arXiv:2602.07344v1 [math.GT] 7 Feb 2026

简单多重环钉扎的复杂性

Eric Seo、Christopher-Lloyd Simon、Ben Stucky

2026年2月10日

摘要

具有 $s \in \mathbb{N}$ 股的多重环是从圆的并集 $\sqcup_1^s \mathbb{S}^1 \looparrowright \Sigma$ 到曲面 Σ 的一般浸入 γ，并且视同胚为等价。γ 的钉扎集是 $\mathrm{im}(\gamma)$ 中的点集 $P \subset \Sigma \setminus$，使得在带孔曲面 $\Sigma \setminus P$ 中，浸入 γ 在其同伦类中具有最少的双重点数。其钉扎数 $\varpi(\gamma)$ 是其钉扎集的最小基数。

在任意固定的可定向曲面 Σ 上，钉扎问题给定一个多重环 γ 和 $k \in \mathbb{N}$，判断 $\varpi(\gamma) \leq k$ 是否成立；已证明该问题是 NP 完全，即使限制为环（具有 $s = 1$ 股）也是如此。本文研究将多重环限制为其股是简单（嵌入圆）时，钉扎问题的复杂性。

我们证明，对于任意固定的定向曲面 Σ，当 $s \leq 3$ 时，该问题属于 P类；当 $s \geq 20$ 时，该问题为 NP 完全，并提出一些后续问题和猜想。

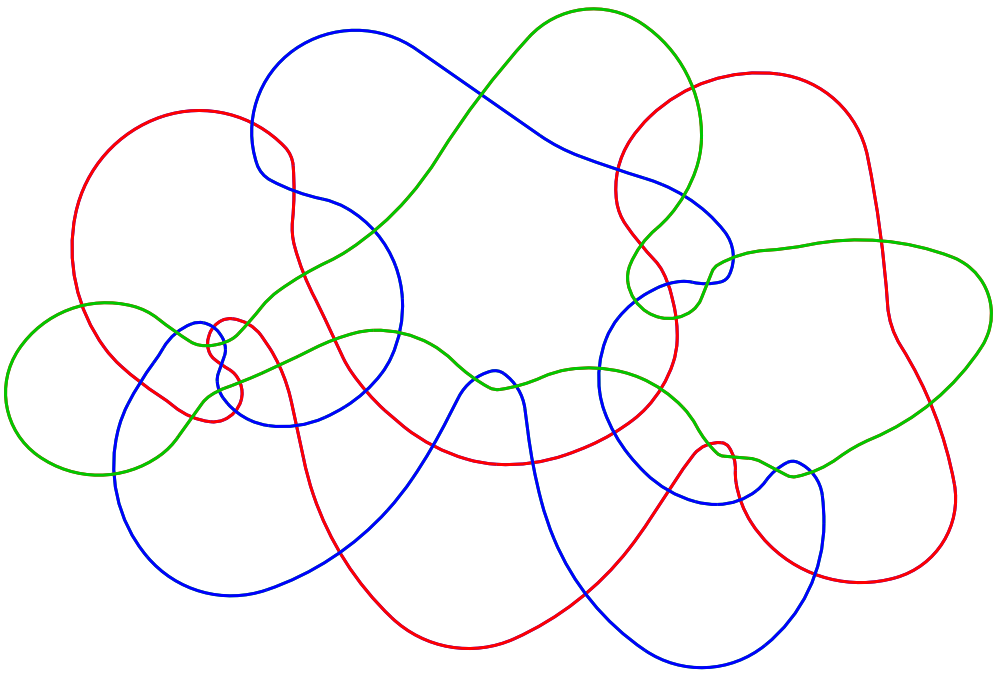


图1：一个含有3股的平面简单多重环，由Ryan Pham和第二、第三作者使用基于PADS的圆堆积算法所创建的工具绘制 [CS03、Epp25、PSS26]。

论文结构

0 引言 **2**
0.1 关键定义与先前工作 .20.2 结果概要 .30.3 进一步研究方向 .4

1 简单多重环的一般结果 **7**
1.1 合取范式中的布尔公式.71.2 简单多重环钉扎属于 NP .71.3 简单多重环钉扎是 NP-完全 .10

2 少股简单多重环 **11**
2.1 二分图顶点覆盖 问题 .122.2 三股简单多环的钉扎属于 P类 .122.3 4 股简单多环的钉扎 .14

3 带有许多股的简单多重环 **14**
3.13-连通三次平面顶点覆盖问题.153.2 斜率较少的平面图嵌入.173.3 用 20 股钉扎简单多重环NP完全.17

0 引言

0.1 关键定义和前人工作

定义 0.1(多重环、简单多重环、钉扎集、钉扎数)。在光滑曲面 Σ 上，一个带有 $s \in \mathbb{N}$ 股的多重环是一个一般浸入 $\gamma\colon \sqcup_1^s \mathbb{S}^1 \looparrowright \Sigma$，即由 s 个圆的并集到 Σ 的浸入，视为模去源点和目标的微分同胚。

特别地，它有有限个多重点，且这些点全都是横截双重点：我们将双重点的数量记为$\#\gamma$。当一个多重环的每条股都嵌入于 Σ时，称其为简单的。

$\Sigma \setminus \mathrm{im}(\gamma)$ 的连通分量称为 γ 的区域，我们用 $\mathcal{R}(\gamma)$ 表示区域的集合。对于区域子集 $P \subset \mathcal{R}(\gamma)$，我们将 γ在 $\Sigma \setminus P$ 中的自相交数 $\mathrm{si}_P(\gamma)$ 定义为与 γ同伦的 $\Sigma \setminus P$ 中多重环的最小二重点数。

当钉扎集 P满足$\mathrm{si}_P(\gamma)$时，我们称其为 γ的钉扎集，也就是说，当 γ在 $\Sigma \setminus P$中是紧致的。γ 的钉扎集构成钉扎理想 $\mathcal{PI}(\gamma)$，即在包含关系下构成偏序集，并且对并集封闭。在极小钉扎集中，有些是最优的，其含义是它们使基数函数达到最小值：这个最小基数称为钉扎数 $\varpi(\gamma)$。

注 0.2（无定向）。 根据定义，多重环由非定向股组成，其环境曲面没有赋予优先定向（即使它是可定向的），因为微分同胚可能会反转这些定向中的任意一种。

例 0.3（钉扎理想的实证结构）。 如图 *2*所示，一个多重环可能有基数不同的最小固定集。第二和第三位作者利用 *[SS25]*的结果以及 *plantri* *[BM07]* 和 *SnapPy* *[CDGW]* 提供的一些功能，枚举了 $\mathbb{S}^2$ 中规模最小的多重环，并计算和绘制了它们的钉扎理想。特别是，我们对规模最小的简单多重环进行了上述工作。完整结果可在*LooPindex* 在线目录 *[SS24]*中查阅。

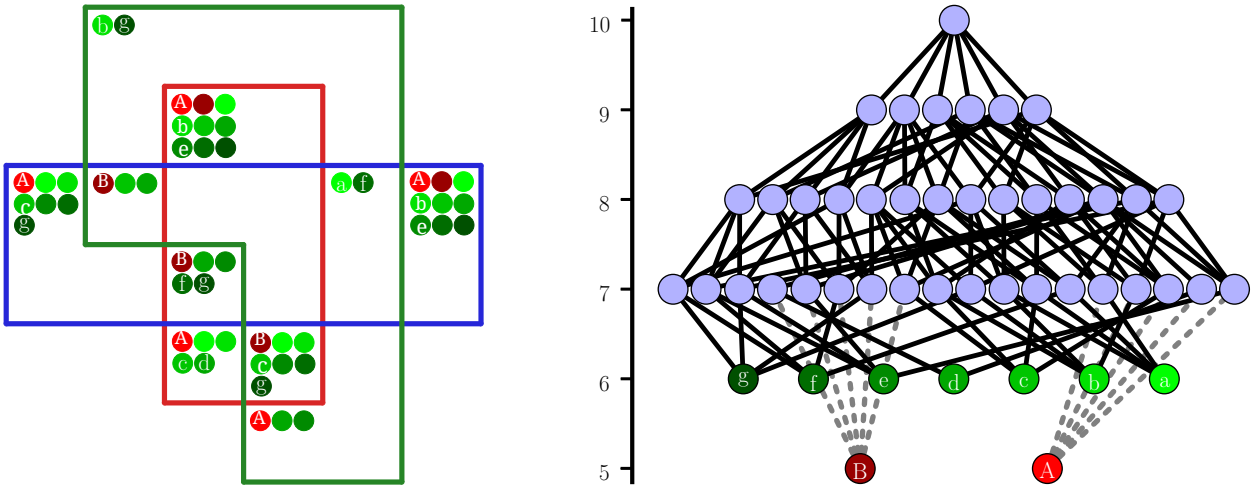


图2：左：简单多重环 12^3_{56} 的钉扎数为 5，有两个最优固定集（以大写字母表示），以及七个大小为 6 的其他极小钉扎集（以小写字母表示）。右：其钉扎理想中由极小钉扎集的并集生成的部分。

定义 0.4（钉扎问题）。 取一个曲面 Σ； $s \in \mathbb{N}$。钉扎问题 Pin(Σ, s) 具有

实例：多重环的组合编码 γ： $\sqcup_{i=1}^{s} \mathbb{S}^1 \looparrowright \Sigma$ *(见下文)* 和 $k \in \mathbb{Z}$。问题：是否 $\varpi(\gamma) \leq k$?

备注 0.5 (填充多重环)。 当多重环 γ 的所有区域 $\mathcal{R}(\gamma)$ 的亏格均为零时（即同胚于带有一定数量穿孔的圆盘），称其为填充的。研究固定(Σ, s) 的复杂性时，只需考虑填充多重环，因为任何亏格为正的区域都可以替换为带有一个穿孔的圆盘。

定义 0.6（多重环的组合编码）。 我们的复杂性结果取决于曲面上多重环的组合编码是否存在。实现这一点有几种方式，它们导出的复杂性概念彼此等价。对于填充多重环，可以采用映射及其作为排列的编码来实现，如 *[SS25]*所示。一个 固定(Σ, s) 问题实例 (γ, k) 在内存中的大小（即输入的大小）与 $\#\gamma + |k|$成正比。

第二和第三位作者在 [SS25] 中证明，对于任意固定的可定向 Σ 和 $s \geq 1$，钉扎问题 固定(Σ, s) 是 NP完全的，其依据是从图论判定问题平面顶点覆盖 （见定义 1.17）。

0.2 结果概述

本文研究将钉扎问题限制在简单多重环这一类的情形，并将证明其复杂性会随着股数增加而呈现“相变”。

定义 0.7 (SimplePin)。 对于曲面 Σ 和 $s \in \mathbb{N}$，判定问题 SimplePin(Σ, s) 具有

实例：一个简单多重环 γ： $\sqcup_{i=1}^{s} \mathbb{S}^1 \looparrowright \Sigma$ 和 $k \in \mathbb{Z}$。问题：
$\varpi(\gamma) \leq k$吗?

