arXiv:2602.07315v1 [math.DS] 7 Feb 2026

多项式牛顿系统的全局中心及其非等时性 *

Colin Christopher [a], Jun Zhang [b], Weinian Zhang [c]

[a]普利茅斯大学工程、计算与数学学院，英国德文郡普利茅斯 PL4 8AA[b]成都理工大学数学科学学院与四川省地学数学重点实验室，中华人民共和国四川省成都市 610059[c]四川大学数学学院，中华人民共和国四川省成都市 610064

摘要

通过采用一种新的紧化方法（环面紧化）和消奇，我们完整刻画了任意次数多项式牛顿系统在无穷远处的单值性，并建立了单值性与不存在$_1$ $_2$阶分数阶形式不变曲线之间的等价关系。将这一完整刻画与局部中心的 Darboux 可积性或代数可约性相结合，我们得到了全局中心所有情形的判定条件。此外，通过研究无穷远附近轨道周期函数的渐近行为，我们证明了全局中心的非等时性，从而解决了 Conti 提出的一个公开问题。

关键词：牛顿系统，Cherkas系统，环面紧化，全局中心，等时性

美国数学学会（2020）主题分类：34C05,34C25,34D23.

1 引言

根据牛顿第二定律，物体的运动可以由二阶微分方程描述 $\ddot{x} = F(x,\ \dot{x},\ t)$（或等价地，由平面系统 $\dot{x} = y$和 $\dot{y} = F(x,\ y,\ t)$ 描述），称为 牛顿方程 （或 牛顿系统），其中 [1, p。8],其中 x 表示物体的位置，而 y 表示速度。如果我们仅考虑

*Jun Zhang获国家自然科学基金委员会项目 #12101087、国家留学基金管理委员会项目 #202108515020 和国家自然科学基金四川联合基金项目 #2024NS- FSC1400 资助，Weinian Zhang获国家重点研发计划项目（2022YFA1005900）和国家自然科学基金委员会项目 #12171336 资助。

自治情形（即， F 与 t无关），且 F 为多项式形式，则该系统可以表示为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = P_0(x) + P_1(x)y + \cdots + P_m(x)y^m, \tag{1.1}$$

其中整数 $m \geq 0$，每个 $P_i(x)$ 是 x 中的多项式，而 $P_m(x) \not\equiv 0$。当 [7] 时，该系统成为著名的势系统（ $m = 0$），当 ´ 时成为 Li[6]enard 系统；当$m = 1$ 时成为 Cherkas系统（[6]）。 $m = 2$。

平面微分系统中的振荡与中心密切相关。中心这一概念由 Poincar´e 提出，指的是一种平衡点，其邻域内充满非平凡周期轨道。许多研究（例如，关于 Li´ enard 系统的研究见 [6, 8]，关于 Cherkas系统的研究见[6, 11] ）致力于确定中心。中心研究中的一个有趣课题是全局中心，即除中心平衡点外，整个相平面都充满非平凡周期轨道，因为全局中心不仅是研究阿诺德-希尔伯特第十六问题（[19, 21]）的重要对象，也与实平面雅可比猜想（[24, 33]）有关。Galeotti 和 Villarini（[22]）以及 Liang（[28]）于1992年证明，若多项式微分系统具有全局中心，则其次数为奇数。此后，人们为找出所有具有全局中心的奇数次多项式微分系统付出了巨大努力。对于多项式刚性系统（即角速度为常数），Conti（[16]）证明，该系统具有全局中心当且仅当它是线性系统。对于齐次多项式系统，Conti（[17, 第 4] 节）给出了一个充要条件。后来， [26]将这一结果推广到了准齐次情形。对于不含二次项的三次哈密顿系统， [14, 15] 中的作者刻画了其非退化全局中心和幂零退化中心。对于多项式 Rayleigh-Duffing 系统， [5] 证明了其不存在全局中心。关于 Kukles系统的全局中心的详细内容，可参阅 [3]和 [18] 。对于多项式牛顿系统， [23], 和$m = 1$ 分别在 [30] 中针对非退化情形，以及在 [4] 中针对非退化情形和幂零退化情形，得到了具有 $m = 0$ 的系统（1.1）存在全局中心的充要条件。然而，迄今为止，对于具有更大 $m \geq 2$ 的系统（1.1），尚未给出其具有全局中心的条件。

已知一个中心，人们便可能关注其等时性，即周期环域中的每条周期轨道都具有相同的周期。等时性的研究可追溯到惠更斯，他研究了摆线摆的等时振荡。目前，许多类系统的等时中心的存在性已得到研究，例如势系统（[7]）、Li´ enard系统（[10]）、Cherkas系统（[34]）以及线性加齐次系统（[31]）。然而，全局等时性受到的关注较少。Conti（[17, p.229]）给出了一个具有等时全局中心的一般奇数次哈密顿系统的例子。于是他进一步提出了如下问题：确定具有等时全局中心的奇数次多项式系统。该问题已由如下答案解决：对于非线性势系统（[7]）、可分离哈密顿系统（[12]）、刚性系统（[16]）以及具有线性加齐次非线性-

性（[27]）。相反，作者在 [27] 中得到了所有具有等时全局中心的三次多项式系统，而 [13] 中的作者刻画了形如 $H(x, y) = A(x) + B(x)y + C(x)y^2$的哈密顿系统的等时全局中心，其中多项式为 A, B 和 C。承上所述，人们可以进一步问：系统（1.1）在 $m \geq 2$ 下的全局中心能否是等时的？

本文给出了多项式牛顿系统（1.1）具有全局中心的充要条件，并进一步证明了其非等时性。由于全局中心与无穷远处的单值性有关，因此我们在第2节将相平面紧化，以便在预备知识部分研究这种单值性。通常，紧化到圆盘或球面（[20, 第 5]章）。这里我们考虑将环面作为紧化空间；在这种紧化下，无穷远处的系统与（1.1）具有相同的形式，这比通常的紧化方式更简单，因此更容易对无穷远处的退化平衡点进行去奇异化。在环面紧化下，我们可以轻易证明，若系统（1.1）在无穷远处是单值的，则 $m \leq 2$，也就是说，它是一个Cherkas系统。进一步地，利用与牛顿多边形相关的拟齐次爆破对无穷远处的退化平衡点进行去奇异化后，我们得到了Cherkas系统在无穷远处单值性的完整刻画。此外，我们建立了无穷远处的单值性与无穷远处不存在1 2-分数阶形式不变曲线之间的等价关系；后者可由一个有限可确定的多项式方程组判定。值得一提的是，除了这些1 2-分数阶形式不变曲线之外，如果Cherkas系统在无穷远处不是单值的，还可能存在形式更复杂的不变曲线，见注2.1。第3节结合无穷远处单值性的结果，以及Cherkas中心的达$\bar{\text{布}}$可积性或代数可约性，刻画了Cherkas系统具有全局中心的所有情形。第4节通过研究无穷远附近轨道的周期函数的渐近行为，探讨非等时性。为此，我们将实平面紧化为一个闭矩形，此时边界是由有限个平衡点和积分曲线组成的多环。去奇异化后，边界成为一个顶点不超过4($n+3$)个的多环，其中 $n := \max\{\deg P_0, \deg P_1, \deg P_2\}$。随后，我们仔细考察去奇异化向量场在每个顶点处以及相邻顶点间每条边上的极点阶数和零点阶数，从而确定无穷远附近轨道的周期趋于零或无穷大的情形。对于周期趋于非零常数的情形，我们发现多项式切尔卡斯系统可以变换为具有奇阻尼和恢复力的解析李乌维尔系统。进一步地，通过应用刘维尔关于初等函数积分的定理，证明解析李乌维尔系统（[10]）不满足等时中心条件，由此可推出系统非等时。因此，Conti提出的牛顿系统（1.1）的等时全局中心问题得以解决。作为应用，在第5节中，我们将 [18] 关于5次齐次Kukles系统的全局中心结果推广到任意次数。此外，我们还给出了多项式李乌维尔系统全局中心的一个简明证明，以展示环面紧化的便利性。

2 无穷远处的单值性

如 [29, 命题 2], 所示，多项式微分系统具有全局中心，当且仅当它只有一个平衡点、该点是中心，并且系统在无穷远处是单值的（即不存在与庞加莱球面赤道上的任何平衡点相连的轨道）′。因此，我们从无穷远处的单值性入手，并证明以下结论。

引理 2.1 如果系统 (1.1) 在无穷远处单调，则 $m \leq 2$。

为了讨论无穷远附近的轨道，我们需要将相平面 $\mathbb{R}^2$([20, 35]) 紧化。如 [20, 第 5], 章所示，通常使用庞加莱′球面（圆盘）、庞加莱′-李雅普诺夫球面（圆盘）或本迪克森球进行紧化，但这些方法都不适用于我们的情况。使用庞加莱′球面进行紧化时，系统（1.1）可写成以下两种形式

$$\dot{u} = \sum_{i=0}^{m} P_i\left(\frac{1}{v}\right) u^i v^{d+1-i} - u^2 v^d, \quad \dot{v} = -uv^{d+1}$$

and

$$\dot{u} = v^d - u\sum_{i=0}^{m} P_i\left(\frac{u}{v}\right) v^{d+1-i}, \quad \dot{v} = -\sum_{i=0}^{m} P_i\left(\frac{u}{v}\right) v^{d+2-i} \tag{2.1}$$

分别位于庞加莱′球面的赤道的两个局部坐标图中，其中我们进行了时间重标度 $\mathrm{d}t \to v^d \mathrm{d}t$ 并且 $d :=$ 最大$\{i +$ 次数 $P_i : \quad i = 0, \ldots, \ m\}$。使用庞加莱′-李雅普诺夫球面进行紧化，将得到与上述类似的两个系统。使用本迪克森球进行紧化时，系统（1.1）在无穷远附近变换为以下系统

$$\begin{cases} \dot{u} = v(v^2 - u^2)(u^2 + v^2)^{d-1} - 2u\sum_{i=0}^{m} P_i\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)(u^2 + v^2)^{d-i} v^{i+1}, \\ \dot{v} = (u^2 - v^2)\sum_{i=0}^{m} P_i\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)(u^2 + v^2)^{d-i} v^i - 2uv^2(u^2 + v^2)^{d-1} \end{cases} \tag{2.2}$$

原点附近。显然，系统（2.1）和（2.2）都很复杂，这使得进一步对无穷远处的退化平衡点进行消奇变得困难。

我们转而采用环面紧化，也就是使用环面

$$\mathbb{R}^2_\infty := \big(\mathbb{R} \cup \{\infty\}\big) \times \big(\mathbb{R} \cup \{\infty\}\big)$$

对相平面进行紧化 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$，如图1所示。或者，我们可以使用矩形 $\big(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\big) \times \big(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\big)$ 对相平面进行紧化。在环面紧化下，直线 $\mathbb{R} \times \{\infty\}$、直线 $\{\infty\} \times \mathbb{R}$ 和点 $\{\infty\} \times \{\infty\}$ 的$\mathbb{R}^2_\infty$ 表示 $\mathbb{R}^2$的无穷远点。因此，我们应用以下变换

$$\textbf{(T1)}\ y = 1/v, \qquad \textbf{(T2)}\ x = 1/u, \qquad \textbf{(T3)}\ x = 1/u \text{ and } y = 1/v$$

分别研究系统（1.1）在直线 $\mathbb{R}\times\{\infty\}$、直线 $\{\infty\}\times\mathbb{R}$和点 $\{\infty\}\times\{\infty\}$附近的轨道。在**(T1)**、**(T2)** 和**(T3)**变换下，系统（1.1）化为以下三种形式

$$\dot{x}=v^{\widetilde{m}-1}, \qquad \dot{v}=-\{P_m(x)+P_{m-1}(x)v+\cdots+P_0(x)v^m\}v^{\widetilde{m}-(m-2)}, \tag{2.3}$$

$$\dot{u}=-u^{n+2}y, \qquad \dot{y}=\widetilde{P}_0(u)+\widetilde{P}_1(u)y+\cdots+\widetilde{P}_m(u)y^m, \tag{2.4}$$

$$\dot{u}=u^{n+2}v^{\widetilde{m}-1}, \qquad \dot{v}=\{\widetilde{P}_m(u)+\widetilde{P}_{m-1}(u)+\cdots+\widetilde{P}_0(u)v^m\}v^{\widetilde{m}-(m-2)}, \tag{2.5}$$

分别，其中在（$t\to v^{m-2}$2.3t ）中进行了时间重标度dd$t\to u^n$2.4t ）中进行了时间重标度dd $t\to -u^n v^{\widetilde{m}}2.5t$）中进行了时间重标度dd n：＝最大值{次数 P_0，……，次数 P_m}， $\widetilde{m}$：＝最大值$\{m-2,1\}$和

$$\widetilde{P}_i(u):=u^nP(1/u) \quad \text{for all } i=0,...,m. \tag{2.6}$$

上述三个系统（2.3）-（2.5）中的每个系统的第一个方程都是一个单项式，这使得进一步去奇异化更加容易。

在环面紧化下，系统 **(1.1)** 在无穷远处单调，当且仅当以下三个条件成立：
(i) 系统 **(2.3)** 在区域$\{(x,v)\in\mathbb{R}^2: v\neq 0\}$ 中没有轨道趋近于 x轴上的任何点；
(ii) 系统 **(2.4)** 在区域 $\{(u,y)\in\mathbb{R}^2: u\neq 0\}$ 中没有轨道趋近于 y轴上的任何点；
(iii) 系统 **(2.5)** 的平衡点 **(0, 0)** 是一个鞍点。

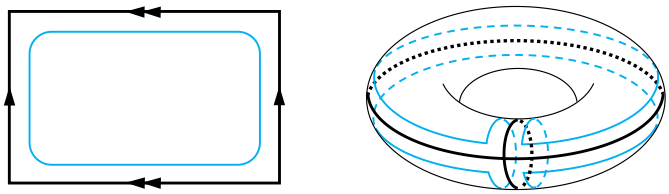


图 1：矩形紧化和环面紧化。

引理的证明 2.1。 若不成立，则 $m\geq 3$ 且系统 **(2.3)** 变为

$$\dot{x}=v^{m-3}, \quad \dot{v}=-P_m(x)-P_{m-1}(x)v-\cdots-P_0(x)v^m.$$

注意到 $P_m(x)\not\equiv 0$。上述系统经过任意满足 $P_m(x_*)\neq 0$ 的点 $(x_*,0)$ 的轨道，都会与 x 轴横截相交，因为 $\dot{v}|_{(x_*,0)}=P_m(x_*)\neq 0$。根据证明前刚给出的陈述，这与单值性假设矛盾。□

根据引理 2.1，我们只需考虑多项式切尔卡斯系统

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=P_0(x)+P_1(x)y+P_2(x)y^2, \tag{2.7}$$

其中 $P_0(x):=a_0+\cdots+a_nx^n$， $P_1(x):=b_0+\cdots+b_nx^n$， $P_2(x):=c_0+\cdots+c_nx^n$， $n\geq 0$且 $a_n^2+b_n^2+c_n^2\neq 0$。我们假设 $P_0(x)\not\equiv 0$；否则，系统 **(2.7)** 不可能在无穷远处单调，因为 x轴上全是平衡点。我们还假设

$P_2(x) \not\equiv 0$，因为情形 $P_2(x) \equiv 0$ 已在 [4, 23, 30], 中研究过，正如引言所述。

下文中，我们使用与牛顿多边形相关的准齐次爆破（[20, 第 3]章），以刻画 Cherkas 系统（2.7）在无穷远处的单值性。定义向量场

$$\mathcal{X}^{(0)} := F_1^{(0)}(u,v)\frac{\partial}{\partial u} + G_1^{(0)}(u,v)\frac{\partial}{\partial v}, \quad \mathcal{Y}^{(0)} := F_2^{(0)}(u,y)\frac{\partial}{\partial u} + G_2^{(0)}(u,y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.8}$$

其中 $F_1^{(0)}(u,\ v) := u^{n+2}$, $G_1^{(0)}(u,\ v) := \widetilde{P}_0(u)v^3 + \widetilde{P}_1(u)v^2 + \widetilde{P}_2(u)v$,

$F_2^{(0)}(u,y) := -u^{n+2}(y+y_*)$, $G_2^{(0)}(u,y) := \widetilde{P}_0(u) + \widetilde{P}_1(u)(y+y_*) + \widetilde{P}_2(u)(y+y_*)^2$,

且 $y_* := -b_n/(2c_n)$，其中 c_n非零。设 $F_1^{(0)}$ 和 $G_1^{(0)}$ 的展开式为

$$F_1^{(0)}(u,v) = \sum_{i+j\geq 0} f_{i,j}^{(0)} u^i v^j \quad \text{and} \quad G_1^{(0)}(u,v) = \sum_{i+j\geq 0} g_{i,j}^{(0)} u^i v^j.$$

如 [20, 第 104], 页所定义，格点集

$$\mathcal{S}(\mathcal{X}^{(0)}) := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : (f_{i+1,j}^{(0)}, g_{i,j+1}^{(0)}) \neq (0,0)\}$$

称为向量场 $\mathcal{X}^{(0)}$ 的支撑集 。将集合 $\mathcal{S}(\mathcal{X}_{(0)})$ 嵌入（u，v）平面，并考虑下凸半包

$$\mathrm{conv}\{\mathcal{S}(\mathcal{X}^{(0)}) + \mathbb{R}_+^2\},$$

其边界由一条垂直直线、一条水平直线和一个紧多边形组成，该紧多边形也可能是一个格点。该紧多边形称为向量场 $\mathcal{X}_{(0)}$ 的牛顿多边形，记作 $\mathcal{N}(\mathcal{X}^{(0)})$。如果牛顿多边形 $\mathcal{N}(\mathcal{X}_{(0)})$ 有一条边 $E^{(0)}$ 位于直线上

$$q^{(0)}u + p^{(0)}v = \sigma^{(0)}$$

对于一对互素正整数 $p^{(0)}$ 和 $q^{(0)}$，则定义对应于该边的多项式 $E^{(0)}$ 为

$$\mathcal{P}_{E^{(0)}}(v) := \sum_{(i,j)\in E^{(0)}\cap\mathbb{Z}^2} (q^{(0)} g_{i,j+1}^{(0)} - p^{(0)} f_{i+1,j}^{(0)}) v^{j+1}. \tag{2.9}$$

此外，边的高度 和宽度 $E^{(0)}$ 分别是其在 v轴和 u轴上的投影长度，记作 $h(E^{(0)})$ 和 $\omega(E^{(0)})$。若多项式$\mathcal{P}_{E^{(0)}}$ 有一个实根 $\phi^{(0)}$，则我们通过准齐次爆破 $u = u_1^{q^{(0)}}$ 和 $v = u_1^{p^{(0)}}(\phi^{(0)} + v_1)$，对向量场 $\mathcal{X}^{(0)}$ 在正 u_1轴上的退化平衡点 (0，0) 进行爆破，得到向量场

$$\mathcal{X}^{(1)} = \mathcal{D}(\mathcal{X}^{(0)}; p^{(0)}, q^{(0)}, \phi^{(0)}) := F_1^{(1)}(u_1,v_1)\frac{\partial}{\partial u_1} + G_1^{(1)}(u_1,v_1)\frac{\partial}{\partial v_1},$$

其中消去了公因子 $u^{\sigma^{(0)}}/q^{(0)}$，并且

$$F_1^{(1)}(u_1,v_1) := \frac{F_1^{(0)}(u,v)}{u_1^{\sigma^{(0)}+q^{(0)}-1}} = u_1\left\{\sum_{(i,j)\in E^{(0)}\cap\mathbb{Z}^2} f_{i+1,j}^{(0)}(\phi^{(0)}+v_1)^j + O(u_1)\right\},$$

$$G_1^{(1)}(u_1,v_1) := \frac{q^{(0)}G_1^{(0)}(u,v)}{u_1^{\sigma^{(0)}+p^{(0)}}} - \frac{p^{(0)}(\phi^{(0)}+v_1)F_1^{(0)}(u,v)}{u_1^{\sigma^{(0)}+q^{(0)}}} = \mathcal{P}_{E^{(0)}}(\phi^{(0)}+v_1) + O(u_1).$$

