arXiv:2602.07313v1 [math.DG] 7 Feb 2026

具有调和魏尔曲率和第二类曲率算子的流形

傅海平和YAO LU

摘要。我们证明，维数为$n \geq 8$、具有调和魏尔曲率且第二类曲率算子 $\frac{3}{(n-1)(n+2)}$ $\frac{}{4(3n-1)}$ -非负的紧致黎曼流形，要么整体共形等价于正恒曲率空间，要么等距于平坦流形。特别地，我们还对满足锥条件的四维调和魏尔曲率流形进行了分类。该结果推广了 [9, 15, 20]的工作。

1. 引言

黎曼几何的一个核心主题是研究曲率算子与黎曼流形拓扑结构之间的关系。Tachibana 的一个著名定理 [30] 表明，任何维数为$n \geq 3$、具有调和曲率且曲率算子为正（分别为非负）的紧致黎曼流形，都等距于标准球面（分别为局部对称流形）的一个商空间。Tran [31], 改进了这一结果，证明维数为$n \geq 4$、具有调和魏尔曲率且曲率算子为正的紧致黎曼流形是局部共形平坦的。在 [29],中，Petersen 和 Wink 证明，具有调和魏尔张量且曲率算子$\left[\frac{n-1}{2}\right]$-非负的紧致黎曼流形，要么整体共形等价于标准球面的一个商空间，要么是局部对称的；当曲率算子为 $\left[\frac{n-1}{2}\right]$-正时，必属于前一种情形。随后，在 [28], 中，他们在更强的爱因斯坦条件下建立了一个相关的 Tachibana 型定理。最近，Colombo、Mariani 和 Rigoli [7] 证明，维数为$n \geq 3$、具有调和曲率且曲率算子为 $\left[\frac{n-1}{2}\right]$-正的紧致黎曼流形必须具有恒定截面曲率，从而推广了 Tachibana 的经典结果。Bettiol 和 Goodman [2], 进一步改进了这一结论，证明当$n \geq \frac{1}{2}$ 时，条件可放宽为曲率算子$n \geq 5$-正；当$n = 2$时，可放宽为曲率算子$n = 3$-正。

由黎曼曲率张量诱导的曲率算子还有另一种定义方式，称为第二类曲率算子，详见下文第2.1节。1986年，Nishikawa猜想 [25]指出，具有正（相应地，非负）第二类曲率算子的闭黎曼流形微分同胚于球面空间形式（相应地，黎曼局部对称空间）。该猜想后来由Cao-Gursky-Tran [5] 证明，并由Li [20, 22]进一步改进。两个证明都依赖于Brendle关于具有PIC1的闭里奇流收敛到常截面曲率的结果 [3] 。

2010 数学主题分类。主要分类号 53C20、53C24、53C25。关键词和短语。爱因斯坦流形、博赫纳技巧、球面定理。本研究部分由中国国家自然科学基金（项目编号：12461008 和 12271069）、江西省自然科学基金（项目编号：20202ACB201001）以及江西省研究生创新专项基金项目（项目编号：YC2025-B037）资助。

对于某些特殊类型的流形，Kashiwada [19] 证明，具有调和曲率以及非负（相应地，正）第二类曲率算子的黎曼流形是局部对称空间（相应地，常曲率空间），其证明使用了Bochner技巧。后来，Nienhaus、Petersen和Wink [26] 导出了第二类曲率算子的一个新Bochner公式，并用它证明：具有$k(< \frac{3}{n(n+2)}\frac{2}{(n+4)})$-非负第二类曲率算子的$n$维紧致爱因斯坦流形必为平坦或有理同调球面。随后，Dai和Fu [8]也得到了一个新的Bochner公式，并用它证明：若紧致爱因斯坦流形的第二类曲率算子是k-非负的，则该流形必具有恒曲率，其中$k = 1$ 对于 $4 \leq n \leq 7$，$k = 2$ 对于 $8 \leq n \leq 10$，以及$k = [\frac{n+2}{4}]$ 对于$n \geq 11$。2024年，Dai-Fu-Yang [9] 改进了Kashiwada的结果，证明具有调和和韦尔张量和非负第二类曲率算子的紧致流形要么整体共形等价于正恒曲率空间，要么等距于平坦流形。最近，Fu、Lu和Dai [15] 给出了具有调和曲率的流形的一个刚性定理，推广了 [19, 8]的结果。关于该课题的进一步发展，请读者参阅 [21, 23, 24, 17, 14]。

设非递减序列 λ_i 为曲率算子的特征值。若

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_{[k]} + (k - [k])\lambda_{[k]+1} > 0 (\geq 0),$$

我们称曲率算子为k-正（分别为非负）。本文研究维数为$n \geq 4$ 且具有调和和魏尔曲率并满足第二类曲率算子条件的黎曼流形。我们的主要结果如下三个定理所述。

定理 A. 设 (M,g) 是一个具有调和和Weyl曲率张量的$n(\geq 8)$维紧致黎曼流形。若第二类曲率算子 $\mathring{R}$ 为 $\frac{3}{(n-1)(n+2)}\frac{4}{(3n-1)}$-非负，则$M$ 要么整体共形等价于一个正~~恒曲率~~空间，要么等距于一个平坦流形。

推论 1.1. 设 (M,g) 是一个具有调和和魏尔曲率张量的$n(\geq 8)$（分别为 11）维紧致黎曼流形。若第二类曲率算子 $\mathring{R}$为 2（分别为 3）-非负，则M 要么整体共形等价于一个正恒曲率空间，要么等距于一个平坦流形。