回顾形式语言的定义，我们还令SimplePin$(\Sigma) = \cup_{s=1}^{\infty}$SimplePin$(\Sigma, s)$。

简单环可被空集平凡地固定。对于具有2股的简单多重环，作为练习（我们将看到）可以证明存在唯一的最小固定集（因而存在唯一的最优固定集），并且它可以在多项式时间内计算，因此该问题属于P类。我们的第一个主要结果是，对于具有 $s \leq 3$ 股的简单多重环，钉扎问题仍然容易。

定理 0.8 (在P类中，适用于 ≤ 3股)。 对于固定的可定向曲面 Σ 和 $s \leq 3$，问题SimplePin(Σ, s) 属于 *P*类。

证明概要。 该结论在第 2.2 节通过将以下问题归约为二分图的 $\varpi(\gamma)$ 的界定问题（其中 γ: $\sqcup_{i=1}^{3}\mathbb{S}^1 \looparrowright \Sigma$ ）顶点覆盖 问题而得；该问题属于 P类，这是因为它与匹配相关（借助 K˝onig 定理和迪尼茨算法 [Din70、EK72、BM76]）。 □

相比之下，我们的下一个主要定理表明，在假设 P $\neq$NP 的条件下，对于任意固定的可定向曲面 Σ 和整数 $s \geq 20$，不存在这样的多项式算法：以一个简单多重环 γ: $\sqcup_{i=1}^{s}\mathbb{S}^1 \looparrowright \Sigma$ 为输入，并输出 $\varpi(\gamma)$。

定理 0.9 (NP-完全（适用于多股）。 对于固定的可定向曲面 Σ 和 $s \geq 20$，问题 SimplePin(Σ, s) 是 *NP* 完全问题。

证明概要。沿用 [SS25] 关于环的方法，我们将在第 3.3 节通过将顶点覆盖的一个受限但仍为NP困难的版本（3-连通三次平面顶点覆盖，或 3C3PVC，见定义 1.17）归约到界定 $\varpi(\gamma)$ 的问题来证明这一点（对于 γ: $\sqcup_{i=1}^{s}\mathbb{S}^1 \looparrowright \Sigma$，其中 $s \geq$为 20）。不过，这一构造比 [SS25]更为精细，因为它需要将局部股线连接起来，使全局上仅有 20 股，同时确保每股都是简单的。我们将关键地用到 Dujmov´ıc、Eppstein、Suderman 和 Wood 的一个结果：每个三次三连通平面图都有一种平面绘图（可在多项式时间内计算），其中除外面上的三条边外，每条边的斜率都属于$\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\}$， [DESW07]。20 这个数字的由来是：$\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\}$中的每种斜率需要 4 股，外面上的 3 条额外边各需要 2 股，此外还需要 2 股作为“无穷远锚点”。我们将在第 3.3.6 节进一步讨论使用更少股线的可能性。 □

注记 0.10 (将范围限制为 $\mathbb{R}^2$ 以证明困难度)。 如果 Σ_1 与可定向曲面 Σ_2的一个子曲面同伦，那么在 Σ_1 上的钉扎问题的困难度结果，也适用于 Σ_2上的同一钉扎问题。因此，要证明一个钉扎问题是 *NP*困难，只需证明它对 $\Sigma = \mathbb{R}^2$成立。然而，对于易解性结果（例如证明某个钉扎问题属于 *P*类或 *NP*），我们必须考虑所有曲面。

0.3 进一步的研究方向

0.3.1 困难度阈值

定理 0.8 和 0.9 提出了这样一个问题：对于固定曲面 Σ，使得 $s \in \mathbb{N}$ 满足SimplePin(Σ, s) 属于P类的最大取值是多少？我们猜测这个问题的答案是 3，并在第 2.3节为以下猜想提供了一些依据。

猜想 0.11 (难度从 $s = 4$)。对于固定的可定向曲面 Σ，问题SimplePin$(\Sigma, 4)$ 是 *NP* 完全的。

0.3.2 不可定向曲面

设 Σ 是一个不一定可定向的曲面。我们的结果依赖于第1节中介绍的 Hass 和 Scott 的定理，这些定理仅适用于可定向曲面。

猜想 0.12 （不可定向曲面）。 对于不可定向曲面 Σ 和 $s \in \mathbb{N}$，$\mathsf{Pin}(\Sigma, s)$ 和 $\mathsf{SimplePin}(\Sigma, s)$的复杂度如何？

我们猜想，当 $s \leq 3$ 时，两者都属于 *P*类；当 $s \geq 4$时，两者都是 *NP* 完全问题。

0.3.3 SAT 攻击

第 1.2 节的观察 Σ表明，当其为可定向曲面时，存在一种多项式时间算法，可将环或简单多重环转换为合取范式（CNF）形式的正布尔公式，称为其 mobidisc 公式 $\Phi(\gamma)$（定义1.10），且 γ 的钉扎集与 $\Phi(\gamma)$的满足赋值相对应。因此，计算多重环的所有极小钉扎集的问题可归约为对偶化 $\Phi(\gamma)$，即将其从CNF转换为逻辑等价的正析取范式（DNF）。由此可以提出这样的问题：是否可以使用适用于此类正CNF的SAT求解器，比预期更高效地计算其解的最小基数？实际上，目前用于这类问题的SAT求解器速度出奇地快（例如参见 [KBEG06、MU14]）。

问题 0.13 （SAT 求解器启发式方法）。 由多重环产生的正 *CNF* 并非任意的，因为它们来自曲面中的环：这会引入由曲面的（亏格）所决定的约束。能否沿此方向表述一个精确的结构性结果？能否调整 *SAT* 求解器，使其利用这些单调 *CNF* 的曲面结构来设计启发式方法，从而更快地求解它们？

0.3.4 随机模型：平均参数与复杂性

问题 0.14 （平均复杂性）。 给定曲面中多重环的一个随机模型，按照前述 *SAT* 求解器所测量的钉扎问题的“平均”复杂性是多少？

让我们概述几种在固定或可变曲面中的简单多重环随机模型。

随机状态模型。 我们的第一个随机模型在给定一个曲面 Σ和整数p，$l \in \mathbb{N}_{\geq 1}$的情况下，构造一个长度（其含义将很快明确）不超过 l 的随机简单多重环。为简单起见，假设 Σ 是可定向的，并添加 p 个穿孔以得到一个新的曲面 Σ'，其基本群是自由的（带有 ≥ 3 个穿孔的球面、带有 ≥ 1 个穿孔的环面，或任意亏格为 ≥ 2 的曲面），并在 Σ' 上选择一个负曲率（例如双曲）度量。选择其基本群的一个自由表示，并在生成元中选择一个长度为 l 的随机词：对于与之相关的双曲测地线，在任意选定的双曲度量下，都存在一条唯一的闭测地线 Σ'。最后，按照以下步骤为交点加上标签并进行消解，从而得到简单环的并集：当某些股存在自交时，以唯一能够增加股数的方式，消解具有最小标签的自交。

随机自旋模型。我们的第二种随机模型首先针对给定的大小参数$n \in \mathbb{N}$，构造一个大小为 $n \in \mathbb{N}$ 的随机曲面 Σ：选择一个具有 n 个顶点的随机四价多重图，并在顶点上选择一个随机循环顺序，从而得到一个带状曲面；在其上粘贴圆盘即可得到闭曲面。然后，从嵌入多重图中随机选取一个欧拉多重循环，构造一个简单多重环（例如，沿边进行随机游走，并在边被使用时将其烧掉），最后像前一种模型中那样消解条带之间的自交。

随机辫模型。我们的第三种模型利用映射类群作用，在任意曲面 Σ上，针对任意参数$s \in \mathbb{N}$，构造一个具有 s 股的随机简单多重环。首先，在 Σ中选择一个简单环，然后在每个区域中加入若干穿孔，并应用带孔曲面的纯辫群中的一个随机元素。以不同穿孔下的初始简单环开始，并应用随机纯辫，重复此过程 s 次。最后移除所有穿孔。

0.3.5 钉扎游戏

人们可以设计并研究各种与固定多重环相关的多人游戏。下文中，我们只定义一种游戏，并探讨最先浮现的组合博弈论问题。

定义 0.15 (解钉回避游戏)。 对于多重环 $\gamma\colon \sqcup_1^s S^1 \looparrowright \Sigma$，我们定义以下公平组合游戏，称为面向$2$ 名玩家的解钉回避游戏。初始配置是在每个区域中各放置一枚针；两名玩家轮流移除针，使得自己回合结束后留下的针构成一个钉扎集；无法合法行动的玩家输掉游戏。注意，游戏的状态就是钉扎理想 $\mathcal{PI}(\gamma)$的顶点。

我们用$\mathsf{Unpin}_{\mathsf{AVOID}}(\Sigma, s)$ 表示以下判定问题：

实例：一个多重环 $\gamma\colon \sqcup_{i=1}^s \mathbb{S}^1 \looparrowright \Sigma$。问题：玩家 *1* 在针对 γ的解钉回避游戏中是否拥有必胜策略?

我们将 $\mathsf{Unpin}_{\mathsf{AVOID}}(\Sigma, s)$ 在简单多重环上的限制记为 $\mathsf{SimpleUnpin}_{\mathsf{AVOID}}(\Sigma, s)$。

问题 0.16 （尼姆数）。斯普拉格–格伦迪定理 *[Spr35, Gru39]* 适用于解钉回避游戏。我们能否构造出无穷多个多重环族，从而得到难度不断增加的解钉回避游戏（例如，其格伦迪数随双重点数量快速增长）？与具有 s股、亏格为 g的多重环相关联的格伦迪数是多少？限制为简单多重环会如何影响这些问题的答案?

注记 0.17 （Node Kayles）。 解钉回避游戏似乎通过 *mobidisc* 公式与一种有些作者称为 *Node Kayles* 的游戏相关。*Node Kayles* 在一个图上进行：两名玩家从包含所有顶点的顶点覆盖开始，轮流从该覆盖中移除顶点，使得每次操作后留下的仍然是一个顶点覆盖；最后一个能够进行合法操作的玩家获胜。我们将 *NodeKayles* 称为这样一个判定问题：判定 *Node Kayles* 中的获胜策略。事实证明，*Node Kayles* （以及其他密切相关的游戏，例如 $\mathsf{G}_{\mathsf{AVOID}}(\mathsf{POSDNF})$）是*PSPACE*完全的 *[Sch76]*。

猜想 0.18 (PSPACE 完全)。 问题 $\mathsf{Unpin}_{\mathsf{AVOID}}(\Sigma, s)$ 对任意s 和 Σ都是 *PSPACE* 完全的，$\mathsf{SimpleUnpin}_{\mathsf{AVOID}}(\Sigma, s)$ 对任意 $s \geq 4$也都是 *PSPACE* 完全的。

注 *0.19*（*$\mathsf{Unpin}_{\mathsf{AVOID}}(\Sigma, s)$* 与 *Pin*$(\Sigma, s)$）。*Node Kayles* 之于 *Vertex Cover*，似乎正如 *$\mathsf{Unpin}_{\mathsf{AVOID}}(\Sigma, s)$* 之于 *Pin*$(\Sigma, s)$。特别是，对于给定的一类多重环，*Pin*$(\Sigma, s)$ 的复杂性与同一类中 *$\mathsf{Unpin}_{\mathsf{AVOID}}(\Sigma, s)$* 的复杂性并无太大直接关联。一个难点是，若从 *Node Kayles* 进行朴素归约，就必须将 *mobidisc* 小工具限制为每个仅有 *2* 个区域。另一个难点是，我们不知道将 *Node Kayles* 限制在平面图和／或具有最大度数界的图上时，是否仍然是 *PSPACE* 完全。此外，将 *Node Kayles* 限制在最大度数为 *3* 的树上（其复杂性似乎尚未解决，参见例如 *[BKT15*、*Kob18]*）似乎很可能归约到 *SimpleUnpin*$_{\mathsf{AVOID}}(\Sigma,3)$，因此，确定后者的复杂性很可能是一项艰巨任务；其“元”层面的原因在于，这将为一个长期悬而未决的问题开辟新局面。