对向量场 $\mathcal{Y}^{(0)}$（定义于2.8）定义上述记号和概念的方法类似。

引理 2.2 *Cherkas*系统 (2.7)在无穷远处单调，当且仅当 n 为奇数，且满足以下条件之一

(M1) $c_n = b_n = 0$, $a_n < 0$，且存在整数 $i_* \le n-1$，使得牛顿多边形 $\mathcal{N}(\mathcal{X}^{(i)})$ 恰有一条边 $E^{(i)}$，其高度为 *2*，宽度为 $2p^{(i)}$（其中 $p^{(i)}$ 为整数）；并且对于所有 $i = 0, ..., i_*-1$，多项式 $\mathcal{P}_{E^{(i)}}$ 仅有一个非零实根 $\phi^{(i)}$，其重数为 *2*；以及 $\mathcal{N}(\mathcal{X}^{(i_*)})$ 恰有一条边 $E^{(i_*)}$，其高度为 *2*，宽度为 $2p^{(i_*)}$（其中 $p^{(i_*)}$ 为整数）；多项式 $\mathcal{P}_{E^{(i_*)}}$ 没有非零实根，其中 $\mathcal{X}^{(i+1)} := \mathcal{D}(\mathcal{X}^{(i)}; p^{(i)}, 1, \phi^{(i)})$，对于所有 $i = 0, ..., i_*-1$，边的高度（和宽度）的定义见（*2.9*）下方；或者

(M2) $c_n < 0$ 与 $b_n^2 - 4a_nc_n < 0$；或

(M3) $c_n < 0$、$b_n^2 - 4a_nc_n = 0$，且 $\mathcal{Y}^{(0)}$ 满足与**(M1)** 中所给 $\mathcal{X}^{(0)}$ 相同的条件，其中整数 $i_* \le n$ (或 $\le n+1$) 若 $b_n \ne 0$ (或 $b_n = 0$)。

证明。根据紧接在引理2.1的证明之前所给出的陈述，我们需要考虑系统（2.3）-（2.5），并取 $m = 2$，以处理Cherkas系统（2.7）的无穷远处的单值性。也就是说，分析该系统的相图

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{v} = -P_2(x)v - P_1(x)v^2 - P_0(x)v^3 \end{cases} \tag{2.10}$$

在直线 $v = 0$附近，确定该系统的相图

$$\begin{cases} \dot{u} = -u^{n+2}y, \\ \dot{y} = \widetilde{P}_0(u) + \widetilde{P}_1(u)y + \widetilde{P}_2(u)y^2 = a_n + b_ny + c_ny^2 + O(u) \end{cases} \tag{2.11}$$

在直线 $u = 0$ 附近，并研究该系统的相图

$$\begin{cases} \dot{u} = u^{n+2}, \\ \dot{v} = \widetilde{P}_2(u)v + \widetilde{P}_1(u)v^2 + \widetilde{P}_0(u)v^3 = v\big(c_n + b_nv + a_nv^2 + O(u)\big) \end{cases} \tag{2.12}$$

在原点 (0, 0) 附近。注意，系统 (2.7) 在无穷远处单调，当且仅当以下三个条件成立：(i) 系统（2.10）在区域{$(x, v) \in \mathbb{R}^2$ 中不存在趋近于 x-轴上任意一点的轨道：$v \neq 0$}；(ii) 系统 (2.11) 在区域 {$(u, y) \in \mathbb{R}^2$ 中不存在趋近于 y-轴上任意一点的轨道：$u \neq 0$}；(iii) 系统 (2.12) 的平衡点 (0, 0) 是一个鞍点。

我们首先考虑充分性。若条件（M1）成立，显然，系统 (2.10) 在区域 {$(x, v) \in \mathbb{R}^2 : v \neq 0$} 内没有轨道趋近于 x 轴上的任何点。此外，由于 $a_n < 0$ 和 $b_n = c_n = 0$，系统 (2.11) 在 y 轴上没有平衡点，因此在区域 {$(u, y) \in \mathbb{R}^2 : u \neq 0$} 内没有轨道趋近于 y 轴上的任何点。因此，我们只需证明，线性部分为零的退化平衡点 (0, 0) 是系统 (2.12) 的鞍点。为此，我们使用与牛顿多边形相关的准齐次爆破进行去奇异化。注意，系统 (2.12) 生成的向量场 $\mathcal{X}^{(0)}$ 的牛顿多边形恰有一条边 $E^{(0)}$，连接顶点 (0, 2) 和顶点 $(2p^{(0)}, 0)$。对 $\mathcal{X}^{(0)}$ 在正 v 方向上应用准齐次爆破 $u = w_1 z_1$ 和 $v = z_1^{p^{(0)}}$，以爆破退化平衡点 (0, 0)，可得向量场

$$\mathcal{X}_h^{(1)} := w_1\big(-g_{0,3}^{(0)} + o(1)\big)\frac{\partial}{\partial w_1} + z_1\big(g_{0,3}^{(0)} + o(1)\big)\frac{\partial}{\partial z_1}, \tag{2.13}$$

其中消去了公因子 $z_1^{2p^{(0)}}/p^{(0)}$，$g_{0\,3}^{(0)}$ $(= a_n)$ 是对应于边 $E^{(0)}$ 的左端点 (0, 2) 的系数。向量场 $\mathcal{X}_h^{(1)}$ 的平衡点 (0,0) 是一个双曲鞍点，其稳定流形和不稳定流形位于坐标轴上。类似地，通过变换 $u = w_1 z_1$ 和 $v = -z_1^{p^{(0)}}$，沿负 v 方向对$\mathcal{X}^{(0)}$ 的退化平衡点 (0,0) 进行膨胀，可知变换后的向量场的平衡点 (0,0) 也是一个双曲鞍点，其稳定流形和不稳定流形位于坐标轴上。另一方面，我们通过变换 $u = u_1$ 和 $v = u_1^{p^{(0)}}(\phi^{(0)} + v_1)$ 沿 u 方向进行膨胀，得到向量场

$$\mathcal{X}^{(1)} = u_1^{n+2-2p^{(0)}}\frac{\partial}{\partial u_1} + \big(\mathcal{P}_{E^{(0)}}(\phi^{(0)} + v_1) + O(u_1)\big)\frac{\partial}{\partial v_1}, \tag{2.14}$$

其中消去了公因子 $u_1^{2p^{(0)}}$，且

$$\mathcal{P}_{E^{(0)}}(\phi^{(0)} + v_1) = g_{0,3}^{(0)} v_1^2(\phi^{(0)} + v_1).$$

向量场 $\mathcal{X}^{(1)}$ 在 v_1轴上有两个平衡点 (0，0) 和 (0，$-\phi^{(0)}$)。由 (M1) 中给出的 $\mathcal{N}(\mathcal{X}^{(1)})$ 的性质可知，$n + 2 - 2p^{(0)} \geq 2$。因此，平衡点 (0，$-\phi^{(0)}$) 是半双曲的，即该平衡点处的雅可比矩阵恰好有一个零特征值。根据 [20, 定理 2.19] 或 [35, 定理 7.1，第 114], 页，平衡点 (0，$-\phi^{(0)}$) 是一个鞍点，因为 n 是奇数且 $g_{0\,3}^{(0)} = a_n < 0$。对于退化平衡点 (0，0)，由 (M1) 可知，牛顿多边形 $\mathcal{N}(\mathcal{X}^{(1)})$ 恰有一条边 $E^{(1)}$，连接顶点 (0，1) 和顶点 $(2p^{(1)}, -1)$。然后

通过变换 $u_1 = w_2 z_2$ 和 $v_1 = z_2^{p^{(1)}}$，沿正 v_1 方向吹起 $\mathcal{X}^{(1)}$ 的退化平衡点 (0, 0)，我们得到向量场

$$\mathcal{X}_h^{(2)} := w_2\big(-g_{0,2}^{(1)} + o(1)\big)\frac{\partial}{\partial w_2} + z_2\big(g_{0,2}^{(1)} + o(1)\big)\frac{\partial}{\partial z_2}, \tag{2.15}$$

其中公因子 $z_2^{p^{(1)}}/p^{(1)}$ 被消去，且 $g_{0\,2}^{(1)}$,(= a_n)是与边 $E^{(1)}$的左端点(0, 1)相对应的 $G_1^{(1)}$ 的系数。 $\mathcal{X}_h^{(2)}$ 的平衡点(0,0)是一个双曲鞍点，其稳定流形和不稳定流形位于坐标轴上。类似地，通过变换$u_1 = w_2 z_2$ 和 $v_1 = -z_2^{p^{(1)}}$ 沿负 v_1方向进行爆破，可以发现变换后的系统的平衡点(0,0)是一个双曲鞍点，其稳定流形和不稳定流形位于坐标轴上。另一方面，我们通过变换$u_1 = u_2$ 和 $v_1 = u_2^{p^{(1)}}$ ($\phi^{(1)} + v_2$)沿 u_1方向进行爆破，并得到

$$\mathcal{X}^{(2)} = u_2^{n+2-2p^{(0)}-p^{(1)}}\frac{\partial}{\partial u_2} + \big(\mathcal{P}_{E^{(1)}}(\phi^{(1)} + v_2) + O(u_2)\big)\frac{\partial}{\partial v_2}, \tag{2.16}$$

其中约去公因子 $u_2^{p^{(1)}}$ 后，

$$\mathcal{P}_{E^{(1)}}(\phi^{(1)} + v_2) = g_{0,2}^{(1)} v_2^2.$$

注意， $\mathcal{X}^{(2)}$ 在 v_2轴上只有一个平衡点 (0, 0)，该点是线性部分为零的退化平衡点。与上文类似，对于 $i = 3, 4, ..., i_*$，根据 (M1) 中给出的 $\mathcal{N}(\mathcal{X}^{(i-1)})$ 的性质，通过变换 $u_{i-1} = w_i z_i$ 和 $v_{i-1} = z_i^{p^{(i-1)}}$，将向量场 $\mathcal{X}^{(i-1)}$ 在正 v_{i-1}轴上的退化平衡点 (0, 0) 吹起，得到

$$\mathcal{X}_h^{(i)} := w_i\big(-g_{0,2}^{(i-1)} + o(1)\big)\frac{\partial}{\partial w_i} + z_i\big(g_{0,2}^{(i-1)} + o(1)\big)\frac{\partial}{\partial z_i}, \tag{2.17}$$

其中约去公因子 $z_i^{p^{(i-1)}}/p^{(i-1)}$ 后， $g_{0\,2}^{(i-1)}$,(= a_n) 是对应于边 $E^{(i-1)}$ 的左端点 (0,1) 的 $G_1^{(i-1)}$ 的系数。 $\mathcal{X}_h^{(i)}$ 的平衡点 (0, 0) 是一个双曲鞍点，其稳定流形和不稳定流形位于坐标轴上。类似地，通过变换 $u_{i-1} = w_i z_i$ 和 $v_{i-1} = -z_i^{p^{(i-1)}}$，沿负 v_{i-1}方向吹起，可得变换后的系统的平衡点 (0,0) 是一个双曲鞍点，其稳定流形和不稳定流形位于坐标轴上。此外，通过变换 $u_{i-1} = u_i$ 和 $v_{i-1} = u_i^{p^{(i-1)}} v_i$，沿 u_{i-1}方向吹起向量场 $\mathcal{X}^{(i-1)}$ 的退化平衡点 (0, 0)，得到

$$\mathcal{X}^{(i)} = u_i^{\varrho^{(i)}}\frac{\partial}{\partial u_i} + \big(\mathcal{P}_{E^{(i-1)}}(\phi^{(i-1)} + v_i) + O(u_i)\big)\frac{\partial}{\partial v_i}, \tag{2.18}$$

其中消去了公因子 $u_i^{p^{(i-1)}}$， $\varrho^{(i)} := n + 2 - 2p^{(0)} - \sum_{j=1}^{i-1} p^{(i)}$ 和

$$\mathcal{P}_{E^{(i-1)}}(\phi^{(i-1)} + v_i) = g_{0,2}^{(i-1)} v_i^2.$$

注意，向量场 $\mathcal{X}_{(i)}$ 在 v_i 轴上只有一个平衡点 $(0,0)$（其为退化平衡点，线性部分为零）。再进行一次准齐次爆破至 $\mathcal{X}^{(i_*)}$，即可完成对 $\mathcal{X}_{(0)}$的退化平衡点 $(0,0)$ 的去奇异化过程。实际上，对 $\mathcal{X}^{(i_*)}$的退化平衡点 $(0,0)$ 应用变换 $u_{i_*}=w_{i_*+1}z_{i_*+1}$ 和 $v_{i_*}=z_{i_*+1}^{p^{(i_*)}}$，沿正 v_{i_*} 方向进行爆破，可得

$$\mathcal{X}_h^{(i_*+1)}=w_{i_*+1}\big(-g_{0,2}^{(i_*)}+o(1)\big)\frac{\partial}{\partial w_{i_*+1}}+z_{i_*+1}\big(g_{0,2}^{(i_*)}+o(1)\big)\frac{\partial}{\partial z_{i_*+1}},\tag{2.19}$$

其中消去了一个公因子 $z_{i^*+1}^{p^{(i_*)}}/p^{(i_*)}$，且 $g^{(i_*)}{}_{0,\,2}\,(=a_n)$ 是与边 $E^{(i_*)}$ 的左端点 $(0,\,1)$ 相对应的 $G^{(i_*)}{}_1$ 的系数。显然，$\mathcal{X}^{(i_*+1)}{}_h$ 的平衡点 $(0,\,0)$ 是一个双曲鞍点。类似地，在负 v_{i_*} 方向上吹起 $\mathcal{X}^{(0)}$ 的退化平衡点 $(0,\,0)$，可以发现，变换后的系统的平衡点 $(0,\,0)$ 也是一个双曲鞍点。此外，通过变换 $u_{i_*}=u_{i_*+1}$ 和 $v_{i_*}=u_{i_*+1}^{p^{(i_*)}}v_{i_*+1}$ 在 u_{i_*} 方向上进行吹起，我们得到

$$\mathcal{X}^{(i_*+1)}=u_{i_*+1}^{\varrho^{(i_*+1)}}\frac{\partial}{\partial u_{i_*+1}}+\big(\mathcal{P}_{E^{(i_*)}}(v_{i_*+1})+O(u_{i_*+1})\big)\frac{\partial}{\partial v_{i_*+1}},\tag{2.20}$$

其中公因子 $u_{i_*+1}^{p^{(i_*)}}$ 被消去。注意到 $\mathcal{P}_{E^{(i_*)}}$ 是一个二次多项式，根据 **(M1)**，它没有非零实根。因此 $\mathcal{X}^{(i_*+1)}$ 在v_{i_*+1}轴上没有平衡点，因此退化平衡点 $(0,0)$ 的 $\mathcal{X}^{(0)}$ 经过了去奇异化。吹下后，我们发现系统 *(2.12)* 的平衡点 **(0,0)** 是一个鞍点，如图 2所示。因此，根据 (2.12) 下方给出的刻画可知，系统 (2.7) 在无穷远处单调。

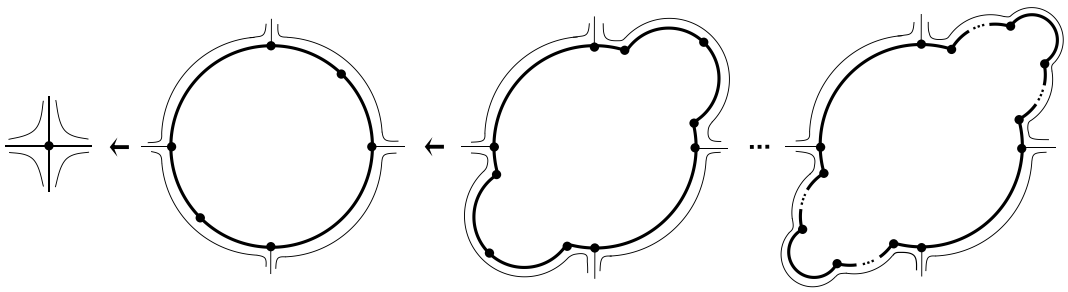


图 2: $\mathcal{X}^{(0)}$ 的去奇异化过程。

若条件（M2）成立，显然系统（2.10）在区域$\{(x,v)\in\mathbb{R}^2$ 内没有轨道 $v\neq 0\}$ 趋近于 x轴上的任何点。由于 $b_n^2-4a_nc_n<0$，系统（2.11）在 y轴上没有平衡点，因此它在区域 $\{(u,y)\in\mathbb{R}^2$ 内没有轨道 $u\neq 0\}$ 趋近于 y轴上的任何点。此外，由于n 是奇数且 $c_n<0$，根据 [20, 定理 2.19] 或 [35, 定理 7.1，第114]页，系统（2.12）的平衡点 (0, 0) 是一个半双曲鞍点。因此，根据 (2.12) 下方给出的刻画，系统（2.7）在无穷远处单调。

若条件**(M3)**成立，显然系统（2.10在区域{（x，v）$\in\mathbb{R}^2$ 中没有 $v\neq 0\}$ 趋近于 x-轴上任意点的轨道。由于 $b_n^2-4a_nc_n=0$,

系统 (2.11) 在 y-轴上恰有一个平衡点 $(0, y_*)$，其线性部分为零且是退化的，其中 y_* 在 (2.8) 下方定义。将平衡点 $(0, y_*)$ 平移至原点，我们得到相应的向量场 $\mathcal{Y}^{(0)}$。当条件（M1）成立时，以与 $\mathcal{X}^{(0)}$ 类似的方式对 $\mathcal{Y}^{(0)}$ 进行去奇异化，可得系统 (2.11) 在区域 $\{(u, y) \in \mathbb{R}^2$ 中没有趋近于退化平衡点 $(0, y_*)$ 的轨道。因此，系统 (2.11) 在区域 $\{(u, y) \in \mathbb{R}^2$ 中没有趋近于 y-轴上任意点的轨道。此外，与情形 (M2) 相同，系统 (2.12) 的平衡点 (0, 0) 是一个半双曲鞍点。因此，系统 (2.7) 在无穷远处单调，充分性得证。

接下来，我们讨论必要性。假设系统 (2.7) 在无穷远处是单调的，但条件 (M1)、(M2)和(M3) 均不成立。那么有以下七种情形：

(N1) n 为偶数，(N2) n 为奇数且 $c_n > 0$，(N3) n 为奇数 $c_n = 0$ 且 $b_n \neq 0$，(N4) n 为奇数 $c_n = b_n = 0$ 且 $a_n > 0$，(N5) n 为奇数 $c_n = b_n = 0$，$a_n < 0$ 且 $\mathcal{X}^{(0)}$ 不满足 (M1)，(N6) n 为奇数 $c_n < 0$ 且 $b_n^2 - 4a_nc_n > 0$，(N7) n 为奇数 $c_n < 0$，$b_n^2 - 4a_nc_n = 0$ 且 $\mathcal{Y}^{(0)}$ 不满足 (M3)。

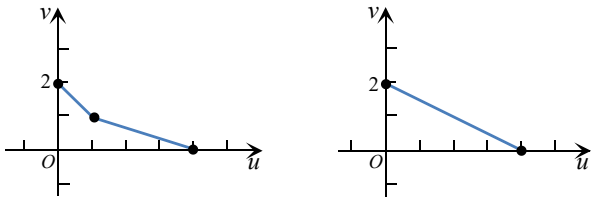
在 (N1)情形下，在系统 $v = 0$ （2.12）的不变直线上，有 $\dot{u} = u^{n+2}$，且 n 为偶数，这意味着系统（，）的平衡点 (02.12）不是鞍点。由（2.12）下方给出的刻画可知，系统（2.7）在无穷远处不是单值的，这与假设矛盾。

在(N2)情形下，根据 [20, 定理 2.19] 或 [35, 定理 7.1，第 114], 系统（，）的平衡点 (02.12）是半双曲节点，因此系统（2.7）在无穷远处不是单值的，这与假设矛盾。