定理 B. 设 (M, g) 是一个$n(= 5, 7)$维紧致黎曼流形，且具有$^{\circ}$调和和Weyl曲率张量。R 为第二类曲率算子。若 (i)$n = 5$ 且 $\mathring{R}$ 满足$\frac{252}{54}\frac{169}{35}$-非负条件；(ii)$n = 7$ 且 $\mathring{R}$ 满足$\frac{252}{54}\frac{169}{35}$-非负条件，则$M$ 要么整体共形等价于一个正恒曲率空间，要么等距于一个平坦流形。

注 1.2. 定理 A 和 B 推广了 Dai、Fu和Yang [9], 的结果，他们在非负条件下得到了相同的结论。然而，我们的方法不适用于$n = 6$的情形。Dai-Fu-Yang的结果能否改进以达到最优，仍是一个有趣的开放问题。对于$n(\geq 8)$（分别为 11），定理 A 可视为他们定理的一个改进版本，这归功于 [5, 22]。

此外，我们对具有调和和魏尔曲率的四维黎曼流形进行了分类。

定理 C. 设 (M,g) 是一个具有调和魏尔曲率的四维紧致流形，其第二类曲率算子 $\mathring{R}$ 满足

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \geq -3\bar{\lambda}, \tag{1.1}$$

其中，λ 表示R所有特征值的平均值。则以下情况之一必定成立：
(1) M 是共形平坦的。(2) 经缩放后，M 是具有 Fubini–Study度量的 $\mathbb{CP}^2$ 。(3) 经缩放后，M 等距于一个$\Sigma_1^2\times\Sigma_2^2$ 的商空间，其上赋有乘积度量，其中$k_i(i=1,2)$是 Σ_i^2 的常高斯曲率，且$s_2=k_1+k_2>0$。

注 1.3。 对于4维流形，该定理改进了 [14, 定理 D]及其结论，这归功于 [15]。在某些条件下，该定理可视为一个最优刚性结果。

本文安排如下。第 2 节介绍第二类曲率算子及一些引理。第 3 节给出具有调和魏尔曲率的流形的一个精细 Bochner公式，并证明定理 A。第 4 节证明定理 B。定理 C 的证明见第 5 节。

2. 预备知识

2.1. 概念与引理。 在黎曼流形（M^n,g）上，黎曼曲率张量R 诱导出两个对称线性算子 $\hat{R}$ 和 $\mathring{R}$。记V 为该黎曼流形的切空间， Λ^2V 为V上的反对称二阶张量空间，$S_0^2(V)$为V上的无迹对称二阶张量空间。第一类曲率算子定义为

$$\hat{R}:\Lambda^2V\to\Lambda^2V$$
$$\hat{R}(e_i\wedge e_j)=\frac{1}{2}\sum_{k,l}R_{ijkl}e_k\wedge e_l,$$

第二类曲率算子定义为 [5, 26]

$$\mathring{R}=\mathrm{Pr}_{s_0^2(V)}\circ\bar{R}\big|_{S_0^2(V)},$$

其中，由黎曼曲率张量R 诱导的算子 $\bar{R}$ 在$S^2(V)$上的作用定义为

$$\bar{R}(e_i\odot e_j)=\sum_{k,l}R_{kijl}e_k\odot e_l,$$

其中$e_i\odot e_j=e_i\otimes e_j+e_j\otimes e_i$。$S^2(V)$上的内积定义为

$$\langle A,B\rangle=tr(A^TB),$$

则 $\frac{1}{\sqrt{2}}\{e_i\odot e_j\}_{1\leq i<j\leq n}$, $\frac{1}{2}\{e_i\odot e_i\}_{i=1,\dots,n}$是$S^2(V)$的一组标准正交基。算子 $\mathring{R}$可视为曲率算子 $\bar{R}$ ，其像限制在$S_0^2(V)$上。

通过将对称（0,2）-张量与V上的自伴同态相对应，Nienhaus、Petersen 和 Wink 在 [26] 中给出了如下定义。

定义 2.1. 令$T^{(0,k)}(V)$表示V上的（0, k）-张量空间。对于$S \in S^2(V)$和$T \in T^{(0,k)}(V)$，定义

$$S : T^{(0,k)}(V) \to T^{(0,k)}(V)$$
$$(ST)(X_1, \cdots, X_k) = \sum_{i=1}^{k} T(X_1, \cdots, SX_i, \cdots, X_k)$$

并定义 $T^{S^2} \in T^{(0,k)}(V) \otimes S^2(V)$ 为

$$\left\langle T^{S^2}(X_1, \cdots, X_k), S \right\rangle = (ST)(X_1, \cdots, X_k).$$

因此，若 $\{S^\alpha\}$ 是 $S^2_0(V)$ 的标准正交基，则

$$T^{S^2_0} = \sum_{\alpha=1}^{N} S^\alpha T \otimes S^\alpha.$$

°令 $\{\lambda_\alpha\}$ 表示算子 R 的特征值，$\{S^\alpha\}$ 表示 $S^2_0(V)$ 的对应标准正交特征基。下文假设特征值 $\{\lambda_\alpha\}$ 按非递减顺序排列。定义 °R在空间 $T^{S^2_0}$上的作用为

$$\mathring{R}(T^{S^2_0}) = \sum_{\alpha} S^\alpha T \otimes \mathring{R}(S^\alpha),$$

then

$$\left\langle \mathring{R}(T^{S^2_0}), T^{S^2_0} \right\rangle = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha |S^\alpha T|^2.$$

2.2. **加权原理**。 为了分析 Bochner公式中的各个项，我们应用 [26], 中发展的强大加权和演算，它使我们能够估计具有非负权重的有限加权和。

定义 2.2. ([26, 定义 3.1]) 令 $\{\omega_i\}_{\alpha=1}^N$ 为任意有限加权和中的非负权重。定义

$$\Omega = \max_{1 \le \alpha \le N} \omega_\alpha \quad \text{and} \quad S = \sum_{\alpha=1}^{N} \omega_\alpha .$$