1 简单多重环的一般结果

本节首先回顾关于正合取范式布尔公式的一些术语。这将为建立环或简单多重环的钉扎集与此类公式的满足赋值之间的对应关系做好准备。在回顾 顶点覆盖问题及其若干变体后，我们将运用这些思路证明一个初步结果（定理 1.19）：钉扎具有任意多股的简单多重环是 NP完全的。

1.1 合取范式中的布尔公式

定义 1.1 (公式与满足赋值)。 考虑一组变量 $x = \{x_1, \ldots, x_r\}$，它们可以取布尔值 $\{1, 0\}$。公式 ϕ 是由变量 x 构成的表达式，其中涉及否定 $\neg$、析取 $\vee$和合取 $\wedge$ （以及括号）。

将变量 x 取值为 $\xi \in \{1,0\}^r$，可得到公式 ϕ的值 $\phi(\xi) \in \{1,0\}$。若变量 x 的赋值 ξ 满足 $\phi(\xi) = 1$，则称该赋值满足 ϕ。

变量集 x 上的两个公式 ϕ, ϕ'，若在变量 x 的每个赋值 ξ 下取值相同 $\phi(\xi) = \phi'(\xi)$，则称它们逻辑等价。

一个经典结论是，每个公式都与某个合取范式逻辑等价，下面我们将对此进行定义。

定义 1.2 （正合取范式）。 考虑一组布尔变量 $x = \{x_1, \ldots, x_r\}$。

子句 是形如 $l_1 \vee \cdots \vee l_k$ 的公式，其中每个 l_j 都是一个文字，即变量 x_t 或其否定 $\neg x_i$。合取范式 （缩写为 *CNF*）是由子句 c_j 合取$c_1 \wedge \cdots \wedge c_m$而成的公式。当没有子句包含取反变量时，合取范式称为正 （或单调）合取范式。

定义 1.3 （解理想）。 考虑定义在一组布尔变量 $x = \{x_1, \ldots, x_r\}$ 上的正合取范式 ϕ。

对于一个 满足 ϕ 的 x 的赋值 ξ，我们称 $\{x_i : \xi_i = 1\} \in \mathcal{P}(x)$ 是 ϕ.

ϕ 的解构成一个理想 $\mathcal{S}(\phi) \subset \mathcal{P}(x)$：一个在并集运算下封闭的子偏序集，并且它包含所有元素组成的全集 $\{x_1, \ldots, x_r\}$。

注释 1.4 （剪枝）。 根据定义，若两个正合取范式等价，则它们的解理想同构。因此，为计算解理想，我们可以先对其进行“剪枝”，仅保留那些最内层 不被任何其他子句所蕴含的子句。

注释 1.5 （超图顶点覆盖）。 正合取范式的解对应于超图的顶点覆盖，该超图的顶点由变量索引，超边对应于子句。

1.2 简单多重环的固定是 NP 问题

在本小节中，我们固定一个定向曲面 Σ。

在处理简单多重环之前，让我们首先回顾 [SS25，第 2] 节中固定环问题如何归结为其 mobidisc 公式（一个正CNF）的满足赋值问题。

Hass 和 Scott [HS85] 通过排除奇异单边形和双边形来刻画紧绷环；我们将在下文中为多重环定义这两种图形，并在之后用于简单多重环。

定义 1.6 (奇异、嵌入和区域单双边形)。 考虑一个多重环 $\gamma\colon \sqcup_{i=1}^{s}\mathbb{S}^1 \looparrowright \Sigma$。将 γ 限制在其中一个圆上得到的条带记为 $\gamma_i\colon \mathbb{S}_i^1 \looparrowright \Sigma$。

条带 γ_i 的奇异单环 是一个非平凡闭区间 $I \subset \mathbb{S}_i^1$，满足 $\gamma(\partial I) = \{x\}$是 γ 的一个双重点，且 $\gamma(I)$是零伦的。当 γ 在 I的内部是单射时，此奇异单环是嵌入的；当 $\gamma(I)$ 围成 γ的一个区域时，它是区域的。

条带 γ_i, γ_j 之间的一个奇异双环 是非平凡闭区间 $I \sqcup J$的不交并（其中两条带可以重合），其中 $I \subset \mathbb{S}_i^1$且 $J \subset \mathbb{S}_j^1$，并且对于 γ上的两个不同双重点 x, y，有 $\gamma(\partial I) = \{x, y\} = \gamma(\partial J)$，且 $\gamma(I \sqcup J) \subset \Sigma$是零伦的。当 γ 在 $I \sqcup J$的内部是单射时，此奇异双环是嵌入的；当 $\gamma(I \sqcup J)$围成 γ的一个区域时，它是区域的。

一个奇异单双边形 K指奇异单环 I或奇异双边形 $I \sqcup J$。限制$\gamma(K)$ 是 γ 的一个子环，我们称 $\gamma(\partial K)$ 为其标记点。

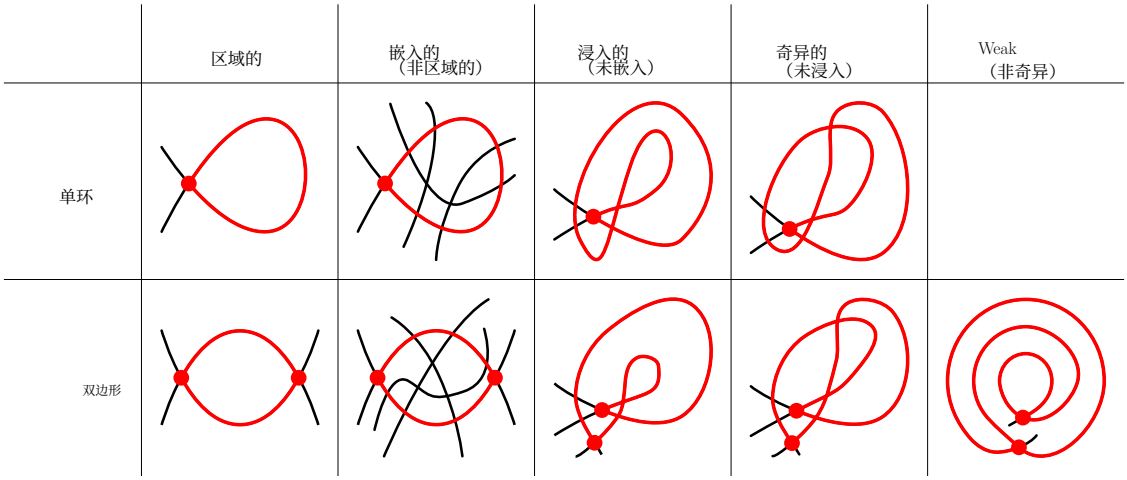


图 3：不同类型单边形的示例与反例。

定义 1.7 （浸入单双边形与活动圆盘）。 对于多重环 $\gamma\colon \sqcup_{i=1}^{s}\mathbb{S}^1 \looparrowright \Sigma$，若存在一个浸入 $\iota\colon \mathbb{D} \looparrowright \Sigma$，使得限制映射 $\gamma\colon K \looparrowright \Sigma$ 可经由 $\iota\colon \partial\mathbb{D} \looparrowright \Sigma$分解，则称 γ 的奇异单双边形 K 是浸入的。此类浸入的像 $\iota(\mathbb{D})$ 覆盖 γ中的一组区域，从而在 $\mathcal{P}(\mathcal{R}(\gamma))$ 中定义一个元素，称为活动圆盘。所有活动圆盘组成的集合$\mathrm{MoB}(\gamma) \subset \mathcal{P}(\mathcal{R})$ 定义了一个以 $\mathcal{R}$为顶点的超图的超边。

若浸入单双边形或其对应的活动圆盘不包含 γ的其他活动圆盘，则称其为最内层的。特别地，区域单双边形会导出一个恰好包含一个区域的最内层活动圆盘。

注记 1.8 （嵌入的与区域的）。 图 *3* 展示了单双边形在限制逐渐增加时的情形：从（非奇异的）到奇异的，再到浸入的、嵌入的和区域的。本文最关注的是嵌入的双边形与区域双边形之间的区别。

以下内容隐含于 [HS85] 中的解释如 [SS25]所述。将“mobidisc”替换为“最内层活动圆盘”后，结论仍然成立。

定理 1.9 （利用活动圆盘固定环）。 对于一个环 $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \looparrowright \Sigma$，区域的子集 $P \subset \mathcal{P}(\mathcal{R}(\gamma))$ 是固定 γ，当且仅当每个活动圆盘 $D \in \mathrm{MoB}(\gamma)$ 都具有 $D \cap P \neq \emptyset$。*</output>*

定义 1.10 (mobidisc 公式)。 对于多重环 $\gamma\colon \sqcup_{i=1}^{s}\mathbb{S}^1 \looparrowright \Sigma$ 我们关联一个 mobidisc 公式，记作 $\Phi(\gamma)$：它是以由 $\mathcal{R}(\gamma)$ 索引的布尔变量集合为变量集的合取范式正布尔公式，其子句对应于 $\mathrm{MoB}(\gamma) \subset \mathcal{P}(\mathcal{R})$。

下面是定理 1.9 的另一种表述。

推论 1.11 (固定一个满足其 mobidisc 公式的环 $=$)。 一个环的钉扎集与其 *mobidisc* 公式的解相对应。特别地，环 γ 的钉扎理想与 $\Phi(\gamma)$的解理想同构。

本文关注多重环，不过下面的注1.12 表明，推论 1.11 并不能如此直接地推广。

注 1.12 (仅有一条条带)。 定理 *1.9* 对于含有多条条带的（非简单）多重环并不成立。事实上，下面的例子基于 *[HS85*，图 *0*。*1]* 并展示了一个多重环 $\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1 \looparrowright \mathbb{S}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$ 它不是紧致的，且没有奇异单轨双边形。

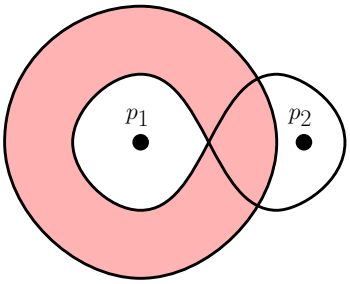


图 4：这个多重环 $\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1 \looparrowright \mathbb{S}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$ 并非紧致的，但没有奇异单轨双边形。

对于简单多重环，我们可以将定理 1.9 类比推广为以下结果的推论。将“嵌入双边形”替换为“最内层嵌入双边形”，结论仍然成立。

引理 1.13 (非紧致简单多重环中的嵌入双边形)。 若 $\gamma\colon \sqcup_{i=1}^{s} \mathbb{S}^1 \looparrowright \Sigma$ 是一个非紧致的简单多重环，则它包含一个嵌入双边形。

证明。 这可由 [HS85][引理 31]得出。 □

推论 1.14 (带有嵌入双边形的简单多重环的钉扎)。 对于简单多重环 $\gamma\colon \sqcup_{i=1}^{s}\mathbb{S}^1 \looparrowright \Sigma$，区域 $P \in \mathcal{P}(\mathcal{R}(\gamma))$ 的子集是钉扎的 γ，当且仅当每个 *mobidisc* $D \in \mathrm{MoB}(\gamma)$ 都具有 $D \cap P \neq \emptyset$。因此， γ 的钉扎理想与其 *mobidisc* 公式 $\Phi(\gamma)$的解理想同构。

注 1.15 (剪枝 $\Phi(\gamma)$ 等价于转而考虑最内层活动圆盘)。 根据注 *1.4*，在方便时，计算 $\Phi(\gamma)$时只需考虑最内层活动圆盘。

由于朴素的三次算法可在多项式时间内计算简单多重环的 mobidisc 公式，因此我们可以在多项式时间内验证钉扎集。

推论 1.16(固定简单多重环是 NP)。 对于固定的可定向曲面 Σ，我们有 *e:*

1. 对于每个 $s \in \mathbb{N}$，问题 SimplePin(Σ, s) 属于 *NP*。*2.* 问题 SimplePin(Σ) 属于 *NP*。

1.3 简单多重环钉扎是 NP 完全问题

本小节首先定义顶点覆盖问题及其变体，这些变体将在本文中用到。然后证明一个初步结果：在不限制股数的情况下，固定简单多重环的复杂性是 NP 完全。

定义 1.17 （顶点覆盖及其变体）。顶点覆盖（*VC*）问题定义如下：

实例：一个简单图 $G = (V, E)$ 和一个整数 k。问题：是否存在 $U \subset V$，满足基数$(U) \leq k$，使得对于所有 $\{v_1, v_2\} \in E$， v_1和 v_2 中至少有一个属于 U?

