}_i$ 当且仅当$\Gamma_{\sigma,\sigma'}\Delta(G)$的闭包不等于 G^2；当且仅当 Γ_σ 和 $\Gamma_{\sigma'}$ 可公度；当且仅当对于某个 $i'=1,\cdots,r$，有 $\sigma,\sigma'\in\mathcal{T}_{i'}$。因此，每个 $\mathcal{T}_i'$都包含在某个$\mathcal{T}_{i'}$中，从而两个划分$\mathcal{T}=\bigsqcup_{i=1}^{r}\mathcal{T}_i$ 和 $\mathcal{T}=\bigsqcup_{i=1}^{r'}\mathcal{T}_i'$相同。证明完毕。□

2.2. G **单群的乘积**。为后文所用，我们还需要处理 G 不是单群，而是单群的乘积的情形。在本小节中，我们记作

$$G=\prod_{j=1}^{t}G^{(j)},$$

其中每个 $G^{(j)}$ 都是一个由单参数伴随幺幂子群生成的单的、非交换的 p-进李群，和上一小节一样（即在 [Rat 95] 的意义下）。

命题 2.4。 $G^{\mathcal{T}}$ 的子群 H 被 $\Delta^{\mathcal{T}}(G)$ 正规化，当且仅当它具有如下形式

$$H=\prod_{j=1}^{t}\prod_{i=1}^{r_j}\Delta^{\mathcal{T}_i^{(j)}}(G^{(j)}),$$

其中，对于每个 $j=1$、 $\cdots$、 t，集合 $\mathcal{T}_{(j)1}$、 $\cdots$、 $\mathcal{T}_{(j)r_j}$ 是 $\mathcal{T}$ 的两两不交的非空子集。

证明。对于 $j=1,\ \cdots,\ t$，令

$$H^{(j)}=H\cap(G^{(j)})^{\mathcal{T}},$$

（$G^{(j)}$）$^{\mathcal{T}}$ 的一个子群。由于 H 被 $\Delta^{\mathcal{T}}$（G）正规化，子群 $H^{(j)}$ 被 $\Delta^{\mathcal{T}}$（$G^{(j)}$）正规化。因此，根据命题 2.1，我们有 $H^{(j)}$ 是（$G^{(j)}$）$^{\mathcal{T}}$ 中的对角子群的乘积：

$$H^{(j)}=\prod_{i=1}^{r_j}\Delta^{\mathcal{T}_i^{(j)}}(G^{(j)}).$$

这里 $\mathcal{T}_{(j)1},\cdots,\mathcal{T}_{(j)r_j}$ 是 $\mathcal{T}$的两两不相交的非空子集。

设‹$H=\prod_{j=1}^{t}H^{(j)}$。对任意 $h\in$‹H，记 $h=h_1\cdots h_t$，其中 $h_j\in(G^{(j)})^{\mathcal{T}}$。固定 $j\in\{1,\cdots,t\}$。则对任意$g_j\in\Delta^{\mathcal{T}}(G^{(j)})$，我们有

$$g_jhg_j^{-1}=h_1\cdots h_{j-1}(g_jh_jg_j^{-1})h_{j+1}\cdots h_t\in H.$$

因此，对任意 $g_j\in\Delta^{\mathcal{T}}(G^{(j)})$，有 $g_jhg_j^{-1}h^{-1}=g_jh_jg_j^{-1}h_j^{-1}\in H\cap(G^{(j)})^{\mathcal{T}}=H^{(j)}$。我们断言 $h_j\in H^{(j)}$。这‹蕴含 $H=H$，并完成证明。

为证明该结论，写作 $h_j=(h_{j,\ \sigma})_{\sigma\in\mathcal{T}}$其中 $h_{j,\ \sigma}\in G^{(j)}$，并考虑两种情况：

(1) 固定 $\sigma,\ \sigma' \in \mathcal{T}_{(j)\ i}$。那么对于任意 $g \in G^{(j)}$，我们有

$$gh_{j,\sigma}g^{-1}h_{j,\sigma}^{-1} = gh_{j,\sigma'}g^{-1}h_{j,\sigma'}^{-1}.$$

特别地，$h_{j}^{-1}{}_{,\ \sigma}h_{j,\ \sigma'}$ 与每个 $g \in G^{(j)}$交换。由于 $G^{(j)}$ 是单的，我们必有

$$h_{j,\sigma} = h_{j,\sigma'}.$$

(2) 固定 $\sigma \notin \bigsqcup_{i=1}^{r_j}\mathcal{T}_{(j)\ i}$。那么对于任意 $g \in G^{(j)}$，都有

$$gh_{j,\sigma}g^{-1}h_{j,\sigma}^{-1} = 1,$$

因此

$$h_{j,\sigma} = 1.$$

由这两种情形，我们推得 $h_j = (h_{j,\ \sigma})_{\sigma\in\mathcal{T}}$属于 $H^{(j)} = \prod_{i=1}^{r_j}\Delta^{\mathcal{T}_i^{(j)}}(G^{(j)})$。 □

如同引理 2.2 中一样，我们有如下结论。

引理 2.5。 设 $\mathcal{T} = \{\sigma, \sigma'\}$。则$\Gamma_{\sigma,\ \sigma'}\Delta(G)$ 在 G^2 中是闭的，当且仅当 Γ_σ 和 $\Gamma_{\sigma'}$ 是可公度的。

证明。 证明与引理 2.2 完全相同，只是当 Γ_σ 和 $\Gamma_{\sigma'}$ 不可公度时，我们不知道$\Gamma_{\sigma,\sigma'}\Delta(G)$的闭包是否等于 G^2。□

推论 2.6。 设 $\mathcal{T} = \{\sigma, \sigma'\}$，且对于任意的 $j = 1$、$\cdots$、t，子群 $\Gamma G^{(j)}$ 在 G中稠密。那么$\Gamma_{\sigma,\sigma'}\Delta(G)$在 G^2 中的闭包为

$$\begin{cases}\Gamma_{\sigma,\sigma'}\Delta(G), & \textit{if } \Gamma_\sigma \textit{ and } \Gamma_{\sigma'} \textit{ are commensurable;}\\ G^2, & \textit{if } \Gamma_\sigma \textit{ and } \Gamma_{\sigma'} \textit{ are not commensurable.}\end{cases}$$

证明。 只需考虑 Γ_σ 和 $\Gamma_{\sigma'}$ 不可公度的情形。由于 $\Gamma G^{(j)}$ 在 G中稠密，$\Gamma_\sigma G^{(j)}$和$\Gamma_{\sigma'}G^{(j)}$也稠密。根据引理 2.2 的证明，$\Gamma_{\sigma,\ \sigma'}\Delta(G)$在 G^2 中的闭包具有$\Gamma_{\sigma,\sigma'}H$ 的形式，其中 $H \subset G^2$ 是包含 $\Delta(G)$且由 $\Delta(G)$正规化的某个闭子群。因此，根据命题 2.4，H 具有如下形式

$$H = \prod_{j=1}^{t}\prod_{i=1}^{r_j}\Delta^{\mathcal{T}_i^{(j)}}(G^{(j)}).$$

由于 $H \supset \Delta(G)$，对每个 j，我们有 $\mathcal{T} = \bigsqcup_{i=1}^{r_j}\mathcal{T}_{(j)\ i}$。由于 Γ_σ 与 $\Gamma_{\sigma'}$ 不可公度，我们有 $H \neq \Delta(G)$。因此存在某个 $j_0 \in \{1, \cdots, t\}$ 使得 $r_{j_0} = 2$。特别地，H 包含 $(G^{(j_0)})^{\mathcal{T}}$。然而，由假设，$\Gamma_{\sigma,\sigma'}(G^{(j_0)})^{\mathcal{T}}$ 在 G^2 中稠密，因此 $H = G^2$。这就证明了该推论。□

于是，如同命题 2.3，我们有如下结论。

命题 2.7. 假设对任意 $j = 1$、$\cdots$、t，子群 $\Gamma G^{(j)}$ 在 G 中稠密。则 $\Gamma\Delta^{\mathcal{T}}(G)$ 在 $G^{\mathcal{T}}$ 中的闭包具有形式 ΓH，其中 H 是 G 的一个闭子群，由

$$H = \prod_{i=1}^{r}\Delta^{\mathcal{T}_i}(G)$$

对于如(1)所示的划分 $\mathcal{T} = \bigsqcup_{i=1}^{r}\mathcal{T}_i$。特别地，如果每个 $\mathcal{T}_i$ 只包含一个元素，那么 $\Gamma\Delta^{\mathcal{T}}(G)$ 在$G^{\mathcal{T}}$中稠密。

证明。 结合推论 2.6，证明与命题 2.3 的证明相同。 □

3. 海克算子

设 $\mathbf{G}$ 是定义在 $\mathbb{Q}$上的代数群，且 $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ 是 $\mathbb{Q}$的有限集。设$U^{\mathcal{S}'}$ 是 $\mathbf{G}(\mathbb{A}^{\mathcal{S}'})$ 的紧开子群，并设 $\Gamma \subset \mathbf{G}(\mathbb{Q})$ 是形如 $\Gamma = \mathbf{G}(\mathbb{Q}) \cap V$的子群，其中$V \subset \mathbf{G}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}})$ 是某个紧开子群。

对于任意 $a \in \mathbf{G}(\mathbb{A}^{\mathcal{S}})$，与 a 相关联的 赫克对应为下图：

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}^{\mathcal{S}})/(U^{\mathcal{S}'} \bigcap aU^{\mathcal{S}'}a^{-1}) & \\ \swarrow^{\pi_1} & & \searrow^{\pi_2:\, g\mapsto ga} \\ \Gamma\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}^{\mathcal{S}})/U^{\mathcal{S}'} & & \Gamma\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}^{\mathcal{S}})/U^{\mathcal{S}'} \end{array}$$

这里左箭头是自然投影映射，右箭头是自然投影与 a 的右乘的复合。

定义 3.1。 设 $a \in \mathbf{G}(\mathbb{A}^{\mathcal{S}})$。与 a相关联的 海克算子 T_a 定义如下：对于任意 $x \in \Gamma\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}^{\mathcal{S}})/U^{\mathcal{S}'}$,

$$T_a(x) = \pi_2\big(\pi_1^{-1}(x)\big) \subset \Gamma\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}^{\mathcal{S}})/U^{\mathcal{S}'}.$$

T_a 的度 $\deg(a) = \deg(T_a)$ 为

$$\deg(a) = [U^{\mathcal{S}'} : U^{\mathcal{S}'} \cap aU^{\mathcal{S}'}a^{-1}].$$

海克算子还通过以下方式在函数 $f \in L^2\big(\Gamma\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}^{\mathcal{S}})/U^{\mathcal{S}'}\big)$ 上诱导出一个算子：

$$T_a(f)(x) := \frac{1}{\deg(a)} \sum_{y \in T_a(x)} f(y).$$

由此得到一个测度 $\mu_{a,x}$在 $\Gamma\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}^{\mathcal{S}})/U^{\mathcal{S}'}$ 上，其定义要求对任意这样的 f,

$$\int_{\Gamma\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}^{\mathcal{S}})/U^{\mathcal{S}'}} f\, d\mu_{a,x} := T_a(f)(x).$$

4. 测度的汇合

设 $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \cdots, \mathbf{G}_r$是 $\mathbb{Q}$ 上连通、几乎单且非交换的代数群，使得 $\mathbf{G}_i(\mathbb{R})$ 是紧致 的，并且对所有 $i = 0, \cdots, r$，$\mathbf{G}_i^1$都是单连通的。假设存在 $\mathbb{Q}$ 的一个赋值有限集 $\mathcal{S}$，使得对任意有限 素位 $v \notin \mathcal{S}$，群 $\mathbf{G}_i(\mathbb{Q}_v)$ 两两同构（$i = 0,\mathbf{1}, \cdots, r$）。下文中，我们固定同构

$$\mathbf{G}_0(\mathbb{A}^{\mathcal{S}}) \simeq \mathbf{G}_i(\mathbb{A}^{\mathcal{S}}), \quad \forall i = 1, \cdots, r. \tag{2}$$

接着，我们固定 $\mathbb{Q}$ 的一个有限赋值集 $\mathcal{S}'$，其中包含 $\mathcal{S}$，使得对所有 $i = 0, \mathbf{1}, \cdots, r$，$\mathbf{G}_i(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'})$ 都是非紧的。特别地，每个$\mathbf{G}_i^1$都满足关于 $\mathcal{S}'$ 的强逼近性质。