我们称S 为总权重，称 Ω 为最高权重。

°特别地，如果$F(R)$是一个依赖于曲率张量R 的（几何）量，且R 是第二类曲率算子，那么我们将写作

$$F(R) \ge [\mathring{R}, \Omega, S]$$

°前提是$F(R)$有一个下界，该下界由R的特征值的加权和给出，其最高权重为 Ω，总权重为S。

令 $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ 为 °R 的特征值。按照 [26], 中的记号，我们用 [°R、Ω、S]表示关于 $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ 的任意有限加权和 $\sum_{\alpha=1}^N \omega_\alpha \lambda_\alpha$ ，其权重满足最高权重 Ω 和总权重 S。

引理 2.3。 ([26, 引理 3。4]) 令 $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ 表示 $\mathring{R}$的有序特征值。则对于任意整数 $1 \le m \le N$，有

$$[\mathring{R}, \Omega, S] \ge (S - m\Omega)\lambda_{m+1} + \Omega \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_i.$$

因此，$[\mathring{R}、\Omega、S] \ge 0$ 当且仅当 $\mathring{R}$ 是s_Ω-非负时。

以下引理将在证明中发挥作用。

引理 2.4. ([26, 引理 3.3]) 设 $[\mathring{R}、\Omega、S]$、$[\mathring{R}、\widetilde{\Omega}、\widetilde{S}]$ 分别表示 $\mathring{R}$ 的特征值加权和，其最高权重分别为 Ω、$\widetilde{\Omega}$，总权重分别为S、$\widetilde{S}$。

(a) 若$c > 0$，则

$$[\mathring{R}, c\Omega, cS] = c \cdot [\mathring{R}, \Omega, S].$$

(b) 若 $\widetilde{\Omega} \le \Omega$，则

$$[\mathring{R}, \Omega, S] \ge [\mathring{R}, \widetilde{\Omega}, S].$$

(c)

$$[\mathring{R}, \Omega, S] + [\mathring{R}, \widetilde{\Omega}, \widetilde{S}] \ge [\mathring{R}, \Omega + \widetilde{\Omega}, S + \widetilde{S}].$$

3. 调和魏尔曲率流形的 Bochner公式

设 M 是一个赋有标准黎曼度量 $\langle,\rangle$、具有调和魏尔曲率的 n 维完备流形。记其魏尔张量为 W，标量曲率为 s。为简便起见，令

$$R_{sjti}W_{sjkl}W_{tikl} = \alpha(W) \quad \text{and} \quad R_{sikt}W_{sjkl}W_{ijtl} = \beta(W).$$

引理 3.1. 设 M 是一个具有调和魏尔曲率的 $n(\ge 4)$ 维完备黎曼流形。则

$$\langle \Delta W, W\rangle = 2R_{lt}W_{ijkl}W_{ijkt} - \alpha(W) - 4\beta(W). \tag{3.1}$$

注 3.2. 尽管 [13]，中已证明了类似公式，但其表达形式有所不同。为求完整起见，我们仍在此给出证明。

证明. 由于 W 是调和的，根据第二比安基恒等式可得（见 [13]）

$$W_{ijkl,h} + W_{ijlh,k} + W_{ijhk,l} = 0.$$

结合以上结果，里奇恒等式给出

$$\begin{aligned}
\langle \Delta W, W\rangle &= W_{ijkl,ss}W_{ijkl} = W_{ijkl}(W_{ijsl,ks} + W_{ijks,ls}) \\
&= 2W_{ijkl}(W_{ijks,sl} + R_{lsti}W_{tjks} + R_{lstj}W_{itks} + R_{lstk}W_{ijts} + R_{lsts}W_{ijkt}) \\
&= 4R_{lsti}W_{ijkl}W_{tjks} + 2R_{lstk}W_{ijkl}W_{ijts} + 2R_{lt}W_{ijkl}W_{ijkt} \\
&= 2R_{lt}W_{ijkl}W_{ijkt} - \alpha(W) - 4\beta(W).
\end{aligned}$$

引理 3.1 的证明至此完成。 □

Let

$$S^{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k,l}(W_{iklj} + W_{ilkj})e_k \odot e_l.$$

由于魏尔张量无迹，因此 S_{ij} 是一个无迹对称张量。因此，我们可以计算：

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} < \mathring{R}(S^{ij}), S^{ij} > = \sum_{i,j} < \bar{R}(S^{ij}), S^{ij} > \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l,s,t}(W_{iklj} + W_{ilkj})(W_{istj} + W_{itsj})(R_{kstl} + R_{ktsl}) \\
&= \frac{1}{2}(W_{iklj}W_{istj}R_{kstl} + W_{iklj}W_{istj}R_{ktsl} + W_{iklj}W_{itsj}R_{kstl} + W_{iklj}W_{itsj}R_{ktsl} \\
&\quad + W_{ilkj}W_{istj}R_{kstl} + W_{ilkj}W_{istj}R_{ktsl} + W_{ilkj}W_{itsj}R_{kstl} + W_{ilkj}W_{itsj}R_{ktsl}) \\
&= 2W_{iklj}W_{istj}R_{kstl} + 2W_{iklj}W_{istj}R_{ktsl} \\
&= \frac{1}{2}\alpha(W) - 4\beta(W)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中最后一个等式由第一Bianchi恒等式得出，该恒等式给出

$$W_{iklj}W_{istj}R_{ktsl} = W_{iklj}W_{istj}(R_{klst} + R_{kstl}) = W_{iklj}W_{istj}R_{klst} - \beta(W)$$

and

$$\begin{aligned}
\alpha(W) &= W_{ijkl}W_{ijst}R_{klst} = (W_{ilkj} + W_{ikjl})(W_{itsj} + W_{isjt})R_{klst} \\
&= W_{ilkj}W_{itsj}R_{klst} + W_{ilkj}W_{isjt}R_{klst} + W_{ikjl}W_{itsj}R_{klst} + W_{ikjl}W_{isjt}R_{klst} \\
&= 4W_{iklj}W_{istj}R_{klst}.
\end{aligned}$$