我们还定义了 *VC* 的以下变体：

- 平面顶点覆盖（*PVC*）是将 *VC* 限定于平面输入图的情形。
- *3*-连通三次平面顶点覆盖（*3C3PVC*）是将 *PVC* 限定于 *3*3-连通三次图的情形。这里，*3*3-连通是指移除任意不超过2 个顶点后，该图仍连通；三次是指每个顶点的度为3。
- 二分图顶点覆盖（*BVC*）是将 *VC* 限制为输入图为二分图的情形。

引理 1.18 （NP 完全顶点覆盖 变体）。 问题 *VC* 和 *PVC* 都是 *NP* 完全的。

证明。 众所周知（且易于证明），VC 属于 NP，因此其限制问题PVC也属于 NP。经典结论还表明，VC是 NP困难的 [Kar72]，且PVC是 NP困难的 [GJS76][定理 2。7]。 □

我们将在引理 2.1中证明 BVC 属于 P类，并将在引理 3.1中证明 3C3PVC是 NP 完全的。

定理 1.19 （不限制条带的简单多重环固定问题是 NP困难）。 对于固定的可定向曲面 Σ，问题 SimplePin(Σ) 是*NP*困难的。

证明。 根据注 0.10，只需证明 $\Sigma = \mathbb{R}^2$ 时的情形即可。

可以通过对以下文献中归约的简化改编来证明这一点：PVC，详见 [SS25第 2 节。2]这也可以从定理 0.9 的证明中推出，我们将在第3节给出该证明。

我们再概述一种来自3C3PVC 的归约（依赖于引理3.1），我们认为这种归约十分优雅，且与下一节中的构造类似。考虑一个(G, k)3C3PVC实例。注意，由于 G 是 3-连通的，因此它是无桥的（2-边连通）。

在线性时间内将 G 嵌入 $\mathbb{R}^2$，并使用直线边（例如使用 [HT74]）。由于 G 是无桥的，每条边两侧分别邻接不同的面，因此每个面的边界都定义了一个由边和顶点组成的环，其中每个边和顶点都恰好出现一次。对于 G 的每个面，关联一个仅环绕其边和顶点的环，使它们的并集构成一个简单多重环，其区域对应于 G的顶点和面。最内层双边形对应于 G的边。这定义了一个从3C3PVC 的实例到 SimplePin(Σ) 的多项式时间归约。示例见图 5 。

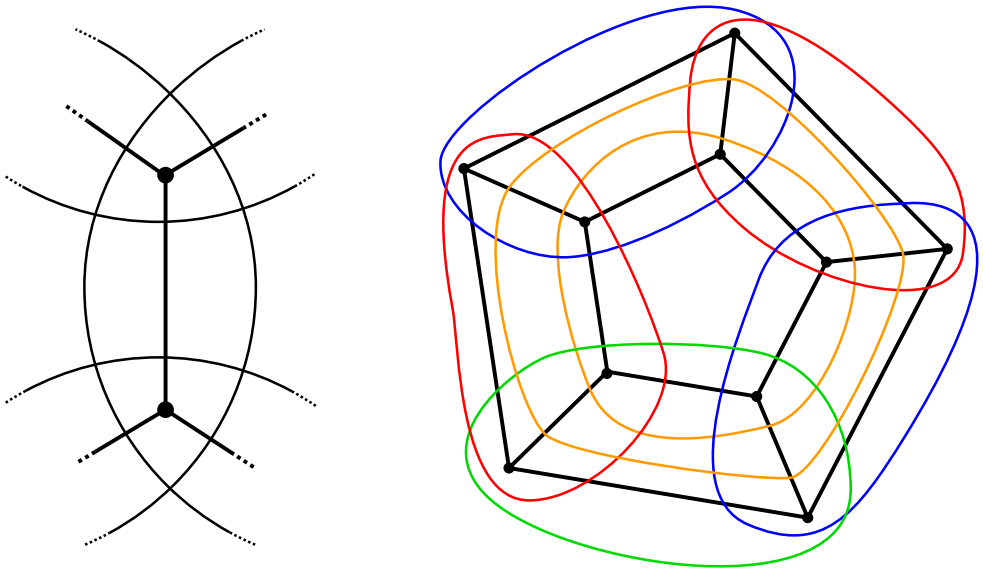


图5：左：一条边周围的局部股线。右：与五棱柱的1-骨架相关联的四色多重环。

现在我们必须证明，当且仅当 γ 有一个大小至多为 k 的顶点覆盖时， G 可以用至多 k根针固定。这可由推论 1.14推出；为此，我们先对 mobidisc 公式及其最优满足赋值作一些观察。 γ 的每个最内层双边形恰由三个区域组成（两个对应于 G 顶点的三角区域，以及一个对应于它们之间那条边的四边形区域），因此 γ 的 mobidisc 与 G的边一一对应。此外， γ 的任意两个 mobidisc 至多相交于一个三角区域，该区域对应于 G 在该区域中的顶点。因此，选择 G 中与某条边相邻的两个顶点之一加入顶点覆盖的问题，等价于选择在与之关联的 γ mobidisc 的两个三角区域中的哪一个放置一根针（注意，最优钉扎集会避开每个 mobidisc 的四边形区域）。

□

定理1.19 的证明揭示了与四色定理之间一个有趣的联系 [AH76], ，我们将在第2.3 节讨论猜想 0.11时再次提及这一联系。

注记1.20（四色定理）。定理*1.19* 证明中的构造提供了一种方法，可以将4种颜色分配给 γ 中的股线，使得任意两条同色股线都不会相交。具体来说，在将4种颜色分配给 G的面之后，我们可以根据每条股线所围成的面的颜色，为 γ 中的每条股线着色。事实上，这可以在二次时间内完成 *[RSST96]*。

现在我们转而关注固定情况下 SimplePin(Σ, s) 的复杂性 s.

2 股线较少的简单多重环

在本节中，我们将通过归约到SimplePin(Σ，3) 属于P类的二分图顶点覆盖 (BVC) 问题（定义1.17），证明该问题属于P类。

2.1 二部顶点覆盖问题

我们给出以下众所周知的引理，并为完整起见概述其证明。

引理 2.1 (BVC属于 P类)。 *BVC*问题属于*P*类。

证明。 设 $(G,\ k)$ 是一个 BVC问题实例。由于 G 是二分图，我们可以使用迪尼茨算法[Din70、EK72] 在多项式时间内求出 G的一个最大匹配（即基数最大的匹配）。Bondy 和 Murty 在 [BM76][第 5.3 定理，第 74-75] 页中给出了一个构造性证明，说明如何利用柯尼格定理将该匹配在多项式时间内转换为一个最小顶点覆盖（即基数最小的顶点覆盖）。记 k' 这个最小顶点覆盖的大小，该图 G有大小为 $\leq k$ 的顶点覆盖，当且仅当 $k' \leq k$。 □

2.2 固定 3 条带简单多重环属于P类

我们现在证明定理0.8，并在下文重述该定理。

定理 2.2。对于 每个可定向曲面 Σ 和 $s \leq 3$，问题 SimplePin(Σ, s) 属于 *P*类。

证明。设 $(\gamma, k$是 SimplePin(Σ, s) 的一个实例，其中 $s \leq 3$。通过添加适当数量的、与其余部分不相交的嵌入圆，我们可以假设 $s = 3$。我们将在多项式时间内构造一个二部图，该图存在大小至多为 k' （如下定义且满足$k' \leq k$）的顶点覆盖，当且仅当 γ 存在大小为 $\leq k$的钉扎集，并借助引理 2.1 完成证明。

根据推论 1.14，简单多重环 γ 可被钉扎，当且仅当其每个最内层双边形都被钉入一个钉。注意，每个最内层双边形 B 由 γ 中的两条股 γ_1 和 γ_2 的弧构成，且恰有两个交点，分别标记为 x 和 y。只有第三条股 γ_3 的弧可以穿过B。由于 B 是最内层的，因此 γ_3 的这类弧会从与 γ_1 的一个交点穿过 B，到达与 γ_2的一个交点。由于 γ_3 是简单的，其弧必将 B 分割为一系列区域 T_x、R_1、R_2、.....、R_n、T_y，其中 $n \in \mathbb{N}$ 满足 T_x 和 T_y 是三角区域，而每个 R_i 都是不能属于其他最内层双边形的四边形区域。图 6 展示了 γ 中的一个此类双边形，它由γ_1 和 γ_2 的弧围成，并与 γ_3相交。

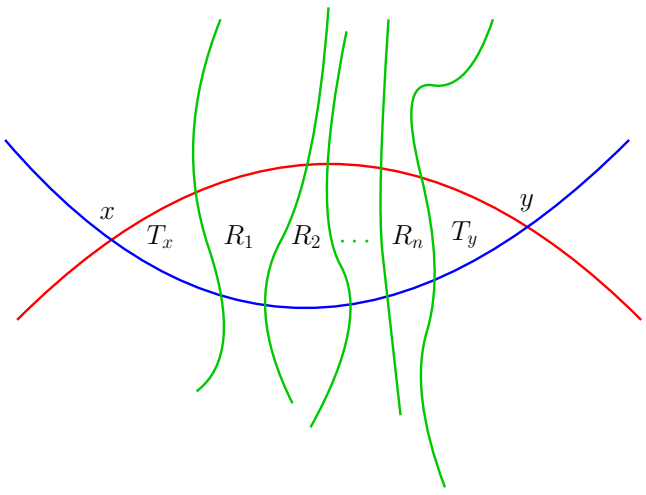


图 6：三股简单多重环中最内层双边形的结构 s

我们现在按如下方式构造一个图 G ： 对于每个非区域的最内层（因此是嵌入的）双边形 B of γ（即至少有一条第三

条带穿过它）。该边的顶点是三角区域 T_x 和 T_y。由于 γ 的每个三角区域至多属于 3 个最内层双边形，因此顶点的度为 1、2 或 3。构造示例见图7 。

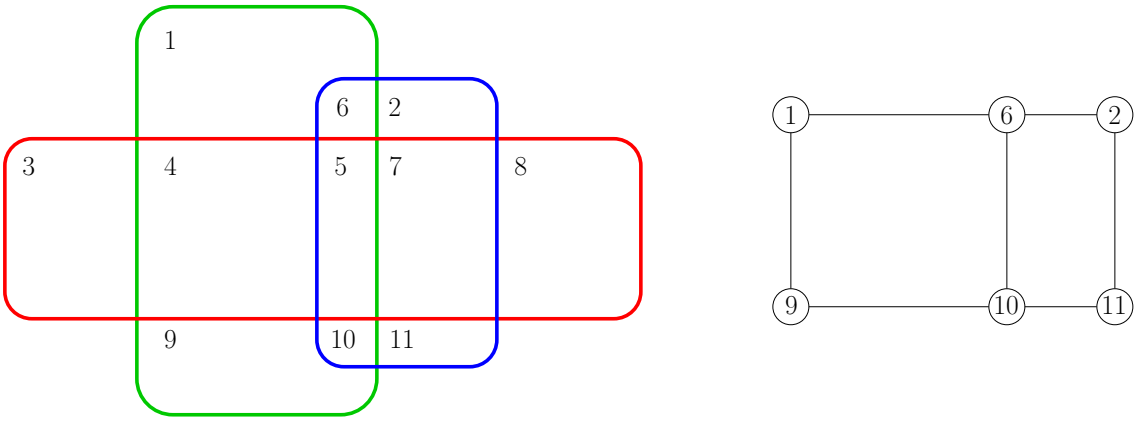


图 7：一个三股简单多重环的示例，以及其顶点覆盖对应于钉扎集的图。其 mobidisc 公式为 $3 \wedge 8 \wedge (9 \vee 10) \wedge (2 \vee 6) \wedge (10 \vee 11) \wedge (1 \vee 6) \wedge (1 \vee 4 \vee 9) \wedge (6 \vee 5 \vee 10) \wedge (2 \vee 7 \vee 11)$。