我们固定一个紧开子群 $U_0^{\mathcal{S}'} \subset \mathbf{G}_0(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}'})$，并将其在同构 $\mathbf{G}_0(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}'}) \simeq \mathbf{G}_i(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}'})$ 下的像记为 $U_i^{\mathcal{S}'}$。令 $\mathbf{G} = \prod_{i=1}^r \mathbf{G}_i$ 和 $\mathbf{G}^1 = \prod_{i=1}^r \mathbf{G}_i^1$，并记 $U^{\mathcal{S}'}{}_{,0}{}^{1} = U_0^{\mathcal{S}'} \bigcap \mathbf{G}_0^1(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}'})$（$U^{\mathcal{S}'}{}_{,i}{}^{1}$ 的情形类似）。我们令

$$\Gamma_i = \mathbf{G}_i(\mathbb{Q}) \bigcap U_i^{\mathcal{S}'}, \quad \Gamma_i^1 = \Gamma_i \bigcap \mathbf{G}_i^1(\mathbb{Q}), \quad \Gamma = \prod_{i=1}^r \Gamma_i, \quad \Gamma^1 = \Gamma \bigcap \mathbf{G}^1(\mathbb{Q});$$

$$G_i = \mathbf{G}_i^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\backslash\mathcal{S}}), \quad G = \prod_{i=1}^r G_i;$$

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{G}_i^1(\mathbb{Q})\backslash\mathbf{G}_i^1(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}})/U_i^{\mathcal{S}',1} = \Gamma_i^1\backslash G_i, \quad \mathbf{X} = \prod_{i=1}^r \mathbf{X}_i.$$

在下文中，我们假设

$$\mathbf{X}_i = Z_{\mathbf{G}_i}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\backslash\mathcal{S}})\Gamma_i\backslash\mathbf{G}_i(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\backslash\mathcal{S}}) = Z_{\mathbf{G}_i}(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}})\mathbf{G}_i(\mathbb{Q})\backslash\mathbf{G}_i(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}})/U^{\mathcal{S}'}, \quad \forall i = 0, \cdots, r. \tag{3}$$

这里，只要我们假设，第二个等式就成立

$$\mathbf{G}_i(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}'}) = Z_{\mathbf{G}_i}(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}'})\mathbf{G}_i(\mathbb{Q})\mathbf{G}_i^1(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}'})U^{\mathcal{S}'}, \quad \forall i = 0, \cdots, r.$$

我们将 $\mu_{\mathbf{X}_i}$ 记作$\mathbf{X}_i$ 上的测度，该测度由 G_i上的Haar测度诱导。这是一个在 G_i的作用下保持不变的唯一测度。同样，我们记

$$\mu_{\mathbf{X}} = \mu_{\mathbf{X}_1} \times \cdots \times \mu_{\mathbf{X}_r},$$

为在 G的作用下保持不变的唯一测度。我们有以下结果。映射 ::

$$\Pi\colon \mathbf{G}_0(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}})/U_0^{\mathcal{S}'} \to \prod_{i=1}^{r} \mathbf{G}_i(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}})/U_i^{\mathcal{S}'} \to \mathbf{X}.$$

第一个映射是由 (2) 中的同构诱导的对角映射，第二个映射则是考虑到 (3) 的自然投影。

对于任意 $x \in \mathbf{G}_0(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}})/U_0^{\mathcal{S}'}$ 以及任意 $a \in \mathbf{G}_0(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}})$，我们有一个诱导测度 $\mu_{\Pi(T_a(x))}$，定义在$\mathbf{X}$ 上，定义如下:

$$\int_{\mathbf{X}} f(z) d\mu_{\Pi(T_a(x))}(z) := \frac{1}{\deg(a)} \sum_{y \in T_a(x)} f(\Pi(y)), \quad \forall f \in L^2(\mathbf{X}).$$

注意， G_i 通过右乘法作用于$\mathbf{X}_i$，类似地， G 作用于$\mathbf{X}$。特别地，$\mathbf{G}_0(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'})$ 作用于每个$\mathbf{X}_i$，并且对角地作用于$\mathbf{X}$。

我们有以下等分布结果:

定理 4.1。 假设 $r = 1$ 且 （*3*） 成立。那么，对于任意满足 $\deg(a_n) \to +\infty$ 的序列 $(a_n)_n$， 其中各项属于$\mathbf{G}_0(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}})$， 测度 $\mu_{\Pi(T_{a_n}(x))}$ 收敛到 $\mu_{\mathbf{X}}$。

证明。 我们需要证明，对于任意具有紧支撑的 $f \in L^2(\mathbf{X})$,

$$\int_{\mathbf{X}} f(z) d\mu_{\Pi(T_{a_n}(x))}(z) \to \int_{\mathbf{X}} f(z) d\mu_{\mathbf{X}}(z). \tag{4}$$

我们有一个自然投影

$$Z_{\mathbf{G}}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}} \times \mathbb{R})\Gamma\backslash(\mathbf{G}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}}) \times \mathbf{G}(\mathbb{R})) \longrightarrow \mathbf{X},$$

因此，我们可以将 f 视为 $L^2\big(Z_{\mathbf{G}}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}} \times \mathbb{R})\Gamma\backslash(G \times \mathbf{G}(\mathbb{R}))\big)$ 的一个元素，这里用到了每个 $\mathbf{G}_i(\mathbb{R})$ 都是紧致的假设。于是，（4）由 [COU01、定理 1.7 和 §4.7].[3] □ 得出。

由于 $\mathbf{G}_0$ 几乎单，存在 $\mathbf{G}_0$ 的一个单子群 $\mathbf{G}_0'$，使得 $\mathbf{G}_0' \subset \mathbf{G}_0 \subset \mathrm{Aut}(\mathbf{G}_0')$。类似地，我们有 $\mathbf{G}_i$ 的单子群 $\mathbf{G}_i'$。在（2）的识别下，我们有同构

$$\mathbf{G}_0'(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}}) \simeq \mathbf{G}_i'(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}}), \quad \forall i = 1, \cdots, r.$$

我们令 $\Gamma_i' := \Gamma_i \bigcap \mathbf{G}_i'(\mathbb{Q})$ 和 $\mathbf{G}' = \prod_{i=1}^r \mathbf{G}_i'$。于是我们可以并且将会把 $\mathbf{G}'(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}})$ 与 $\mathbf{G}_0(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}})^r$视为相同。我们有一个划分

$$\{1, \cdots, r\} = \mathcal{T}_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup \mathcal{T}_k, \tag{5}$$

使得 $i, j \in \mathcal{T}_s$ 当且仅当 Γ_i' 和 Γ_j' 作为 $\mathbf{G}_0'(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}})$ 中的子群时可公度。我们定义 $\mathbf{G}'(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}})$ 的以下子群

$$\mathbf{G}_\Gamma'(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}}) := \prod_{i=1}^{k} \Delta^{\mathcal{T}_i}(\mathbf{G}_0'(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}})).$$

类似地，对于不属于 $\mathcal{S}$ 的 $\mathbb{Q}$ 的任意素位 v，都可以定义 $\mathbf{G}_\Gamma'(\mathbb{Q}_v)$。

根据 [EL19，定理 1.4]，，我们有

定理 4.2. 假设满足以下条件:

(1) $\mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i'$ 对所有 $i = 0, \cdots, r$ 都成立；*(2)* 存在两个有限赋值 $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}$，使得 $\mathbf{G}_0^1(\mathbb{Q}_{\ell_1})$ 和 $\mathbf{G}_0^1(\mathbb{Q}_{\ell_2})$ 均为非紧；

[3]在 [COU01]，中，作者使用 $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}})$，而不是 $\mathbf{G}(\mathbb{A}^{\mathcal{S}})$。利用$\mathbf{G}$的强逼近性质，在两者之间转换是直接的。此外， [COU01，第 4.7] 节只讨论 $\mathbf{G}_0 =$ 为一般线性群 $_n$ 或广辛群 $_{2n}$ 的情形；在假设 (3) 的情况下，同样的论证也适用于我们的 $\mathbf{G}_0$, 。

(3) 对于 $\ell'=\ell_1,\ell_2$，商群 $\mathbf{G}_0^1(\mathbb{Q}_{\ell'})/Z_{\mathbf{G}_0^1(\mathbb{Q}_{\ell'})}$ 是单的。

固定一个元素 $x\in\mathbf{G}_0(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}})/U_0^{\mathcal{S}'}$ 以及一列元素$(a_n)_n$，它们属于$\mathbf{G}_0(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}})$$(n=1,2,\cdots)$，且满足$\deg(a_n)\to+\infty$。那么，序列 $\mu_{\Pi(T_{a_n}(x))}$ 的任意极限测度，都是某个闭子群 $H\subset\mathbf{G}^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})$ 在单个轨道 $Z_{\mathbf{G}}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}})\Gamma H$上的归一化的哈尔测度，其中该闭子群满足

$$HZ_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})}=\mathbf{G}_\Gamma^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})Z_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})}.$$

这里 $\mathcal{S}_1'=\{\ell_1,\ell_2\}$ 以及 $\mathbf{G}_\Gamma^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})=\mathbf{G}_\Gamma(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})\bigcap\mathbf{G}^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})$。

证明。设 μ 是序列$\mu_{\Pi(T_{a_n}(x))}$的一个极限测度；设$\mu_{\Pi(T_{a_{n_k}}(x))}\to\mu$，其中 $n_k\to\infty$是一个子序列。根据定理 4.1，μ 是测度 $\mu_{\mathbf{X}_1},\cdots,\mu_{\mathbf{X}_r}$的一个拼接。由定理 4.1，每个 $\mu_{\mathbf{X}_i}$ 都是$\mathbf{G}_0^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'})$-遍历的，因此测度 μ 是 $\Delta(\mathbf{G}_0^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'}))$-遍历的。因此，$\mu$ 在$\mathbf{G}_0^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'})$的对角作用下保持不变；换言之，对于任意$f\in L^2(\mathbf{X})$，我们有

$$\int_{\mathbf{X}}f(zg)d\mu(z)=\int_{\mathbf{X}}f(z)d\mu(z),$$

对任意 $g\in\Delta(\mathbf{G}_0^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'}))$。

对每个 $i=1,\cdots,r$，取一个任意的紧开子群$U_{i,\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}_1'}$，它属于$\mathbf{G}_i(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}_1'})$。于是记 $U_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}_1'}=\prod_{i=1}^r U_{i,\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}_1'}$，并记$\mu$ 为 μ 在 $\mathbf{X}/U_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}_1'}$上的商测度。因此，要证明该定理，只需证明对于任意的$U_{i,\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}_1'}$，$\mu$ 在 $\prod_{i=1}^r\mathbf{G}_i'(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})$ 作用下保持不变。

对于两个元素 $\alpha_1\in\mathbf{G}_0(\mathbb{Q}_{\ell_1})$和 $\alpha_2\in\mathbf{G}_0(\mathbb{Q}_{\ell_2})$，我们有以下真同态（$i=1,\cdots,r$）

$$\psi_i\colon\mathbb{Z}^2\to\mathbf{G}_i(\mathbb{Q}_{\ell_1})\times\mathbf{G}_i(\mathbb{Q}_{\ell_2}),\quad(m_1,m_2)\mapsto(\alpha_1^{m_1},\alpha_2^{m_2}).$$

我们可以选取 α_1,α_2，使得 $\psi=(\psi_1,\cdots,\psi_r)$属于-$\mathcal{A}'$类（相对于集合 $\mathcal{S}_1'=\{\ell_1,\ell_2\}$），其含义见 [EL19，定义 1.3]。显然，根据前面的断言，μ 在 $\mathbb{Z}^2$ 作用下保持不变且是遍历的。因此，由 [EL19，定理 1.4]，μ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的代数测度。特别地，存在$\mathbf{G}^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})$的闭子群 H，使得 μ 的支撑具有如下形式：$\Gamma\backslash\Gamma Hg$，其中某个 $g\in\mathbf{G}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})$。接下来我们证明

$$HZ_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})}=\mathbf{G}_\Gamma^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})Z_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})}.$$

对于 $\ell\in\mathcal{S}_1'$，我们将 H_ℓ 记作 H 到第 ℓ 个分量的投影。以下记作

$$\mathbf{P}H:=H/(H\bigcap Z_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})}),\quad\mathbf{PG}_\Gamma^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'}):=\mathbf{G}_\Gamma^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})/(\mathbf{G}_\Gamma^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})\bigcap Z_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})}).$$

类似地，对于 $\ell\in\mathcal{S}_1'$，有 $\mathbf{P}H_\ell$ 和 $\mathbf{PG}_\Gamma^1(\mathbb{Q}_\ell)$。因此我们需要证明

$$\mathbf{P}H=\mathbf{PG}_\Gamma^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'}).$$

根据构造，H 包含 $\mathbf{G}_0^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})$ 的对角像 $\Delta(\mathbf{G}_0^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'}))$，因此它在 $\Delta(\mathbf{G}_0(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'}))$ 的共轭作用下不变。由此可知，$\mathbf{P}H$ 在 $\Delta(\mathbf{G}_0(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'}))$ 的共轭作用下不变。根据命题 2.1 及假设 (3)，我们知道，对于任意 $\ell\in\mathcal{S}_1'$，$\mathbf{P}H_\ell$ 都是对角子群的乘积。换言之，存在一个划分$\{1,2,\cdots,r\}=\bigsqcup_i^{k(\ell)}\mathcal{T}_i(\ell)$，使得

$$H_\ell Z_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}=\prod_{i=1}^{k(\ell)}\Delta^{\mathcal{T}_i(\ell)}(\mathbf{G}_0(\mathbb{Q}_\ell))Z_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}.$$