为了推导具有调和魏尔曲率的黎曼流形的 Bochner公式，我们需要以下命题，该命题取自 [8]。

命题 3.3 ([8])。 设T 和 $\mathring{}R$ 分别表示黎曼流形（M，g）上的光滑代数曲率张量和第二类曲率算子，其中流形的维数为$n \geq 3$。则

$$< \mathring{R}(T^{S_0^2}), T^{S_0^2} >= \frac{2n+32}{n}R_{st}T_{sjkl}T_{tjkl} - 5\alpha(T) + 4\beta(T) - \frac{16}{n^2}s|T|^2.$$

经过上述准备，我们得到以下 Bochner公式。

命题 3.4。 设M 是一个$n(\geq 4)$维完备黎曼流形，具有调和魏尔曲率。则

$$3\langle \Delta W, W\rangle = \left\langle \mathring{R}(W^{S_0^2}), W^{S_0^2}\right\rangle + \frac{4(n-8)}{n}R_{lt}W_{ijkl}W_{ijkt} + 4\sum_{i,j} < \mathring{R}(S^{ij}), S^{ij} > + \frac{16}{n^2}s|W|^2.$$

证明。 由命题 3.3 可得

$$< \mathring{R}(W^{S_0^2}), W^{S_0^2} >= \tfrac{2n+32}{n}R_{st}W_{sjkl}W_{tjkl} - 5\alpha(W) + 4\beta(W) - \tfrac{16}{n^2}s|W|^2.$$

结合 (3.1) 和 (3.2)，可得

$$\begin{aligned} 3\langle \Delta W, W\rangle &= \left\langle \mathring{R}(W^{S_0^2}), W^{S_0^2}\right\rangle + \frac{4(n-8)}{n} R_{lt} W_{ijkl} W_{ijkt} + 2\alpha(W) - 16\beta(W) + \frac{16}{n^2} s|W|^2 \\ &= \left\langle \mathring{R}(W^{S_0^2}), W^{S_0^2}\right\rangle + \frac{4(n-8)}{n} R_{lt} W_{ijkl} W_{ijkt} + 4\sum_{i,j} < \mathring{R}(S^{ij}), S^{ij} > + \frac{16}{n^2} s|W|^2. \end{aligned}$$

命题 3.4 的证明至此完成。 □

°设 $\{S^\alpha\}$ 是 R 的标准正交特征基，对应的特征值为 $\{\lambda_\alpha\}$。由于S_{ij}是无迹对称 (0, 2) 张量，因此有

$$\sum_{i,j} \left\langle \mathring{R}(S^{ij}), S^{ij}\right\rangle = \sum_\alpha \left[\lambda_\alpha \sum_{i,j} (S^{ij}_\alpha)^2\right],$$

其中 $S_{ij\alpha}$ 是 S_{ij} 在基 $\{S^\alpha\}$ 下的分量。因此，命题 3.4 可以写为

$$3\langle \Delta W, W\rangle = \sum_\alpha \lambda_\alpha |S^\alpha W|^2 + \frac{4(n-8)}{n} R_{lt} W_{ijkl} W_{ijkt} + 4\sum_\alpha \left[\lambda_\alpha \sum_{i,j} (S^{ij}_\alpha)^2\right] + \frac{16}{n^2} s|W|^2. \tag{3.3}$$

根据 [8], 中给出的计算可知

$$\sum_{\alpha=1}^{N} |S^\alpha W|^2 = \frac{2(n^2+n-8)}{n}|W|^2,$$

and

$$|S^\alpha W|^2 \le \frac{8(n-2)}{n}|W|^2.$$

因此,

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha |S^\alpha W|^2 \ge [\mathring{R}, \frac{8(n-2)}{n}, \frac{2(n^2+n-8)}{n}]|W|^2. \tag{3.4}$$

根据 [26, 例 3.2], , M 的标量曲率s满足

$$s \ge \frac{2n}{n+2}[\mathring{R}, 1, \frac{(n-1)(n+2)}{2}], \tag{3.5}$$

并且根据 [26, 引理 3.14], , M 的里奇曲率Ric 满足

$$\mathrm{Ric} \ge \frac{n-1}{n+1}\left[\mathring{R}, 1, n\right] + \frac{1}{n(n+1)} s.$$

结合 (3.5) 与引理 2.4(c)，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric} &\ge \frac{n-1}{n+1}\left[\mathring{R}, 1, n\right] + \frac{2}{(n+1)(n+2)}[\mathring{R}, 1, \frac{(n-1)(n+2)}{2}] \\ &\ge \left[\mathring{R}, \frac{n}{n+2}, n-1\right]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

此外，将 (3.2) 应用于曲率张量 $R_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$，可得

$$\sum_{\alpha}\sum_{i,j}(S_{\alpha}^{ij})^2 = 3|W|^2.$$

由权重原理可得

$$\sum_{\alpha}\left[\lambda_{\alpha}\sum_{i,j}(S_{\alpha}^{ij})^2\right] \geq 3\left[\mathring{R},1,1\right]|W|^2. \tag{3.7}$$

命题 3.5. 设M 是一个$n(\geq 8)$维完备黎曼流形，且具有调和的Weyl曲率。那么

$$3\langle\Delta W, W\rangle \geq [\mathring{R}, \frac{8(3n-1)}{n+2}, 6(n-1)]|W|^2.$$