在 (N3)情形下，系统（2.11）在 , $-a_n/b_n$）轴上有唯一的平衡点 (0 y-，该平衡点为半双曲点。根据 [20, 定理 2.19] 或 [35, 定理 7.1，第 114],区域 $\{(u, y) \in \mathbb{R}^2$ 中存在轨道： $u \neq 0\}$ 这些轨道趋近平衡点 $(0, -a_n/b_n)$ 。由（2.12）下方给出的刻画可知，系统（2.7）在无穷远处不是单值的，这与假设矛盾。

在 (N4) 情形下，由 (2.12) 可知 $\dot{u} = u^{n+2}$ 具有奇数 n ，且位于不变直线$v = 0$ 上；而 $\dot{v} = a_nv^3$ 具有 $a_n > 0$ ，且位于不变直线 $u = 0$上。因此，系统 (2.12,) 的平衡点 (0,0) 不是鞍点，所以系统 (2.7) 在无穷远处不是单值的，这与假设矛盾。

在情形 (N5) 中，我们考虑由系统（2.12）生成的向量场 $\mathcal{X}^{(0)}$ 。由于$G_1^{(0)}(0, v) = a_nv^3$ 且 v 是 $G_1^{(0)}(u, v)$ 的简单因子， $\mathcal{N}(\mathcal{X}^{(0)})$ 的左端点为点 (0，2)，右端点位于 u-轴上。因此， $\mathcal{X}^{(0)}$ 的牛顿多边形要么有两条边，要么恰好有一条边，如图 3 所示。由于 $\mathcal{X}^{(0)}$ 不满足条件 (M1)，牛顿多边形 $\mathcal{N}(\mathcal{X}_{(0)})$



(a) (b)

图 3：牛顿多边形 $\mathcal{N}(\mathcal{X}^{(0)})$。

有以下四个子情形：

(S1) 两条边；或

(S2) 一条边 $E^{(0)}$, $h(E^{(0)}) = 2$ 且 $\omega(E^{(0)})$ 为奇数；或

(S3) 一条边 $E^{(0)}$, $h(E^{(0)}) = 2$, $\omega(E^{(0)}) = 2p^{(0)}$ 对某一整数 $p^{(0)}$，且 $\mathcal{P}_{E^{(0)}}$ 有一个简单非零实根；或

(S4) 一条边 $E^{(0)}$, $h(E^{(0)}) = 2$, $\omega(E^{(0)}) = 2p^{(0)}$ 对某一整数 $p^{(0)}$，且 $\mathcal{P}_{E^{(0)}}$ 有一个二重非零实根 $\phi^{(0)}$。

在子情形(S1)中，我们假设 $\mathcal{N}$的第一条边 $\tilde{E}^{(0)}$ 连接顶点 (0，2) 与顶点 ($\tilde{p}^{(0)}$, 1)，其中 $\tilde{p}^{(0)}$为整数。于是

$$\mathcal{P}_{\tilde{E}^{(0)}}(v) = g^{(0)}_{0,3}v^3 + g^{(0)}_{\tilde{p}^{(0)},2}v^2,$$

它有一个（简单）非零实根 $\tilde{\phi}^{(0)}$。对向量场 $\mathcal{X}^{(0)}$进行准齐次爆破 $u = u_1$ 和 $v = u_1^{\tilde{p}^{(0)}}v_1$ 后，我们得到向量场

$$u_1^{n+2-2\tilde{p}^{(0)}}\frac{\partial}{\partial u_1} + \{\mathcal{P}_{\tilde{E}^{(0)}}(v_1) + O(u_1)\}\frac{\partial}{\partial v_1},$$

~ ~其中已约去一个公因子。由于 $P_2(u) \not\equiv 0$ 且 $\deg P_2 \le n$, $\mathcal{N}(\mathcal{X}^{(0)})$的右端点横坐标不大于 n。由此可得 $2\tilde{p}^{(0)} < n$，因此 $n+2-2\tilde{p}^{(0)} > 2$。所以，上述向量场在 v_1轴上有一个半双曲平衡点 $(0, \tilde{\phi}^{(0)})$。根据 [20, 定理 2.19] 或 [35, 定理 7.1，第114], 页，存在一条经过平衡点 $(0, \tilde{\phi}^{(0)})$ 的不变曲线（不是 v_1轴），因此系统 (2.12) 有一条不变曲线

$$v = \tilde{\phi}^{(0)}u^{\tilde{p}^{(0)}} + O(u^{\tilde{p}^{(0)}+1}).$$

因此，系统 (*2.12*) 的平衡点 (0,0) 不是鞍点。由紧接在 (2.12) 下方给出的刻画可知，系统 (2.7) 在无穷远处不是单值的，这与假设矛盾。

在子情形 (S2)中，我们假设边 $E^{(0)}$ 连接顶点 (0，2) 与顶点 (ˆ$p^{(0)}$，0)，且 ˆ $p^{(0)}$ 为奇数。于是

$$\mathcal{P}_{E^{(0)}}(v) = g^{(0)}_{0,3}v^3 + g^{(0)}_{\hat{p}^{(0)},2}v.$$

对向量场 $\mathcal{X}^{(0)}$应用爆破 $u=u_1^2$ 和 $v=u_1^{\hat{p}^{(0)}}v_1$，我们得到

$$\frac{1}{2}u_1^{2n+3-2\hat{p}^{(0)}}\frac{\partial}{\partial u_1}+\{\mathcal{P}_{E^{(0)}}(v_1)+O(u_1)\}\frac{\partial}{\partial v_1}, \tag{2.21}$$

其中消去了一个公因子。与子情形 (S1) 类似，我们有 $\hat{}p^{(0)}\le n$，因此 $2n+3-2\hat{}p^{(0)}\ge 3$。注意，$g_0^{(0)}$，$_3=a_n<0$。在$g^{(0)}\hat{}_{p^{(0)}}$的情况下，$_1>0$，向量场 (2.21) 在 v_1 轴上有两个半双曲平衡点 (0，$\pm(-g^{(0)}\hat{}_{p^{(0)}}$，$_1/g_{0\,3}^{(0)}$，$)^{1/2}$)。由 [20, 定理 2.19] 或 [35, 定理 7.1，p.114], ，向量场 (2.21) 有 C^∞ 不变曲线

$$v_1=\pm(-g^{(0)}_{\hat{p}^{(0)},1}/g^{(0)}_{0,3})^{\frac{1}{2}}+O(u_1)$$

分别经过这两个半双曲平衡点。因此，系统 (2.12) 的不变曲线为

$$v=|u|^{\hat{p}^{(0)}/2}\{\pm(-g^{(0)}_{\hat{p}^{(0)},1}/g^{(0)}_{0,3})^{\frac{1}{2}}+O(|u|^{\frac{1}{2}})\},\quad u\ge 0,$$

C^∞ 函数 $|u|^{1/2}$，经过半平面，中的平衡点 (0。因此，系统 (，0) 的平衡点 (2.12) 不是鞍点，矛盾。在相反的情形下 $g^{(0)}\hat{}_{p^{(0)},\ 1}<0$，将 u 变为 $-u$ 即可归结为前一种情形。因此，系统 (2.12) 具有如下不变曲线

$$v=|u|^{\hat{p}^{(0)}/2}\{\pm(g^{(0)}_{\hat{p}^{(0)},1}/g^{(0)}_{0,3})^{\frac{1}{2}}+O(|u|^{\frac{1}{2}})\},\quad u\le 0,$$

C^∞ 函数 $|u|^{1/2}$，经过半平面，中的平衡点 (0。因此，系统 (，0) 的平衡点 (2.12) 不是鞍点，因此系统 (2.7) 在无穷远处不是单值的，矛盾。

在子情形 (S3)中，经由爆破 $u=u_1$ 和 $v=u_1^{p^{(0)}}v_1$，向量场 $\mathcal{X}^{(0)}$变为

$$u_1^{n+2-2p^{(0)}}\frac{\partial}{\partial u_1}+\{\mathcal{P}_{E^{(0)}}(v_1)+O(u_1)\}\frac{\partial}{\partial v_1},$$

消去一个公因子后。由于 $\mathcal{P}_{E^{(0)}}$ 有一个简单非零实根，仍记为 $\phi^{(0)}$，上述系统在 $,\phi^{(0)}$轴上有一个半双曲平衡点 (0 v_1。与子情形(S1)类似，系统 (2.12) 有一条 C^∞ 不变曲线

$$v=\phi^{(0)}u^{p^{(0)}}+O(u^{p^{(0)}+1}).$$

因此，系统 (2.12) 的平衡点 (0,0) 不是鞍点，从而系统 (2.7) 在无穷远处不是单值的，这与假设矛盾。

在子情形 (S4) 中，对向量场 $\mathcal{X}^{(0)}$应用爆破 $u=u_1$ 和 $v=u_1^{p^{(0)}}(\phi^{(0)}+v_1)$，可得

$$\mathcal{X}^{(1)}=\mathcal{D}(\mathcal{X}^{(0)};p^{(0)},1,\phi^{(0)})=F_1^{(1)}(u_1,v_1)\frac{\partial}{\partial u_1}+G_1^{(1)}(u_1,v_1)\frac{\partial}{\partial v_1},$$

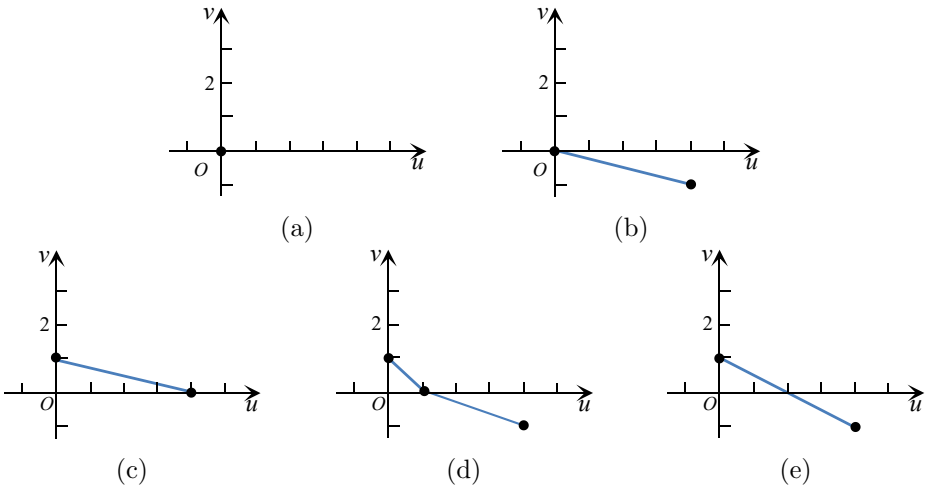


图4：具有 $i \geq 1$ 的牛顿多边形 $\mathcal{N}(\mathcal{X}^{(i)})$。

其中消去了公因子 $u_1^{2p^{(0)}}$，并且

$$F_1^{(1)}(u_1, v_1) = u_1^{n+2-2p^{(0)}}, \quad G_1^{(1)}(u_1, v_1) = \mathcal{P}_{E^{(0)}}(\phi^{(0)} + v_1) + O(u_1).$$

注意，$n + 2 - 2p^{(0)} \geq 1$ 和

$$\mathcal{P}_{E^{(0)}}(\phi^{(0)} + v_1) = g_{0,3}^{(0)} v_1^2 (\phi^{(0)} + v_1).$$

那么，$\mathcal{X}^{(1)}$ 具有支撑点 $(n + 2 - 2p^{(0)} - 1, 0)$ 和 $(0, 1)$，因此，$\mathcal{N}(\mathcal{X}(1))$ 的左端点要么是点 $(0, 0)$（若 $n+2-2p^{(0)} = 1$），要么是点 $(0, 1)$（若$n+2-2p^{(0)} \geq 2$）。因此，牛顿多边形 $\mathcal{N}(\mathcal{X}^{(1)})$ 有 5 种类型：四种 (S1)-(S4)，其中 $E^{(0)}$、$p^{(0)}$ 和 $\phi^{(0)}$ 分别替换为 $E^{(1)}$、$p^{(1)}$ 和 $\phi^{(1)}$，如图4(d)和(e)所示；以及一种

(S0) 或者没有边，或者有一条高度为 1 的边，

如图所示 4(a)、(b) 和 (c)。

对于 (S0)，若 $\mathcal{N}(\mathcal{X}_{(1)})$ 的左端点是点 $(0, 0)$，则 $F_1^{(1)}(u_1, v_1) = u_1$。$\mathcal{X}^{(1)}$ 在平衡点 $(0, 0)$ 处的雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \mathcal{P}'_{E^{(0)}}(\phi^{(0)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，平衡点 (0,0) 是半双曲的，根据 [20, 定理 2.19] 或 [35, 定理 7.1，第 114] 页，存在一条经过该点的解析不变曲线（不是 v_1 轴）。因此，向量场 $\mathcal{X}^{(0)}$ 存在一条解析不变曲线

$$v = u^{p^{(0)}}(\phi^{(0)} + O(u)).$$

相反，如果 $\mathcal{N}(\mathcal{X}^{(1)})$ 的左端点是点 $(0, 1)$，那么 $\mathcal{X}_{(1)}$ 有不变直线 $v_1 = 0$，因此 $\mathcal{X}^{(0)}$ 有不变曲线

$$v = \phi^{(0)} u^{p^{(0)}}.$$

因此，系统 (，0) 的平衡点 (02.12) 不是鞍点，因此系统 (2.7) 在无穷远处不是单值的，这就产生了矛盾。

对于(S1)， $\tilde{E}^{(1)}$ 的 $\mathcal{N}(\mathcal{X}^{(1)})$的第一条边连接顶点 $(0,1)$ 与顶点 $(\tilde{p}^{(1)},0)$，其中 $\tilde{p}^{(1)}$ 为整数。于是

$$\mathcal{P}_{\tilde{E}^{(1)}}(v_1) = g^{(1)}_{0,2}v_1^2 + g^{(1)}_{\tilde{p}^{(1)},1}v_1,$$

它有两个（简单）实根 0 和 $\tilde{\phi}^{(1)} := -g^{(1)}_{\tilde{p}^{(1)},1}/g^{(1)}_{0\,2}$,。对 $\mathcal{X}^{(1)}$ 应用准齐次爆破 $u_1 = u_2$ 和 $v_1 = u_2^{\tilde{p}^{(1)}}v_2$ ，得到

$$u_2^{n+2-2\tilde{p}^{(0)}-\tilde{p}^{(1)}}\frac{\partial}{\partial u_2} + \{\mathcal{P}_{\tilde{E}^{(1)}}(v_2) + O(u_2)\}\frac{\partial}{\partial v_2},$$

其中消去了一个公因子。当 $n+2-2\tilde{p}^{(0)}-\tilde{p}^{(1)} \geq 2$，情况与$\mathcal{X}^{(0)}$ 类似，满足 (S1) ，上述向量场有一条 C^∞ 不变曲线（不是v_1轴），经过平衡点 $(0,\tilde{\phi}^{(1)})$。吹下后可知，系统 (2.12) 有一条 C^∞ 形如以下形式的不变曲线

$$v = u^{p^{(0)}}(\phi^{(0)} + O(u)). \tag{2.22}$$

相反，当 $n+2-2\tilde{p}^{(0)}-\tilde{p}^{(1)} = 1$ 时，两个平衡点 (0，0) 和 (0，$\tilde{\phi}^{(1)}$) 处的雅可比矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & g^{(1)}_{\tilde{p}^{(1)},1} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & -g^{(1)}_{\tilde{p}^{(1)},1} \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

。因此，两个平衡点之一是双曲鞍点，且有一条解析不变曲线（不是 v_2轴）经过该鞍点。吹下后可知，系统 (2.12) 存在一条形如 (2.22) 的解析不变曲线。由上述两种情形可知，系统 (2.12) 的平衡点 (0，0) 不是鞍点，这与上述情形导致同样的矛盾。

对于 (S2) 和 (S3)，我们可以仿照上述子情形 (S1) 证明， $\mathcal{X}^{(0)}$ 有一条不变曲线

$$v = |u|^{p^{(0)}}(\phi^{(0)} + O(|u|^{\frac{1}{2}})),$$

一个 C^∞ 函数，在 $\dashv|u|^{\frac{1}{2}}$ 中，这导致与上述情形相同的矛盾。

对于(S4)，我们断言， $\mathcal{X}^{(i)}$ 不可能满足(S4) ，其中 $E^{(0)}$、 $p^{(0)}$ 和 $\phi^{(0)}$ 分别替换为 $E^{(i)}$、 $p^{(i)}$ 和 $\phi^{(i)}$，对所有 $i = 0$，……， n均成立。否则，注意到

$$\mathcal{X}^{(n)} = u_n^{\varrho^{(n)}}\frac{\partial}{\partial u_n} + (\mathcal{P}_{E^{(n-1)}}(\phi^{(n-1)} + v_n) + O(u_n))\frac{\partial}{\partial v_n}, \tag{2.24}$$

其中 $\varrho^{(n)} = n+2-2p^{(0)}-\sum_{i=1}^{n-1}p^{(i)}$。由于 $p^{(0)}$，……， $p^{(n-1)} \geq 1$ 以及 $\varrho^{(n)} \geq 1$，我们有

$$\varrho^{(n)} = 1.$$

那么点 (0，0) 是 $\mathcal{N}(\mathcal{X}_{(n)})$ 的左端点，这意味着 $\mathcal{X}^{(n)}$ 不满足(S4)，矛盾。因此，我们在 (2.24) 之前刚刚给出的断言得证。上述分析还表明，(M1) 中给出的整数 i_* 满足(M1) 使得

$$i_* \leq n-1.$$

根据该断言，如果 $\mathcal{X}^{(0)}$ 不满足(M1)，那么存在一个整数 $r \leq n$ ，使得$\mathcal{X}^{(i)}$ 满足(S4) ，其中 $E^{(0)}$、 $p^{(0)}$ 和 $\phi^{(0)}$ 分别替换为 $E^{(i)}$、 $p^{(i)}$ 和 $\phi^{(i)}$ ，对所有 $i=0,...,r-1$均成立；但如有必要， $\mathcal{X}^{(r)}$ 满足(S0)-(S3) 中的某个条件，其中 $E^{(0)}$ 和$p^{(0)}$ 分别替换为 $E^{(r)}$ 和 $p^{(r)}$。与相应地满足(S0)-(S3) 中某个条件的 $\mathcal{X}^{(1)}$ 类似， $\mathcal{X}^{(r)}$ 有一条不变曲线，该曲线由 $|u_r|^{1/2}$中的一个 C^∞ 函数给出，并经过原点。吹下后， $\mathcal{X}^{(0)}$ 有一条不变曲线，该曲线由 $|u|^{1/2}$中的一个非零 C^∞ 函数给出，并经过原点，这导致与上文相同的矛盾。

在 (N6) 的情况下，由于 $b_n^2-4a_nc_n>0$，系统 (2.11) 在 y- 轴上有两个平衡点，且均为半双曲平衡点。与情况(N3)类似，系统 (2.11) 存在分别趋近这两个半双曲平衡点的轨道，由 [20, 定理 2.19]或 [35, 定理 7.1，第114]页可知。因此，系统 (2.7) 在无穷远处不是单值的，矛盾。

在情况 (N7) 下，我们分别考虑情形 $b_n\neq 0$ 和 $b_n=0$。对于第一种情形，我们断言，对于所有 $i=0$、.....、$n+1$， $\mathcal{Y}^{(i)}$ 不可能满足以 $E^{(i)}$、 $p^{(i)}$ 和 $\phi^{(i)}$ 分别替换 $E^{(0)}$、 $p^{(0)}$ 和 $\phi^{(0)}$ 后的 (S4)。否则，

$$\mathcal{Y}^{(n+1)}=u_{n+1}^{\vartheta_0^{(n+1)}}U_{n+1}(u_{n+1},v_{n+1})\frac{\partial}{\partial u_{n+1}}+\left(\mathcal{P}_{E^{(n)}}(\phi^{(n)}+v_{n+1})+O(u_{n+1})\right)\frac{\partial}{\partial v_{n+1}},$$