现在我们来证明 G是二分的：通过构造一种边的定向，使得每个顶点要么是源点，要么是汇点；源点和汇点将分别构成独立集。为此，我们首先用颜色 γ_r、γ_g、γ_b 给三股 $\{r, g, b\}$着色。接着，根据界定相应双边形的弧的颜色，使用 G 中的一种颜色给 $\{gb, br, rg\}$的每条边着色。最后，利用 G的定向及其着色给 Σ 的边定向，使沿其行进时，着色中的第一种颜色位于行进者的左侧。请参见图8 了解这一构造。

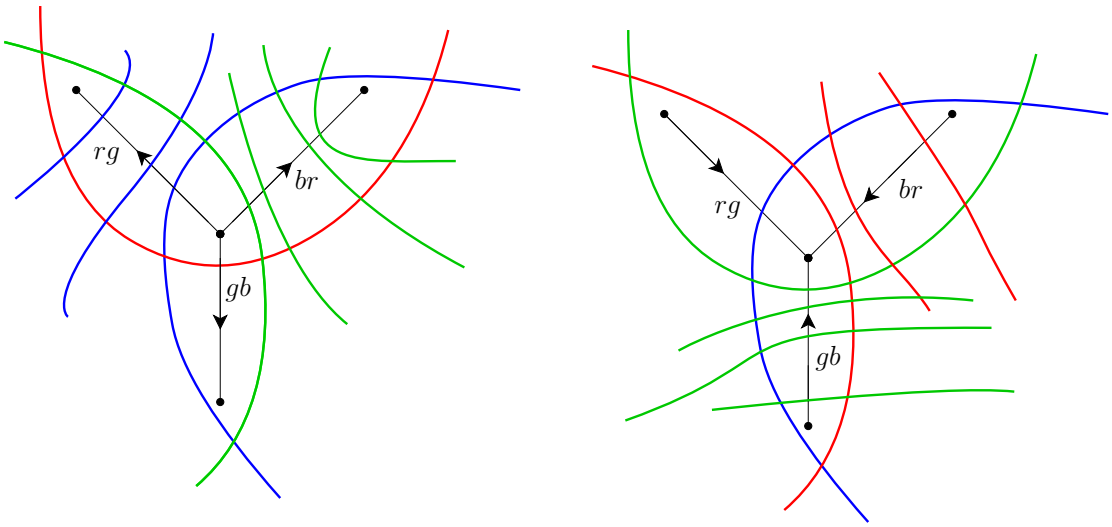


图 8：度为 3 的顶点的边标记和定向方案。也可能存在度为 2 和度为 1 的顶点。

注意到，G 的每个顶点要么是入边的汇点，要么是出边的源点，这取决于区域周围各条带的颜色的循环顺序是 (g, r, b) 还是 (b, r, g)。因此，G 是二分的。

设 k' 为非负整数，使得 γ中恰有 $k-k'$ 个区域双边形。最后，我们证明： G 存在一个大小至多为 k' 的顶点覆盖，当且仅当 γ 存在一个大小至多为 k的顶点覆盖。

假设 G有一个大小至多为 k'的顶点覆盖。按如下方式用至多 k 根针固定 γ：在 $k-k'$ 个区域双边形（其存在性由钉扎性质保证）中放置 $k-k'$ 根针，并将剩余的 k' 根针放在 γ 中对应于属于覆盖的 G 的顶点的三角区域内。假设可以用 k 根针固定 γ。按如下方式构造一个大小至多为 k'的 G 的顶点覆盖：对于 γ 中每个非区域的最内层双边形 B，在 $\{T_x, R_1, R_2, \ldots, R_n, T_y\}$ 中的 $n+2$ 个区域里至少有一个区域内放有一根针（注意，最优地固定 γ 时，无需考虑矩形区域 R_i，因为总可以将其中的针移到 T_x 或 T_y 的一个三角区域内，同时保留 γ的钉扎集）。

□

2.3 固定4条带简单多重环

自然会有人提出这样的问题：这些思路能否推广到具有 4 股的简单多重环？我们重述猜想 0.11。

猜想 2.3。对于任意曲面 Σ，问题 SimplePin(Σ,4) 都是 *NP* 完全的。

如定理 1.19和注 1.20所提示的，一种可能是通过从 3C3PVC 归约来证明这一猜想。给定一个无桥三次平面图 G 以及 G的对偶图的一个有效 4-着色，可以得到一个简单多重环 γ，其股按它们所围绕的 G的面进行 4-着色（用二次时间）。接下来可以设想，通过手术连接 γ 中颜色相同的条带，同时尽量不破坏 γ 的 mobidisc 结构。

这一猜想还有一些额外的依据：具有 4 股的多重环之莫比圆盘结构的组合复杂度显然高于 3 股情形；尤其是，显然无法将其归约到 顶点覆盖。3 股简单多重环的 mobidisc CNF 子句结构可预测且受到约束：忽略矩形区域后，析取可视为每个至多包含 2 个变量；而关联图为二分图这一事实，等价于所有环的长度均为偶数。在此前尝试证明定理0.8时，我们还注意到，归约所生成的图 G 满足 $\dim(H_1(G;\mathbb{Z})) \leq 5$，并且我们认为，针对同调秩有界的图的顶点覆盖问题属于P类。

因此，尽管我们相信这个猜想是正确的，但仍可尝试通过限制同调秩，或在与四股简单多重环相关的适当“超图复形”中寻找某些奇偶结构，来证明它不成立。

3 多股简单多重环

本节将证明，固定股数为足够大的常数时，钉扎简单多重环是困难的；具体而言，我们证明 $s \geq 20$ SimplePin(Σ, s) 问题是 NP困难的。因此（假设 P≠=NP），不存在多项式时间算法来计算多股简单多重环的极小钉扎集。

我们证明NP困难性，方法是从顶点覆盖问题的一个适当变体进行归约，即3-连通三次平面顶点覆盖（3C3PVC，见定义1.17）。

3.1 3-连通三次平面顶点覆盖问题

我们现在证明3C3PVC 是NP困难的。这一点本质上已由 Uehara [Ueh96],的工作证明，但为完整起见，我们补充一些细节。

L引理 3.1 （困难性：3C3PVC）。 问题 *3C3PVC* 是 *NP* 完全的。

证明。 注意该问题属于 NP ，作为 顶点覆盖的特例。我们证明它是NP-困难的，归约自最大度为3的平面顶点覆盖 （即将 顶点覆盖 限制到最大度为 3 的平面图），该问题被证明是 NP-困难的，见 [GJ77，引理 1]。设（G， k）是 最大度为3的平面顶点覆盖 的一个实例（因此 G 是最大度为 3 的平面图，且 $k \in \mathbb{Z}$）。

过渡到最大度为 3 且最小度为 2 的平面图。 我们首先由 G 构造一个图 G'，它是最大度为 3 且最小度为 2 的平面图。具体做法是迭代删除 G 中由边（v， w）诱导的子图，其中 v 的度为 1。读者可以验证，每执行一次该过程，顶点覆盖的大小都必须减少 1。换言之，若该过程在终止于一个最大度为 3 且最小度为 2 的平面图 G' 之前执行了 n 次，则 G 具有大小至多为 k 的顶点覆盖，当且仅当 G' 具有大小至多为 $k' = k - n$ 的顶点覆盖。

转到最大度为 3 且最小度为 2 的连通平面图。 现在假设 G' 有 n 个连通分量。接下来我们构造一个连通图 G''，使得当且仅当 G' 有大小至多为 k' 的顶点覆盖时， G'' 有大小至多为 $k'' = k' + 3n$ 的顶点覆盖。

我们可以假设 G' 的每个连通分量至少包含一条边（因为 G' 的孤立顶点从不属于极小顶点覆盖，因此删去它们后所得的图与 G' 具有相同的极小顶点覆盖），并且还可以假设 $n > 0$。

我们按如下方式从 G' 构造 G'' （见图 9）。对于 G' 的每个连通分量 G_i，选择一条边 e_i，并令 v_i、 w_i 为其端点。通过添加两个顶点 x_i、 y_i 将 e_i 细分，并添加另一个与 x_i 和 y_i 相连的顶点 z_i，从而形成一个三角形。令 C_{2n} 为一个长度为 $2n$ 的环，其顶点按照该循环顺序标记为 b_1、 c_1、 $\ldots b_n$、 c_n。添加连接每个 z_i 与 b_i 的边。最后，在连接 z_i 与 b_i 的每条边上添加一个顶点 a_i 进行细分。

由此完成了 G'' 的构造。读者可以验证，它是平面且连通的，最大度为 3，最小度为 2，并且包含 G' 的所有顶点。

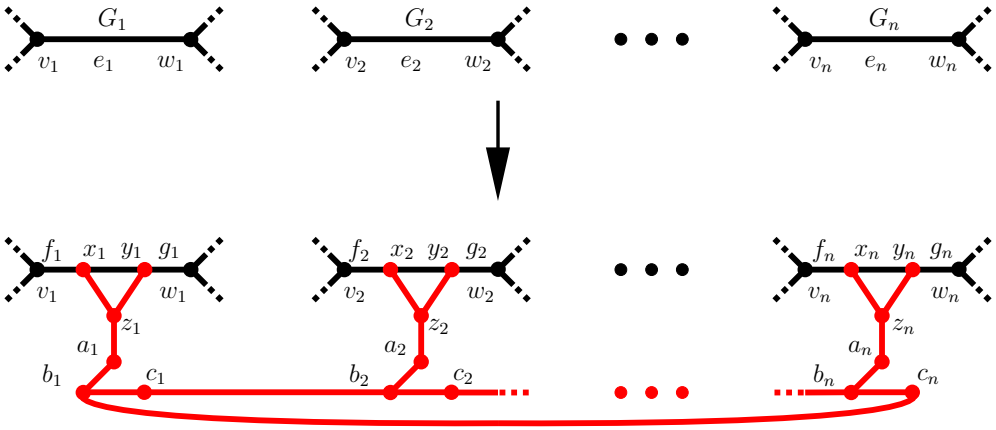


图 9：从非连通的 G' （上方）到连通的 G'' （下方）。

现在我们证明，G'' 存在大小至多为 $k'' = k' + 3n$ 的顶点覆盖，当且仅当 G' 存在大小至多为 k' 的顶点覆盖。

假设 G' 有一个大小至多为 k' 的顶点覆盖，我们来构造一个大小至多为 k''的 G'' 的顶点覆盖，其中包含 G' 的初始顶点覆盖中的所有顶点。对于每个 i，v_i, w_i 中至少有一个属于 G'的顶点覆盖：如果是 v_i，那么我们就将 y_i, z_i, b_i 加入 G'' 的顶点覆盖；否则就是 w_i，于是我们加入x_i, z_i, b_i。这样便得到一个包含 k'' 个顶点的 G'' 的顶点覆盖。