根据假设 (3)，我们有

$$HZ_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})}=\prod_{i=1}^{k'}\Delta^{\mathcal{T}_i'}(\mathbf{G}_0(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'}))Z_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})},$$

其中 $\{1,\cdots,r\}=\bigsqcup_{i=1}^{k'}\mathcal{T}_i'$是通过对两个划分 $\{\mathcal{T}_i(\ell_1)\}$和 $\{\mathcal{T}_i(\ell_2)\}$取交得到的划分。根据命题 2.7，我们有包含关系

$$HZ_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})}\supset\prod_{i=1}^{k}\Delta^{\mathcal{T}_i}(\mathbf{G}_0(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'}))Z_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}_1'})}=\mathbf{G}_\Gamma(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}})Z_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}})}.$$

我们声称，该划分 $\{\mathcal{T}_i'\}$ 与式 (5) 中的划分 $\{\mathcal{T}_i\}$ 相同。为此，只需证明，对于任意$j_1 \neq j_2 = 1, \cdots, r$，若 $j_1, j_2 \in \mathcal{T}_i$，则存在某个 i'，使得 $j_1, j_2 \in \mathcal{T}_{i'}'$。根据定义， Γ_{j_1}和 Γ_{j_2}可公度。记

$$\Gamma_{j_1,j_2} := \Gamma_{j_1} \bigcap \Gamma_{j_2}$$

并定义$\mathbf{X}'$为$\mathbf{X}$，其中分量$\mathbf{X}_{j_1}$和$\mathbf{X}_{j_2}$分别替换为$\mathbf{X}_{j_1}' := Z_{\mathbf{G}_{j_1}}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}})\Gamma_{j_1,j_2}\backslash\mathbf{G}_{j_1}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}})$以及$\mathbf{X}_{j_2}' := Z_{\mathbf{G}_{j_2}}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}})\Gamma_{j_1,j_2}\backslash\mathbf{G}_{j_2}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}})$。类似于映射 Π，我们有

$$\Pi' \colon \mathbf{G}_0(\mathbb{A}_f^{\mathcal{S}})/U_0^{\mathcal{S}'} \to \mathbf{X}'.$$

那么，对于 X' 上序列 $(\mu_{\Pi'}(T_{a_{n_k}}(x)))_{k>0}$ 的任意极限测度 μ'，记其在 $\mathrm{X}_{j_1}' \times \mathrm{X}_{j_2}' \simeq (\mathrm{X}_{j_1}')^2$ 上的投影为 μ_{j_1,j_2}'。由于 Π' 与 X' 到 $\mathrm{X}_{j_1}' \times \mathrm{X}_{j_2}'$ 的投影的复合是对角映射，根据命题 4.1，测度 μ_{j_1,j_2}' 是 $\Gamma_{j_1,j_2}^2\Delta_{j_1,j_2}(\mathrm{G}_0^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}}))g'$ 上的归一化测度，其中存在某个 $g' \in \mathrm{G}_{j_1}^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}}) \times \mathrm{G}_{j_2}^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}})$。这里

$$\Delta_{j_1,j_2} \colon \mathbf{G}_0^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}}) \to \mathbf{G}_{j_1}^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}}) \times \mathbf{G}_{j_2}^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}})$$

是对角映射。

沿着自然映射 $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$，$\mathrm{X}'$ 上的测度 μ' 被映射为 X 上的测度 μ。根据上述讨论，我们知道，μ到 $\mathrm{X}_{j_1} \times \mathrm{X}_{j_2}$ 的投影 μ_{j_1,j_2} 是 $(\Gamma_{j_1} \times \Gamma_{j_2})\Delta_{j_1,j_2}(\mathrm{G}_0(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}}))g'$ 上的归一化测度。因此，H到分量 (j_1, j_2) 的投影包含于 $\Delta_{j_1,j_2}(\mathrm{G}_0(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}}))(Z_{\mathbf{G}_{j_1}}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}}) \times Z_{\mathbf{G}_{j_2}}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}}))$。我们立即推得，对于某个 i'，有 $j_1, j_2 \in \mathcal{T}_{i'}'$。

为了完成证明，我们需要证明可以取 $g \in Z_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}})}$。为此，考虑任意 $j_1, j_2 \in \mathcal{T}_i$。根据上述关于 μ_{j_1,j_2}' 的讨论，我们知道，ΓHg 在分量 j_1 和 j_2 上的两个投影必定相等，因此我们可以令 g 在 j_1 和 j_2 处的两个分量 g_{j_1} 和 g_{j_2} 相等。换言之，我们可以假设 $g \in \prod_{i=1}^k \Delta^{\mathcal{T}_i}(\mathbf{G}_0^1(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}}))$。于是我们有

$$\Gamma H Z_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}})} = \Gamma H g Z_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}})},$$

至此便完成了该定理的证明。 □

5. Hodge 型志村簇

我们首先固定一些记号，紧密遵循 [Kis10、Kis17、Wor13、Zha25]。我们固定一个Hodge型志村数据（G, X），其中 G 是 $\mathbb{Q}$上的连通约化群。我们还固定一个辛嵌入

$$(G, X) \hookrightarrow (\mathbf{GSp}_{L,\mathbb{Q}}, S^{\pm}),$$

其中 $S^{\pm}$ 是秩等于$\mathbf{rk}(L)$的Siegel上半空间。在下文中，我们可以并且将会假设$\mathbf{rk}(L) \geq 4$。我们固定 $G(\mathbb{A}_f)$ 的一个紧开子群 U，并用$Sh_{U,\mathbb{C}} = Sh_{U,\mathbb{C}}(G, X)$表示附属于三元组（$G, X, U$）的志村簇，其 $\mathbb{C}$-点由下式给出

$$Sh_{U,\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash(X \times G(\mathbb{A}_f)/U), \tag{6}$$

它具有定义在反射域 $F = F(G, X)$上的典范模型。我们将该典范模型记为$Sh_{U,F}$。类似地，对于**广辛群**$L(\mathbb{A}_f)$的紧开子群$\mathbf{U}$，我们有 $\mathbb{Q}$上的典范模型$Sh_{\mathbf{U},\mathbb{Q}}$。假设 U包含于$\mathbf{U}$中。于是我们有志村簇的一个态射

$$Sh_{U,F} \to Sh_{\mathbf{U},F} = Sh_{\mathbf{U},\mathbb{Q}} \times_{\mathbb{Q}} E.$$

对于域 F 在有理素数 ℓ 上方的素位 v，若 G 在 ℓ 处非分歧，且 $U = U^{\ell}U_{\ell}$ 在 ℓ处超特殊，其中 U_{ℓ}，Kisin（[Kis10]）构造了 $Sh_{U,\ F}$ 在 $\mathcal{O}_{(v)}$上的整典范模型，其中 $\mathcal{O}_{(v)}$是 $\mathcal{O}_F$ 在 v处的局部化。我们将此整模型记为 $Sh_{U,\ \mathcal{O}_{(v)}}$。此后我们假设 $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\ell}\mathbf{U}_{\ell}$，其中 $\mathbf{U}_{\ell}$ 在 ℓ处也超特殊。我们将 $Sh_{\mathbf{U},\ \mathcal{O}_{(v)}}$ 上的万有阿贝尔概形记为$\mathcal{A}_{\mathbf{U},\ \mathcal{O}_{(v)}} \to Sh_{\mathbf{U},\ \mathcal{O}_{(v)}}$，并将.....记为

$$\mathcal{A}_{K,\mathcal{O}_{(v)}} \to Sh_{U,\mathcal{O}_{(v)}}$$

其沿 $Sh_{U,\ \mathcal{O}_{(v)}} \to Sh_{\mathbf{U},\ \mathcal{O}_{(v)}}$ 的拉回。我们固定 G 在 $\mathbb{Z}_{(\ell)}$ 上的一个约化群模型 $\mathcal{G}$，使得 $U_\ell = \mathcal{G}(\mathbb{Z}_\ell)$。于是存在一个由张量 $s^{(\ell)} = (s_i^{(\ell)})_i \subset L^{\otimes}_{\mathbb{Z}_{(\ell)}}$ 组成的有限集，使得 $\mathcal{G}$ 可通过我们的辛嵌入 $G \hookrightarrow \mathbf{GSp}_{L,\ \mathbb{Q}}$ ([Kis10, 第 2.3.1 节和第 2.3.2] 节)与这些张量在 $\mathrm{GL}(L_{\mathbb{Z}_{(\ell)}})$ 中的稳定子$s^{(\ell)}$ 相识别。[4]

对每个点 $x \in Sh_{U,\ \mathcal{O}_{(v)}}(\overline{\mathbb{Q}})$，Kisin 构造了张量 $s_\ell^{(\ell)}{}_{,\ x} = (s_{i\ \ell}^{(\ell)}{}_{,\ ,\ x})_i \subset (H^1_{\text{ét}}(\mathcal{A}_x,\ \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} B_{\text{crys}})^{\otimes}$ ([Kis17, §1.3.6])。这里 $\mathcal{A}_x$ 是 $\mathcal{A}_{K,\ \mathcal{O}_{(v)}}$ 在点 x处的特化。对于每个素数 $\ell' \neq \ell$，Kisin 还构造了张量$s_{\ell'}^{(\ell)}{}_{,\ x} = (s_{i\ \ell'}^{(\ell)}{}_{,\ ,\ x}) \subset (H^1_{\text{ét}}(\mathcal{A}_x,\ \mathbb{Q}_{\ell'}))^{\otimes}$ (*loc.cit*)。

类似地，对每个点 $x \in Sh_{U,\mathcal{O}_{(v)}}(\overline{\mathbb{F}_\ell})$，Kisin 构造了张量 $s_0^{(\ell)}{}_{,x} = (s_{i\ 0}^{(\ell)}{}_{,,x})_i \subset (H^1_{\text{crys}}(\mathcal{A}_x/W(\mathbb{F}_\ell))^{\otimes}{}_{W(\mathbb{F}_\ell)} - B_{\text{crys}})^{\otimes}$ ([Kis17, §1.3.10])。对于每个素数 $\ell' \neq \ell$，存在张量 $s_{\ell'}^{(\ell)}{}_{,x} = (s_{i\ \ell'}^{(\ell)}{}_{,,x})_i \subset H^1_{\text{ét}}(\mathcal{A}_x, \mathbb{Q}_{\ell'})^{\otimes}$ ([Kis17, §1.3.6])。类似地，我们有张量 $s_\ell^{(\ell)}{}_{,x} = (s_{i\ \ell}^{(\ell)}{}_{,,x})$ (loc.cit)。我们有 $W(\mathbb{F}_\ell)$ 的自然同构，分别为 $\mathbb{Q}_{\ell'}$- 模

$$L_{W(\overline{\mathbb{F}}_\ell)} \simeq H^1_{\text{crys}}(\mathcal{A}_x/W(\overline{\mathbb{F}}_\ell)),\ \text{resp. } L_{\mathbb{Q}_{\ell'}} \simeq H^1_{\text{ét}}(\mathcal{A}, \mathbb{Q}_{\ell'}), \tag{7}$$

取张量 $s_i^{(\ell)}$ 到 $s_{i\ 0}^{(\ell)}{}_{,\ x}$，分别取 $s_{i\ \ell'}^{(\ell)}{}_{,\ x}$，对所有 i均如此。这些用于$x \in Sh_{U,\ \mathcal{O}_{(v)}}(\overline{\mathbb{F}_\ell})$的张量，是通过考虑 x 的提升 $\widetilde{x} \in Sh_{U,\ \mathcal{O}_{(v)}}(\overline{\mathbb{Q}})$并使用 ℓ'进比较定理构造的（[Kis17，命题 1.3.7]）。

对于 x，无论是在 $Sh_{U,\ \mathcal{O}_{(v)}}(\overline{\mathbb{Q}})$ 中，还是在 $Sh_{U,\ \mathcal{O}_{(v)}}(\overline{\mathbb{F}_\ell})$ 中，我们都定义一个代数子群 I_x，它属于 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{A}_x)$，由固定张量 $s_{i\ 0}^{(\ell)}{}_{,\ x}$ 和 $s_{i\ \ell'}^{(\ell)}{}_{,\ x}$ 的元素组成，对任意 $\ell' \neq \ell$均如此。

引理 5.1。设 $x \in Sh_{U,\ \mathcal{O}_{(v)}}(\overline{\mathbb{F}_\ell})$。若 $\mathcal{A}_x$ 是超奇异阿贝尔簇，则对任意素数 $\ell' \neq \ell$，我们都有一个定义在 $\mathbb{Q}_{\ell'}$ 上的代数组之间的同构：

$$I_{x/\mathbb{Q}_{\ell'}} := I_x \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{\ell'} \simeq G_{\mathbb{Q}_{\ell'}}.$$