其中 $\vartheta_0^{(n+1)}:=n+2-\sum_{i=0}^n p^{(i)}$，

$$U_{n+1}(u_{n+1},v_{n+1}):=y_*+\phi^{(0)}u_{n+1}^{p^{(0)}}+O(u_{n+1}^{p^{(0)}+1}),$$

且 $y_*:=-b_n/(2c_n)\neq 0$。由于 $p^{(0)},...,p^{(n)}\geq 1$ 且 $\vartheta_0^{(n+1)}\geq 1$，我们有

$$\vartheta_0^{(n+1)}=1.$$

于是，点 $(0,0)$ 是 $\mathcal{N}(\mathcal{Y}^{(n+1)})$ 的左端点，从而 $\mathcal{Y}^{(n+1)}$ 不满足 (S4)，矛盾。这就证明了上述断言。上述分析还表明，在情形 $b_n\neq 0$ 下，(M3) 中给出的整数 i_* 满足

$$i_*\leq n.$$

此外，根据上述断言，如果 $\mathcal{Y}^{(0)}$ 不满足 (M3)，则存在一个整数$r'\leq n+1$ ，使得对于所有 $i=0,...,r'-1$， $\mathcal{Y}^{(i)}$ 满足 (S4)，其中 $E^{(0)}$、 $p^{(0)}$ 和 $\phi^{(0)}$ 分别替换为 $E^{(i)}$、$p^{(i)}$ 和 $\phi^{(i)}$；但如有必要， $\mathcal{Y}^{(r')}$满足条件 (S0)-(S3) 之一，其中 $E^{(0)}$ 和 $p^{(0)}$ 分别替换为 $E^{(r')}$ 和 $p^{(r')}$。与情形 (N5) 类似，向量场 $\mathcal{Y}^{(0)}$ 有一条不变曲线，该曲线由$|u|^{1/2}$中的一个 C^∞函数给出，并经过原点。因此，系统 (2.7)在无穷远处不是单值的，这与假设矛盾。

在 $b_n=0$ 的情况下，我们断言，对于所有 $i=0,...,n+2$， $\mathcal{Y}^{(i)}$ 不可能满足(S4)，其中 $E^{(0)}$、 $p^{(0)}$ 和 $\phi^{(0)}$ 分别替换为 $E^{(i)}$、 $p^{(i)}$ 和 $\phi^{(i)}$。否则，由于 $y_*=0$，我们有

$$\mathcal{Y}^{(n+2)}=u_{n+2}^{\tau^{(n+2)}}\big(\phi^{(0)}+O(u_{n+2})\big)\frac{\partial}{\partial u_{n+2}}+\big(\mathcal{P}_{E^{(n+1)}}(\phi^{(n+1)}+v_{n+2})+O(u_{n+2})\big)\frac{\partial}{\partial v_{n+2}},$$

其中 $\tau^{(n+2)}:=n+2-\sum_{i=1}^{n+1}p^{(i)}$。由于 $p^{(1)}$，.....，$p^{(n+1)}\geq 1$ 以及 $\tau^{(n+2)}\geq 1$，我们有

$$\tau^{(n+2)}=1.$$

于是，点 (0，0) 是 $\mathcal{N}(\mathcal{Y}^{(n+2)})$ 的左端点，这意味着 $\mathcal{Y}^{(n+2)}$ 不满足 (S4)，矛盾。因此，上述断言得证。上述分析还表明，在 $b_n=0$ 的情形下，(M3) 中给出的整数 i_* 满足

$$i_*\leq n+1.$$

此外，根据上述断言，如果 $\mathcal{Y}^{(0)}$ 不满足 (M3)，则存在一个整数 $r''\leq n+2$，使得对于所有 $i=0$，.....，$r''-1$，$\mathcal{Y}^{(i)}$ 满足 (S4)，其中 $E^{(0)}$、 $p^{(0)}$ 和 $\phi^{(0)}$ 分别替换为 $E^{(i)}$、 $p^{(i)}$ 和 $\phi^{(i)}$；但如有必要，$\mathcal{Y}^{(r'')}$ 满足条件 (S0)-(S3) 中的一个，其中 $E^{(0)}$ 和 $p^{(0)}$ 分别替换为 $E^{(r'')}$ 和 $p^{(r'')}$。类似于情形 (N5)，向量场 $\mathcal{Y}^{(0)}$ 具有一条不变曲线，该曲线由 $|u|^{1/2}$ 中的一个 C^∞ 函数给出，并且经过原点，因此系统 (2.7) 在无穷远处不是单值的，矛盾。

根据上述对情形 (N1)-(N7)的讨论，我们得到了引理 2.2的必要性，证明至此完成。□

此外，由引理 2.2 可得无穷远处的单值性与向量场 $\mathcal{X}_{(0)}$ 和 $\mathcal{Y}^{(0)}$（定义于(2.8)）的某些分数阶形式不变曲线不存在之间的联系，这为刻画无穷远处的单值性提供了一种直接的计算方法。令 $\mathbb{R}[\![|u|^{\frac{1}{2}}]\!]$ 为 $|u|^{\frac{1}{2}}$ 中系数属于 $\mathbb{R}$ 的形式幂级数环。若 $\Phi(u)\in\mathbb{R}[\![|u|^{\frac{1}{2}}]\!]$ 且 $\mathcal{X}^{(0)}C^{(0)}|_{C^{(0)}=0}=0$，则称 $C^{(0)}(u,v):=v-\Phi(u)=0$ 是向量场 $\mathcal{X}_{(0)}$ 的一条 $\frac{1}{2}$ 阶分数形式不变曲线

定理2.1 *Cherkas*系统 (2.7) 在无穷远处单调，当且仅当 n 是奇数且满足以下任一条件

(F1) $c_n=b_n=0$、 $a_n<0$，且向量场 $\mathcal{X}_{(0)}$ 不存在形如 $v=\Phi(u)\in\mathbb{R}[\![|u|^{\frac{1}{2}}]\!]\backslash\{0\}$ 且满足 $\Phi(0)=0$ 的形式不变曲线；或者

(F2) $c_n<0$ 和 $b_n^2-4a_nc_n<0$；或者

(F3) $c_n<0$、 $b_n^2-4a_nc_n=0$，以及向量场 $\mathcal{Y}^{(0)}$ 没有形如 $y=\Psi(u)\in\mathbb{R}[\![|u|^{\frac{1}{2}}]\!]$ 且满足 $\Psi(0)=0$的形式不变曲线。

证明. 只需证明当 n 为奇数时，条件 (F1) 和 (F3) 分别等价于引理 2.2 中给出的条件 (M1) 和 (M3)。我们首先证明 (M1) 蕴含 (F1)。如果 (F1) 不成立，那么 $\mathcal{X}^{(0)}$ 有一条实形式不变曲线 $\mathcal{C}^{(0)}(u,v):=v-\Phi^{(0)}(u)=0$，其定义于 $u\geq 0$ 或 $u\leq 0$，其中 $\Phi^{(0)}(u)\in\mathbb{R}[\![|u|^{\frac{1}{2}}]\!]\setminus\{0\}$。我们只考虑 $u\geq 0$ 的情形，因为 $u\leq 0$ 的情形类似。假设

$$\Phi^{(0)}(u)=\phi_0 u^{\iota_0^{(0)}}+\sum_{k=1}^{s}\phi_k u^{\iota_k^{(0)}}, \tag{2.25}$$

其中，对于所有 $k\geq 0$，$s\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$、$0<\iota_0^{(0)}<\iota_1^{(0)}<\cdots<\iota_s^{(0)}$、$2\iota_k^{(0)}\in\mathbb{N}$ 和 $\phi_k\neq 0$。这一不变性表明

$$0=\mathcal{X}^{(0)}\mathcal{C}^{(0)}|_{\mathcal{C}^{(0)}=0}=\left\{-F_1^{(0)}(u,v)\frac{d\Phi^{(0)}(u)}{du}+G_1^{(0)}(u,v)\right\}\Big|_{v=\Phi^{(0)}(u)}.$$

由于 (M1) 成立，牛顿多边形 $\mathcal{N}(\mathcal{X}^{(0)})$ 恰有一条边 $E^{(0)}$，连接顶点 $(0,2)$ 和顶点 $(2p^{(0)},0)$。于是

$$0=\mathcal{X}^{(0)}\mathcal{C}^{(0)}|_{\mathcal{C}^{(0)}=0}=\begin{cases} g_{0,3}^{(0)}\phi_0^3u^{3\iota_0^{(0)}}+o(u^{3\iota_0^{(0)}}) & \text{if } \iota_0^{(0)}<p^{(0)},\\ \mathcal{P}_{E^{(0)}}(\phi_0)u^{3\iota_0^{(0)}}+o(u^{3\iota_0^{(0)}}) & \text{if } \iota_0^{(0)}=p^{(0)},\\ g_{2p^{(0)},1}^{(0)}\phi_0u^{2p^{(0)}+\iota_0^{(0)}}+o(u^{2p^{(0)}+\iota_0^{(0)}}) & \text{if } \iota_0^{(0)}>p^{(0)},\end{cases} \tag{2.26}$$

这意味着 $\iota_0^{(0)}=p^{(0)}$ 和 $\mathcal{P}_{E^{(0)}}(\phi_0)=0$。

在 (M1) 中 $i_*=0$ 的情形下，由于 $\mathcal{P}_{E^{(i_*)}}=\mathcal{P}_{E^{(0)}}$ 没有非零实根，我们得到矛盾。于是，在 $i_*=0$ 的情形下，(M1) 意味着 (F1) 。

在相反的情形 $i_*\geq 1$ in (M1) 下，我们有 $\phi_0=\phi^{(0)}$，它是 $\mathcal{P}_{E^{(0)}}$ 的唯一非零实根。此外，在爆破变换 $u=u_1$ and $v=u_1^{p^{(0)}}(\phi^{(0)}+v_1)$ 下，向量场 $\mathcal{X}_{(0)}$ 变为向量场 $\mathcal{X}^{(1)}=\mathcal{D}(\mathcal{X}_{(0)};\,p^{(0)},\mathbf{1},\phi^{(0)})$。相应地，该变换将形式曲线 $\mathcal{C}^{(0)}(u,v)=0$ 变为形式曲线 $\mathcal{C}^{(1)}(u_1,v_1):=v_1-\Phi^{(1)}(u_1)=0$, 其中

$$\Phi^{(1)}(u_1):=\frac{\Phi^{(0)}(u_1)}{u_1^{p^{(0)}}}-\phi_0=\phi_1u_1^{\iota_1^{(1)}}+\sum_{k=2}^{s}\phi_ku_1^{\iota_k^{(1)}}\in\mathbb{R}[\![|u_1|^{\frac{1}{2}}]\!]$$

其中 $\iota_k^{(1)}:=\iota_k^{(0)}-p^{(0)}$ 对所有 $k\geq 1$成立。由于形式曲线 $\mathcal{C}^{(0)}=0$ 在向量场 $\mathcal{X}^{(0)}$ 下不变，形式曲线 $\mathcal{C}^{(1)}=0$ 相应地在向量场 $\mathcal{X}_{(1)}$下不变。对 $\mathcal{X}^{(0)}$和 $\mathcal{C}^{(0)}=0$关于$i\geq 1$重复上述过程，由不变性可得

$$0=\mathcal{X}^{(i)}\mathcal{C}^{(i)}|_{\mathcal{C}^{(i)}=0}=\begin{cases} g_{0,2}^{(i)}\phi_i^2u_i^{2\iota_i^{(i)}}+o(u_i^{2\iota_i^{(i)}}) & \text{if } \iota_i^{(i)}<p^{(i)},\\ \mathcal{P}_{E^{(i)}}(\phi_i)u_i^{2\iota_i^{(i)}}+o(u_i^{2\iota_i^{(i)}}) & \text{if } \iota_i^{(i)}=p^{(i)},\\ g_{2p^{(i)},0}^{(i)}u_i^{2p^{(i)}}+o(u_i^{2p^{(i)}}) & \text{if } \iota_i^{(i)}>p^{(i)},\end{cases} \tag{2.27}$$

其中 $\mathcal{X}^{(i)}=\mathcal{D}(\mathcal{X}_{(i-1)};\ p^{(i-1)},1,\phi^{(i-1)}),\quad E^{(i)}$ 是 $\mathcal{N}(\mathcal{X}_{(i)})$的唯一边，连接顶点$(0,1)$与顶点$(2p^{(i)},-1)$，且 $\mathcal{C}^{(i)}(u_i,v_i):=v_i-\Phi^{(i)}(u_i)$，其中

$$\Phi^{(i)}(u_i):=\frac{\Phi^{(i-1)}(u_i)}{u_i^{p^{(i-1)}}}-\phi_{i-1}=\phi_i u_i^{\iota_i^{(i)}}+\sum_{k=i+1}^{s}\phi_k u_i^{\iota_k^{(i)}}\in\mathbb{R}[\![|u_i|^{\frac{1}{2}}]\!]$$

且 $\iota_k^{(i)}:=\iota_k^{(i-1)}-p^{(i-1)}$ 对所有 $k\geq i$。由（2.27）可得 $\iota_i^{(i)}=p^{(i)}$ 且$\mathcal{P}_{E^{(i)}}(\phi_i)=0$，即 $\phi_i=\phi^{(i)}$是 $\mathcal{P}_{E^{(i)}}$的唯一非零实根。于是，对于所有 $i=1$、2、.....、$\max\{s,i_*\}$，均可重复上述过程。

对于情形 $s<i_*$，有 $\mathcal{C}^{(s+1)}(u_{s+1},\ v_{s+1})=v_{s+1}-\Phi^{(s+1)}(u_{s+1})=v_{s+1}$，因此

$$\mathcal{X}^{(s+1)}\mathcal{C}^{(s+1)}|_{\mathcal{C}^{(s+1)}=0}=G_1^{(s+1)}(u_{s+1},0)=g_{2p^{(s+1)},0}^{(s+1)}u_{s+1}^{2p^{(s+1)}}+O(u_{s+1}^{2p^{(s+1)}+1})\neq 0,\quad(2.28)$$

这就产生矛盾，其中 $g_{2p^{(s+1)},\ 0}^{(s+1)}$ 是边 $E^{(s+1)}$ 的右端点 $(2p^{(s+1)},\ -1)$ 对应的 $G_1^{(s+1)}$ 系数。

对于相反的情形 $s\geq i_*$，由于多项式$\mathcal{P}_{E^{(i_*)}}$ 没有非零实根，方程（2.27）对 $i=i_*$不可能成立，矛盾。因此，**(M1)**蕴含**(F1)**。

反之，我们证明**(F1)** 蕴含**(M1)**。为反证，假设**(M1)** 不成立。根据2.24之前给出的断言，存在一个整数 $r\leq n$，使得 $\mathcal{X}^{(i)}$ 对所有 $i=0,...,r-1$均满足 **(S4)**，其中 $E^{(0)}$、$p^{(0)}$ 和 $\phi^{(0)}$ 分别替换为 $E^{(i)}$、$p^{(i)}$和 $\phi^{(i)}$；但如有必要，$\mathcal{X}^{(r)}$ 满足**(S0)**-**(S3)** 之一，其中 $E^{(0)}$ 和 $p^{(0)}$ 分别替换为 $E^{(r)}$ 和 $p^{(r)}$。引理2.2 的证明中**(N5)** 情形表明，$\mathcal{X}^{(r)}$ 存在一条不变曲线，该曲线由 $|u_r|^{1/2}$中的一个 C^∞ 函数给出，并经过原点。因此，$\mathcal{X}^{(r)}$ 存在一条1 2-分数阶形式不变曲线

$$v_r=\Phi_r(u_r)\in\mathbb{R}[\![|u_r|^{\frac{1}{2}}]\!]$$

且 $\Phi_r(0)=0$。吹下后，$\mathcal{X}_{(0)}$ 有一条 1 2-分数阶形式不变曲线

$$v=\Phi(u)=|u|^{p^{(0)}}\left(\phi^{(0)}+O(|u|^{\frac{1}{2}})\right)\in\mathbb{R}[\![|u|^{\frac{1}{2}}]\!]\backslash\{0\}$$

这与**(F1)**矛盾。因此，我们得到了**(M1)**与**(F1)**之间的等价性。当 n 为奇数时，类似地可以证明**(M3)**与**(F3)** 之间的等价性。至此，本定理得证。□

注 2.1 如果 Cherkas系统 (2.7) 在无穷远处不是单值的，那么 $\mathcal{X}_{(0)}$ 将存在一条不变曲线 $v=\Phi(u)\notin\mathbb{R}[\![|u|^{\frac{1}{2}}]\!]\backslash\{0\}$ 满足 $\Phi(0)=0$。当去奇异化过程中出现双曲节点时，就会发生这种情况。例如，若$\lambda:=g_{\tilde{p}^{(1)},\ 1}^{(1)}$ 在 (2.23) 中是无理数，则，**0)** $\mathcal{X}^{(1)}$ 的平衡点 (0, 是一个非共振节点。根据 [20, 第 2 节7]中给出的 $\mathcal{X}^{(1)}$ 正规形结果，

$x\frac{\partial}{\partial x}+\lambda y\frac{\partial}{\partial y}$ 在某些 C^∞ 坐标下，且对所有$c\in\mathbb{R}$，都有不变曲线 $y=cx^\lambda$。这表明 $\mathcal{X}^{(0)}$存在上述不变曲线。在共振节点情形下，会出现更复杂的不变曲线。

注记 2.2 应用 **(F1)** 定理 2.1时，我们只需利用待定系数法计算至 $_1$ $_2$ 阶分数阶形-式不变曲线 n。实际上，考虑一个形式为（2.25）的 $v=\Phi^{(0)}(u)$ 阶分数阶形式曲线2.25。若**(M1)** 成立，由（2.26）-（2.28）可知 $s\geq i_*$,

$$\iota_k^{(0)}=p^{(0)}+\cdots+p^{(k)}\quad\text{and}\quad\mathcal{P}_{E^{(k)}}(\phi_k)=0\quad\text{for all } k=0,...,i_*.$$

方程 $\mathcal{P}_{E^{(k)}}(\phi_k)=0$对所有 $k=0,...,i_*-1$都有解 $\phi_k=\phi^{(k)}$，然而，方程 $\mathcal{P}_{E^{(i_*)}}(\phi_k)=0$ 没有非零实解。此外，由 $\mathcal{X}^{(i_*+1)}$ 的表达式（2.19）可知

$$\varrho^{(i_*+1)}=n+2-p^{(0)}-\sum_{j=0}^{i_*}p^{(i)}\geq 1$$

因此 $\iota_{i_*}^{(0)}\leq n+1-p^{(0)}\leq n$。由此证明了上述结论。类似地，应用 **(F3)** 定理 2.1 时，对于 $b_n\neq 0$（或 $b_n=0$），我们只需计算至 $n+1$（或$n+2$）阶。

3 全局中心

根据引理2.1，如果系统（1.1）在原点处具有全局中心，那么它具有（2.7）的形式。由于 $P_0\neq 0$ 正如（2.7）下方紧接着所假设的，如果 $P_1\neq 0$ 那么我们假设

$$P_0(x)=a_{\iota_0}x^{\iota_0}+O(x^{\iota_0+1})\quad\text{and}\quad P_1(x)=b_{\iota_1}x^{\iota_1}+O(x^{\iota_1+1})$$

具有非零系数 a_{ι_0} 和 b_{ι_1} 以及整数 ι_0 和 ι_1。根据 [20, 定理3。5],系统（2.7）在原点处是单值的，当且仅当 $\iota_0=2\nu-1$ 对于某个整数$\nu\geq 1$ 并且还满足以下两个条件之一：

（W1） $\nu=1$、$a_{\iota_0}<0$ 以及 $P_1(0)=0$；或

(W2) $\nu\geq 2$、$a_{\iota_0}<0$，以及以下任一条件：$\iota_1>\nu$，或 $\iota_1=\nu$ 和$b_{\iota_1}^2+4\nu a_{\iota_0}<0$，或 $P_1=0$,

分别致力于非退化情形和幂零退化情形。此外，[11, 定理 3] 完整刻画了系统（2.7）在原点处具有局部中心的条件。

定理 3.1 切尔卡系统 (2.7)满足**(W1)** 或**(W2)**的系统在原点有中心，当且仅当满足以下条件之一(可能重叠)：

(C1) 系统关于 x 轴对称，即 $P_1 = 0$;