证明. 结合命题 3.4、(3.5)、(3.6)、(3.7)和引理 2.4，可得

$$\begin{aligned}
3\langle\Delta W, W\rangle &= \left\langle \mathring{R}(W^{S_0^2}), W^{S_0^2}\right\rangle + \frac{4(n-8)}{n}R_{lt}W_{ijkl}W_{ijkt} + 4\sum_{i,j}<\mathring{R}(S^{ij}), S^{ij}> + \frac{16}{n^2}s|W|^2\\
&\geq [\mathring{R}, \frac{8(n-2)}{n}, \frac{2(n^2+n-8)}{n}]|W|^2 + \frac{4(n-8)}{n}[\mathring{R}, \frac{n}{n+2}, n-1]|W|^2 + 12[R,1,1]|W|^2\\
&\quad + \frac{32}{n(n+2)}[R,1,\frac{(n-1)(n+2)}{2}]|W|^2\\
&\geq [\mathring{R}, \frac{8(n-2)}{n} + \frac{4(n-8)}{n+2} + 12 + \frac{32}{n(n+2)}, \frac{2(n^2+n-8)}{n} + \frac{4(n-8)(n-1)}{n} + 12 + \frac{16(n-1)}{n}]|W|^2\\
&= [\mathring{R}, \frac{8(3n-1)}{n+2}, 6(n-1)]|W|^2.
\end{aligned}$$

□

定理 ***A*** 的证明. 若 $\mathring{R}$ 是 $^{3}_{(n-1)(n+2)\ 4(3n-1)}$-非负的，则利用命题 3.5 和引理 2.3，可得

$$\frac{1}{2}\Delta|W|^2 = |\nabla W|^2 + \langle\Delta W, W\rangle \geq 0.$$

由最大值原理，根据以上结果可得 $\nabla W = 0$。根据 Derdzi´nski 和 Roter 的结果 [11] 若黎曼流形具有 $\nabla W = 0$，则它们或者局部共形平坦，或者局部对称，因此我们看到 (M, g) 或者是局部共形平坦，或者是局部对称。

根据 [22], 中的定理 1.8，(*M*,*g*) 要么局部不可约，要么是平坦的。

如果 (*M*,*g*) 局部共形平坦，那么根据 [6, 32] 中的分类定理，以及 (*M*, *g*) 局部不可约这一事实，可知 (*M*,*g*) 整体共形等价于一个正恒曲率空间，或与一个平坦流形等距。

如果 (*M*, *g*) 局部对称，那么它具有平行 Ricci 曲率。由于 (*M*,*g*) 局部不可约，因此它是一个爱因斯坦流形。 [8, 15] 中的结果表明，*M* 必定具有恒曲率。因此，(*M*,*g*) 是一个恒曲率空间。□

4. The case for $n = 5$ and $n = 7$

本节中，我们证明定理 B。首先，我们建立里奇曲率关于标量曲率和第二类曲率算子的一个上界。

命题 4.1. 设R是维数为$n \geq 3$的欧几里得向量空间V上的代数曲率张量。若R具有$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$-非负第二类曲率算子，则R的里奇曲率满足$Ric \leq s$。

注记 4.2。该命题可由以下证明得出：[20,定理 1。6]。

证明。令$\{e_1, ..., e_n\}$为V的标准正交基，并定义：

$$\psi_{kl} = \frac{1}{\sqrt{2}} e_k \odot e_l, \quad \text{for} \quad 2 \leq k < l \leq n.$$

则$\{\psi_{kl}\}$是$S_0^2(V)$的标准正交子集。由于R具有$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$-非负第二类曲率算子，我们可以计算得

$$0 \leq \sum_{2 \leq k < l \leq n} \left\langle \mathring{R}(\psi_{kl}), \psi_{kl} \right\rangle = \sum_{2 \leq k < l \leq n} R_{klkl} = \frac{s}{2} - R_{11},$$

这意味着$Ric \leq s$。 □

定理 ***B*** 的证明。对于$n = 5$，我们有

$$\begin{aligned}
\alpha(W) =& R_{sjti} W_{sjkl} W_{tikl} \\
=& W_{sjti} W_{sjkl} W_{tikl} + \frac{1}{n-2}(R_{st}\delta_{ji} + R_{ji}\delta_{st} - R_{si}\delta_{jt} - R_{jt}\delta_{si}) W_{sjkl} W_{tikl} \\
& - \frac{s}{(n-1)(n-2)}(\delta_{st}\delta_{ji} - \delta_{si}\delta_{jt}) W_{sjkl} W_{tikl} \\
=& W_{sjti} W_{sjkl} W_{tikl} + \frac{4}{n-2} R_{st} W_{sjkl} W_{tjkl} - \frac{2s}{(n-1)(n-2)} |W|^2
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\beta(W) =& R_{sikt} W_{sjkl} W_{ijtl} \\
=& W_{sikt} W_{sjkl} W_{ijtl} + \frac{1}{n-2}(R_{sk}\delta_{it} + R_{it}\delta_{sk} - R_{st}\delta_{ik} - R_{ik}\delta_{st}) W_{sjkl} W_{ijtl} \\
& - \frac{s}{(n-1)(n-2)}(\delta_{st}\delta_{ji} - \delta_{si}\delta_{jt}) W_{sjkl} W_{ijtl} \\
=& W_{sikt} W_{sjkl} W_{ijtl} - \frac{2}{n-2} R_{st} W_{sjkl} W_{kjtl} + \frac{s}{(n-1)(n-2)} W_{sjkl} W_{kjsl} \\
=& W_{sikt} W_{sjkl} W_{ijtl} - \frac{2}{n-2} R_{st} W_{sjkl}(-W_{jtkl} - W_{tkjl}) + \frac{s}{(n-1)(n-2)} W_{sjkl}(-W_{jskl} - W_{skjl}) \\
=& W_{sikt} W_{sjkl} W_{ijtl} - \frac{1}{n-2} R_{st} W_{sjkl} W_{tjkl} + \frac{s}{2(n-1)(n-2)} |W|^2.
\end{aligned}$$