证明。根据定义，对于任意 $\mathbb{Q}_{\ell'}$-代数 R，$I_{x/\mathbb{Q}_{\ell'}}(R)$由 $\mathrm{Aut}^{\mathbb{Q}_{\ell'}}(\mathcal{A}_x)(R)$ 中固定张量 $s_{i\ 0}^{(\ell)}{}_{,,x}$和 $s_{i\ \ell'}^{(\ell)}{}_{,,x}$的元素组成。由假设 $\mathrm{rk}(L) \geq 4$，存在一个定义在 $\mathbb{F}_\ell$ 上的超奇异椭圆曲线 $E(\ell)$，使得 $\mathcal{A}_x$ 与 $E(\ell)^{\mathrm{rk}(L)/2}$ 同源（根据 Deligne–Ogus–Shioda 定理）。特别地，我们有一个定义在 $\mathbb{Q}$上的代数组同构：

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{A}_x) \simeq \mathrm{GL}_{\mathrm{rk}(L)/2}(B(\ell)),$$

其中 $B(\ell) = \mathrm{End}_{\mathbb{F}_\ell}(E(\ell))^\circ$。由于 $B(\ell)$ 在 $\ell' \neq \ell$处非分歧，我们有同构 $B(\ell)\otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{\ell'} \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{Q}_{\ell'})$，因此

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_{\ell'}}(\mathcal{A}_x) \simeq \mathrm{GL}_{\mathrm{rk}(L)/2}(B(\ell) \otimes \mathbb{Q}_{\ell'}) \simeq \mathrm{GL}_{\mathrm{rk}(L)}(\mathbb{Q}_{\ell'}).$$

由于我们有辛嵌入 $G \hookrightarrow$ **广辛群**$_{L,\mathbb{Q}}$，不失一般性，可以假设其中一个张量（比如 $s_{i_0}^{(\ell)}$）对应于 $L_{\mathbb{Z}_{(\ell)}}$上的辛配对 $\langle -, - \rangle$。因此，利用 (7) 中的同构，$\mathrm{Aut}^{\mathbb{Q}_{\ell'}}(\mathcal{A}_x)$ 中张量 $s_{i_0}^{(\ell)}{}_{,\ell',x}$ 的稳定子恰为**广辛群**$^{L/\mathbb{Q}_{\ell'}}$。由此可知，$\mathrm{Aut}^{\mathbb{Q}_{\ell'}}(\mathcal{A}_x)$ 中所有张量 $(s_{i\ \ell'}^{(\ell)}{}_{,,x})_i$的稳定子恰为群 $G_{\mathbb{Q}_{\ell'}}$。因此我们有 $I_{x/\mathbb{Q}_{\ell'}} \simeq G_{\mathbb{Q}_{\ell'}}$。□

我们推得，I_x 是 G的一种形式。此外，若 $\mathcal{A}_x$ 是超奇异的，则 $I_x(\mathbb{R})$是$\mathbf{G}^{\mathcal{A}_x}(\mathbb{R})$的一个闭子群，且该群是紧致的。因此，$I_x(\mathbb{R})$也紧致。

对于满足 $U = U^\ell U_\ell$ 的素数 ℓ 以及点$x \in Sh_{U,\ \mathcal{O}_{(v)}}(K)$，其中 K 是一个代数闭域，我们记

$$\mathcal{H}^{G,\ell}(\mathcal{A}_x)$$

对于满足以下条件的点集 $x' \in Sh_{U,\ \mathcal{O}_{(v)}}(K)$：存在一个拟同源 ϕ: $\mathcal{A}_x \to \mathcal{A}_{x'}$，其度与 ℓ 互素，并将张量 $s_{0\ x}^{(\ell)}{}_{,\ }$，分别将 $s_{\ell'\ x'}^{(\ell)}{}_{,\ }$，映至张量 $s_{0\ x'}^{(\ell)}{}_{,\ }$，分别映至 $s_{\ell'\ x'}^{(\ell)}{}_{,\ }$（对任意 ℓ'）。对于具有 $K = \mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{F}_\ell$ 的 $x \in Sh_{U,\ \mathcal{O}_{(v)}}(K)$, 根据[Zha25, (1) & (2)] 和 [Kis17, 推论 1.4.2 及命题 2.1.3、2.1.5], ，我们有一个自然双射

$$\Theta_x \colon \mathcal{H}^{G,\ell}(\mathcal{A}_x) \simeq I_x(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f^{(\ell)})U/U.$$

[4]这里，$L^{\otimes}_{\mathbb{Z}_{(\ell)}}$ 是由$L_{\mathbb{Z}_{(\ell)}}$ 经过有限次以下运算得到的所有 $\mathbb{Z}_{(\ell)}$-模的直和：对偶、张量积、对称幂和外幂。

这里我们利用引理 5.1，隐式地将 $I_x(\mathbb{Q}_{\ell'})$ 与 $G(\mathbb{Q}_{\ell'})$ 视为相同，其中 $\ell' \neq \ell$。注意，右端与 $(I_x(\mathbb{Q}) \bigcap U^p)\backslash G(\mathbb{Q}_p)/U_p$ 自然双射。

对于 $K^{\overline{}} = \mathbb{Q}$，点 $x \in Sh_{U,\mathcal{O}_{(v)}}(K) \subset Sh_{U,\mathcal{O}_{(v)}}(\mathbb{C})$ 在识别（6）下对应于元素 $(h_x, g_x) \in X \times G(\mathbb{A}_f)$。于是对于任意 $g \in G(\mathbb{Q}_p)$，点 $\Theta_x^{-1}(g) \in Sh_{U,\mathcal{O}_{(v)}}(K) \subset Sh_{U,\mathcal{O}_{(v)}}(\mathbb{C})$ 在（6）下对应于元素 $(h_x, g_x g) \in X \times G(\mathbb{A}_f)$。此外，对于 $x \in Sh_{U,\mathcal{O}_{(v)}}(\mathbb{F}_\ell)$ 以及 x 的一个提升 $\widetilde{x} \in Sh_{U,\mathcal{O}_{(v)}}(\mathbb{Q})$，我们有如下交换图（[Kis17，推论 1.4.12]）

$$\begin{array}{ccccc} I_{\widetilde{x}}(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f^{(\ell)})U/U & \xleftarrow[\simeq]{\Theta_{\widetilde{x}}} & \mathcal{H}^{G,\ell}(\mathcal{A}_{\widetilde{x}}) & \hookrightarrow & Sh_{U,\mathcal{O}_{(v)}}(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}) \\ \downarrow & & \downarrow \mathbf{R}_\ell & & \downarrow \mathbf{R}_\ell \\ I_x(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f^{(\ell)})U/U & \xleftarrow[\simeq]{\Theta_x} & \mathcal{H}^{G,\ell}(\mathcal{A}_x) & \hookrightarrow & Sh_{U,\mathcal{O}_{(v)}}(\overline{\mathbb{F}}_\ell) \end{array} \tag{8}$$

左侧的垂直箭头是由包含关系 $I_{\widetilde{x}}(\mathbb{Q}) \hookrightarrow I_x(\mathbb{Q})$ 诱导的自然投影映射。

我们考虑一个点 $x \in Sh_{U,\ \mathcal{O}_{(v)}}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$，其中 $\mathcal{A}_x$ 为超奇异，$U_p = I_x(\mathbb{Z}_p)$。我们将 I_x^1 记作 I_x 的导出子群，并将 pr: $I_x \to I_x/I_x^1 =: I_x^{\mathrm{ab}}$ 记作投影映射，其中 I_x^{ab}是 $\mathbb{Q}$上的一个环面。我们假设

$$\mathrm{pr}(I_x(\mathbb{A}_f^{(\ell)})) = \mathrm{pr}(I_x(\widehat{\mathbb{Z}}^{(\ell)}))\mathrm{pr}(I_x(\mathbb{Q}) \bigcap U_\ell). \tag{9}$$

那么包含关系 $I_x^1 \hookrightarrow I_x$ 诱导一个双射

$$(I_x^1(\mathbb{Q}) \bigcap U_\ell)\backslash I_x^1(\mathbb{A}_f^{(\ell)})/I_x^1(\widehat{\mathbb{Z}}^{(\ell)}) \simeq (I_x(\mathbb{Q}) \bigcap U_\ell)\backslash I_x(\mathbb{A}_f^{(\ell)})/I_x(\widehat{\mathbb{Z}}^{(\ell)}). \tag{10}$$

由于 $I_x^1(\widehat{\mathbb{Z}}^{(\ell)})$ 包含 $I_x^1(\mathbb{A}_f^{(\ell)})$ 的中心，我们有

$$(I_x^1(\mathbb{Q}) \bigcap U_\ell)\backslash \mathbf{P}I_x^1(\mathbb{A}_f^{(\ell)})/\mathbf{P}I_x^1(\widehat{\mathbb{Z}}^{(\ell)}) \simeq (I_x^1(\mathbb{Q}) \bigcap U_\ell)\backslash I_x^1(\mathbb{A}_f^{(\ell)})/I_x^1(\widehat{\mathbb{Z}}^{(\ell)}). \tag{11}$$

综合以上结果，我们得到一个双射

$$(I_x^1(\mathbb{Q}) \bigcap U_\ell)\backslash \mathbf{P}I_x^1(\mathbb{A}_f^{(\ell)})/\mathbf{P}I_x^1(\widehat{\mathbb{Z}}^{(\ell)}) \simeq (I_x(\mathbb{Q}) \bigcap U_\ell)\backslash \mathbf{P}I_x(\mathbb{A}_f^{(\ell)})/\mathbf{P}I_x(\widehat{\mathbb{Z}}^{(\ell)}). \tag{12}$$

我们将 I_x^1 的伴随商记为 $I^{1,x}{}^{\mathrm{ad}}$。那么 $I^{1,x}{}^{\mathrm{ad}}$ 是 I_x^{ad} 的导出子群。根据 [Hum69], , 我们知道

$$\mathrm{Aut}(I_x^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})) = I_x^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})/Z_{I_x^{\mathrm{ad}}}(\mathbb{Q}) \rtimes \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{D}_x^{\mathrm{ad}}),$$

其中 $\mathfrak{D}_x^{\mathrm{ad}}$ 是 I_x^{ad} 的 Dynkin 图，而 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{D}_x^{\mathrm{ad}})$ 是 $\mathfrak{D}^{1,x}{}^{\mathrm{ad}}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的自同构群。

我们固定 $\mathbb{Q}$ 在 ℓ 上的一个素位 $v(\ell)$，以及一个点 $\overline{x_0} \in Sh_{U,F}(\mathbb{Q})$，使得 x_0 在 $v(\ell)$ 处有 超奇异 良约化。我们还固定 $Z_{I_{x_0}}(\mathbb{A}_f)$ 的一个非空有限子集 $\mathcal{T} = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\}$。我们将 $\mathcal{T}$ 与集合 $\{1, 2, \cdots, r\}$ 等同。此外，我们将 x_0 模 $v(\ell)$ 约化后的结果记为 $x_0^{(\ell)}$。我们记 $\Gamma = I_{x_0}(\mathbb{Q}) \bigcap U_\ell$、$\Gamma^1 = \Gamma \bigcap I_{x_0}^1(\mathbb{Q})$，并且对于 $i = 1, \cdots, r$,

$$\Gamma^{(\ell)} := I_{x_0^{(\ell)}}(\mathbb{Q}) \bigcap U_\ell, \quad \Gamma_i^{(\ell)} := \sigma_i^{-1}\Gamma\sigma_i,$$
$$\Gamma^{(\ell),1} := \Gamma \bigcap I_{x_0^{(\ell)}}^1(\mathbb{Q}), \quad \Gamma_i^{(\ell),1} := \sigma_i^{-1}\Gamma^1\sigma_i.$$

于是我们得到一个划分

$$\mathcal{T} = \bigsqcup_{i=1}^{k} \mathcal{T}_i,$$

使得 σ，$\sigma' \in \mathcal{T}_i$ 当且仅当 Γ_σ 和 $\Gamma_{\sigma'}$ 可公度。

我们有以下 p进 $\mathcal{A}_{x_0}$ 的黑克轨道的同时约化映射 :

$$\mathbf{R}_{\mathcal{T}}^G \colon \mathcal{H}^{G,\ell}(\mathcal{A}_{x_0}) \to \prod_{\sigma \in \mathcal{T}} \mathcal{H}^{G,\ell}(\mathcal{A}_{(\sigma x_0)^{(\ell)}}), \quad \mathcal{A}_{x_0'} \mapsto (\mathcal{A}_{(\sigma x_0')^{(\ell)}})_{\sigma \in \mathcal{T}}.$$