假设 G'' 有一个大小至多为 k''的顶点覆盖。对于每个 i，$\{x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i\}$中至少有 3 个顶点必须属于该覆盖。我们将证明，可以对 G'' 的任意顶点覆盖进行修改，得到一个大小相同的顶点覆盖，使其对每个 i 都至少包含顶点 v_i 或 w_i中的一个。

对于每个 i，我们根据以下两种情况修改该覆盖。如果 v_i 和 w_i 都不属于该覆盖，那么 x_i 和 y_i 都属于该覆盖，并且该覆盖还必须包含集合 $\{z_i, a_i, b_i, c_i\}$中的至少另外 2 个顶点：因此，我们用 $\{v_i, y_i, z_i, b_i\}$替换这 4 个顶点，从而覆盖由 $\{v_i, w_i, x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i\}$诱导的子图中的所有边。如果 v_i 或 w_i 中至少有一个属于该覆盖，那么我们将覆盖中属于子集 $\{z_i, a_i, b_i, c_i\}$ 的任意顶点（其中至少有两个必须属于该覆盖）替换为顶点 z_i 和 b_i。

至此，顶点覆盖的修改完成。根据构造，这个新的顶点集合覆盖了由 $\{v_i, w_i, x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i\}$ 诱导的图的所有边。注意，由于每个 b_i 都属于顶点覆盖，偶圈 C_{2n} 在此次修改后仍被覆盖。记 H 为由 $\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i\}$ 诱导的 G'' 的子图（图 9 中以红色标出），并将 G'' 的边 $f_i = (v_i, x_i)$ 和 $g_i = (w_i, y_i)$ 分别记为.....。修改后的顶点覆盖中，子图 H 至少包含 $3n$ 个顶点，而子图$G'' \setminus (H \cup \bigcup_{i=1}^{n}\{f_i, g_i\})$ 可由至多包含 k' 个顶点的集合覆盖；对于每个 i，该集合都包含 v_i 或 w_i。这表明 G' 存在一个大小至多为 k' 的顶点覆盖。

转化为连通三次平面图。现在，我们构造一个图 G'''，它由 G'' 得到，且是三次图。G' 的每个顶点的度为 2 或 3。我们将每个度为 2 的顶点替换为一个带对角线的正方形（见图 10）。设 n 为我们为得到G'''而进行这种替换的次数。读者可以验证，G''' 是三次、连通的，并且具有大小至多为$k''' = k'' + 2n$ 的顶点覆盖，当且仅当 G'' 具有大小至多为 k''的顶点覆盖。

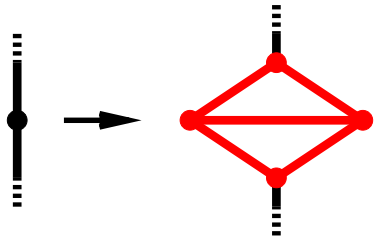


图 10：从 G'' 得到三次图 G'''。

转化为3-连通三次平面图。最后，我们反复应用图11所示的Uehara的构件11，直到得到一个3-连通图 G''''；初始处理的是 G''' 中作为桥的边（即移除后会使图不连通的边）。这会生成一个中间图，该图是2-连通的。随后，我们反复沿着一对移除后会使图不连通的边中的一条边应用该构件（使用Menger定理可在多项式时间内检测出这类边对）。读者可以验证，这一过程会在多项式时间内终止。

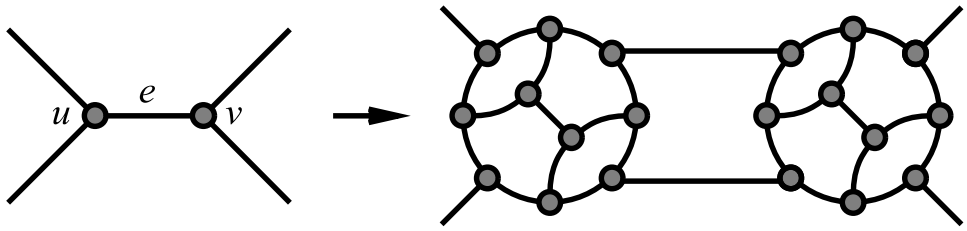


图 11：从 G''' 到 G''''，经由 Uehara 连通性增强构件（经许可转载自 [Ueh96]）。

Uehara [Ueh96] 证明，若添加此构件 n 次以构成 G''''，那么 G'''' 有大小至多为 $k'''' = k''' + 10n$ 的顶点覆盖，当且仅当 G''' 有大小至多为 k'''。 □

3.2 具有少量斜率的平面图嵌入

为了证明定理 0.9，我们将从3C3PVC进行归约。归约的第一步对我们的构造至关重要，并依赖于以下引理。

引理 3.2（用恰好 6 种斜率嵌入 3-连通三次平面图）。 每个3-连通三次平面图 G 都存在一个直线平面嵌入，可在线性时间内计算得到，且其边斜率的并集是一个6元素集合 $\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}$，其中某些 ϕ_1、ϕ_2、$\phi_3 \in [0, \pi)$，并且 ϕ_1、$\bar{\phi}_2$、ϕ_3 各自恰好由外面上的一条边实现。此处的 G。此外，斜率为 ϕ_1、ϕ_2、ϕ_3 的3 条边依次出现在外面上。而且，可以安排该嵌入与 G 的任意给定平面嵌入同伦。特别地，可以预先指定外面。

证明。此引理的证明见 [DESW07]，其中未进行明确的复杂性分析。第一步是根据初始平面嵌入计算所谓的 G 规范分解，这可以在线性时间内完成 [Kan96][定理 3。2]（初始平面嵌入可由 [HT74]在线性时间内计算）。仔细阅读

[DESW07][定理 24] 可知，也可以在线性时间内计算 G 的图形。在最后一步，有时可能可以完成绘图，使所用斜率少于 6 个；但只需对最后一个顶点进行垂直微调，就能实现恰好 6 个斜率。最后这一步还表明，斜率为 ϕ_1、ϕ_2、ϕ_3 的 3 条边依次出现在外部面上。

□

3.3 Pinn使用 20 股的简单多重环钉定问题是 NP 完全

给定 3C3PVC 的一个实例（G，k），我们将在多项式时间内构造 SimplePin(Σ，20) 的一个实例（γ，k'），并证明这两个问题等价。

3.3.1 构造总结

粗略地说，我们将在一个与平面同胚的小开集中嵌入 G，然后围绕该图精心构造一个由 20 股组成的简单多重环 γ，使图中的每条边都包含在一个细双角形中，从而可以根据 G 的结构预测 γ 的最内层 mobidisc 公式。

以下是整个构造的概要。我们在欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 中使用距离函数 d。对于子集 $X \subset \mathbb{R}^2$ 和 $\epsilon \in \mathbb{R}_+$，我们用 $\mathbb{B}(X, \epsilon)$表示 X的开 ϵ-邻域。

1. 使用引理3.2 在多项式时间内构造 G 在 $\mathbb{R}^2$ 中的直线嵌入，其中边斜率的并集是某个 $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in [0, \pi)$的6元集合 $\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}$，并且 ϕ_1、$-\phi_2$ 和 ϕ_3 各自恰好由 G外面上的一条边实现一次。参见图12 左侧和中间。整个构造的示意图见图12右侧。缩放该嵌入，使得 $\mathbb{B}(0, 1/2)$包含 G 以及由 G的不同边所确定的所有直线之间的全部交点。

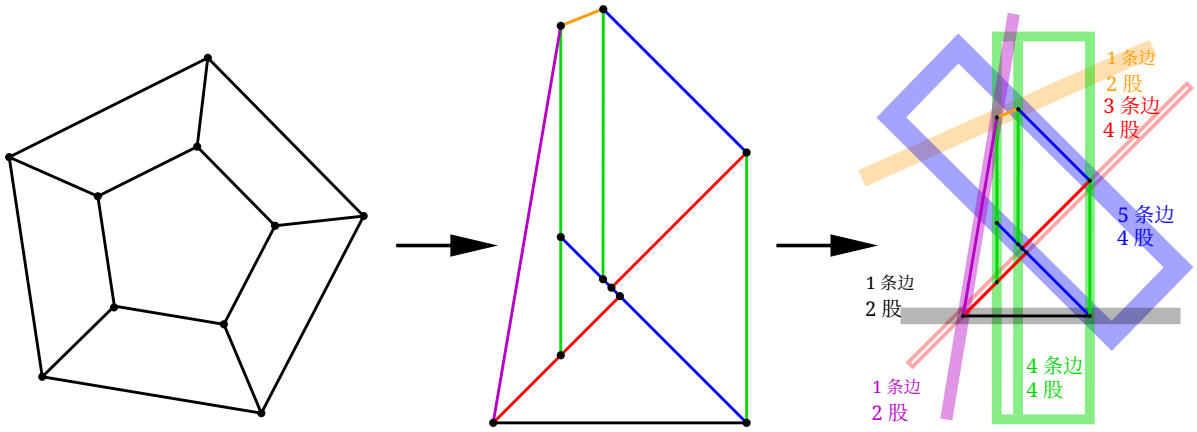


图 12：左：输入的 3-连通三次平面图 G。中：使用 GDESW [算法得到的具有 6 种斜率的07]绘图。右：用于构造与 γ 相关联的 G 20链简单多环（不含重缩放步骤）的“拼接”方案。对于每种斜率（颜色），我们可以看到该斜率对应的（至多 4 股）股周围的邻域，其中将包含一个“拼接”构件，如图20、21、22、23所示。我们没有展示两条锚链将如何像图14中那样环绕多重环。

2. 每条边都将被包裹在一个称为边构件的细双角形中（见图13），该构件将使用 γ中的两股。每组共线边将形成一串交替使用两种类型（α 和 β）的边构件，从而组成边装置束；该边装置束沿着由这些边确定的直线平分单位圆（见图14）。

3. G 的边按共线类分组，每组对应一个边装置束，其中包含 $m \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ 的 2 股或 4 股条带。它们将拼接在一起，形成斜率为 γ的拼接子多重环 m，γ_m 恰好使用 6 股，其中 2 股是靠近单位圆的锚链。奇偶性条件使构造需要区分不同情形：图 20、21、22和 23展示了所有情形的示例。6 种斜率各产生 4 股条带，加上 2 股锚链，总共得到 26 股条带。

4. 我们调整构造中的参数，确保所有条带交点均为横截交点，且构件之间没有不必要的相互作用；同时在局部处理高重数交点，从而得到一个含 26 股的多重环。然后移除对应于斜率 ϕ_1、ϕ_2和 ϕ_3 的 6 股多余条带，得到含 20 股的多重环 γ。