根据 Jack 和 Parker 的结果 [18],当$n \leq 5$

$$W_{sjti} W_{sjkl} W_{tikl} = 2 W_{sikt} W_{sjkl} W_{ijtl},$$

因此

$$\alpha(W) = 2\beta(W) + \frac{6}{n-2} R_{st} W_{sjkl} W_{tjkl} - \frac{3}{(n-1)(n-2)} s |W|^2.$$

将上述结果与 (3.1) 结合，我们得到

$$\langle \Delta W, W\rangle = -6\beta(W) - \frac{2(n-5)}{n-2}R_{st}W_{sjkl}W_{tjkl} + \frac{3}{(n-1)(n-2)}s|W|^2. \tag{4.1}$$

因此，由 (3.2) 和命题 3.3 可得

$$\sum_{i,j}\left\langle R(S^{ij}), S^{ij}\right\rangle = -3\beta(W) + \frac{3}{n-2}R_{st}W_{sjkl}W_{tjkl} - \frac{3}{2(n-1)(n-2)}s|W|^2, \tag{4.2}$$

and

$$\left\langle R(W^{S_0^2}), W^{S_0^2}\right\rangle = -6\beta(W) + \frac{2(n^2-n-32)}{n(n-2)}R_{st}W_{sjkl}W_{tjkl} - \frac{n^2-48n+32}{n^2(n-1)(n-2)}s|W|^2. \tag{4.3}$$

将 (4.2) 和 (4.3) 代入 (4.1)，对于$n = 5$，得到

$$\langle \Delta W, W\rangle = \frac{5}{9}\left\langle R(W^{S_0^2}), W^{S_0^2}\right\rangle + \frac{8}{9}\sum_{i,j}\left\langle R(S^{ij}), S^{ij}\right\rangle + \frac{1}{45}s|W|^2.$$

对于$n = 7$，若$\mathring{R}$是54 35-非负的，则由命题 4.1 可得 Ric $\leq s$ 2。结合 (3.3)，得到

$$3\langle \Delta W, W\rangle \geq \sum_{\alpha}\lambda_\alpha |S^\alpha W|^2 + 4\sum_{\alpha}\left[\lambda_\alpha \sum_{i,j}(S_\alpha^{ij})^2\right] + \frac{2}{49}s|W|^2.$$

其余论证与定理 A 的证明类似，由此完成定理 B 的证明。□

5. 四维情形的刚性定理

定理 ***C*** 的证明。 Weitzenb¨ock 公式（参见 [1]）在具有调和魏尔曲率的四维流形上可表示为

$$\frac{1}{2}\Delta\left|W^+\right|^2 = \left|\nabla W^+\right|^2 + \frac{s}{2}\left|W^+\right|^2 - 72\det W^+.$$

W^+ 的特征值记为 $a_1 \leq a_2 \leq a_3$，，而W^- 的特征值记为 $b_1 \leq b_2 \leq b_3$.

根据 [5],，在四维流形上，$S_0^2(TM^4)$ 存在一个标准正交基，使得$\mathring{}$矩阵R 的所有对角元素均为

$$\lambda_{ij} = \frac{s}{12} - a_i - b_j, \quad i,j = 1,2,3.$$

$\mathring{}$若R满足 (1.1)，则

$$a_3 = \frac{s}{12} - \frac{\lambda_{31}+\lambda_{32}+\lambda_{33}}{3} \leq \frac{s}{12} - \frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{3} \leq \frac{s}{12} + \bar{\lambda} = \frac{s}{6},$$

and

$$b_3 = \frac{s}{12} - \frac{\lambda_{13}+\lambda_{23}+\lambda_{33}}{3} \leq \frac{s}{12} - \frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{3} \leq \frac{s}{12} + \bar{\lambda} = \frac{s}{6}.$$

因此，$s \geq 0$；此外，若$s = 0$，则$W^\pm = 0$，即，M 是共形平坦的。

Let

$$f(a_1,a_2,a_3) = \frac{s}{2}\left|W^+\right|^2 - 72\det W^+ = 2\left[s(a_1^2+a_2^2+a_3^2) - 36a_1a_2a_3\right].$$

由于$a_1+a_2+a_3=0$，我们得到

$$f=2\left[s(a_1^2+a_2^2+a_3^2)-12(a_1^3+a_2^3+a_3^3)\right].$$

现在我们考虑情形$s>0$。f的表达式可以改写为

$$\begin{aligned}f&=2\left[s(a_1^2+a_2^2+a_3^2)-12(a_1^3+a_2^3+a_3^3)\right]\\&=2\left[s\sum_{i=1}^{3}(\frac{s}{6}-a_i-\frac{s}{6})^2+12\sum_{i=1}^{3}(\frac{s}{6}-a_i-\frac{s}{6})^3\right]\\&=2\left[12\sum_{i=1}^{3}(\frac{s}{6}-a_i)^3-5s\sum_{i=1}^{3}(\frac{s}{6}-a_i)^2+\frac{s^3}{4}\right]\\&=\frac{125}{72}s^3\left[\sum_{i=1}^{3}[\frac{12}{5s}(\frac{s}{6}-a_i)]^3-\sum_{i=1}^{3}[\frac{12}{5s}(\frac{s}{6}-a_i)]^2\right]+\frac{s^3}{2}.\end{aligned}$$

由于

$$\frac{12}{5s}(\frac{s}{6}-a_i)\geq 0\quad\text{and}\quad\sum_i\frac{12}{5s}(\frac{s}{6}-a_i)=\frac{6}{5},$$

由 [14, 引理 3。3]可知，f的极小点为

$$(\frac{12}{5s}(\frac{s}{6}-a_1),\frac{12}{5s}(\frac{s}{6}-a_2),\frac{12}{5s}(\frac{s}{6}-a_3))=(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{5})$$

and

$$(\frac{12}{5s}(\frac{s}{6}-a_1),\frac{12}{5s}(\frac{s}{6}-a_2),\frac{12}{5s}(\frac{s}{6}-a_3))=(\frac{3}{5},\frac{3}{5},0),$$