此外，假设 (9) 成立，并利用 (8)、(10)、(11) 和 (12)，我们得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^{G,\ell}(\mathcal{A}_{x_0}) & \xrightarrow{\mathbf{R}_{\mathcal{T}}^{G}} & \prod_{\sigma\in\mathcal{T}}\mathcal{H}^{G,\ell}(\mathcal{A}_{(\sigma x_0)^{(\ell)}}) \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ \mathbf{P}\Gamma\backslash\mathbf{P}G(\mathbb{A}_f^{(\ell)})/\mathbf{P}U^{(\ell)} & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathcal{T}}} & \prod_{i=1}^{r}\mathbf{P}\Gamma_i^{(\ell)}\backslash\mathbf{P}G(\mathbb{A}_f^{(\ell)})/\mathbf{P}U^{(\ell)} \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ \mathbf{P}\Gamma^1\backslash\mathbf{P}G^1(\mathbb{A}_f^{(\ell)})/\mathbf{P}U^{(\ell),1} & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathcal{T}}^1} & \prod_{i=1}^{r}\mathbf{P}\Gamma_i^{(\ell),1}\backslash\mathbf{P}G^1(\mathbb{A}_f^{(\ell)})/\mathbf{P}U^{(\ell),1} \end{array} \tag{13}$$

这里 $U_{(\ell)}{}^1 = U^{(\ell)}\bigcap G^1(\mathbb{A}_f^{(\ell)})$，且水平映射 $\mathrm{pr}_{\mathcal{T}}$和 $\mathrm{pr}_{\mathcal{T}}^1$是同时投影映射。对于每个$\mathcal{T}_i$，我们定义一个映射

$$\widetilde{\Delta}^{\mathcal{T}_i}\colon \mathcal{H}^{G,\ell}(\mathcal{A}_{x_0^{(\ell)}}) \to \prod_{\sigma\in\mathcal{T}_i}\mathcal{H}^{G,\ell}(\mathcal{A}_{(\sigma x_0)^{(\ell)}}).$$

根据交换图 (13)，这对应于以下扭曲的对角映射：

$$\Delta^{\mathcal{T}_i}\colon \mathbf{P}\Gamma\backslash\mathbf{P}G(\mathbb{A}_f^{(\ell)})/\mathbf{P}U^{(\ell)} \to \prod_{\sigma\in\mathcal{T}_i}\mathbf{P}\Gamma_\sigma\backslash\mathbf{P}G(\mathbb{A}_f^{(\ell)})/\mathbf{P}U^{(\ell)}, \quad \overline{g}\mapsto(\overline{\sigma^{-1}g})_{\sigma\in\mathcal{T}_i}.$$

由定理 4.2 可知，

定理 5.2。假设满足以下条件：

(1) *(9)* 成立；*(2)* G^1 是单且单连通的；*(3)* 存在两个不同于 ℓ 的素数 ℓ_1、ℓ_2，使得 $G(\mathbb{Q}_{\ell_1})$ 和 $G(\mathbb{Q}_{\ell_2})$ 均为非紧致的，并且模中心后均为单且非交换的；*(4)* 令 $\mathcal{S}=\{\ell\}$、$\mathcal{S}'=\{\ell,\ell_1,\ell_2\}$，以及$\mathbf{G}_0=\cdots=\mathbf{G}_r=\mathbf{P}I_{x_0}$；则 *(3)* 成立。

对于 $G(\mathbb{A}_f^{(\ell)})$ 中的任意序列$(a_n)_n$，只要$\deg(a_n)\to+\infty$，序列$(T_{a_n}(x_0))_n$就在 $\prod_{\sigma\in\mathcal{T}}\mathcal{H}^{G,\ell}(\mathcal{A}_{x_0^{(\ell)}})$的以下子集上等分布：

$$\prod_{i=1}^{k}\widetilde{\Delta}^{\mathcal{T}_i}(\mathcal{H}^{G,\ell}(\mathcal{A}_{x_0^{(\ell)}})).$$

6. 志村曲线上的 Heegner 点

本节定义志村曲线上的 Heegner 点。首先固定一些记号。固定一个虚二次数域 L，以及一个与 L 的判别式 $D_{L/\mathbb{Q}}$ 互素的 $\mathbb{Z}$ 的理想 $\mathfrak{N}$。记

$$\epsilon_L\colon \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times}\to\{\pm1\}$$

为与 $L/\mathbb{Q}$ 相伴的二次特征。我们作如下弱 Heegner 假设：

(wH)。 $\epsilon_L(\mathfrak{N})=1$。

在假设 (wH) 下，存在唯一一个不定的四元数代数 B，它定义在 $\mathbb{Q}$ 上，并且恰好在 $\mathbb{Q}$ 中那些在 L 中惰性的素数 p 处分歧，且 $\mathrm{ord}_p(\mathfrak{N})$ 为奇数。记 $\mathfrak{N}_B$ 为 B 分歧处的有理素数之积。固定一个同构

$$B\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}\simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

我们将 $G=B^{\times}$ 视为定义在 $\mathbb{Q}$ 上的代数群。记 $\mathfrak{H}^{\pm}=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 为上半平面和下半平面的并。令 $G(\mathbb{R})\simeq\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ 通过分式线性变换作用于 $\mathfrak{H}^{\pm}$。接着，记 U_∞ 为 $G(\mathbb{R})$ 中 $i\in\mathfrak{H}^{\pm}$ 的稳定子。因此，我们有如下同一

$$G(\mathbb{R})/U_\infty\simeq\mathfrak{H}^{\pm}.$$

我们有自然投影映射 $G(\mathbb{R})\to\mathfrak{H}^{\pm}$的一段：

$$s\colon \mathfrak{H}^{\pm}\to G(\mathbb{R}), \quad x+iy\mapsto\begin{pmatrix} y & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

根据构造，对于 $\mathbb{Q}$的任意素位 v，如果 B 在 v处分歧，那么 $L\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_v$ 是一个域。因此，我们有$\mathbb{Q}$-代数的嵌入

$$\kappa\colon L\hookrightarrow B.$$

此外，对任意 $x\in L^\times$，存在唯一的点 $w(\kappa)\in\mathfrak{H}^\pm$，它在 $\kappa(x)$ 的作用下保持不变。我们将 κ 归一化，使得对任意 $x\in L^\times$，有

$$\kappa(x)\begin{pmatrix}w(\kappa)\\1\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}w(\kappa)\\1\end{pmatrix},$$

其中，左边的 $\kappa(x)$ 被视为 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 中的矩阵，而右边的 x 则被视为 $\mathbb{C}^\times=(L\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^\times$() 中的标量（How04，第 1.2] 节）。

我们固定一个包含 $\kappa(\mathcal{O}_L)$ 的 B 的极大阶 $\mathcal{O}_B$，并记 $R=\kappa(\mathcal{O}_L)+\kappa(\mathfrak{N})\mathcal{O}_B$。于是， R 的约化判别式为 $\mathfrak{N}$。在同一化 $B(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},\,f})^\times=G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},\,f})$ 下，我们将 $(R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z})^\times$ 在$G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},\,f})$ 中的像记为 U。级别为 U 的复志村曲线由下式给出

$$\begin{aligned}Sh_U(\mathbb{C})&=G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})/Z_G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})U_\infty U\bigsqcup\{\text{cusps}\}\\&=G(\mathbb{Q})\backslash\left(\mathfrak{H}^\pm\times G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})/Z_G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})U_f\right)\bigsqcup\{\text{cusps}\}.\end{aligned}$$

它在 $\mathbb{Q}$ 上有一个典范模型 $Sh_{U,\,\mathbb{Q}}$，该模型光滑、连通且射影。当且仅当 $B=\mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$ 时，尖点集为空。众所周知，$(G,\mathfrak{H}^\pm)$ 是 Hodge 型志村数据（[Mum69]）。

对于 $(z,g)\in\mathfrak{H}^\pm\times G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$，我们将 $[(z,g)]$ 记作其在 $Sh_U(\mathbb{C})$ 中的像。我们令 U 在 $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ 中的正规化子按下式作用于 $Sh_U(\mathbb{C})$:

$$J(u)[(z,g)]:=[(z,gu^{-1})].$$

记 $\mathrm{Nrm}\colon G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})\to\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times$ 为约化范数。则 $Sh_U(\mathbb{C})$ 的连通分支集合 $\pi_0(Sh_U(\mathbb{C}))$ 可识别为 $\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times/\mathrm{Nrm}(Z_G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})U_\infty U)$。记 $\mathbb{Q}_U/\mathbb{Q}$ 为该阿贝尔扩张，使得在阿廷互反律下存在一个同构:

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_U/\mathbb{Q})\simeq\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times/\mathrm{Nrm}(Z_G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})U_\infty U).$$

在下文中，我们将这两个群视为相同，并定义一个映射:

$$\mathrm{GNrm}\colon G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})\to\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_U/\mathbb{Q}),\quad g\mapsto\mathrm{Nrm}(g)^{-1}.$$

我们令伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_U/\mathbb{Q})$ 通过 GNrm ([How04, §1.2]) 作用于 $\pi_0(Sh_U(\mathbb{C}))$:

$$\begin{array}{ccc}Sh_U(\mathbb{C})&\xrightarrow{J(u)}&Sh_U(\mathbb{C})\\\downarrow{\scriptstyle\mathrm{Nrm}}&&\downarrow{\scriptstyle\mathrm{Nrm}}\\\pi_0(Sh_U(\mathbb{C}))&\xrightarrow{\mathrm{GNrm}(u)}&\pi_0(Sh_U(\mathbb{C}))\end{array}$$

我们将 $T=L^\times$ 视为定义在 $\mathbb{Q}$ 上的代数群，它也是 G 的一个极大环面，其嵌入为 κ。然后令

$$\mathrm{CM}_L=T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})/Z_G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}),$$

L的复乘点集合。我们有一个映射

$$\mathrm{CM}_L\to Sh_U(\mathbb{C}),\quad g\mapsto[(w(\kappa),g)].$$

此映射的像是 $Sh_U(\mathbb{C})$ 上的复乘点集合。我们按以下公式令伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(L^{\mathrm{ab}}/L)$ 作用于复乘点集合

$$[(w(\kappa),g)]^{[s,L]}:=[(w(\kappa),s\cdot g)],\quad\forall s\in T(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}).\tag{14}$$

这里，$[-,L]\colon T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},\,f})\simeq\mathrm{Gal}(L^{\mathrm{ab}}/L)$ 是阿廷映射。容易看出，$Z_G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},\,f})=\mathbb{A}_{\mathbb{Q},\,f}^\times$在任意复乘点上都平凡作用。

对于任意复乘点 $x=[(w(\kappa),g)]$，x 的自同态环是 $R\otimes_{\mathbb{Z}}$在映射下的原像 $\widehat{\mathbb{Z}}$在映射 $L\to B\otimes_{\mathbb{Z}}$下 $\widehat{\mathbb{Z}}$将 h 映射到 $g^{-1}hg$。这个自同态环是 L 的一个阶，形式为 $\mathcal{O}_{\mathfrak{C}_x}=\mathbb{Z}+\mathfrak{C}_x\mathcal{O}_L$，其中$\mathfrak{C}_x\subset\mathbb{Z}$是一个整理想（$x$的导子）。我们将 $T[\mathfrak{C}_x]=\kappa$记作（“$\mathcal{O}_{\mathfrak{C}_x}^\times$）$\subset T(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},\,f})$。我们将 $L[\mathfrak{C}]$ 记作 L的环类域，即通过类域论对应于 $T[\mathfrak{C}]Z_G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},\,f})$ 的 L 的阿贝尔扩张。这是 $\mathbb{Q}$的一个伽罗瓦扩张，也是 x的定义域。

对于每个与 $\mathfrak{N}D_{L/\mathbb{Q}}$互素的有理素数 ℓ，我们固定一个同构

$$R_\ell \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_\ell)$$

使得 $\kappa(\mathcal{O}_{L,\ell})$ 被等同于对角矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{smallmatrix}\right)$ 的集合，相应地，当 $x, y \in \mathbb{Z}_\ell$ 时等同于 $\left(\begin{smallmatrix} x & yu_\ell \\ y & x \end{smallmatrix}\right)$，若 ℓ 在 L 中分裂，相应地若 ℓ 在 L 中惰性。这里 u_ℓ 是 $\mathbb{Z}_\ell^\times$ 中一个固定的非平方元。这延拓为一个同构$B_\ell \simeq \mathrm{M}_2(F_\ell)$。固定 $\mathbb{Q}_\ell$ 的一个一致化子 ϖ_ℓ，并对每个整数 $k \geq 0$，定义 B_ℓ 中的一个元素 $h[\ell^k]$，其在 $\mathrm{M}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ 中的像由下式给出

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \varpi_\ell^k & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{if } \ell \text{ splits in } L; \\ \begin{pmatrix} \varpi_\ell^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{if } \ell \text{ is inert in } L. \end{cases} \tag{15}$$