5. 我们定义数量 k'，并证明 (γ, k') 在内存中的大小是 (G, k) 的多项式。最后，我们研究通过该构造得到的 γ 的 mobidisc 结构，并证明它可以用 k' 个针钉住，当且仅当 G 有一个大小至多为 k 的顶点覆盖。

3.3.2 边构件与边装置束的精确描述

首先，我们定义图 *13* 所示的边构件。

定义 *3.3*（边构件）。边构件（参数为一个实数 $\epsilon > 0$、自然数 η、$\eta' \in \mathbb{N}$，以及集合 $\{\alpha, \beta\}$ 中的一个字母）关联于 $\mathbb{R}^2$ 中从点 x 到点 y、斜率为 m 的有向直边 e。它是图 *13* 中的平面构型，由两条各有 *3* 个角点的分段线性路径组成（标签 $\{\alpha_m^+, \alpha_m^-\}$ 分别着橙色与紫色，或标签 $\{\beta_m^+, \beta_m^-\}$ 分别着绿色与蓝色），围绕该有向边形成一个双边形 M_e。令 $\delta = \epsilon tan\ \epsilon$，并注意当 $\epsilon \to 0$ 时，角 θ_1、θ_2、θ_3、$\theta_4 \to 0$ 以及双边形 M_e 趋近于 e。

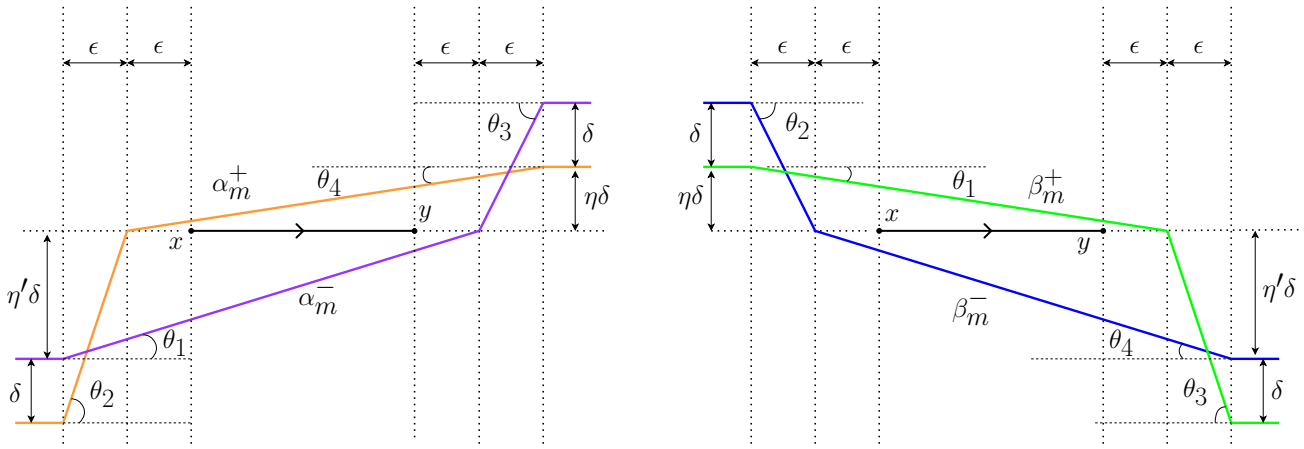


图 13：左：　　参数为 α 的边构件。右：参数为 β的边构件。

接下来，我们定义边装置束，如图14所示。

定义*3.4*（边装置束）。参数为 $\epsilon > 0$ 的边装置束，是与 $\mathbb{B}(0, 1\ 2)$ 中一组 $n \geq 1$ 共线边相关联的平面构形，其斜率为 m。它由 $2n$条带有以下标签的分段线性路径组成：α_m^+、α_m^-、β_m^+、β_m^-（分别着为橙色、紫色、绿色、蓝色）；还包括单位圆 μ，以及另一条条带 ν，它位于 μ的一个闭 $\delta = \epsilon\, tan\, \epsilon$-邻域内。为描述该构形，我们旋转平面，使斜率 m 为竖直方向，将这些边定向为朝上，按从下到上的顺序编号为 $\{e_i\}_{i=1}^n$，并令 L 为包含它们的有向直线。在每条边周围构造参数为 ϵ 的边构件，类型 α 和 β交替出现，并从底部的一个 α 边构件开始（见左侧的图*14*）。对于每个边构件，选择互不相同的 η 和η'，使得

1. α 和 β 边的所有垂直线段两两不共线，且按水平间距 $\delta = \epsilon \tan \epsilon$依次排列；*2.* α 边的路径单调地从左上方连接到右下方，β 边的路径单调地从右上方连接到左下方；*3.* 所有垂直 β 线段都比 α 线段更靠近 L。

将边构件中所有朝上延伸的竖直路径向上延伸，超出 $1\,2$ 的距离，达到 μ。这些端点将称为终端。令 ν由 $\partial\mathbb{B}(0, 1 - \frac{\delta}{3})$ 上的弧并集构成，齿状双边形出现的地方除外：它们是图*14*右侧所示的半岛形子弧，由两条短竖直弧组成，彼此相距 $\frac{\delta}{3}$，并位于每条与边构件关联的竖直弧离开 $\frac{2\delta}{3}$ 的位置左侧；两条竖直弧通过一条短圆弧相连，该圆弧位于 μ，且 $\partial\mathbb{B}(0, 1 + \frac{\delta}{3})$。将图旋转 π 弧度后，对边构件中朝下延伸的竖直路径重复这一构造。

请注意，每条边 e_i 恰好产生8 个由 μ 和 ν围成的双边形：4 个区域齿状双边形和4 个细分齿状双边形：由带有 $\{\alpha_m^+, \alpha_m^-, \beta_m^+, \beta_m^-\}$之一标签的路径平分的嵌入双边形，每个包含2 个区域。因此，除了 M_{e_i} 个双边形之外，每个边装置束还会额外产生 $8n$ 个双边形，要使其紧致需要 $8n$ 根针。请注意，所有这些双边形的并集在 $\epsilon \to 0$ 趋近于 L，并且当 $n = 1$时，不会存在带有 β 标签的路径。

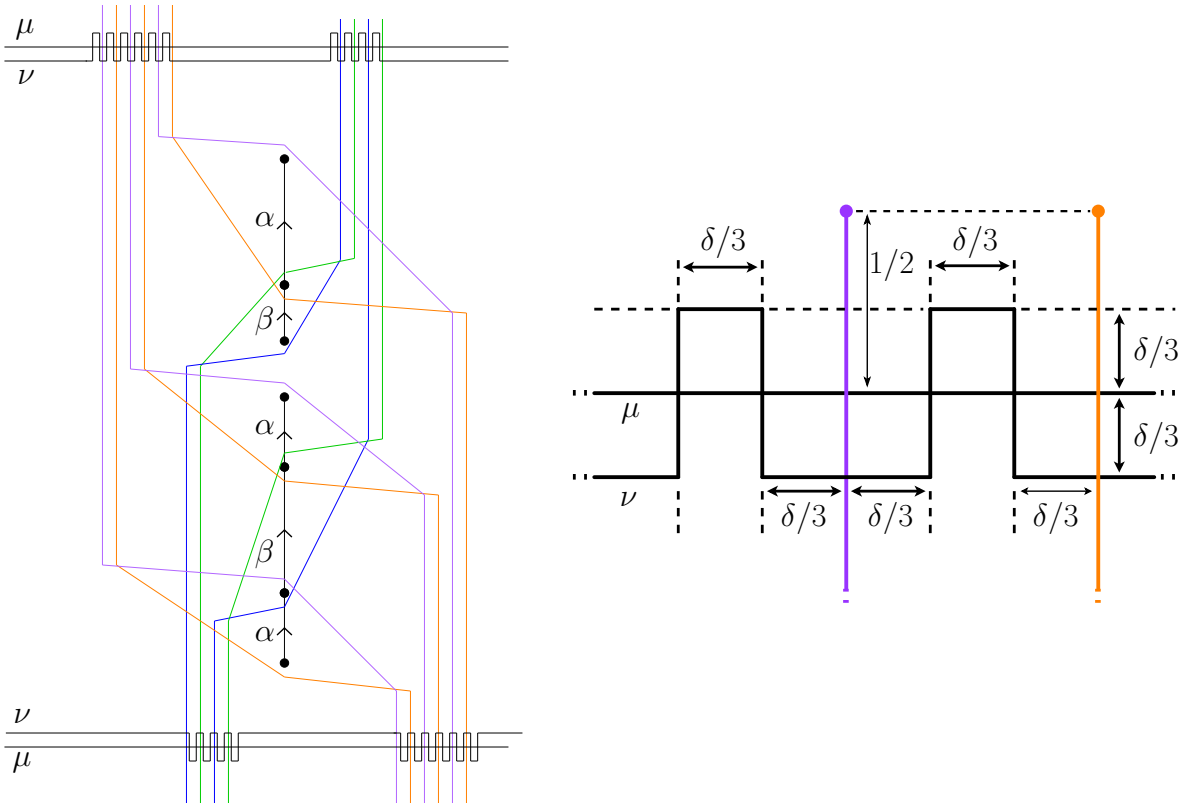


图14：左：带有 $n = 5$ 条边的边装置束。右：区域的齿和细分齿的放大视图，其中终端以突出方式显示。圆弧显示为水平线段。

3.3.3 连接具有给定斜率的边装置束的路径以形成4股

在本小节中，我们说明如何连接所有具有给定斜率 α_m^+、α_m^-、β_m^+、β_m^- 的边装置束中的带标签路径 $m \in [0, \pi$，以形成一个具有4股的简单多重环。这些连接将在单位圆之外进行，单位圆周围还会有2条额外的股（所有斜率都相同）。构造的说明将跨越数页。最终结果的示意图示例见图20、21、22、23。所得构造（一个具有6股的多重环）将称为 γ_m，即束拼接或斜率 m 拼接子多重环。

首先，我们将所有边朝同一方向定向，并旋转平面，使 m 竖直，且边朝上。将 n 边划分为若干共线类，每个共线类定义一组平行直线。对于每个共线类，按照定义3.4构造一个参数为ϵ的边装置束。假设 ϵ 足够小，使得与每个边装置束关联的、标签属于 $\{\alpha_m^+, \alpha_m^-, \beta_m^+, \beta_m^-\}$（分别着色为橙色、紫色、绿色和蓝色）的非垂直路径彼此相邻。设有 n_α 条边带有 α 标签，且有 n_β 条边带有 β 标签，使得$n = n_\alpha + n_\beta$。注意，$n_\alpha \geq 1$ 且 $n_\beta \geq 0$。

奇偶平衡过程。我们必须确保 $\{\alpha_m^+, \alpha_m^-, \beta_m^+, \beta_m^-\}$中的每个标签出现的次数均为偶数，且每个标签至少出现一次。为此，在最左侧边装置束的左边添加 2、4 或 6 条垂直线段，使其向上和向下延伸至单位圆 μ 外距离$_{1\,2}$的位置；这些线段以递增距离 $\delta = \epsilon\tan\,\epsilon$向左排列，并从左到右依次赋予来自 $\{\alpha_m^+, \alpha_m^-, \beta_m^+, \beta_m^-\}$的标签（仍分别着色为橙色、紫色、绿色和蓝色），具体遵循以下规则。