(C2) $P_i(x) = A_i(r(x))r'(x)$ 对于所有 $i = 0$、1、2，其中 $A_i(x)$ 和 $r(x)$ 均为满足 $A_0(0) < 0$ 且 $r(x) = x^{2\nu} + O(x^{2\nu+1})$的多项式;

(C3) 存在一个达布型局部首次积分，即形如$\exp(f/g)\prod h_i^{k_i}$的首次积分，其中 f、g 和 h_i 为实多项式， k_i 为实常数。

注释3.1 尽管 [11, 定理 3] 仅针对系统 (2.7) 的非退化中心陈述，但证明对于幂零中心同样成立，正如李-纳德系统 ([8]) 中非退化中心和幂零中心的情形一样。此处我们通过将 [11, 定理 3] 改写为定理 3.1 ，并将 $r(x) = x^2 + O(x^3)$ 修订为 $r(x) = x^{2\nu} + O(x^{2\nu+1})$，并将其纳入 **(C2)**，从而统一了非退化中心与幂零中心的刻画。

注释3.2 如 [11, 页343], 所示，我们可以通过计算确定形如（2.7）的特定系统是否具有中心。首先，我们检查$P_1 = 0$，即情形**(C1)** 是否成立。其次，我们检查

$$P_2P_0P_1 + P_0P_1' - P_1P_0' = eP_1^3, \tag{3.1}$$

对某个常数 e 是否成立，即情形 **(C3)** 是否成立。最后，我们寻找多项式 $A_i(x)$s 和 $r(x)$，使得对所有 $i = 0$，1、2， $P_i(x) = A_i(r(x))r'(x)$，即情形 **(C2)** 成立。

结合关于无穷远处的单值性的定理2.1与关于局部中心的定理3.1，我们得到系统（2.7）具有全局中心的完整刻画。为方便起见，我们假设在情形**(C2)**

$$A_0(x) := \alpha_0 + \cdots + \alpha_\kappa x^\kappa,\ A_1(x) := \beta_0 + \cdots + \beta_\kappa x^\kappa,\ A_2(x) := \gamma_0 + \cdots + \gamma_\kappa x^\kappa$$

for 一个整数 $\kappa \geq 1$，其中 $\alpha_\kappa^2 + \beta_\kappa^2 + \gamma_\kappa^2 \neq 0$。此外，定义向量场

$$\mathcal{U}^{(0)} := \mathcal{F}_1^{(0)}(u,v)\frac{\partial}{\partial u} + \mathcal{G}_1^{(0)}(u,v)\frac{\partial}{\partial v},\quad \mathcal{V}^{(0)} := \mathcal{F}_2^{(0)}(u,y)\frac{\partial}{\partial u} + \mathcal{G}_2^{(0)}(u,y)\frac{\partial}{\partial y},$$

其中

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_1^{(0)}(u,v) := u^{\kappa+2}, && \mathcal{G}_1^{(0)}(u,v) := \widetilde{A}_0(u)v^3 + \widetilde{A}_1(u)v^2 + \widetilde{A}_2(u)v,\\
&\mathcal{F}_2^{(0)}(u,y) := -u^{\kappa+2}(y+\tilde{y}_*), && \mathcal{G}_2^{(0)}(u,y) := \widetilde{A}_0(u) + \widetilde{A}_1(u)(y+\tilde{y}_*) + \widetilde{A}_2(u)(y+\tilde{y}_*)^2,
\end{aligned}$$

$\widetilde{A}_i(u) := u^\kappa A_i(1/u)$，且 $\tilde{y}_* := \frac{-\beta_\kappa}{2\gamma_\kappa}$ 具有非零的 γ_κ。

定理 3.2 *Cherkas*系统 (2.7) 满足**(W1)**或**(W2)**的充要条件是，系统在原点处具有全局中心，且 n 为奇函数， $xP_0(x) < 0$ 对所有 $x \neq 0$均成立，并且下列条件之一成立:

(G1) *Condition* **(C1)** *holds,* $a_{\ell_0} < 0$, $c_{\ell_2} < 0$, ℓ_0 *and* ℓ_2 *are odd, where* $\ell_i := \deg P_i$.

(G2) 条件(C2)成立，且满足以下条件之一

(G2i) $\gamma_\kappa = \beta_\kappa = 0$, $\alpha_\kappa < 0$，且向量场 $\mathcal{U}^{(0)}$ 不存在形如 $v = \Phi(u) \in \mathbb{R}[\![u^{\frac{1}{2}}]\!]\backslash\{0\}$ 且满足 $\Phi(0) = 0$ 的形式不变曲线；或**(G2ii)** $\gamma_\kappa < 0$ 且 $\beta_\kappa^2 - 4\alpha_\kappa\gamma_\kappa < 0$；或**(G2iii)** $\gamma_\kappa < 0$, $\beta_\kappa^2 - 4\alpha_\kappa\gamma_\kappa = 0$，且向量场 $\mathcal{V}^{(0)}$ 不存在形如 $v = \Psi(u) \in \mathbb{R}[\![u^{\frac{1}{2}}]\!]$ 且满足 $\Psi(0) = 0$ 的形式不变曲线。

(G3) 条件(C3) 成立， $a_{\ell_0} < 0$, $c_{\ell_2} < 0$, $b_{\ell_1}^2 - 4a_{\ell_0}c_{\ell_2} < 0$ 和 $\ell_0 + \ell_2 = 2\ell_1$，其中 $\ell_i :=$ 次数 P_i。

证明。 我们首先考虑充分性。由于 $xP_0(x) < 0$ 对所有 $x \neq 0$，原点 (0，0) 是系统 (2.7) 的唯一平衡点，且当 **(W1)** 或 **(W2)** 成立时，它是中心-焦点型。我们进一步证明，若条件 **(G1)**-**(G3)** 之一成立，则唯一的平衡点 (0，0) 是全局中心。

若 **(G1)** 成立，则由定理 3.1可知，唯一的平衡点 (0，0) 是局部中心，因为 **(C1)** 成立。为证明它是全局中心，分三种情况讨论：

(L1) $\ell_0 = n$ and $\ell_2 < n$, **(L2)** $\ell_0 = \ell_2 = n$, **(L3)** $\ell_0 < n$ and $\ell_2 = n$.

在 **(L1)** 情形下，牛顿多边形 $\mathcal{N}(\mathcal{X}^{(0)})$ 恰有一条边 $E^{(0)}$，连接顶点 (0，2) 和 $(n - \ell_2,\ 0)$。因此 $h(E^{(0)}) = 2$ 且 $w(E^{(0)}) = n - \ell_2$，由于 n 和 ℓ_2 均为奇数，所以它是偶数。此外，多项式

$$\mathcal{P}_{E^{(0)}}(v) = a_n v^3 + c_{\ell_2} v \tag{3.2}$$

由于 $a_n < 0$ 和 $c_{\ell_2} < 0$，没有非零实根。因此，引理 2.2 的条件（M1）成立。在情形（L2）中，由于 $P_1 = 0$ 且 a_n 和 c_n 均为负数，我们有 $b_n^2 - 4a_nc_n = -4a_nc_n < 0$，即引理 2.2 的条件（M2）成立。在情形（L3）中，我们有 $c_n < 0$ 和 $b_n^2 - 4a_nc_n = 0$。牛顿多边形 $\mathcal{N}(\mathcal{Y}^{(0)})$ 恰有一条边 $E^{(0)}$，连接顶点 (0, 1) 和 $(n - \ell_0, -1)$。因此 $h(E^{(0)}) = 2$且 $w(E^{(0)}) = n - \ell_0$，由于 n 和 ℓ_0 均为奇数，故其为偶数。此外，多项式

$$\mathcal{P}_{E^{(0)}}(y) = c_n y^2 + a_{\ell_0} \tag{3.3}$$

由于 $a_{\ell_0} < 0$ 和 $c_n < 0$，没有非零实根。因此，条件(M3) （引理2.2 ）成立。因此，系统（2.7）在无穷远处单值，故中心平衡点 (0，0) 实际上是一个全局中心。

若条件 **(G2)** 成立，则根据定理 ，唯一的平衡点 (03.1 由于条件 **(C2)** 成立，因此是一个局部中心。考虑映射 $\pi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

定义为 $(x,y) \mapsto (\tilde{x},\tilde{y}) = (r(x)\ y)$。然后对与系统相关的 1-形式$\omega := \tilde{y}d\tilde{y} + (A_0(\tilde{x}) + A_1(\tilde{x})\tilde{y} + A_2(\tilde{x})\tilde{y}^2)d\tilde{x}$ 取拉回

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{y}, \quad \dot{y} = A_0(\tilde{x}) + A_1(\tilde{x})\tilde{y} + A_2(\tilde{x})\tilde{y}^2 \tag{3.4}$$

沿着映射 π，我们得到 1-形式

$$\pi_*\omega = ydy + (A_0(r(x)) + A_1(r(x))y + A_2(r(x))y^2)r'(x)dx$$

与系统 (2.7) 相关联。映射 π 舍弃系统 (3.4) 在半平面 $\tilde{x} < 0$ 中的相图，并将系统 (3.4) 在半平面 $\tilde{x} > 0$中的相图“折叠”到半平面 $\tilde{x} < 0$上，同时使 $\tilde{y}$轴上的曲线变得平滑。因此，系统 (2.7) 的局部中心平衡点 (0, 0) 是全局中心，当且仅当系统 (3.4) 在半平面 $\tilde{x} > 0$中没有趋向无穷远的轨道。注意，系统 (3.4) 与 (2.7) 具有相同的形式。于是，采用引理 2.2 的相同证明方法可得：若条件 (G2i)–(G2iii) 中有一个成立，则系统 (3.4) 在半平面 $\tilde{x} > 0$ 中没有趋向无穷远的轨道，因此系统 (2.7) 在原点处具有全局中心。

若条件 (**G3**) 成立，则根据定理 *3.1* ，唯一的平衡点（0,0）是一个局部中心，因为条件 (**C3**) 成立。注意到 $\ell_0 + \ell_2 = 2\ell_1$， $\ell_i \le n$ 对所有$i = 0$，1、2 均成立，并且下列至少一个 ℓ_i等于 n。于是有三种情形：

$$\textbf{(L1)}'\ \ell_0 = n \text{ and } \ell_1, \ell_2 < n, \quad \textbf{(L2)}'\ \ell_0 = \ell_1 = \ell_2 = n, \quad \textbf{(L3)}'\ \ell_0, \ell_1 < n \text{ and } \ell_2 = n.$$

在情形 (**L1**)′中，我们有 $a_n < 0$ 和 $b_n = c_n = 0$，这正是条件 (**M1**)所要求的。此外，等式 $\ell_0 + \ell_2 = 2\ell_1$ 表明 $2(n - \ell_1) = n - \ell_2$。于是， $\mathcal{N}(\mathcal{X}^{(0)})$ 恰好有一条边 $E^{(0)}$，连接顶点（0,2）和（$2(n - \ell_1), 0$），以及多项式

$$\mathcal{P}_{E^{(0)}}(v) = a_n v^2 + b_{\ell_1} v + c_{\ell_2},$$

由于 $b_{\ell_1}^2 - 4a_{\ell_0}c_{\ell_2} < 0$，该多项式没有实根。因此，引理 2.2 的条件（M1）成立。在情形（L2）′中，条件（M2）显然成立。在情形（L3）′中，我们有 $a_n = b_n = 0$ 和 $c_n < 0$，这确保了（M3）中所要求的$b_n^2 - 4a_nc_n = 0$。此外，由等式 $\ell_0 + \ell_2 = 2\ell_1$ 可知 $2(n - \ell_1) = n - \ell_0$。于是 $\mathcal{N}(\mathcal{Y}^{(0)})$恰好有一条边 $E^{(0)}$，连接顶点（0, 1）和（$2(n - \ell_1) - 1$），以及多项式

$$\mathcal{P}_{E^{(0)}}(y) = c_n y^2 + b_{\ell_1} y + a_{\ell_0}$$

没有实根，因为 $b_{\ell_1}^2 - 4a_{\ell_0}c_{\ell_2} < 0$。因此，条件 (**M3**) 成立。在每种情况下，系统（2.7）在无穷远处单调，因此系统（，）的中心平衡点（02.7）是全局中心。由此，我们得到了充分性。

下面我们考察必要性。由于全局中心平衡点（0，0）是唯一的平衡点，我们得到 $xP_0(x) < 0$ 对所有 $x \neq 0$均成立。由引理2.2 和定理3.1， n 为奇数，条件(**M1**)-(**M3**) 中的一个成立，且条件(**C1**)-(**C3**) 中的一个成立。

在条件（C1）成立的情况下，若（M1）有效，则 $\ell_0 = n$ 且 $a_{\ell_0} < 0$。注意到 $\mathcal{N}$（$\mathcal{X}^{(0)}$）只有一条边 $E^{(0)}$，连接顶点（0, 2）和（$n - \ell_2$, 0），与边 $E^{(0)}$ 对应的多项式由（3.2）给出。根据（M1），我们有$n-\ell_2$为偶数，且多项式（3.2）没有非零实根。由此可知，$a_{\ell_0} < 0$、$c_{\ell_2} < 0$、ℓ_0 和 ℓ_2 均为奇数，即条件（G1）成立。若（M2）有效，则 $\ell_2 = n$为奇数，$c_n < 0$ 且 $b_n^2 - 4a_nc_n = -4a_nc_n < 0$。显然，条件（G1）成立。若（M3）有效，则 $\ell_2 = n$为奇数，且 $c_{\ell_2} < 0$。注意到 $\mathcal{N}$（$\mathcal{Y}^{(0)}$）只有一条边$E^{(0)}$，连接顶点（0, 1）和（$n - \ell_0$, -1），与边 $E^{(0)}$ 对应的多项式由（3.3）给出。根据（M3），我们有 $n - \ell_0$ 为偶数，且多项式（3.3）没有实根。这也意味着条件（G1）成立。因此，我们得到全局中心的必要条件（G1）。

在(C2) 成立的情况下，由于条件(M1)-(M3) 成立，根据引理2.2，系统(2.7)没有趋向无穷远的轨道。如3.4)下文所示，这等价于系统(3.4)在半平面 $\tilde{x} > 0$ 中没有趋向无穷远的轨道。由于系统(3.4)与(2.7)形式相同，采用引理2.2的同一证明可得，条件(G2i)-(G2iii)之一成立。因此，我们得到全局中心的必要条件 (G2) 。

在(C3) 成立的情况下，对于某个非零常数 e，等式(3.1)成立。从($\ell_0 + \ell_1 + \ell_2 = 3\ell_1$)两边的次数可知，

$$\ell_0 + \ell_2 = 2\ell_1. \tag{3.5}$$

在 $e = 1/4$ 的情况下，系统（2.7）有一条无界不变代数曲线$y + 2P_0$（x）$/P_1$（x）$= 0$，如 [11], 中等式（3.17）下方所示，其中注意到 P_0/P_1 是由 [11] 中的（3.15）保证存在的多项式。这种无界不变代数曲线的存在意味着，当 $e = 1/4$ 时，系统（2.7）没有全局中心。反之，在 $e \neq 1/4$ 的情况下，由（3.1）两边首项的系数可知 $c_{\ell_2}a_{\ell_0} = eb_{\ell_1}^2$，因此

$$b_{\ell_1}^2 - 4a_{\ell_0}c_{\ell_2} \neq 0. \tag{3.6}$$

若 (M1) 成立，则 $\ell_0 = n$，因此根据（$n - \ell_1$）$= n - \ell_2$（3.5）。由此可得$\mathcal{N}$（$\mathcal{X}^{(0)}$）只有一条边 $E^{(0)}$，连接顶点 (0, 2) 和 ($n - \ell_2$, 0)，并且

$$\mathcal{P}_{E^{(0)}}(v) = a_{\ell_0}v^2 + b_{\ell_1}v + c_{\ell_2}.$$

于是（3.6）和(M1)确保

$$a_{\ell_0} < 0, \quad c_{\ell_2} < 0, \quad b_{\ell_1}^2 - 4a_{\ell_0}c_{\ell_2} < 0. \tag{3.7}$$

如果(M2) 成立，则 $c_n < 0$ 和 $b_n^2 - 4a_nc_n < 0$，这意味着 $a_n < 0$。因此$\ell_0 = \ell_2 = n$，从而 $\ell_1 = n$ 由于（3.5）。所以（3.7）仍然成立。如果(M3)成立，则 $\ell_2 = n$，因此 2($n - \ell_1$) $= n - \ell_0$ 由（3.5）可知。由此可得 $\mathcal{N}$（$\mathcal{Y}^{(0)}$）只有一条边 $E^{(0)}$，连接顶点（0，1）和（$n - \ell_0$，-1），并且

$$\mathcal{P}_{E^{(0)}}(y) = c_ny^2 + b_{\ell_1}y + a_{\ell_0}.$$

由（3.6）和 (M3) 可知（3.7）成立。因此，由（3.5）和（3.7）可得全局中心的必要条件 (G3)，定理3.2 的证明至此完成。□

4 全局中心的非等时性

上一节我们得到了 Cherkas系统（2.7）的全局中心条件。本节将通过考察无穷远附近轨道的周期函数，进一步证明其非等时性。为此，我们将一个闭矩形作为实平面的紧化，如图 1（a）所示。正如第 2 节所分析的，当系统（2.7）在原点处具有全局中心时，矩形的边界是由有限个平衡点和积分曲线组成的多环。经过去奇异化后，矩形的边界成为一个多环，其上只有双曲鞍点和半双曲鞍点。为了研究无穷远附近的轨道周期，我们需要考察多环的每个鞍角附近的通过时间，以及相邻两个鞍角之间沿积分曲线各边的通过时间。下文将用到 [27] 中给出的一些记号和结果。

沿多环积分曲线的一条边，根据流盒定理（[20,定理 1.12]），必要时反转时间方向，可取解析坐标 (x, y)，使该边位于 x 轴上，且沿这条边的向量场具有如下形式

$$\frac{1}{y^q g_1(x,y)}\frac{\partial}{\partial x}, \tag{4.1}$$

其中 q 是一个整数，g_1 是解析函数，并满足对于所有 $x \in I$（一个紧区间），$g_1(x,0) > 0$。在多环的双曲鞍点角附近，根据 [20, 定理 2.15] 中给出的解析标准形结果，必要时反转时间方向，存在解析坐标 (x, y)，使该鞍点角附近的向量场具有如下形式

$$\frac{1}{x^p y^q g_2(x,y)}\left\{x\frac{\partial}{\partial x} - y(\lambda + o(1))\frac{\partial}{\partial y}\right\}, \tag{4.2}$$

其中 p, q 是整数，$\lambda > 0$，且 g_2 是解析函数，满足 $g_2(0,0) > 0$。在多环的半双曲鞍点角附近，根据 [20, 定理 2.19] 中给出的 C^∞ 标准形式结果，必要时反转时间方向，存在C^∞ 坐标 (x, y)，使该半双曲鞍点角附近的向量场具有如下形式

$$\frac{1}{x^p y^q g_3(x,y)}\left\{(x^k + ax^{2k-1})\frac{\partial}{\partial x} - \lambda y\frac{\partial}{\partial y}\right\}, \tag{4.3}$$

其中整数 $k \geq 2$，$a \in \mathbb{R}$，$\lambda > 0$ 和 g_3 是一个 C^∞ 函数，满足 $g_3(0,\ 0) > 0$。注意，$1/(x^p y^q)$ 这些因子在 (4.1)-(4.3) 中不可避免，因为当我们在无穷远附近的局部坐标中考察多项式向量场时，这些因子会自然出现，而且无法通过时间重标度消去。当考虑周期时，我们必须使用共轭关系，而非等价关系。

对于向量场（4.1），令 ξ、ζ：$[0,1] \to \mathbb{R}^2$ 为两条 C^∞ 横截于x-轴的曲线，使得 ξ（0）和 ζ（0）是区间 I内的两个点，如