分别对应于

$$(a_1,a_2,a_3)=(0,0,0)\quad\text{and}\quad(a_1,a_2,a_3)=(-\frac{s}{12},-\frac{s}{12},\frac{s}{6}),$$

因此，我们有

$$f\geq f(0,0,0)=f(-\frac{s}{12},-\frac{s}{12},\frac{s}{6})=0,$$

在这种情况下，这意味着

$$\frac{1}{2}\Delta\left|W^+\right|^2=\left|\nabla W^+\right|^2+\frac{s}{2}\left|W^+\right|^2-72\det W^+\geq 0.$$

由最大值原理，我们得到 $\nabla W^+=0$，并且以下两者之一成立：$(a_1,a_2,a_3)=(0,0,0)$，或 $(a_1,a_2,a_3)=(-\frac{s}{12},-\frac{s}{12},\frac{s}{6})$。

类似地，我们得到 $\nabla W^-=0$，其中 (b_1,b_2,b_3) 或为 $(0,0,0)$，或为 $(-\frac{s}{12},-\frac{s}{12},\frac{s}{6})$。由此可知，要么 $W=0$，要么 $W\neq 0$ 且 $\nabla W=0$——后一种情形意味着 M 是具有常标量曲率 [10] 的 K¨ahler 流形。结合调和魏尔曲率条件，这迫使里奇张量平行。因此，我们有$\nabla R=0$；也就是说，M 是局部对称的。所以，当 M 的万有覆盖 M 不可约时，根据四维对称空间的分类，$\tilde{M}$ 是带有 Fubini–Study度量的 $\mathbb{CP}^2$；当 M 的万有覆盖 $\tilde{M}$ 可约时，则 $\Sigma_1^2\times\Sigma_2^2$ 带有乘积度量，其中 $k_i(i=1,2)$ 是 Σ_i^2的常高斯曲率，且 $k_1+k_2=s>0$。□

推论 5.1。 设 (M,g) 是一个具有调和魏尔曲率的四维紧致流形，且 $\chi(M) \geq 0$ 的第二类曲率算子满足

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq -3\bar{\lambda},$$

那么以下结论必有一项成立：
(1) M 是平坦的。(2) M 共形于标准球面（S^4, g_0）的一个商空间。(3) M 共形于配备乘积度量的 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ 的一个商空间。(4) 缩放后，M 是配备Fubini–Study度量的 $\mathbb{CP}^2$。(5) 缩放后，M 等距于配备乘积度量的$\Sigma_1^2 \times \Sigma_2^2$ 的一个商空间，其中k_i（$i = 1, 2$）是 Σ_i^2的常高斯曲率，且$s_2 = k_1 + k_2 > 0$。

证明。 若$W = 0$ 且$s = 0$，陈–高斯–博内定理蕴含$Ric = 0$，即M是平坦的。

在 $W = 0$ 且 $s > 0$的情形下， [12, 命题 F] 蕴含第二贝蒂数 $b_2(M) = 0$，且 $0 \leq \chi(M) \leq 2$，即第一贝蒂数$b_1(M) = 0$ 或为 1。由陈–高斯–博内定理可得

$$-2\int_M |\mathring{Ric}|^2 + \frac{1}{6}\int_M s^2 = 32\pi^2\chi(M) \geq 0, \text{i.e.,} \int_M |\mathring{Ric}|^2 \leq \frac{1}{6}\int_M s^2.$$

根据 [16, 定理 1.7], M 与标准球面的一个商空间共形等价 $\mathbb{S}^4$，或 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ 配备乘积度量。结合定理 C，我们完成了推论 5.1 的证明。□

注 5.2。 对于具有调和曲率的 4维流形，推论 5.1 的 (2) 和 (3) 中的“共形”可以加强为“等距”。事实上，M 与标准球面的一个商空间等距 $\mathbb{S}^4$，因为标准球面 $\mathbb{S}^4$ 是爱因斯坦流形。另一方面，$\chi(M) = 0$ 意味着$\int_M |\mathring{Ric}|^2 = \frac{1}{12}Y^2(M, [\tilde{g}])$，因为$-2\int_M |\mathring{Ric}|^2 + \frac{1}{6}\int_M s^2$是共形不变量。根据 [16, 定理 1.6], M 与配备乘积度量的 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ 等距。

定理 5.3。 设 (M,g) 是一个具有调和 Weyl 曲率且第二类曲率算子 $4\frac{1}{2}$-非负的四维紧致流形。则以下情况必有其一：

(1) M 是平坦的。(2) M 共形于标准球面 $(\mathbb{S}^4, g_0)$ 的一个商空间。
(3) M 共形于具有乘积度量的 $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^3$ 的一个商空间。(4) 经缩放后，M 与带有 Fubini–Study度量的 $\mathbb{CP}^2$ 等距。

注 5.4。 对于一般的4维流形， [20, 定理 1.4] 给出了一个与本定理所述结果相似但较弱的结论。对于具有调和曲率的4维流形，在定理 5.3的(2)和(3)中，“共形”可以加强为“等距”。这可以仿照推论 5.1证明的后半部分得到，即M 等距于标准球面 $\mathbb{S}^4$ 或 $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^3$的一个商空间。

°　　¯证明。 设 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_9$ 是R的特征值， λ 是它们的平均值。则$4\frac{1}{2}$-第二类曲率算子非负的R满足

$$\begin{aligned}
&\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \ge -\lambda_4-\frac{1}{2}\lambda_5\\
&\ge -\frac{\frac{1}{2}\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7+\lambda_8+\lambda_9}{3}\\
&\ge -\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7+\lambda_8+\lambda_9}{3}\\
&= -3\bar{\lambda}.
\end{aligned}$$