我们通过嵌入 $G(\mathbb{Q}_\ell) \hookrightarrow G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ 将 $h[\ell^k]$ 视为 $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ 中的元素。对任意与 $\mathfrak{N}D_{L/\mathbb{Q}}$ 互素的正整数 $n = \prod_{i=1}^r \ell_i^{k_i}$，我们定义

$$h[n] := \prod_{i=1}^r h[\ell_i^{k_i}].$$

我们也将 $h[n]$ 视为 CM_L 中的元素，并记 $x[n]$ 为其在 $Sh_U(\mathbb{C})$ 中的像。众所周知，这些 $x[n]$ 定义在 L 的最大阿贝尔扩张 L^{ab} 上。此外，伽罗瓦群(L^{ab}/L) 对这些 $x[n]$ 的作用与 (14) 中的作用一致（[How04，定理 1.2.2]）。

我们将 $Sh_{U,\mathbb{Q}} \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_U$ 分解为几何分支 $Sh_{U,\mathbb{Q}} \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_U = \bigsqcup_i Sh_{U,\mathbb{Q},i}$，其中每个 $Sh_{U,\mathbb{Q},i}$ 在几何上不可约。此外，对于任意满足 $Sh_{U,\mathbb{Q}}(F) \neq \emptyset$ 的扩张 $F/\mathbb{Q}$，必有 $\mathbb{Q}_U \subset F$。我们定义

$$J_{U,\mathbb{Q}} := \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{Q}_U}(\mathrm{Jac}(Sh_{U,\mathbb{Q},i_0}))$$

对于某个固定分量 $Sh_{U,\mathbb{Q},i_0}$。这里，$\mathrm{Jac}(Sh_{U,\mathbb{Q},i_0})$ 是 $Sh_{U,\mathbb{Q},i_0}$ 的雅可比簇。于是，$J_{U,\mathbb{Q}}$ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的阿贝尔簇，在 $\mathfrak{N}$ 之外具有良约化。存在唯一的元素 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Pic}(Sh_{U,\mathbb{Q}})$（相差一个常数倍），其在每个几何分支 $Sh_{U,\mathbb{Q},i}$ 上的度均相同，并且对每个海克算子 $T_{a(m)}$，只要正整数 m 与 $\mathfrak{N}D_{L/\mathbb{Q}}$ 互素，就满足 $T_{a(m)}\mathfrak{h} = \deg(T_{a(m)})\mathfrak{h}$。这称为霍奇类，并且在每个几何分支 $\mathfrak{h}$ 上，它就是典范除子。我们将 $\mathfrak{h}$ 在分量 $Sh_{U,\mathbb{Q},i}$ 上的限制记为 $\mathfrak{h}_i$；于是存在唯一一个定义在 $\mathbb{Q}$ 上的态射

$$Sh_{U,\mathbb{Q}} \to J_{U,\mathbb{Q}},$$

在复点上，它将 $x_i \in Sh_{U,\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$ 映为除子 $dx_i - \mathfrak{h}_i \in J_{U,\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$。

设 $A/\mathbb{Q}$ 是一个阿贝尔簇，且有一个阿贝尔簇之间的满态射 $\alpha\colon J_{U,\mathbb{Q}} \to A$。与映射 $Sh_{U,\mathbb{Q}} \to J_{U,\mathbb{Q}}$ 复合后，我们得到一个定义在 $\mathbb{Q}$ 上的态射

$$\pi\colon Sh_{U,\mathbb{Q}} \to J_{U,\mathbb{Q}} \to A.$$

由于 $Sh_{U,\mathbb{Q}}$ 是完备且连通的，态射 π 要么是有限态射，要么是常值态射。后一种情况不可能，因为 α 是满射。因此，π 是有限态射（参见 [CV07，引理 3.9]）。记

$$y[n] = \pi(x[n]) \in A(L[n]).$$

与引言中一样，我们记 $L[\infty] = \bigcup_k L[k]$。

7. 黑克轨道与伽罗瓦轨道的关系

本节研究黑克轨道与伽罗瓦轨道之间的关系。

沿用第 §6 节中的记号。我们固定一个在 L 中为惰性的素数 ℓ（在 §3 的记号中为 $\mathcal{S} = \{\ell\}$），以及 $\mathbb{Q}$ 在 ℓ 上的一个素位 v（ℓ）。我们固定点 $x_0 = x[1] \in Sh_{U,\mathbb{Q}}$（$\mathbb{Q}$），并假设它在 v（ℓ）处具有 超奇异良约化。我们固定 $\mathcal{T} = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\}$ 的一个非空有限子集

$$Z_{I_{x_0}}(\mathbb{Q}) \backslash Z_{I_{x_0}}(\mathbb{A}_f) = I_{x_0}(\mathbb{Q}) \backslash I_{x_0}(\mathbb{A}_f) = L^\times \backslash \widehat{L}^\times.$$

我们通过 Artin 互反映射将 $\mathcal{T}$ 与其在 $\mathrm{Gal}(L[\infty]/L)$ 中的像相识别：

$$\mathrm{Art}\colon \mathrm{Gal}(L[\infty]/L) \simeq \widehat{L}^\times / L^\times. \tag{16}$$

我们有如 §5 中所述的划分 $\mathcal{T}=\bigsqcup_{i=1}^{k}\mathcal{T}_i$。我们令 $\mathbf{G}_0=I_{x_0^{(\ell)}}$ 为定义在 $\mathbb{Q}$ 上的代数群。我们固定同构

$$\mathbf{G}_0(\mathbb{Z}_q)\simeq G(\mathbb{Z}_q),\quad q\neq\ell. \tag{17}$$

考虑一个与 $\ell\mathfrak{N}D_{L/\mathbb{Q}}$ 互素的正整数 n。我们首先考察伽罗瓦轨道。存在以下几种情况:

(1) $n=q^e$ 是素数幂，且 q 是在 L 中分裂的素数。我们固定商集 $(\mathbb{Z}_q/n\mathbb{Z}_q)^\times$ 在 $\mathbb{Z}_q^\times$ 中的一组代表元 S_n。注意，S_n 可以视为商 $(\mathcal{O}_{L,\ q}/n\mathcal{O}_{L,\ q})^\times/(\mathbb{Z}_q/n\mathbb{Z}_q)^\times$ 的一组代表元，因为 $\mathcal{O}_{L,\ q}\simeq\mathbb{Z}_q^2$ 是 $\mathbb{Z}_q$-代数。此外，$\#S_n=q^{e-1}(q-1)$。在识别 (15) 下，我们定义 $\mathrm{Gal}(L[\infty]/L)$ 的一个子集 $\mathfrak{G}_n$，使得在阿廷映射 (16) 下，我们有 TM

$$\mathrm{Art}(\mathfrak{G}_n)=L^\times\cdot\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}|a\in S_n\quad\right.$$

(2) $n=q^e$ 是素数幂，且 q 是在 L 中惰性的素数。我们固定商 $(\mathcal{O}_{L,\ q}/n\mathcal{O}_{L,\ q})^\times/(\mathbb{Z}_q/n\mathbb{Z}_q)^\times$ 在 $\mathcal{O}_{L,\ q}^\times$ 中的一组代表元 S_n。此外，$\#S_n=q^{e-1}(q+1)$。我们定义 $\mathrm{Gal}(L[\infty]/L)$ 的一个子集 $\mathfrak{G}_n$，使得

$$\mathrm{Art}(\mathfrak{G}_n)=L^\times\cdot S_n.$$

显式地，我们可以取 S_n 为（在等同 (15) 之下）::TM

$$S_n=\left\{\begin{pmatrix}1&bu_q\\b&1\end{pmatrix}|b=1,\cdots,q^e\right\}\bigsqcup\left\{\begin{pmatrix}pau_q&u_q\\1&pau_q\end{pmatrix}|a=1,\cdots,q^{e-1}\right\}.$$

“ (3) 一般而言，对于素因数分解 $n=\prod_{i=1}^{s}p_i^{e_i}$，我们定义 $S_n=\prod_{i=1}^{s}S_{p_i^{e_i}}$，将其视为 $\mathcal{O}_L^\times$ 的一个子集。然后我们定义伽罗瓦群$(L[\infty]/L)$的一个子集 $\mathfrak{G}_n$，使得

$$\mathrm{Art}(\mathfrak{G}_n)=L^\times\cdot S_n.$$

接下来我们考虑 Hecke 轨道。如上所述，有以下情形::

(1) $n=q^e$ 是一个素数幂。我们定义

$$a(n):=\begin{pmatrix}n&0\\0&1\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_q)\simeq G(\mathbb{Q}_q)\hookrightarrow G(\mathbb{A}_f^{(\ell)}).$$

根据定义，该双陪集分解为右陪集

$$G(\mathbb{Z}_q)a(n)G(\mathbb{Z}_q)=\bigsqcup_{g\in S_n'}a(n)G(\mathbb{Z}_q),$$

其中 S_n' 是商 $G(\mathbb{Z}_q)/(G(\mathbb{Z}_q)\bigcap a(n)G(\mathbb{Z}_q)a(n)^{-1})$在 $G(\mathbb{Z}_q)$中的一组代表元。注意 $\#S_n'=q^{e-1}(q+1)=\deg(a(n))$（[Shi71，定理 3.24]）。我们有

引理 7.1。对于任意不同的 g、$g'\in S_n$，右陪集 $gh[n]G(\mathbb{Z}_q)$ 和 $g'h[n]G(\mathbb{Z}_q)$ 是分解 $G(\mathbb{Z}_q)\,a(n)\,G(\mathbb{Z}_q)$ 中的不同右陪集（这里使用了同一化（*17*））。

证明。我们首先证明这两个陪集不同。如果 q 在 L中分裂，写作 $g=\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ 和 $g'=\left(\begin{smallmatrix}a'&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$。

于是我们有

$$gh[n]G(\mathbb{Z}_q)=\begin{pmatrix}a\varpi_q^e&a\\0&1\end{pmatrix}G(\mathbb{Z}_q)=\begin{pmatrix}n&a\\0&1\end{pmatrix}G(\mathbb{Z}_q),\quad g'h[n]G(\mathbb{Z}_q)=\begin{pmatrix}n&a'\\0&1\end{pmatrix}G(\mathbb{Z}_q).$$

由于

$$\begin{pmatrix}n&a\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}n&a'\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&(a'-a)/n\\0&1\end{pmatrix}\notin G(\mathbb{Z}_q),$$

这些右陪集确实不同。

如果 q 在 L中是惰性的，写作 $g^{-1}g'=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$。根据 S_n的定义，容易验证 $b/n\notin\mathbb{Z}_q$。于是我们有

$$(gh[n])^{-1}(g'h[n])=\begin{pmatrix}a&b/n\\cn&d\end{pmatrix}\notin G(\mathbb{Z}_q).$$

由此再次可知，这两个右陪集互不相同。

接下来我们证明这两个陪集都包含在 $G(\mathbb{Z}_q)a(n)G(\mathbb{Z}_q)$ 中。根据 $G(\mathbb{Q}_q)$ 的卡坦分解，我们可以将 $G(\mathbb{Z}_q)a(n)G(\mathbb{Z}_q)$ 描述为 $G(\mathbb{Q}_q)$ 的子集，其中包含满足以下条件的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$：$a,b,c,d\in\mathbb{Z}_q$ 使得 $\det(A)\in n\mathbb{Z}_q^\times$，且 a,b,c,d 不同时被 q 整除。根据这一判据，容易得出 $gh[n]G(\mathbb{Z}_q)$ 和 $g'h[n]G(\mathbb{Z}_q)$ 都包含在 $G(\mathbb{Z}_q)a(n)G(\mathbb{Z}_q)$ 中。□

特别地，若 q 在 L中是惰性的，则可取 S_n' 为 S_n；若 q 在 L中分裂，则可取 S_n' 包含 S_n。(2) 一般而言，对于素因数分解$n=\prod_{i=1}^s p_i^{e_i}$，有（[Shi71，定理 3.24]）

$$T_{a(n)}=\prod_{i=1}^s T_{a(p_i^{e_i})}.$$

由前一种情形可知，对于任意互不相同的 $g,\ g'\in S_n$，右陪集 $gh[n]U$ 和 $g'h[n]U$ 互不相同，且都包含于 $Uh[n]U$（注意，在识别（17）下，对于任意 $p_i,\ U_{p_i}=G(\mathbb{Z}_{p_i})$，因为 n 与 $\ell\mathfrak{M}D_{L/\mathbb{Q}}$互素）。

对于与 $\ell\mathfrak{M}D_{L/\mathbb{Q}}$互素的正整数 $n=\prod_{i=1}^s p_i^{e_i}$，我们定义一个有理数

$$d(n):=\frac{\#S_n}{\#S_n'}=\frac{\#S_n}{\deg(a(n))}\in(0,1].$$

特别地，$d(n)=1$ 当且仅当所有素因数 p_i 在 L中都是惰性的。

综上，我们得到：

定理 7.2。对于任意与 $\ell\mathfrak{M}D_{L/\mathbb{Q}}$ 互素的 n，黑克轨道 $T_n(x[1]^{(\ell)})$ 包含伽罗瓦轨道 $\mathfrak{G}_n(x[n]^{(\ell)})$。此外，我们有 $d(n)=\#\mathfrak{G}_n\deg(a(n))$。