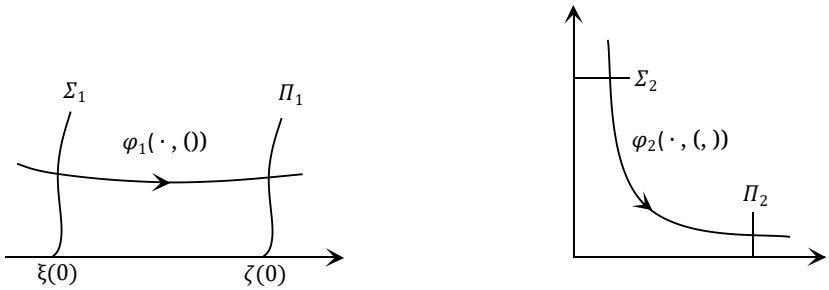


图5：向量场 (4.1) 和 (4.2) 的横截面。

图5（a）。令 Σ_1 和 Π_1 分别表示 ξ 和 ζ的像。设φ_1（t，ξ（s）是经过点 ξ（s）$\in \Sigma_1$ 的小 $s>0$轨道。令 t_1（s）为沿着 Σ_1 与 Π_1之间一侧的通过时间，即:

$$t_1(s) := \min\{t \in \mathbb{R}_+ : \varphi_1(t, \xi(s)) \in \Pi_1\}.$$

对于向量场（4.2），考虑横截面

$$\Sigma_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \eta\} \quad \text{and} \quad \Pi_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \eta\}$$

取足够小的 $\eta > 0$，如图 5(b) 所示。设 $\varphi_2(t,(s,\eta))$ 是经过点 (s,η) 的轨道，$\in \Sigma_2$ 其中 $s>0$足够小。令 $t_2(s)$ 为双曲鞍点角处的通过时间，即

$$t_2(s) := \min\{t \in \mathbb{R}_+ : \varphi_2(t,(s,\eta)) \in \Pi_2\}.$$

对于向量场（4.3），类似地，我们可以定义半双曲鞍点角处的通过时间 $t_3(s)$。下面的引理（[27, 引理 2.4]）刻画了上述通过时间在 s 趋近于 0^+时的阶。

引理 4.1 当 $s \to 0^+$ 时，通过时间 $t_1(s)$、$t_2(s)$ 和 $t_3(s)$ 满足 t

$$t_1(s) = O(s^q), \quad t_2(s) = O(s^\rho |\ln s|^\alpha),$$

其中 $\rho :=$ 最小值$\{p, \lambda q\}$，且 α 等于1（若 $p - \lambda q = 0$），否则等于0，并且

$$t_3(s) = \begin{cases} O(s^p), & q > 0, \\ O(1), & q = 0,\ p \geq k, \\ O(s^{p-k+1}|\ln s|^\beta), & q = 0,\ p \leq k-1, \\ O(s^{-a\lambda q}\exp(\frac{\lambda q}{1-k}s^{1-k})), & q < 0, \end{cases}$$

其中 β 等于1（若 $p = k-1$），否则等于0。

显然，当 $q \neq 0$时，通过时间 $t_1(s)$ 趋于 0 或 $+\infty$。若 p 和 q 均不为 0，$t_2(s)$ 和 $t_3(s)$ 也同样如此。考察无穷远处的 Cherkas 系统 (2.7) 时，我们将处理具有有理 p 和 q 的形式 (4.1)–(4.3) 的向量场。注意，即使 p 和 q 为实数，引理 4.1 的结论仍然成立，因为引理 4.1 的证明与 p 和 q 的类型无关。

定理 4.1 *Cherkas*系统 (2.7) 没有等时全局中心。

证明。为了证明此定理，我们考察系统（2.7）在无穷远附近的轨道周期。为此，我们将闭矩形视为实平面的紧化，如图 1(a) 所示。在变换 **(T1)**、**(T2)** 和 **(T3)**下，系统（2.7在直线 $\mathbb{R}\times\{\infty\}$、直线 $\{\infty\}\times\mathbb{R}$ 以及点 $\{\infty\}\times\{\infty\}$ 附近生成的向量场分别为

$$\widehat{\mathcal{Z}}^{(0)} := \frac{1}{v}\mathcal{Z}^{(0)}, \quad \widehat{\mathcal{Y}}_*^{(0)} := \frac{1}{u^n}\mathcal{Y}_*^{(0)} \quad \text{and} \quad \widehat{\mathcal{X}}^{(0)} := -\frac{1}{u^n v}\mathcal{X}^{(0)},$$

分别为，其中 $\mathcal{Z}^{(0)}$、$\mathcal{Y}_*^{(0)}$和 $\mathcal{X}^{(0)}$ 分别是系统（2.10）、（2.11）和（2.12）生成的向量场。

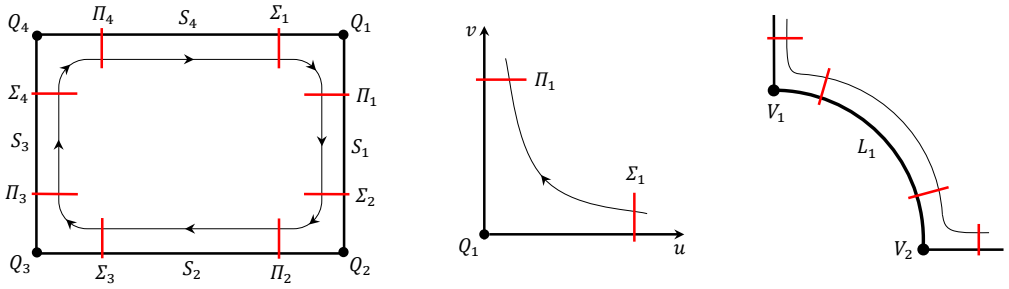


图 6：（a） $\mathbb{R}^2$ 的矩形紧化及边界的横截面，（b）局部坐标下 Q_1 处的鞍角，（c）退化鞍点角的去奇异化。

根据定理 3.2，如果系统 (2.7) 在原点处有全局中心，那么以下条件之一成立：**(G1)**、**(G2)**或 **(G3)** 。当 **(G1)** 成立时，我们有 $P_1 = 0$ ，并且有三种情形

$$\textbf{(L1)}\ \ell_0 = n \text{ and } \ell_2 < n, \quad \textbf{(L2)}\ \ell_0 = \ell_2 = n, \quad \textbf{(L3)}\ \ell_0 < n \text{ and } \ell_2 = n.$$

在情形（L1）中，如图 6(a) 所示，矩形的四个顶点 $Q_1, ..., Q_4$（从右上角开始按顺时针方向标记）都是系统 (2.7) 在无穷远处的平衡点。对于 $i = 1, ..., 4$，设 ξ_i, ζ_i：$[0,1] \to \mathbb{R}^2_\infty$ 是解析曲线，它们在顶点 Q_i 附近分别与线段 $Q_{i-1}Q_i$ 和 Q_iQ_{i+1} 横截，并且分别满足 $\xi_i(0) \in Q_{i-1}Q_i$ 和 $\zeta_i(0) \in Q_iQ_{i+1}$，其中 $Q_0 := Q_4$ 且 $Q_5 := Q_1$。设 Σ_i 和 Π_i 分别表示 ξ_i 和 ζ_i 的像。于是，矩形的边界被分为位于 Q_i 的四个角，以及位于 Q_i 和 Q_{i+1} 之间的四条线段 S_i ，如图 6(a) 所示。与本节第三段类似，我们可以定义角点 Q_i 处的通过时间 $t_i(s)$，以及沿边 S_i 的通过时间 $\tau_i(s)$。于是，非等时性可直接由以下极限得出

$$\lim_{s\to 0^+} t_i(s) = \lim_{s\to 0^+} \tau_i(s) = 0 \quad \text{for all } i = 1, 2, 3, 4. \tag{4.4}$$

实际上，我们只需考虑 Q_1 处的角点以及 S_1 和 S_2 两边，因为其他情形的讨论类似。沿着边 S_1，系统 (2.7) 生成的向量场为

$$\widehat{\mathcal{Y}}_*^{(0)} = \frac{1}{u^n}\mathcal{Y}_*^{(0)} = \frac{1}{u^n}\left\{-u^{n+2}y\frac{\partial}{\partial u} + (a_n + O(u))\frac{\partial}{\partial y}\right\}.$$

沿着边 S_2，由系统 (2.7) 生成的向量场为

$$\widehat{\mathcal{Z}}^{(0)} = \frac{1}{v}\mathcal{Z}^{(0)} = \frac{1}{v}\left\{\frac{\partial}{\partial x} - (P_2(x)v + P_0(x)v^3)\frac{\partial}{\partial v}\right\}.$$

于是，引理 4.1保证

$$\lim_{s\to 0^+}\tau_1(s) = \lim_{s\to 0^+}\tau_2(s) = 0.$$

在 Q_1 处的退化鞍角附近，由系统 (2.7) 生成的向量场为

$$\widehat{\mathcal{X}}^{(0)} = \frac{-1}{u^n v}\mathcal{X}^{(0)} = \frac{-1}{u^n v}\left\{u^{n+2}\frac{\partial}{\partial u} + v\big((a_n + O(u))v^2 + c_{\ell_2}u^{n-\ell_2} + O(u^{n-\ell_2+1})\big)\frac{\partial}{\partial v}\right\}.$$

通过变换 $u = w_1 z_1$ 和 $v = z_1^{p^{(0)}}$ （其中 $p^{(0)} = (n-\ell_2)/2$），沿正 v 轴吹起 $\widehat{\mathcal{X}}^{(0)}$ 的退化平衡点，可得

$$\widehat{\mathcal{X}}_h^{(1)} = \frac{a_n}{p^{(0)}w_1^n z_1^{n-p^{(0)}}}\left\{w_1(-1+o(1))\frac{\partial}{w_1} + z_1(1+o(1))\frac{\partial}{\partial z_1}\right\}, \tag{4.5}$$

它在原点处有一个双曲鞍点。另一方面，通过变换 $u = u_1$ 和 $v = u_1^{p^{(0)}}v_1$，沿正 u 轴吹起，可得

$$\widehat{\mathcal{X}}^{(1)} = \frac{-1}{u_1^{n-p^{(0)}}v_1}\left\{u_1^{n+2-2p^{(0)}}\frac{\partial}{\partial u_1} + v_1\big(c_{\ell_2} + a_n v_1^2 + O(u_1)\big)\frac{\partial}{\partial v_1}\right\}, \tag{4.6}$$

它在 v_1 轴上只有一个（半双曲）平衡点 (0, 0)。因此， $\widehat{\mathcal{X}}^{(0)}$ 的退化平衡点 (0, 0) 得到去奇异化，而 $\widehat{\mathcal{X}}$(0) 的双曲扇区变成一条多段弧，其顶点处有两个双曲鞍点，如图 6(b) 和 (c) 所示。设 V_1 和 V_2 为这条多段弧的两个顶点，按顺时针方向标记。在每个顶点附近，我们可以像在 Q_1 处那样选取两个横截面，因此这些横截面将这条多段弧分成位于 V_1 和 V_2 处的 2 个角点，以及它们之间的 1 条边。V_1 和 V_2 处角点附近的向量场分别由 $\widehat{\mathcal{X}}_h^{(1)}$ 和 $\widehat{\mathcal{X}}^{(1)}$ 给出。根据引理 4.1，两个角点处的通过时间都趋于 0。V_1 和 V_2 处角点之间的边上的向量场在 $v_1 \in I'$（即 (0, $+\infty$) 的一个紧子区间）上由 $\widehat{\mathcal{X}}^{(1)}$ 给出。因此，沿这条边的通过时间也趋于 0。因此，

$$\lim_{s\to 0^+} t_1(s) = 0$$

因此，所声称的（4.4）得证。因此，在 **(L1)** 情形下，全局中心不是等时的。

在情形 **(L2)**下，四个顶点 Q_1，……，Q_4 都是系统（2.7）在无穷远处的平衡点。在 Q_1处的鞍角附近，向量场 $\widehat{\mathcal{X}}^{(0)}$ 具有如下形式

$$\widehat{\mathcal{X}}^{(0)} = \frac{-1}{u^n v}\left\{u^{n+2}\frac{\partial}{\partial u} + v(c_n + o(1))\frac{\partial}{\partial v}\right\}.$$

根据引理 4.1，通过时间 $t_1(s)$ 趋于零。与上文类似，$\tau_1(s)$ 和 $\tau_2(s)$ 都趋于零。因此，（4.4）得证，从而在情形 **(L2)**下，全局中心不是等时的。

在情形**(L3)**下，向量场

$$\widehat{\mathcal{Y}}_*^{(0)} = \frac{1}{u^n}\left\{-u^{n+2}y\frac{\partial}{\partial u} + \left(a_{\ell_0}u^{n-\ell_0} + O(u^{n-\ell_0+1}) + (c_n + o(1))y^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\right\}.$$

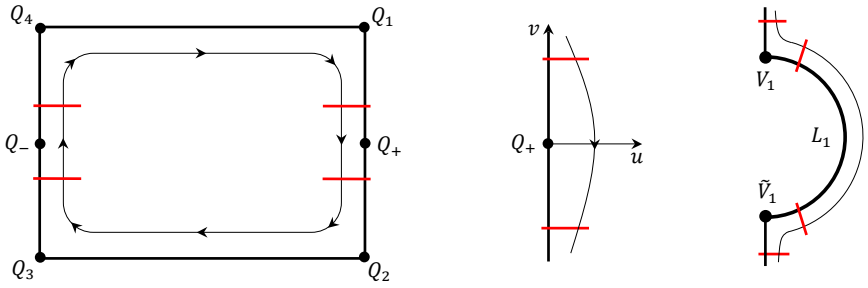
在 y 轴上仅有一个平衡点 **(0, 0)**。因此，除 $Q_1, ..., Q_4$ 外，矩形边界上还有另外两个平衡点 $Q_\pm$: **(**$\pm\infty$**, 0)**，如图**7(a)**所示。与情形（**L1**）类似，$Q_1, ..., Q_4$ 处双曲鞍角附近，以及角点序列 $(Q_1, Q_+, Q_2, Q_3, Q_-, Q_4, Q_1)$ 中任意两个相邻角点之间的边上，通过时间都趋于零。然而，$\widehat{\mathcal{Y}}_*^{(0)}$ 的平衡点 **(0, 0)** 是一个线性部分为零的退化平衡点。通过变换 $u = w_1 z_1$ 和 $y = z_1^{p^{(0)}}$（其中 $p^{(0)} = (n - \ell_0)/2$），在正 y 轴上吹起退化平衡点 **(0, 0)**，得到

$$\widehat{\mathcal{Y}}_{*h}^{(1)} = \frac{c_n}{p^{(0)}w_1^n z_1^{n-p^{(0)}}}\left\{w_1(-1 + o(1))\frac{\partial}{\partial w_1} + z_1(1 + o(1))\frac{\partial}{\partial z_1}\right\},$$

它在原点处有一个双曲鞍点。此外，在负 y轴上进行吹起变换 $u = w_1 z_1$ 和 $y = -z_1^{p^{(0)}}$，可将 $\widehat{\mathcal{Y}}_*^{(0)}$化为 $-\widehat{\mathcal{Y}}_{*h}^{(1)}$ 的形式，该形式在原点处也有一个双曲鞍点。另一方面，通过变换 $u = u_1$ 和 $y = u_1^{p^{(0)}} v_1$在正 u轴上进行吹起，可得

$$\widehat{\mathcal{Y}}_*^{(1)} = \frac{1}{u_1^{n-p^{(0)}}}\left\{-u_1^{n+2}v_1\frac{\partial}{\partial u_1} + (a_{\ell_0} + c_n v_1^2 + O(u_1))\frac{\partial}{\partial v_1}\right\},$$

它在 v_1 轴上没有平衡点。因此，$\widehat{\mathcal{Y}}_*^{(0)}$ 的退化平衡点 **(0, 0)** 经过去奇异化后，$\widehat{\mathcal{Y}}_*^{(0)}$ 的双曲扇区变成一条多段弧，其顶点 V_1 和 V_1 处有 ˜ 个双曲鞍点，如图 **7(b)** 和 **(c)**所示。V_1 处角点附近的向量场由 $\widehat{\mathcal{Y}}_{*h}^{(1)}$ 给出，$\tilde{V}_1$ 处角点附近的向量场由 $-\widehat{\mathcal{Y}}_{*h}^{(1)}$ 给出，而 V_1 和 $\tilde{V}_1$ 两个角点之间的边上的向量场由 $\widehat{\mathcal{Y}}_*^{(1)}$ 给出。根据引理 **4.1**，角点 V_1 和 V_1 附近以及它们之间的边上的通过时间都趋于零。因此，**(2.7)** 在 Q_+ 处角点附近的通过时间趋于零，所以在情形（**L3**）下，全局中心不是等时的。因此，当 **(G1)** 成立时，系统 **(2.7)** 没有等时全局中心。



(a) (b) (c)

图7：(a) 新平衡点处的横截面 $Q_{\pm}$，(b) 局部坐标中的Q_+ 处鞍角，(c) Q_+处鞍角的去奇异化。

当**(G2)** 成立时，我们有

$$P_i(x) = A_i(r(x))r'(x) \quad \text{for all } i = 0, 1, 2,$$

其中， $A_i(x)$和 $r(x)$是满足 $A_0(0) < 0$ 且 $r(x) = x^{2\nu} + O(x^{2\nu+1})$的多项式。若原点是等时中心，则它是非退化的（[9, 定理2.2]），因此 $\nu = 1$。此外，全局中心意味着对于所有 $x \neq 0$，都有 $xP_0(x) < 0$，因此对于所有 $x \neq 0$，都有 $xr'(x) > 0$。于是 $r(x)$具有如下形式

$$r(x) = x^2 + \cdots + \delta x^{2\varpi}$$

其中 δ 是正常数， ϖ是整数。注意，多项式映射 $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$是一个解析微分同胚。设 r^{-1}为其逆映射，且 $R(u) := r'(r^{-1}(\frac{1}{u}))$。那么，在 $u = 0$附近，函数 $R(u)$可写为

$$R(u) = u^{-\frac{2\varpi-1}{2\varpi}} R_1(u)$$

其中 $R_1(u) := 2\varpi\delta^{\frac{1}{2\varpi}} + o(1)$. 在变换 $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (r(x)\ y)$ 下，系统 (2.7) 变为系统

$$\dot{\tilde{x}} = r'(r^{-1}(\tilde{x}))\tilde{y}, \quad \dot{\tilde{y}} = r'(r^{-1}(\tilde{x}))\big(A_0(\tilde{x}) + A_1(\tilde{x})\tilde{y} + A_2(\tilde{x})\tilde{y}^2\big). \tag{4.7}$$

注意，半平面 $x > 0$ 内的系统 (2.7) 与半平面 $\tilde{x} > 0$内的系统 (4.7) 共轭。因此，Q_1, Q_2 以及 Q_+ (若存在) 都是半平面 $\tilde{x} > 0$的无穷远处系统 (4.7) 的平衡点。如上所述，我们只需考虑系统 (2.7) 在角点 Q_1 以及角点 Q_+ (若存在) 附近的通过时间。上述共轭关系意味着，我们只需对系统 (4.7) 考虑同样的问题。与系统 (2.7) 类似，沿直线 $\{\infty\} \times \mathbb{R}$，系统 (4.7) 生成的向量场为

$$\widehat{\mathcal{V}}_*^{(0)} = \frac{R_1(u)}{u^{\kappa+\frac{2\varpi-1}{2\varpi}}} \mathcal{V}_*^{(0)}$$

其中，定义如定理 3.2中所述，

$$\mathcal{V}_*^{(0)} := -u^{\kappa+2} y \frac{\partial}{\partial u} + \big(\tilde{A}_0(u) + \tilde{A}_1(u)y + \tilde{A}_2(u)y^2\big)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$= - u^{\kappa+2} y \frac{\partial}{\partial u} + \big(\alpha_\kappa + \beta_\kappa y + \gamma_\kappa y^2 + O(u)\big) \frac{\partial}{\partial y}.$$