结合定理 C，M 要么是平坦的、共形平坦的，要么与 $\mathbb{CP}^2$ 上的 Fubini–Study度量等距，因为 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$ 具有 4 $_{12}$负的第二类曲率算子。由 [20, 定理 1。6], M 具有非负里奇曲率。然后，应用 [6, 定理 A] 和 [32, 定理 1], 可得M 与标准球面的某个商空间 $\mathbb{S}^4$ 或 $\mathbb{R}^1\times\mathbb{S}^3$共形。定理 5.3 的证明至此完成。□

参考文献

[1] Arthur L Besse。《爱因斯坦流形》。Springer，2007年。[2] Renato G Bettiol 和 McFeely Jackson Goodman。曲率算子与有理余边。《数学进展》，458：109995，2024年。[3] Simon Brendle。具有非负各向同性曲率的爱因斯坦流形局部对称。《Duke 数学杂志》，151(1)：1–21，2010年。[4] Cheeger Jeff 和 Gromoll Detlef。非负里奇曲率流形的分裂定理。《微分几何杂志》，6：119–128，1971年。[5] Xiaodong Cao、Matthew J Gursky 和 Hung Tran。第二类曲率与 Nishikawa 猜想。《瑞士数学评论》，98(1)：195–216，2023年。[6] G. Carron 和 M. Herzlich。具有非负里奇曲率的共形平坦流形，《组合数学》142：798–810，(2006)。[7] Giulio Colombo、Marco Mariani 和 Marco Rigoli。完备流形上的橘型定理。《比萨高等师范学校年鉴——科学辑》，25(2)：1033–1083，2024年。[8] Zhi-Lin Dai 和 Hai-Ping Fu。爱因斯坦流形与第二类曲率算子。《变分法与偏微分方程》，63(2)：53，2024年。[9] Zhi-Lin Dai、Hai-Ping Fu 和 Deng-Yun Yang。具有调和韦尔张量和非负第二类曲率算子的流形。《几何与物理杂志》，195：105040，2024年。[10] A. Derdzi´nski。自对偶 K¨ahler 流形与四维爱因斯坦流形。《组合数学》49：405–433，1983年。[11] A Derdzi´nski 和 Witold Roter。关于度量指标为 0 和 1 的共形对称流形。《张量》(新系列)，296：255–259，1977年。[12] Hai-ping Fu。具有正雅马贝常数的四维流形。《太平洋数学杂志》，296 104，2018年 1 79( )：–。[13] Hai-ping Fu 和 Hui-ya He。关于具有调和魏尔曲率的紧致黎曼流形。《数学结果》，74：77，2019年。[14] Hai-Ping Fu 和 YAO LU。爱因斯坦流形与第二类曲率算子的新刚性定理。arXiv 预印本 arXiv:2512.21496，2025年。[15] Hai-Ping Fu、YAO LU 和 Zhi-Lin Dai。具有调和曲率和第二类曲率算子的流形。arXiv 预印本 arXiv:2601.02722v1，2026年。[16] Hai-Ping Fu 和 Li-Qun Xiao。具有调和曲率的完备流形的一些 L^p 刚性结果。《Potential Anal.》，48：239–255，2018年。[17] Teng Huang 和 Jiaogen Zhang。Gårding 锥与曲率算子的正性。arXiv 预印本 arXiv:2506.15374，2025年[18] Ian Jack 和 Leonard Parker。任意维数弯曲时空中重整化反项的线性无关性。《数学物理杂志》，28(5)：1137–1139，1987年。

[19] Toyoko Kashiwada。关于第二类曲率算子。《自然科学报告》，御茶水女子大学，44(2)：69–73，1993年。[20] 李小龙。具有 4 12-正第二类曲率算子的流形。《几何分析杂志》，32(11)：281，2022年。[21] 李小龙。K¨ahler 流形与第二类曲率算子。《数学杂志》，303(4)：101，2023年[22] 李小龙。具有非负第二类曲率算子的流形。《当代数学通讯》，26(03)：2350003，2024年。[23] 李小龙。乘积流形与第二类曲率算子。《太平洋数学杂志》，332(1)：167–193，2024年。[24] 李小龙。第二类曲率算子条件下的新球面定理。《伦敦数学学会杂志》，112(5)：70356，2025年。[25] 西川清纪。关于黎曼度量的变形及具有正曲率算子的流形。载于《黎曼流形的曲率与拓扑》（片田，1985年），Springer，202–211，1986年。[26] Jan Nienhaus、Peter Petersen 和 Matthias Wink。贝蒂数与第二类曲率算子。《伦敦数学学会杂志》，108(4)：1642–1668，2023年。[27] Jan Nienhaus、Peter Petersen、Matthias Wink 和 William Wylie。由第二类曲率算子导出的整体性限制。《微分几何及其应用》，88：102010，2023年。[28] Peter Petersen 和 Matthias Wink。博赫纳技巧的新曲率条件。《数学发明》，224(1)：33–54，2021年。[29] Peter Petersen 和 Matthias Wink。橘型定理与特殊整体性。《全球分析与几何年刊》，61：847–868，2022年。[30] 橘俊一。关于正曲率算子黎曼流形的一个定理。《日本学士院纪要》，50(4)：301–302，1974年。[31] Hung Tran。关于具有调和魏尔曲率的闭流形。《数学进展》，322 891，2017年 861：–。[32] S. Zhu。具有非负里奇曲率的完备局部共形平坦流形的分类，《太平洋数学杂志》163：189–199，1994年。

中华人民共和国南昌南昌大学数学系，330031电子邮箱地址: mathfu@126.com

中华人民共和国南昌南昌大学数学系，330031电子邮箱地址: luyao@email.ncu.edu.cn