8. Mazur 猜想-1 的变体

回顾一下，我们固定了一个模空间参数化 $\pi\colon Sh_{U,\mathbb{Q}}\to A$。这是一个有限态射（参见 [CV07，定理 3.9] 或 [Zha25，§9]）。由 [Cor02，引理 4.1], 可知 $A(E[\infty])_{\mathrm{tors}}$ 是有限的，设其基数为 t_1。我们记 t_2 为映射 $\pi\colon Sh_U\to A$ 的纤维基数的一个上界；该映射是有限的，因为 π 是一个有限态射。

我们用 $Sh_U^{\mathrm{ss}}(\mathbb{F}_{v(\ell)})$ 表示 $Sh_U(\mathbb{F}_{v(\ell)})$ 的超奇异轨迹，其中 $\mathbb{F}_{v(\ell)}=\mathbb{F}_\ell$ 是 $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ 在素位 $v(\ell)$ 处的剩余域。于是我们有双射（[CV05，推论 3.13 & §3.2.5]）

$$Sh_U^{\mathrm{ss}}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)\simeq I_{x_0}(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f^\ell)U/U\simeq\mathcal{H}^{G,\ell}(\mathcal{A}_{x[1]^{(\ell)}}).$$

根据以下对象的 Eichler 质量 mula，我们知道，当 $\ell\to+\infty$ 时，$\#Sh_U^{\mathrm{ss}}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)\to+\infty$。我们选择 ℓ 惰性于 L，使得

$$\#Sh_U^{\mathrm{ss}}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)>(t_1\times r!)^{2\dim(A)}\times t_2. \tag{18}$$

在下文中，我们固定 $x_0=x[1]$，并假设 $x[1]$ 在 $v(\ell)$ 处具有超奇异约化 $x[1]^{(\ell)}$。对于每个元素$g\in I_{x[1]}(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f^{(\ell)})U$，我们用 $c_g=c_g(\ell)$ 表示 g 在 U 中的稳定子基数（其中 U 在右侧作用于$I_{x[1]^{(\ell)}}(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f^{(\ell)})U$）。该基数有限，因为 $I_{x[1]^{(\ell)}}(\mathbb{R})$ 模其中心是紧致的。取 $I_{x[1]^{(\ell)}}(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f^{(\ell)})U/U$ 的一组代表元$\{g_1,\cdots,g_s\}$，并令

$$c(\pi,\ell,\mathcal{T}):=\min_i\left(\frac{c_{g_i}^{-1}}{\sum_{j=1}^s c_{g_j}^{-1}}\right)^r\in(0,1). \tag{19}$$

这里 k 是 §5 中所述划分 $\mathcal{T}=\bigsqcup_{i=1}^k\mathcal{T}_i$ 的基数。

我们得到以下结果。

定理 8.1. 设 ℓ 和 $\pi\colon\ Sh_U\to A$ 如上。对于任意与 $\ell\mathfrak{M}D_{L/\mathbb{Q}}$ 互素且满足 $1-d(n)<c(\pi,\ell,\mathcal{T})$的整数 $n\gg1$，有

$$\mathbf{R}_{\mathcal{T}}(\{\sigma(x[n])|\sigma\in\mathfrak{G}_n\})=\prod_{i=1}^k\widetilde{\Delta}^{\mathcal{T}_i}(Sh_U^{\mathrm{ss}}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)).$$

证明。 我们将与 $\ell\mathfrak{N}D_{L/\mathbb{Q}}$ 互素的整数 n 依次记为 $a(1) < a(2) < \cdots$。我们希望将定理 5.2 应用于序列 $a(1)$ $a(2)$ $\cdots$。为此，我们验证该定理中的所有条件均成立：显然，5.2(2) 和 5.2(3) 成立；对于 5.2(1)，在 (9) 中，左端等于 $(\mathbb{A}_f^{(\ell)})^\times$；右端则有 $\mathrm{pr}(I_{x[1]^{(\ell)}}(\widehat{\mathbb{Z}}^{(\ell)})) = (\widehat{\mathbb{Z}}^{(\ell)})^\times$，而 $\mathrm{pr}(I_{x[1]^{(\ell)}}(\mathbb{Q}) \bigcap U_\ell) = \mathbb{Z}^{\times\,(\ell)}$ 由 [Vig80, p.90], , 因此 (9) 成立；对于 5.2(4)，我们应用 [Cor02, Proposition 3.4] ，并推出 (3) 成立。由此，我们确实可以应用定理 5.2，因此，根据 $n \to +\infty$，序列 $(\mathbf{R}_{\mathcal{T}}(T_{a(n)}(x[1]^{(\ell)})))_n$ 在 $\prod_{i=1}^r \mathcal{H}^{G,\,\ell}(\mathcal{A}_{x[1]^{(\ell)}})$ 的以下有限 子集上等分布

$$\prod_{i=1}^{k} \widetilde{\Delta}^{\mathcal{T}_i}(\mathcal{H}^{G,\ell}(\mathcal{A}_{x[1]^{(\ell)}})) \simeq \prod_{i=1}^{k} \widetilde{\Delta}^{\mathcal{T}_i}(Sh_U^{\mathrm{ss}}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)).$$

特别地，对于任意 $0 < \epsilon \ll 1$，存在 n_0，使得对于任意 $n \geq n_0$ 和任意 $h = (h_1, \cdots, h_r) \in \prod_{i=1}^k \mathfrak{S}^{\mathcal{T}_i}(Sh_U^{\mathrm{ss}}(\mathbb{F}_\ell))$，在 $T_{a(n)}(x[1]^{(\ell)})$ 中满足 $\mathbf{R}_{\mathcal{T}}(x') = h$ 的点 x' 的数量（按重数计） $f(n, h)$ 满足

$$\left| \frac{f(n,\underline{h})}{\#S_n'} - \prod_{i=1}^{r} \frac{c_{h_i}^{-1}}{\sum_{j=1}^{s} c_{g_j}^{-1}} \right| = \left| \frac{f(n,\underline{h})}{\deg(a(n))} - \prod_{i=1}^{r} \frac{c_{h_i}^{-1}}{\sum_{j=1}^{s} c_{g_j}^{-1}} \right| < \epsilon. \tag{20}$$

注意， $d(n)$ 的取值集合在 1 之外是离散的，因此存在 $0 < \epsilon \ll 1$，使得对于任意 n'，若 $1 - d(n') < c(\pi, \ell, \mathcal{T})$，则 $1 - d(n') < c(\pi, \ell, \mathcal{T}) - \epsilon$。我们选取这样的 ϵ；于是根据关于 n 的假设，有（参见 引理 7.1）

$$\frac{\#(S_n' \backslash S_n)}{\#S_n'} = 1 - d(n) < c(\pi, \ell, \mathcal{T}) - \epsilon.$$

因此，结合 22 可知，对于任意 $h \in \prod_{i=1}^k \mathfrak{S}^{\mathcal{T}_i}(Sh_U^{\mathrm{ss}}(\mathbb{F}_\ell))$，在 $T_{a(n)}(x[1]^{(\ell)})$ 的子集 $\mathfrak{G}_n(x[n]^{(\ell)}) = \{\sigma(x[n])^{(\ell)} | \sigma \in \mathfrak{G}_n\}$ 中，至少存在一个点 x'，满足 $\mathbf{R}_{\mathcal{T}}(x') = h$。至此定理得证。□

我们立即得到如下结论。

推论 8.2。 令 ℓ 和 π： $Sh_U \to A$ 如上。对于任意与 $\ell\mathfrak{N}D_{L/\mathbb{Q}}$ 互素的整数 $n \gg 1$，且满足 $1 - d(n) < c(\pi, \ell, \mathcal{T})$，有

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{T}} \sigma(y[n]) \notin A(L[\infty])_{\mathrm{tors}}.$$

证明。 证明与 [Zha25, 定理 9.2]非常相似。我们通过反证法进行论证，因此假设对于每个与 $\ell\mathfrak{N}D_{L/\mathbb{Q}}$ 互素的 n，$\sum_{\sigma\in\mathcal{T}} \sigma(y[n])$ 都是扭点，其中 $1 - d(n) < c(\pi, \ell, \mathcal{T})$。

令 n 如推论中所述。根据定理 8.1，对于任意 $x, x' \in Sh_U^{\mathrm{ss}}(\overline{\mathbb{F}_\ell})$，我们可以选择 $\nu, \nu' \in \mathfrak{G}_n$，使得 $\mathbf{R}_{\mathcal{T}}(\sigma(\nu(x[n])))$ 的分量与 $\mathbf{R}_{\mathcal{T}}(\sigma(\nu'(x[n])))$ 的分量相同，但 $\mathcal{T}_{i_0} \subset \mathcal{T}$ 中的分量除外；对于某个 i_0，此时

$$\mathbf{R}_{\mathcal{T}}(\sigma(\nu(x[n]))) = x \quad \text{and} \quad \mathbf{R}_{\mathcal{T}}(\sigma(\nu'(x[n]))) = x', \quad \forall \sigma \in \mathcal{T}_{i_0}.$$

特别地，我们有

$$\mathbf{R}_{\mathcal{T}}(\sigma(\nu(y[n]))) - \mathbf{R}_{\mathcal{T}}(\sigma(\nu'(y[n]))) = \big(0, \cdots, 0, \pi(x) - \pi(x'), \cdots, \pi(x) - \pi(x'), 0, \cdots, 0\big)$$

这里在右端，除了 $\mathcal{T}_{i_0}$ 中的分量外，所有分量都为零；这些分量为 $\pi(x) - \pi(x')$。于是我们有

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{T}} \sigma(\nu(y[n]))^{(\ell)} - \sum_{\sigma\in\mathcal{T}} \sigma(\nu'(y[n]))^{(\ell)} = \sum_{\sigma\in\mathcal{T}_{i_0}} (\pi(x) - \pi(x')) = \#\mathcal{T}_{i_0}(\pi(x) - \pi(x')).$$

注意，对任意素数 $q | t_1$,

$$\dim_{\mathbb{F}_q}(A(\overline{\mathbb{F}}_\ell) \otimes \mathbb{F}_q) = 2\dim(A).$$

因此 $\#A(\mathbb{F}_\ell)[t_1] \leq t_1^{2\dim(A)}$。根据对 ℓ (参见 (18)) 的假设，$\#Sh_U^{\mathrm{ss}}(\mathbb{F}_\ell) > (t_1 \times r!)^{2\,\text{维数}(A)} \times t_2$。因此存在 $x, x' \in Sh_U^{\mathrm{ss}}(\mathbb{F}_\ell)$，使得 $\pi(x) - \pi(x') \in A(\mathbb{F}_\ell)$ 的阶不整除 $t_1 \times r!$

另一方面，我们假设 $\sum_{\sigma\in\mathcal{T}}\sigma(y[n])$ 是扭点；因此 $\sum_{\sigma\in\mathcal{T}}\sigma(\nu(y[n]))$ 和 $\sum_{\sigma\in\mathcal{T}}\sigma(\nu'(y[n]))$ 都是扭点，它们模 $v(\ell)$ 约化后也都是扭点，即 $\sum_{\sigma\in\mathcal{T}}\sigma(\nu(y[n]))^{(\ell)}$ 和 $\sum_{\sigma\in\mathcal{T}}\sigma(\nu'(y[n]))^{(\ell)}$。特别地， $A(\mathbb{F}_\ell)$ 中的下列元素，

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{T}}\sigma(\nu(y[n]))^{(\ell)}-\sum_{\sigma\in\mathcal{T}}\sigma(\nu'(y[n]))^{(\ell)}=\#\mathcal{T}_{i_0}(\pi(x)-\pi(x'))$$

是一个扭点元素，其阶必然整除 $t_1=\#A(L[\infty])_{\mathrm{tors}}$。因此 $\pi(x)-\pi(x')$ 是一个扭点元素，其阶必然整除 $t_1\times r!$，[5] 这与前一段矛盾。推论的证明至此完成。□

接下来，我们从上述结果中推导出一些结论。

固定一个素数 p，并记 $L[p^\infty]=\bigcup_k L[p^k]$。这是 L 上最大反圆分 $\mathbb{Z}_p$-扩张 $H[p^\infty]$ 的有限扩张。取 $\mathcal{T}$ 为 $L^\times$ 中 $\mathrm{Gal}(L[p^\infty]/H[p^\infty])$（在阿廷映射 (16) 下）这一 $\mathrm{Gal}(L[p^\infty]/L)$ 子群的一组代表元。于是有

推论 8.3. 设 ℓ 和 π： $Sh_U\to A$ 如上所述。假设 p 在 L 中惰性，或在 L 中分裂，且满足 $\frac{2}{p+1}<c(\pi,\ell,\mathcal{T})$。那么，对于 $k\gg 1$，有

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{T}}\sigma(y[p^k])\notin A(L[\infty])_{\mathrm{tors}}.$$