在 点 $\{\infty\}\times\{\infty\}$，由系统（4.7）生成的向量场形式为

$$\widehat{\mathcal{U}}^{(0)} = -\frac{R_1(u)}{u^{\kappa+\frac{2\varpi-1}{2\varpi}} v} \mathcal{U}^{(0)}$$

其中的定义见定理 3.2之前，

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^{(0)} :=& u^{\kappa+2}\frac{\partial}{\partial u} + v\big(\tilde{A}_2(u) + +\tilde{A}_1(u)v + \tilde{A}_0(u)v^2\big)\frac{\partial}{\partial v}\\ =& u^{\kappa+2}\frac{\partial}{\partial u} + v\big(\gamma_\kappa + \beta_\kappa v + \alpha_\kappa v^2 + O(u)\big)\frac{\partial}{\partial v}.\end{aligned}$$

若 (G2) 成立，则 (G2i)、(G2ii) 或 (G2iii) 中至少有一个成立。当 (G2i) 成立时，$\widehat{\mathcal{V}}_*^{(0)}$在 y-轴上没有平衡点。因此，我们只需考虑系统 (2.7) 在 Q_1处的角点附近的通过时间，或者等价地，考虑 $\widehat{\mathcal{U}}^{(0)}$在原点 (0, 0) 处的退化鞍角附近的通过时间。当 (G2i) 成立时， $\mathcal{U}(0)$ 没有形如 $v = \Phi(u) \in \mathbb{R}[\![u^{\frac{1}{2}}]\!]\backslash\{0\}$且满足 $\Phi(0) = 0$的形式不变曲线。类似于定理 3.2 和引理 2.2，我们有以下事实。

事实 *1*．存在一个整数 $j_* \geq 0$，使得牛顿多边形 $\mathcal{N}(\mathcal{U}^{(j)})$ 恰有一条边 $E^{(j)}$，其高度为 *2*，宽度为 $2p^{(j)}$，其中 $p^{(j)}$ 为整数；并且对于所有 $j = 0, ..., j_* - 1$，多项式 $\mathcal{P}_{E^{(j)}}$ 仅有一个非零实根 $\phi^{(j)}$，其重数为 *2*；同时， $\mathcal{N}(\mathcal{U}^{(j_*)})$ 恰有一条边 $E^{(j_*)}$，其高度为 *2*，宽度为 $p^{(j_*)}$，其中 $p^{(j_*)}$ 为整数；多项式 $\mathcal{P}_{E^{(j_*)}}$ 没有非零实根，其中 $\mathcal{U}^{(j+1)} := \mathcal{D}(\mathcal{U}^{(j)}; p^{(j)}, 1, \phi^{(j)})$ 对所有 $j = 0, ..., j_* - 1$均成立，且边的高度（和宽度）的定义见 *(2.9)* 下方。

值得一提的是，不同于 (M1) 中的整数 $p^{(i_*)}$，**事实 1** 中的整数$p^{(j_*)}$不要求为偶数，因为我们关注的是半平面 $u \geq 0$。

与引理 5.1 充分性证明中（当 (M1) 成立时）给出的 $\mathcal{X}^{(0)}$ 去奇异化类似，根据事实 1 依次进行准齐次吹起后，我们发现，对 $\widehat{\mathcal{U}}^{(0)}$ 进行去奇异化后，第一象限中的双曲扇区变成一条多段弧，其顶点处为双曲鞍点，如图 8 所示。令 V_1、...、V_{j_*+1}、V_{j_*+1}...、V_1 表示多段弧上的这些顶点，按顺时针方向标记。在每个顶点附近，我们可以像在 Q_1 处那样选取两个横截面，因此这些横截面将多段弧分成 $2j_*+2$ 个角点和 $2j_*+1$ 条边，每个角点和每条边都位于两个相邻的角点之间。令 L_1、...、L_{j_*}、L_{j_*+1}、L_{j_*}、...、L_1 表示这些边，按顺时针方向标记。我们只需考虑 V_1、...、V_{j_*+1} 处的角点以及边 L_1、...、L_{j_*} 和 L_{j_*+1}，因为研究其他顶点和边的方法类似。对于 $i = 1$、...、j_*，$\widehat{\mathcal{U}}^{(0)}$ 在 V_i 处角点附近及沿边 L_i 的去奇异化向量场分别为

$$\widehat{\mathcal{U}}_h^{(i)} = \frac{\Theta_k(w_i, z_i)}{(w_i)^{\varsigma_1^{(i)}}(z_i)^{\varsigma_2^{(i)}}}\mathcal{U}_h^{(i)} \quad \text{and} \quad \widehat{\mathcal{U}}^{(i)} = \frac{\Lambda_i(u_i, v_i)}{(u_i)^{\varsigma_2^{(i)}}}\mathcal{U}^{(i)},$$

分别为，其中 $\Theta_1(w_1,\ z_1) := -\frac{\alpha_\kappa R_1(w_1 z_1)}{}\ ^{p^{(0)}}$，$\Lambda_1(u_1,\ v_1) := -\ ^{R_1(u_1)}$ $^{\phi^{(0)}+v_1}$，对所有 i =2，...，j_*，

$$\Theta_i(w_i,z_i) := \frac{\alpha_\kappa \Lambda_{i-1}(w_i z_i,(z_i)^{p^{(i-1)}})}{p^{(i-1)}},$$
$$\Lambda_i(u_i,v_i) := \Lambda_{i-1}(u_i,(u_i)^{p^{(i-1)}}(\phi^{(i-1)}+v_i)),$$

且对所有 $i = 1,...,j_*$，

$$\mathcal{U}_h^{(i)} := w_i(-1+o(1))\frac{\partial}{\partial w_i} + z_i(1+o(1))\frac{\partial}{\partial z_i},$$
$$\mathcal{U}^{(i)} := (u_i)^{\varsigma_0^{(i)}}\frac{\partial}{\partial u_i} + \big(\mathcal{P}_{E^{(i-1)}}(\phi^{(i-1)}+v_i)+O(u_i)\big)\frac{\partial}{\partial v_i}.$$
$$\varsigma_0^{(i)} := \kappa + 2 - p^{(0)} - \sum_{j=0}^{i-1} p^{(j)},$$
$$\varsigma_1^{(i)} := \kappa + \frac{2\varpi-1}{2\varpi} - \sum_{j=0}^{i-2} p^{(j)},$$
$$\varsigma_2^{(i)} := \kappa + \frac{2\varpi-1}{2\varpi} - \sum_{j=0}^{i-1} p^{(j)}.$$

此外，$\widehat{\mathcal{U}}^{(0)}$ 在 V_{j_*+1} 处角点附近以及沿着边 L_{j_*+1} 的去奇异化向量场分别为

$$\widehat{\mathcal{U}}_h^{(j_*+1)} = \frac{\alpha_\kappa \Lambda_{j_*}\big(w_{j_*+1}z_{j_*+1}^2,(z_{j_*+1})^{p^{(j_*)}}\big)}{p^{(j_*)}(w_{j_*+1})^{\varsigma_2^{(j_*)}}(z_{j_*+1})^{2\varsigma_2^{(j_*)}-p^{(j_*)}}}\mathcal{U}_h^{(j_*+1)},$$
$$\widehat{\mathcal{U}}^{(j_*+1)} = \frac{\Lambda_{j_*}\big(u_{j_*+1}^2,(u_{j_*+1})^{p^{(j_*)}}v_{j_*+1}\big)}{2(u_{j_*+1})^{2\varsigma_2^{(j_*)}-p^{(j_*)}}}\mathcal{U}^{(j_*+1)},$$

分别地，其中

$$\mathcal{U}_h^{(j_*+1)} := w_{j_*+1}(-2+o(1))\frac{\partial}{\partial w_{j_*+1}} + z_{j_*+1}(1+o(1))\frac{\partial}{\partial z_{j_*+1}},$$
$$\mathcal{U}^{(j_*+1)} := (u_{j_*+1})^{2\varsigma_0^{(j_*)}-1-p^{(j_*)}}\frac{\partial}{\partial u_{j_*+1}} + (\mathcal{P}_{E^{(j_*)}}(v_{j_*+1})+O(u_{j_*+1}))\frac{\partial}{\partial v_{j_*+1}}.$$

可以验证，对所有 $i = 1,...,j_*$，

$$\Theta_i(0,0) = -\frac{\alpha_\kappa R_1(0)}{p^{i-1}\phi^{(0)}} \neq 0, \quad \Lambda_i(0,v_i) = -\frac{R_1(0)}{\phi^{(0)}} \neq 0.$$

此外，$\widehat{\mathcal{U}}^{(j_*+1)}{}_h$ 与 $\widehat{\mathcal{U}}^{(j_*+1)}$ 中的阶 $2\varsigma^{(j_*)}{}_2 \quad - p^{(j_*)}$ 满足

$$2\varsigma_2^{(j_*)} - p^{(j_*)} = 2\left(\varsigma_0^{(j_*)} - 2 + p^{(0)} + \frac{2\varpi-1}{2\varpi}\right) - p^{(j_*)}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2\varsigma_0^{(j_*)} - 1 - p^{(j_*)}) + 2p^{(0)} - 3 + \frac{2\varpi - 1}{\varpi} \\
&\geq 2p^{(0)} - 2 + \frac{2\varpi - 1}{\varpi} \\
&> 0.
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

其中我们利用了如下事实：$\mathcal{U}^{(j_*+1)}$的表达式中的幂 $2\varsigma^{(j_*)}{}_0 - 1 - p^{(j_*)}$ 不小于1。由此可得 $\varsigma^{(j_*)}{}_2 > p^{(j_*)}/2 > 0$，因此

$$
\varsigma_1^{(k)} > \varsigma_2^{(k)} \geq \varsigma_2^{(j_*)} > 0 \quad \text{for all } k = 1, ..., j_*.
$$

根据引理 4.1，在 V_1、……、V_{j_*} 处的角点附近，以及沿着边 L_1、……、L_{j_*+1}的通过时间都趋于 0。因此，当(**G2i**)成立时，全局中心不是等时的。

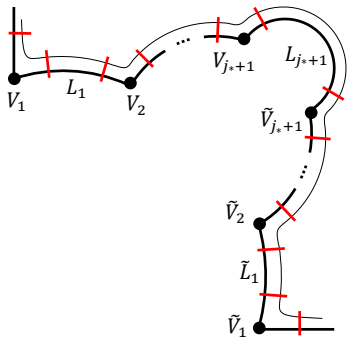


图 8：对 Q_1 处的退化鞍点角进行去奇异化。

当 (**G2ii**) 成立时， 的平衡点 (0, 0) $\widehat{\mathcal{U}}^{(0)}$ 是一个半双曲鞍点，并且 $\widehat{\mathcal{V}}_*^{(0)}$在直线 $u = 0$上没有平衡点。因此，引理 4.1 保证，在 Q_1 和 Q_2 处的角点附近，以及沿着两个角点之间的边的通过时间都趋于 0。因此，当(**G2ii**) 成立时，全局中心不是等时的。

当 (**G2iii**) 成立时， 的平衡点 (0, 0) $\widehat{\mathcal{U}}^{(0)}$ 是一个半双曲鞍点。引理 4.1 表明，在 Q_1 处的角点附近，通过时间趋于 0。另一方面， $\widehat{\mathcal{V}}_*^{(0)}$在 , $\tilde{y}_*$) y轴上有唯一的平衡点 (0， $\tilde{y}_* := \frac{-\beta_\kappa}{2\gamma_\kappa}$。将其平移到原点后， $\widehat{\mathcal{V}}_*^{(0)}$如下

$$
\widehat{\mathcal{V}}^{(0)} = \frac{R_1(u)}{u^{\kappa + \frac{2\varpi - 1}{2\varpi}}} \mathcal{V}^{(0)},
$$

其中 $\mathcal{V}^{(0)}$ 已在定理 3.2 之前给出。根据 (**G2iii**)，向量场 $\mathcal{V}^{(0)}$ 没有形如 $v = \Psi(u) \in \mathbb{R}[\![u^{\frac{1}{2}}]\!]$ 且满足 $\Psi(0) = 0$ 的形式不变曲线。类似于定理 3.2 和引理 2.2，我们有以下事实。

事实 2. 存在一个整数 $j_* \geq 0$，使得牛顿多边形 $\mathcal{N}(\mathcal{V}^{(j)})$ 恰有一条边 $E^{(j)}$，其高度为 2，宽度为 $2p^{(j)}$，其中 $p^{(j)}$为整数；多项式 $\mathcal{P}_{E^{(j)}}$ 只有一个非零实根 $\phi^{(j)}$，且其重数为 2，

对所有 $j = 0, ..., j_* - 1$， $\mathcal{N}(\mathcal{V}^{(j_*)})$ 恰有一条边 $E^{(j_*)}$，其高度为 2，宽度为 $p^{(j_*)}$，其中 $p^{(j_*)}$为整数；多项式 $\mathcal{P}_{E^{(j_*)}}$ 没有非零实根，其中 $\mathcal{V}^{(j+1)} := \mathcal{D}(\mathcal{V}^{(j)}; p^{(j)}, 1, \phi^{(j)})$ 对所有 $j = 0, ..., j_* - 1$ 均成立，而边的高度（和宽度）的定义见式 (2.9) 下方。

我们提到，与 **事实 1**类似，整数 $p^{(j_*)}$ 在 **事实 2** 中给出，不必是偶数，因为我们也关注半平面 $u \geq 0$。这两个事实的主要区别在于，当，若 $\mathcal{N}(\mathcal{U}^{(0)})$ 的左端点为 (0，2)，但对于$\mathcal{N}(\mathcal{V}^{(0)})$，则为 (04.8，1)。这会导致类似不等式 (4.8) 不成立，且通过时间可能趋近于一个非零常数。因此，我们将采用其他方法证明其非等时性。

根据上述事实应用连续拟齐次爆破后，我们发现，对向量场 $\widehat{\mathcal{V}}^{(0)}$ 的退化平衡点 (0, 0) 进行去奇异化后，半平面 $u \geq 0$ 中的双曲扇区变成一个多段弧，其顶点处有˜ ˜个双曲鞍点，如图 9 所示。令 $V_1, ..., V_{j_*+1}, V_{j_*+1}..., V_1$ 表示该多段弧的顶点，并按顺时针方向标记。在每个顶点附近，我们可以像在 Q_1 处那样选取两个横截面，因此这些横截面将多段弧分成 $2j_* + 2$ 个角和 $2j_* + 1$ 条边，每˜ ˜条边都位于两个相邻的角之间。令 $L_1, ..., L_{j_*}, L_{j_*+1}, L_{j_*}, ..., L_1$ 表示这些边，并按顺时针方向标记。我们只考虑这些顶点$V_1, ..., V_{j_*+1}$ 以及这些边 $L_1, ..., L_{j_*}$ 和 L_{j_*+1}，因为研究其他顶点和边的方法类似。对于 $i = 1, ..., j_*$， $\widehat{\mathcal{V}}^{(0)}$ 在 V_i 处角点附近以及沿边 L_i 的去奇异化向量场为

$$\widehat{\mathcal{V}}_h^{(i)} = \frac{\gamma_\kappa R_1(w_i z_i)}{p^{(i-1)}(w_i)^{\varsigma_1^{(i)}}(z_i)^{\varsigma_2^{(i)}}}\mathcal{V}_h^{(i)} \quad \text{and} \quad \widehat{\mathcal{V}}^{(i)} = \frac{R_1(u_i)}{(u_i)^{\varsigma_2^{(i)}}}\mathcal{V}^{(i)},$$

分别为，其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_h^{(i)} :=& w_i(-1 + o(1))\frac{\partial}{\partial w_i} + z_i(1 + o(1))\frac{\partial}{\partial z_i},\\
\mathcal{V}^{(i)} :=& -(u_i)^{\vartheta_0^{(i)}}\big(\tilde{y}_* + (u_i)^{p^{(0)}}(\phi^{(0)} + o(1))\big)\frac{\partial}{\partial u_i}\\
&+ \big(\mathcal{P}_{E^{(i-1)}}(\phi^{(i-1)} + v_i) + O(u_i)\big)\frac{\partial}{\partial v_i},\\
\vartheta_0^{(i)} :=& \varsigma_0^{(i)} + p^{(0)}.
\end{aligned}$$

此外， $\widehat{\mathcal{V}}^{(0)}$ 在 V_{j_*+1} 处角点附近以及沿着边 L_{j_*+1} 的去奇异化向量场分别为

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{V}}_h^{(j_*+1)} &= \frac{\gamma_\kappa R_1(w_{j_*+1}z_{j_*+1}^2)}{p^{(j_*)}(w_{j_*+1})^{\varsigma_2^{(j_*)}}(z_{j_*+1})^{2\varsigma_2^{(j_*)}-p^{(j_*)}}}\mathcal{V}_h^{(j_*+1)},\\
\widehat{\mathcal{V}}^{(j_*+1)} &= \frac{R_1(u_{j_*+1}^2)}{2(u_{j_*+1})^{2\varsigma_2^{(j_*)}-p^{(j_*)}}}\mathcal{V}^{(j_*+1)},
\end{aligned}$$

分别为，其中

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_h^{(j_*+1)} :=& w_{j_*+1}(-2+o(1))\frac{\partial}{\partial w_{j_*+1}} + z_{j_*+1}(1+o(1))\frac{\partial}{\partial z_{j_*+1}},\\ \mathcal{V}^{(j_*+1)} :=& -(u_{j_*+1})^{2\vartheta_0^{(j_*)}-1-p^{(j_*)}}\big(\tilde{y}_* + (u_{j_*+1})^{2p^{(0)}}(\phi^{(0)}+o(1))\big)\frac{\partial}{\partial u_{j_*+1}}\\ &+ (\mathcal{P}_{E^{(j_*)}}(v_{j_*+1}) + O(u_{j_*+1}))\frac{\partial}{\partial v_{j_*+1}}.\end{aligned}$$

在 $\varpi \geq 2$ 的情形下，由于 $\frac{2\varpi-1}{2\varpi}$ 和 $\frac{2\varpi-1}{\varpi}$ 都不是整数，

$$\varsigma_1^{(i)} \neq 0 \quad \text{and} \quad \varsigma_2^{(i)} \neq 0 \quad \text{for all } i = 1, ..., j_*,$$

且阶 $2\varsigma^{(j_*)}_{2} - p^{(j_*)}$ 的 $\widehat{\mathcal{V}}^{(j_*+1)}$ 不能为零。根据引理 4.1，在 V_1、.....、V_{j_*} 处的角点附近以及沿着 L_1、.....、L_{j_*+1} 的边的通过时间，要么趋于 0，要么趋于 ∞。因此，当 $\varpi \geq 2$ 时，全局中心不是等时的。

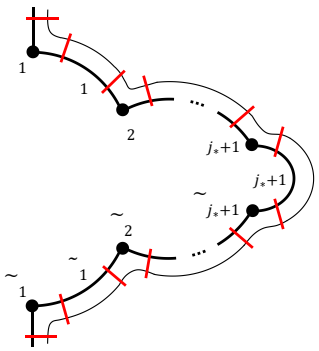


图 9: Q_+ 处鞍角的去奇异化。

在 $\varpi = 1$ 的情形下，$2\varsigma^{(j_*)}_{2} - p^{(j_*)}$ 的 $\widehat{\mathcal{V}}^{(j_*+1)}$ 的阶可能为零，这意味着沿边 L_{j_*+1} 的通过时间趋于一个非零常数，因此无法由此推出非等时性。所以我们必须采用其他方法来证明非等时性。在这种情形下，我们有

$$P_i(x) = xA_i(x^2) \quad \text{for all } i = 1, 2, 3,$$

which 都是奇函数。令 $\wp(x) := \int_0^x P_2(\xi)d\xi$。那么该变换

$$u = \chi(x) := \int_0^x \exp(-\wp(\xi))d\xi \quad \text{and} \quad v = y\exp(-\wp(x))$$

是全局可逆的。在上述变换下，系统 (2.7) 变为一个解析的 Li´enard 系统

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} = g(u) + f(u)v \tag{4.9}$$

在原点具有一个中心平衡点，其中

$$f(u) := P_1(\chi^{-1}(u)) \quad \text{and} \quad g(u) := P_0(\chi^{-1}(u))\exp(-\wp(\chi^{-1}(u))).$$

由于 P_2 是奇函数，我们有 $\wp$ 是偶函数，因此 χ 是奇函数，这意味着 χ^{-1} 也是奇函数。因此，函数 f 和 g 都是奇函数。正如 [10, 推论 1], Li´énard 系统（4.9）在原点具有等时中心，当且仅当

$$g(u) = u + \frac{1}{u^3}\left(\int_0^u \xi f(\xi)d\xi\right)^2, \tag{4.10}$$

这等价于等式

$$P_0(x)\exp(-\wp(x)) = \chi(x) + \frac{1}{\chi^3(x)}\left(\int_0^{\chi(x)} \xi P_1(\chi^{-1}(\xi))d\xi\right)^2.$$

对两边关于 x求导，得到

$$\int_0^{\chi(x)} \xi P_1(\chi^{-1}(\xi))d\xi = \frac{P_1 \pm \sqrt{\mathcal{Q}}}{3}\chi^2(x),$$

其中 $\mathcal{Q} := 3 - 3P_0' + 3P_0P_2 + P_1^2$。进一步对两边关于 x求导，得到

$$\chi(x) = \frac{3P_1 - 2(P_1 \pm \sqrt{\mathcal{Q}})}{\left(P_1 \pm \sqrt{\mathcal{Q}}\right)'}\exp(-\wp(x)). \tag{4.11}$$

注意，上述等式的右边显然是一个初等函数。然而，左边是非初等函数。事实上，如 [32, 第971],页所示，如果 $\chi(x) = \int_0^x \exp(-\wp(\xi))d\xi$ 是初等函数，那么存在互素多项式 M和 N，使得

$$\int_0^x \exp(-\wp(\xi))d\xi = \frac{N(x)}{M(x)}\exp(-\wp(x)).$$

对两边关于 x 求导，得到等式

$$M(M - N' + NP_2) = -NM',$$

它没有多项式解 M 且 N 因为 $\deg P_2 \geq 1$。因此 χ 是非初等的，所以（4.11）不可能成立，这意味着（4.10）不可能成立，即系统（4.9）没有等时中心。因此，在 $\varpi = 1$ 情形下，系统（2.7）的全局中心不是等时的。由此，当 **(G2)** 成立时，系统（2.7）没有等时全局中心。

当**(G3)**成立时，全局中心不是等时的；这可用与**(G1)** 成立时类似的方法证明。至此，定理得证。□

5 应用

[25] 的作者研究了齐次Kukles系统的局部中心问题

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \delta x + \sum_{i=0}^{n} a_{n-i,i}x^{n-i}y^i, \tag{5.1}$$

其中 $\delta \le 0$, $n \ge 2$ 且并非所有 $a_{n-i,\,i}$s 均为零。此外，文献 [18] 针对 $\delta = -1$ 和 $n = 5$得到了全局中心条件。将定理 3.2 应用于系统（5.1），可得所有 δ 和 n的全局中心显式条件。

定理 5.1 系统 (5.1) 有全局中心，当且仅当它具有如下形式

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \delta x + a_{n,0}x^n + a_{n-2,2}x^{n-2}y^2, \tag{5.2}$$

其中 $\delta \le 0$, n 为奇数，$a_{n,\,0} \le 0$, $a_{n-2,\,2} \le 0$ 和 $\delta^2 + a_{n,\,0}^2 \ne 0$。

证明。 根据引理2.1 和 2.2，若系统 (5.1) 有全局中心，则它具有如下形式

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \delta x + a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + a_{n-2,2}x^{n-2}y^2 \tag{5.3}$$

其中 n为奇数。此外，由条件 **(W1)** 和 **(W2)** 可知，系统 **(0，0)** 的平衡点 (5.3) 是孤立且单值的，当且仅当

$$\delta \le 0, \quad a_{n,0} \le 0 \quad \text{and} \quad \delta^2 + a_{n,0}^2 \ne 0. \tag{5.4}$$

令 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 分别表示由系统 (5.2) 和 (5.3) 生成的向量场。显然，系统 (5.2) 的单值平衡点 **(0，0)** 是一个中心，因为该系统关于 x 轴时间可逆。若 $a_{n-1,\,1} \ne 0$ ，则楔积 $\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}$ 满足

$$\begin{aligned}\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} &= \begin{vmatrix} y & \delta x + a_{n,0}x^n + a_{n-2,2}x^{n-2}y^2 \\ y & \delta x + a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + a_{n-2,2}x^{n-2}y^2 \end{vmatrix} \\ &= a_{n-1,1}x^{n-1}y^2 \\ &\le 0 \ (\text{or} \ge 0),\end{aligned}$$

这意味着，根据 [20] 中的定理7.2（或 [35, 第207]页的引理3.1），系统（5.3）的平衡点（0, 0）是一个焦点。因此，当$a_{n-1、\,1} = 0$ 且（5.4）成立时，我们只需进一步寻找系统（5.3）的全局中心条件。在$a_{n-2、\,2} \ne 0$的情形下，根据定理 3.2（G1），在条件（5.4）下，当$a_{n-1、\,1} = 0$时，系统（5.3）具有全局中心，当且仅当$a_{n-2、\,2} < 0$。在相反的情形$a_{n-2、\,2} = 0$下，系统（5.3）变为一个势系统，显然其在原点处具有全局中心。因此，我们通过定理 5.1 对齐次Kukles系统（5.1）的全局中心进行了完整描述，证明完毕。□

在 [4] 多项式李énard 系统中，无穷远处的单调性条件已得到研究

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = P_0(x) + P_1(x)y, \tag{5.5}$$

其中 $P_0(x) := a_0 + \cdots + a_{\ell_0}x^{\ell_0}$, $P_1(x) := b_0 + \cdots + b_{\ell_1}x^{\ell_1}$ 且 $a_{\ell_0}b_{\ell_1} \ne 0$。这里我们给出一个简单证明，以说明环面紧化的便利性。

引理 5.1 李´纳德系统 (5.5) 在无穷远处单调，当且仅当满足以下条件之一：**(L1)** ℓ_0 为奇数，$\ell_0 > 2\ell_1+1$ 且 $a_{\ell_0} < 0$，或**(L2)** $\ell_0 = 2\ell_1+1$ 且 $b_{\ell_1}^2+2(\ell_0+1)a_{\ell_0} < 0$。

证明。 如对 Cherkas系统（2.7）所做的，在环面紧化下，我们只需考虑系统（2.10）-（2.12）且 $P_2 = 0$ 它们变为

$$\dot{x} = 1, \qquad \dot{v} = -P_0(x)v^3 - P_1(x)v^2, \tag{5.6}$$

$$\dot{u} = -u^{n+2}y, \qquad \dot{y} = \widetilde{P}_0(u) + \widetilde{P}_1(u)y, \tag{5.7}$$

$$\dot{u} = u^{n+2}, \qquad \dot{v} = \widetilde{P}_0(u)v^3 + \widetilde{P}_1(u)v^2, \tag{5.8}$$

~分别地，其中 $n := \max\{\ell_0, \ell_1\}$ 且 $P_i(u) := u^n P_i(1/u)$。注意，系统 (5.5) 是无穷远处单调当且仅当系统 (5.6) 在区域$\{(x, v) \in \mathbb{R}^2 : v \neq 0\}$ 中没有趋近于 x轴上任意一点的轨道，并且系统 (5.7) 在区域 $\{(u, y) \in \mathbb{R}^2 : u \neq 0\}$ 中没有趋近于 y 轴上任意一点的轨道，而且系统 (5.8) 的平衡点 (0, 0) 是一个鞍点。

我们首先考虑充分性。显然，系统 (5.6) 在区域$\{(x, v) \in \mathbb{R}^2 : v \neq 0\}$ 中没有轨道趋近于 x轴上的任何一点。若 (L1) 或 (L2) 成立，则有 $\ell_0 \geq 2\ell_1 + 1$，因此 $n = \ell_0 > \ell_1$。式 (5.7) 的第二个方程可写成 $\dot{y} = a_{\ell_0} + O(u)$。因此，系统 (5.7) 在区域$\{(u, y) \in \mathbb{R}^2 : u \neq 0\}$ 中没有轨道趋近于 y轴上的任何一点。由于系统 (5.8) 的平衡点 (0, 0) 是退化的，我们沿正 v方向通过变换 $u = w_1 z_1$ 和 $v = z_1^{(n+1)/2}$ 对其进行吹起，得到

$$\dot{w}_1 = w_1(-a_{\ell_0} + o(1)), \quad \dot{z}_1 = z_1(a_{\ell_0} + o(1)), \tag{5.9}$$

其中公因子$2z_1^{n+1}/(n + 1)$已被消去。系统 (,的平衡点 (05.9) 是一个双曲鞍点，其稳定流形和不稳定流形位于坐标轴上。类似地，沿负 v方向通过变换$u = w_1 z_1$ 和 $v = -z_1^{(n+1)/2}$，可知变换后的系统的平衡点 (0,0) 具有相同的性质。此外，我们沿 u方向通过变换 $u = u_1$ 和 $v = u_1^{(n+1)/2}v_1$ 得到

$$\dot{u}_1 = u_1, \quad \dot{v}_1 = v_1\big(\mathcal{Q}(v_1) + O(u_1)\big), \tag{5.10}$$

其中消去了公因子 u_1^{n+1}，且

$$\mathcal{Q}(v_1) := \begin{cases} a_{\ell_0}v_1^2 - (\ell_0 + 1)/2 & \text{if } \ell_0 > 2\ell_1 + 1, \\ a_{\ell_0}v_1^2 + b_{\ell_1}v_1 - (\ell_0 + 1)/2 & \text{if } \ell_0 = 2\ell_1 + 1. \end{cases}$$

若 (L1) 或 (L2) 成立，则系统 (5.10) 在v_1轴上只有一个平衡点 (0,0)，它是一个双曲鞍点。吹下后，我们发现系统 (5.8) 的退化平衡点 (0,0) 是一个鞍点。因此，只要(L1) 或 (L2) 成立，系统 (5.5) 在无穷远处就是单值的。

接下来，我们考虑必要性。若 (L1) 和 (L2) 均不成立，则有以下五种情况：(i) $\ell_0 \le \ell_1$, (ii) $\ell_1 < \ell_0 < 2\ell_1+1$, (iii) $\ell_0 = 2\ell_1+1$ 且 $b_{\ell_1}^2+2(\ell_0+1)a_{\ell_0} \ge 0$, (iv) $\ell_0 > 2\ell_1+1$ 且 ℓ_0 为偶数，以及 (v) $\ell_0 > 2\ell_1+1$, ℓ_0 为奇数且 $a_{\ell_0} > 0$。

在 (i) 的情况下，我们有 $n = \ell_1 \ge \ell_0$，因此在不变的 y-轴上，方程组 (5.7) 的第二个方程要么具有 $\dot{y}|_{u=0} = a_{\ell_0} + b_{\ell_1} y$ 的形式，要么具有 $\dot{y}|_{u=0} = b_{\ell_1} y$ 的形式。于是，系统 (5.7) 存在一条不在 y-轴上的轨道，该轨道通过 $(-a_{\ell_0}/b_{\ell_1})$ 或 (0，0)，并连接到半双曲平衡点 (0 [20, 定理 2。19] 或 [35, 定理 7.1，第114]页。因此，系统 (5.5) 在无穷远处不是单值的，这与假设矛盾。

在 (ii) 的情况下，经过变换 $u = u_1$ 和 $v = u_1^{n-\ell_1} v_1$，并结合时间重标度 d) 1 dt，系统 (5.8) 变为

$$\dot{u}_1 = u_1^{2+2\ell_1-n}, \quad \dot{v}_1 = v_1(a_{\ell_0} v_1^2 + b_{\ell_1} v_1 + O(u_1))$$

其有一个半双曲平衡点（0，$-b_{\ell_1}/a_{\ell_0}$），因为 $2+2\ell_1-n = 1+$ （$2\ell_1+1$） $-\ell_0 \ge 2$。根据 [20, 定理 2.19] 或 [35, 定理 7.1，第114], 上述系统在半平面 $u_1 > 0$ 内有一条轨道与该平衡点相连，因此系统（5.8）在半平面 $v = -b_{\ell_1} u/a_{\ell_0}$ 内有一条沿直线 $u > 0$与原点相连的轨道，即系统（，0）的平衡点（05.8）不是鞍点。因此系统（5.5）在无穷远处不是单值的，矛盾。

在情形（**iii**）中，情形（**ii**）中的同一变换将系统（5.8）变为 a s

$$\dot{u}_1 = u_1, \quad \dot{v}_1 = v_1\{a_{\ell_0} v_1^2 + b_{\ell_1} v_1 - (\ell_0+1)/2 + O(u_1)\}.$$

若 $b_{\ell_1}^2 + 2(\ell_0+1)a_{\ell_0} = 0$，则 v_1轴上只有一个平衡点，它是一个鞍结点。若 $b_{\ell_1}^2 + 2(\ell_0+1)a_{\ell_0} > 0$，则 v_1轴上有两个平衡点，分别是一个鞍点和一个结点。在这两种情况下，吹下后我们发现，系统（，0）的平衡点（05.8）不是鞍点，与上述情形一样矛盾。

在情形 (iv) 中，n 等于 ℓ_0 且为偶函数。在系统（ u-坐标轴上，对于系统（ 5.8），有 $\dot{u}|_{v=0} = u^{n+2}$，这意味着平衡点（0，0）不是鞍点，得出与上述相同的矛盾。

在情形(v) 中，$n = \ell_0 > \ell_1$, ℓ_0 为奇函数且 $a_{\ell_0} > 0$。对于系统（5.8）的不变坐标轴，有 $\dot{u}|_{v=0} = u^{n+2}$ 以及 $\dot{v}|_{u=0} = a_{\ell_0} v^3$，这意味着平衡点（0，0）不是鞍点，得出与上述相同的矛盾。因此，通过反证法可得必要性。于是，引理 5.1 的证明完成。□

注 5.1 关于多项式李 [8] 纳尔系统的局部中心条件´（5.5），可参见 [4] 关于全局中心条件的内容。此外，我们断言系统（5.5）不存在等时全局中心。事实上，[10] 中的公式 (24) 表明，若原点是等时中心，则

$$\ell_0 = 2\ell_1 + 1 \quad \text{and} \quad b_{\ell_1}^2 + a_{\ell_0}(\ell_0+3)^2/4 = 0,$$

这与引理 5.1给出的单值性条件相矛盾。此外， [7] 已证明，任何非线性多项式势系统都不存在等时中心。因此，多项式牛顿系统（1.1）不存在等时全局中心。

参考文献

[1]V. I. Arnold，《经典力学的数学方法》，第2版，Springer，纽约，1989年。[2] W. Aziz、J. Llibre 和 C. Pantazi，三次拟齐次多项式微分方程的中心，《数学进展》，2014年，254，233-250。[3] H. Chen、Z. Feng 和 R. Zhang，三次广义多项式 Kukles 系统的幂零全局中心，《美国数学会会刊》，2024年，152，3785-3800。[4] H. Chen、Z. Li 和 R. Zhang，确立广义多项式 Li´enard 系统全局中心的确定条件，《离散与连续动力系统B辑》，2025年，30，1314-1340。[5] H. Chen、R. Zhang 和 X. Zhang，多项式 Rayleigh-Duffing 系统在无穷远附近的动力学及其具有中心的全局相图，《数学进展》，2023年，433，109326。[6] L. A. Cherkas，某类 Li´enard 方程存在中心的条件，《微分方程》，1976年，12，292-298；《微分方程》，1976年，12，201-206。[7] C. Chicone 和 M. Jacobs，平面向量场的临界周期分岔，《美国数学会汇刊》，1989年，312，433-486。[8] C. Christopher，分类多项式 Li´enard 系统中心的代数方法，《数学分析与应用杂志》，1999年，229，319-329。[9] C. Christopher 和 J. Devlin，平面多项式系统中的等时中心，《SIAM数学分析杂志》，1997年，28，162-177。[10] C. Christopher 和 J. Devlin，关于具有与振幅无关周期的 Li´enard 系统的分类，《微分方程杂志》，2004年，200，1-17。[11] C. Christopher 和 D. Schlomiuk，关于在多项式微分系统中产生中心的一般代数机制，《不动点理论与应用杂志》，2008年，3，331-351。[12] A. Cima、A. Gasull 和 F. Ma˜nosas，一类哈密顿系统的周期函数，《微分方程杂志》，2000年，168，180-199。

[13] A. Cima、F. Ma˜nosas 和 J. Villadelprat，若干类哈密顿系统的等时性，《微分方程杂志》，1999年，157，373-413。[14] I. E. Colak、J. Llibre 和 C. Valls，线性项加三次齐次多项式向量场的哈密顿线性型中心，《微分方程杂志》，2014年，257，1623-1661。[15] I. E. Colak、J. Llibre 和 C. Valls，线性项加三次齐次多项式向量场的哈密顿幂零中心，《数学进展》，2014年，259，655-687。[16] R. Conti，$\mathbb{R}^2$中的多项式系统的一致等时中心，载于 K. D. Elworthy、W. N. Everitt 和 E. B. Lee（编），《微分方程、动力系统与控制科学》，纯粹与应用数学讲义第152卷，Marcel Dekker，纽约，1994年，21-31。[17] R. Conti，平面多项式系统的中心：综述，《数学》，1998年，53，207-240。[18] L. P. C. da Cruz 和 J. Llibre，一类五次多项式微分系统中的全局中心，《爱丁堡皇家学会学报A辑》，2024年，43，1-16。[19] F. Dumortier 和 C. Li，来自四次椭圆型哈密顿量的扰动：III. 全局中心，《微分方程杂志》，2003年，188，473-511。[20] F. Dumortier、J. Llibre 和 J. C. Art´es，《平面微分系统定性理论》，Springer，纽约，2006年。[21] J. P. Fran¸coise、H. He 和 D. Xiao，任意阶拟齐次哈密顿系统周期环带分岔出的极限环数量，《微分方程杂志》，2021年，276，318-341。[22] M. Galeotti 和 M. Villarini，偶数次平面多项式系统的若干性质，《纯粹与应用数学年刊》，1992年，161，299-313。[23] J. D. Garc´ıa-Salda˜na 和 A. Gasull，周期函数与谐波平衡法，《数学科学通报》，2015年，139，33-60。[24] L. Gavrilov，平面多项式哈密顿系统的等时性，《非线性》，1997年，10，433-448。[25] J. Gin´e、J. Llibre 和 C. Valls，奇数次 Kukles 齐次系统的中心，《伦敦数学学会通报》，2015年，47，315-324。[26] W. Li、J. Llibre、J. Yang 和 Z. Zhang，拟齐次中心的周期环带分岔出的极限环，《动力系统与微分方程杂志》，2009年，21，133-152。[27] Y. Li、S. Shi 和 J. Zhang，线性项加齐次多项式系统及三次系统的等时全局中心，《微分方程杂志》，2024年，396，147-171。

[28] Z. Liang，多项式微分系统次数为 $2k$时的一个几何性质，《数学分析与应用杂志》，1992年，**168**，163-170。[29] J. Llibre 和 C. Valls，偶次数多项式微分系统不存在全局中心，《数学分析与应用杂志》，2021，**503**，125281。[30] J. Llibre 和 C. Valls，广义多项式 Li´enard 微分系统的全局中心，《微分方程杂志》，2022，**330**，66-80。[31] J. Llibre 和 C. Valls，任意次数的一类多项式微分系统的中心分类及其等时性，《数学进展》，2011，**227**，472-493。[32] M. Rosenlicht，有限项积分，《美国数学月刊》，1972，**79**，963- 972。[33] M. Sabatini，等时哈密顿中心与雅可比猜想之间的联系，《非线性分析》，1998，**34**，829-838。[34] M. Sabatini，关于 $x'' + f(x)x'^2 + g(x) = 0$的周期函数，《微分方程杂志》，2004，**196**，151-168。[35] Z.-F. Zhang等，《微分方程定性理论》，《数学译丛专著》**101**，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1992年。