证明。注意到 $d(p^k)=d(p)$，且当 p 在 L 中惰性时其值为 1，而当 p 在 L中分裂时其值为 $(p-1)/(p+1)$，这便是推论 8.2 的直接应用。□

这是对 Mazur 的原始猜想（[Maz83]）的加强。

现在我们取 $\mathcal{T}$作为以下集合中的一组代表元 $\widehat{L}^\times$，对应商 $\widehat{L}^\times/L^\times$“$\mathcal{O}_L^\times$。

推论 8.4。设 π： $Sh_U\to A$ 如上。对于任意素数 $p\gg 1$，有

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{T}}\sigma(y[p])\notin A(L[\infty])_{\mathrm{tors}}.$$

证明。事实上，我们可以假设 $p>\ell\mathfrak{N}D_{L/\mathbb{Q}}$。此外， $1-d(p)<\frac{2}{p}$。对于 $p\gg 1$， $1-d(p)\ll 1$。特别地，我们可以取 p使得 $1-d(p)<c(\pi,\ \ell,\ \mathcal{T})$。然后我们可以应用推论 8.2。□

这可以看作 Mazur 猜想的一个水平版本。

注 8.5。*§6* 和本节中的所有结果，都可以通过对论证作适当修改，推广到全实数域上的志村曲线。为方便记号，我们仅讨论定义在 $\mathbb{Q}$ 上的志村曲线。

9. Mazur 猜想的变体-2

在上一节中，我们固定了一个辅助素数 ℓ，并考虑了与 ℓ（以及与 $\mathfrak{N}D_{L/\mathbb{Q}}$）互素的正整数 n。本节中，我们固定这样一组无限集素数 ℓ，并对与该集合中所有素数互素的正整数 n 证明一个更强的结果。

令 $\mathcal{T}$ 与前文相同。我们固定一个无限素数集 $\mathcal{S}^\circ$ ℓ，并对每个 $\ell\in\mathcal{S}^\circ$，取 $\mathbb{Q}$ 上方的一个素位 $v(\ell)$，位于 ℓ之上。我们假设，对于所有 $\ell\in\mathcal{S}^\circ$， $x_0=x[1]$在 $v(\ell)$ 处具有超奇异 约化。[6] 那么，对于 $\ell\in\mathcal{S}^\circ$，当 $\ell\to+\infty$时，我们有 $\#Sh_U^{\mathrm{ss}}(\mathbb{F}_\ell)\to+\infty$。此外，众所周知，对于所有 g 和所有 $\ell\in\mathcal{S}^\circ$，基数 $c_g(\ell)$ 有界（事实上，$c_g(\ell)\le 24$；参见 [Voi21，定理 11.5。14]）。

那么我们有如下结论：

[5]更准确地说，我们可以推导出 $\pi(x)-\pi(x')$ 的阶整除 $t_1\times\#\mathcal{T}_{i_0}$。但在证明中，我们的论证只需要 $t_1\times\#\mathcal{T}_{i_0}$ 的 $t_1\times r!$ 倍。[6]这样的 $\mathcal{S}^\circ$ 总是存在，因为 x_0 是志村曲线 Sh_U 上的一个复乘点。

定理 9.1。设 $\mathcal{S}^\circ$ 和 $\pi\colon\ Sh_U \to A$ 如上。对于任意 $0 < c \ll 1$，存在一个整数 $n_0 > 0$，使得对于任意与 $\mathcal{S}^\circ$ 中所有素数互素且满足 $1 - d(n) < c$ 的 $n > n_0$，我们有

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{T}} \sigma(y[n]) \notin A(L[\infty])_{\mathrm{tors}}.$$

证明。证明思路与定理 8.1 类似。我们取 $\ell \in \mathcal{S}^\circ$ 充分大，使得 $s = s(\ell) = \#Sh_U^{\mathrm{ss}}(\mathbb{F}_\ell) \gg 1$，因而 $c(\pi, \ell, \mathcal{T}) \ll 1$，这是因为每个 $c_g(\ell)$ 都有一个与 g 和 ℓ 无关的上界。于是，对于任意与 $\mathcal{S}^\circ$ 和 $\mathfrak{N}D_{L/\mathbb{Q}}$ 中所有素数互素的 $n \gg 1$，$\mathrm{R}_{\mathcal{T}}(T_{a(n)}(x[1]^{(\ell)}))$ 等于 $\prod_{i=1}^k \langle \Delta^{\mathcal{T}_i}(Sh_U^{\mathrm{ss}}(\mathbb{F}_\ell))$；此外，对于这样的$n \to +\infty$，集合 $(\mathrm{R}_{\mathcal{T}}(\{\sigma(x[n])|\sigma \in \mathfrak{G}_n\}))_n$ 在 $\prod_{i=1}^k \langle \Delta^{\mathcal{T}_i}(Sh_U^{\mathrm{ss}}(\mathbb{F}_\ell))$ 上等分布。

为便于记号，我们记 $Sh(\ell) = \prod_{i=1}^k \langle \Delta^{\mathcal{T}_i}(Sh_U^{\mathrm{ss}}(\mathbb{F}_\ell))$。接着，记 $X(\ell)$ 为 $Sh(\ell)^2$ 的子集，其中包含所有满足以下条件的点对 (h,h')：它们属于 $Sh(\ell)$，且 $\sum_{\sigma\in\mathcal{T}}(\pi(h_\sigma) - \pi(h'_\sigma))$ 落在 $A(L[\infty])_{\mathrm{tors}}$ 在 $A(\mathbb{F}_\ell)$ 中的像内。对于任意 $h \in Sh(\ell)$，至多有 $(\#Sh_U^{\mathrm{ss}}(\mathbb{F}_\ell))^{k-1} \times \#A(L[\infty])_{\mathrm{tors}}$ 个点 $h' \in Sh(\ell)$ 满足 $(h, h') \in X(\ell)$。因此我们知道

$$\#X(\ell) \le s(\ell)^k \times (s(\ell)^{k-1} \times \#A(L[\infty])_{\mathrm{tors}}).$$

由此可得

$$\frac{\#X(\ell)}{\#Sh(\ell)^2} \le \frac{\#A(L[\infty])_{\mathrm{tors}}}{s(\ell)} \ll 1.$$

因此，对于与 $\mathcal{S}^\circ$ 和 $\mathfrak{N}D_{L/\mathbb{Q}}$ 中所有素数互素的任意 $n \gg 1$，满足条件 $(\mathbf{R}_{\mathcal{T}}(\pi(g(x[1]))), \mathbf{R}_{\mathcal{T}}(\pi(g'(x[1]))) \in X(\ell)$ 的元素对 $(g(x[1])\ g'(x[1])) \in T_{a(n)}(x[1])$ 的数量 $f(n)$ 满足

$$\frac{f(n)}{\#(S'_n)^2} \ll 1.$$

另一方面，由于 $d(n) > 1 - c$，我们有

$$\frac{\#(S_n)^2}{\#(S'_n)^2} = d(n)^2 > (1-c)^2. \tag{21}$$

我们选取 $n_0 = n_0(\ell)$，使得对于与 $\mathcal{S}^\circ$ 和 $\mathfrak{N}D_{L/\mathbb{Q}}$ 中所有素数互素的任意 $n > n_0$，都有

$$\frac{f(n)}{\#(S'_n)^2} < (1-c)^2. \tag{22}$$

结合 (21) 和 (22)，可得存在一个 $(h, h') \in \mathbf{R}_{\mathcal{T}}(\mathfrak{G}_n(x[n]))^2$，它不属于 $X(\ell)$。换言之，我们可以找到 $\nu, \nu' \in \mathfrak{G}_n$，使得

$$\sum(\sigma(\nu(y[n])) - \sigma(\nu'(y[n]))) \notin A(L[\infty])_{\mathrm{tors}}.$$

特别地，$\sum_{\sigma\in\mathcal{T}} \sigma(\nu(y[n]))$ 或 $\sum_{\sigma\in\mathcal{T}}^{\sigma\in\mathcal{T}} \sigma(\nu'(y[n]))$ 在 $A(L[\infty])$ 中是非扭点的。无论哪种情况，$\sum_{\sigma\in\mathcal{T}} \sigma(y[n])$ 都是非扭点的，从而完成了该定理的证明。□

一个直接推论是对推论 8.3 的如下加强。

推论 9.2. 设 $\pi\colon\ Sh_U \to A$ 如上所述。取一个与 $\mathfrak{N}D_{L/\mathbb{Q}}$ 互素的素数 p。那么对于 $k \gg 1$，我们有

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{T}} \sigma(y[p^k]) \notin A(L[\infty])_{\mathrm{tors}}.$$

证明。对于 $\mathcal{S}^\circ$ 如上所述，我们将定理 9.1 应用于 $\mathcal{S}^\circ\backslash\{p\}$，而非 $\mathcal{S}^\circ$。 □

参考文献

[ALMW22] M. Aka、M. Luethi、P. Michel 与 A. Wieser，复乘椭圆曲线的同时超奇异约化，《纯粹与应用数学杂志》（克雷勒杂志） 786 2022 1 43 10 1515 2021 0086 3 ( )，–。doi: . /crelle- - 。Ber M. Bertolini，反分圆 [95] $\mathbb{Z}_p$ 99 1995 153 182 3 -扩张中的塞尔默群与海格纳点，《组合数学》( )，–。 [02] 148 2002 495 523 Cor C. Cornut，关于高阶 Heegner 点的 Mazur 猜想，《数学发明》( )，–。 2, 3, 4, 17, 18 [01] 144 COU L. Clozel、H. Oh 与 E. Ullmo，Hecke 算子与海克点的等分布，《数学发明》(2001)，第 2 期，327–380。3, 8[CV05] C. Cornut 与 V. Vatsal，复乘点与四元数代数，《数学文献》**10** (2005)，263–309。2, 3, 17

[CV07] C. Cornut 与 V. Vatsal，Rankin–Selberg L-函数的非平凡性与复乘点，伦敦数学会讲义丛书 320 (2007 121 2, 3, 15, 17)，。EL M. Einsiedler 与 E. Lindenstrauss，齐性空间上高秩环面作用的拼接，《高等 ´科学研究所数学出版物》 **129** 2019 83 127 10 1007 10240 019 00103 3, 8, 9 ( )，–。doi: . /s - - -y。How B. Howard，一般线性群 [19] [04] 2 124 2004 1, 1 45 3, 14, 15 型阿贝尔簇上海格纳点的岩泽理论，《杜克数学志》( )，第 – 期。[69] 21 1969 908 911 12 Hum J. E. Humphreys，论无限 Chevalley 群的自同构，《加拿大数学杂志》( )，–。[10] **23** 2010 4, 967 Kis M. Kisin，阿贝尔型志村簇的整模型，《美国数学会杂志》( )，第 – 1012 10, 11 期。[17] p **30** 2017 3, 819 914 10, 11, 12 Kis M. Kisin，阿贝尔型志村簇上的模点，《美国数学会杂志》( )，第 – 期。[83] Maz B. Mazur，《模曲线与算术》，国际数学家大会会议录，华沙 1983，PWN (1984 185 211 2, 19)，第 – 页。Mum D. Mumford，关于志村论文「不连续群与阿贝尔簇」的一个注记，《数学年刊》 [69] 181 1969 345 351 14 ( )，–。NS J. Nekova˘r 与 N. Schappacher，论海格纳点的渐近行为，土耳其数学杂志 ( )，–。[99] ´ 23 1999 549 556 3 p **77** 1995 Rat M. Ratner，实李群与 -进李群笛卡尔积的 Raghunathan 猜想，《杜克数学杂志》( )，第 2 期，275–382。doi:10.1215/S0012-7094-95-07710-2。4, 5 [95] [71] 1 1971 16, 17 Shi G. Shimura，自守函数算术理论引言。卷。普林斯顿大学出版社，。[02] **148** 2002 1, 1 46 10 1007 002220100183 ´ ´ 、 800, 1980 3 Vat V. Vatsal，海格纳点的均匀分布，《数学发明》( )，第 – 期。doi: . /s 。[80] Vig M.-F. Vigneras，四元数代数的算术，施普林格讲义，卷。施普林格出版社，。 18 [21] 2021 Voi J. Voight，四元数代数，Springer Nature，。 19 [13] μ Wor D. Wortmann，Hodge 型志村簇的 -通常轨迹，预印本，arXiv: 1310 6444 2013 10 。( )。Zha X. Zhang，阿贝尔簇的同时超奇异约化，预印本，arXiv: 。( )。[25] 2306 02290 2023 3, 10, 11, 17, 18 [25] p $2n+1$ $4n$ **38** 2026 3 10 1515 2024Zha b X. Zhang，(O,Mp) 的 θ 提升的模非消失，数学论坛 ( )，第 期。doi: . /forum- -0507。3

杜伊斯堡-埃森大学，数学学院，数学职业发展中心，Thea-Leymann街 9 号，45127 埃森，德国电子邮箱地址：xiaoyu.zhang@uni-due.de