1. 若 n_α 为奇数且 n_β 为偶数，则添加六条新的线段，标签/颜色为（$\beta_m^-, \beta_m^+, \beta_m^-, \beta_m^+, \alpha_m^-, \alpha_m^+$）/（蓝色、绿色、蓝色、绿色、紫色、橙色）（见图15）。2. 若 n_α 为奇数且 n_β 为奇数，则添加四条新的线段，标签/颜色为（$\beta_m^-, \beta_m^+, \alpha_m^-, \alpha_m^+$）/（蓝色、绿色、紫色、橙色）（见图16）。3. 若 n_α 为偶数且 n_β 为奇数，则添加两条新的线段，标签/颜色为（β_m^-, β_m^+）/（蓝色、绿色）（见图17）。4. 若 n_α 为偶数且 n_β 为偶数，则添加四条新的线段，标签/颜色为（$\beta_m^-, \beta_m^+, \beta_m^-, \beta_m^+$）/（蓝色、绿色、蓝色、绿色）（见图18）。

对于每条新增线段，我们还会在 μ 与 ν 之间添加一条区域齿，使其在离开 μ 时位于左侧（从而在 μ 与 ν之间形成 4 个双边形），如右侧的图14 所示。

在图 15、16、17、18中，圆弧以水平线表示，竖直虚线将边构件束与奇偶平衡过程中添加的线段分隔开，但 ν 未显示。

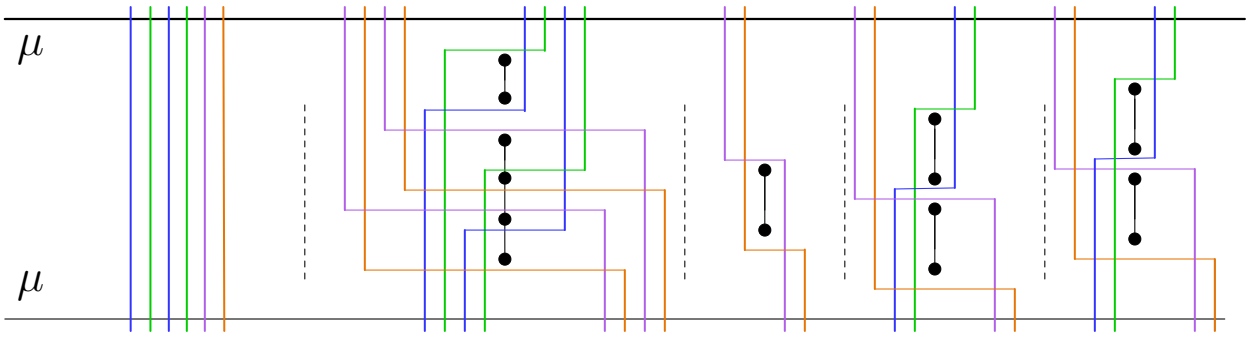


图15：当 n_α 为奇数且 n_β 为偶数时的奇偶平衡过程。

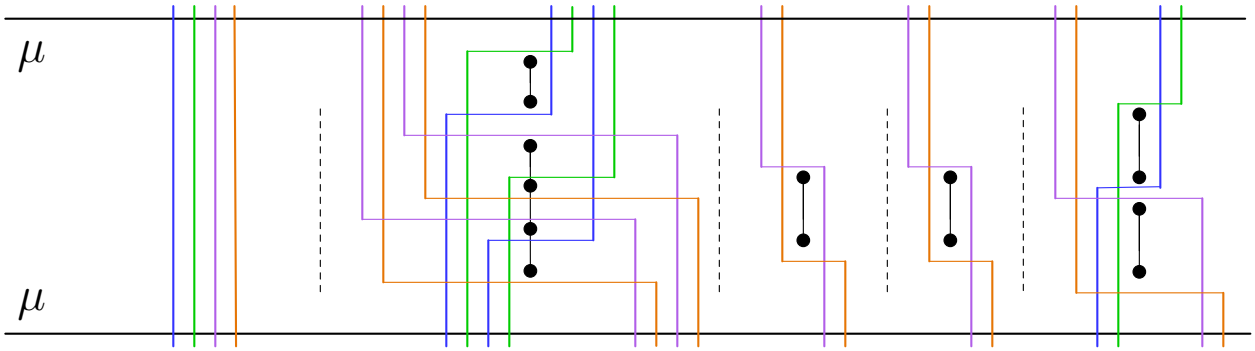


图16：当 n_α 为奇数且 n_β 为奇数时的奇偶平衡过程。

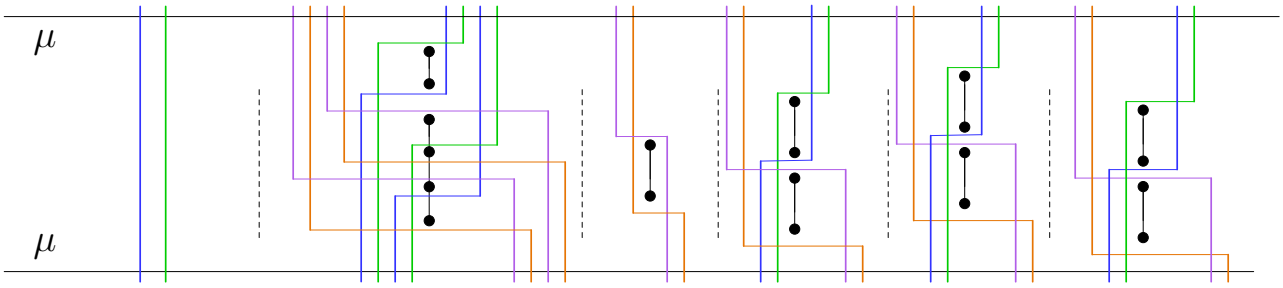


图17：当 n_α 为偶数且 n_β 为奇数时的奇偶平衡过程。

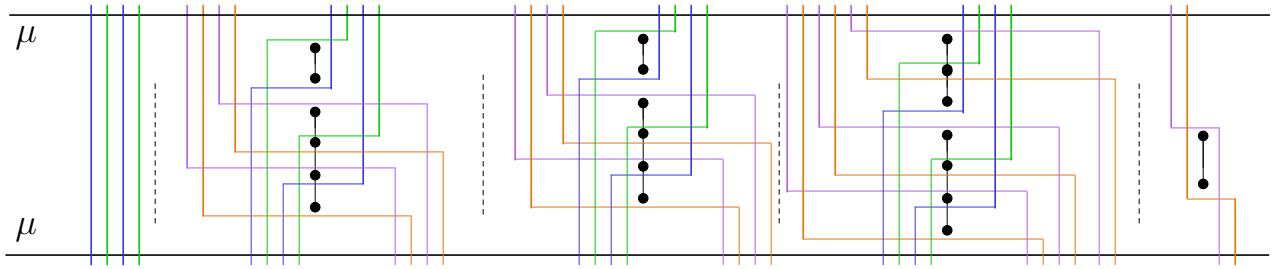


图18：当 n_α 为偶数且 n_β 为偶数时的奇偶平衡过程。

上部和下部终端配对。在 μ 外距离$_1$ $_2$ 处终止的路径，其端点的标签属于 α_m^+、α_m^-、β_m^+、β_m^-，我们称这些标签为终端。从左到右读取 μ 上方和下方的终端，可以得到两个终端序列：μ上方的上部终端序列和 μ下方的下部终端序列。此外，每个序列都以(β_m^-、β_m^+，.....)开头（包括 $n_\beta = 0$的情况）。

在每个终端序列中，对于每种颜色 $\sigma_m^\star \in \{\alpha_m^+, \alpha_m^-, \beta_m^+, \beta_m^-\}$，奇偶平衡过程确保子序列中 $\sigma_m^\star$ 的出现次数为正偶数。按照从左到右的顺序枚举子序列 $\rho_1, \ldots, \rho_{2n(\sigma_m^\star)}$ 中的位置，其中 $2n(\sigma_m^\star)$表示带有该标签的终端数量。对于每个 $i \bmod 2n(\sigma_m^\star)$，按如下方式将子序列中的各项配对：

- 在每个上部终端序列中，将 ρ_{2i} 与 ρ_{2i+1}配对。
- 在每个下部终端序列中，将 ρ_{2i-1} 与 ρ_{2i}配对。

特别是，ρ_1 与$\rho_{2n(\sigma_m^\star)}$配对。

注意，按照配对关系连接所有终端，会得到一个闭环，因此也会得到与 $\sigma_m^\star \in \{\alpha_m^+, \alpha_m^-, \beta_m^+, \beta_m^-\}$ 关联的一股。我们将构造的拼接会在平面上实现这种配对，同时避免每股内部的自交，以及不同股之间意外形成的双边形。

块和配对类型。 我们将每个终端子序列划分为块：同一边构件中每个极大连续标签子序列对应一个块，奇偶平衡过程产生的所有标签则额外构成一个块。有了这些术语，终端配对可以是以下几种配对类型之一。

- ρ_1 与 $\rho_{2n(\sigma_m^\star)}$ 之间的配对称为刺胞动物头部配对。
- 如果终端并非$\{\rho_1, \rho_{2n(\sigma_m^\star)}\}$，且来自终端子序列中的不同块，我们就称该终端配对为束间配对。
- 当终端来自终端子序列中的同一块时，我们将该终端配对称为丛内配对。

在适当层级连接终端配对。现在，我们用两条垂直线段连接每个配对的终端点，并将它们所属的垂直线段延伸至圆 $\partial\mathbb{B}$（0，r），该圆具有适当半径 r，以及一条连接弧，即 $\partial\mathbb{B}$（0，r），位于二者之间。我们将连接弧的端点称为其连接点。半径 r 以及层级（取自上层 $\{U3, U2, U1\}$ 或下层 $\{L1, L2\}$）的每条连接弧，均同时取决于配对连接的类型以及标签 $\sigma_m^\star \in \{\alpha_m^+, \alpha_m^-, \beta_m^+, \beta_m^-\}$（即配对终端的标签），见表19。

配对类型	标签/颜色	层级	包含 关联连接弧
刺胞动物头部	β_m^-/蓝色	$U3$	$\partial\mathbb{B}$(0，11)（上弧）
刺胞动物头部	β_m^+/绿色	$U3$	$\partial\mathbb{B}$(0，10)（上弧）
刺胞动物头部	α_m^-/紫色	$U3$	$\partial\mathbb{B}$(0,9)（上弧）
刺胞动物头部	α_m^+/橙色	$U3$	$\partial\mathbb{B}$(0,8)（上弧）
束间（上方）	β_m^-/蓝色	$U2$	$\partial\mathbb{B}$(0,7) (上弧)
束间（上方）	β_m^+/绿色	$U2$	$\partial\mathbb{B}$(0,6) (上弧)
束间（上方）	α_m^-/紫色	$U2$	$\partial\mathbb{B}$(0，5)（上弧）
束间（上）	α_m^+/橙色	$U2$	$\partial\mathbb{B}$(0，4)（上弧）
丛内（上）	α_m^-/紫色或 β_m^-/蓝色	$U1$	$\partial\mathbb{B}$(0,3)（上弧）
丛内（上）	α_m^+/橙色或 β_m^+/绿色	$U1$	$\partial\mathbb{B}$(0,2)（上弧）
丛内（下）	α_m^+/橙色或 β_m^+/绿色	$L1$	$\partial\mathbb{B}$(0,2)（下弧）
丛内（下方）	α_m^-/紫色或 β_m^-/蓝色	$L1$	$\partial\mathbb{B}$(0,3)（下弧）
束间（下方）	α_m^+/橙色	$L2$	$\partial\mathbb{B}$(0,4)（下弧）
束间（下部）	α_m^-/紫色	$L2$	$\partial\mathbb{B}$(0,5)（下弧）
束间（下部）	β_m^+/绿色	$L2$	$\partial\mathbb{B}$(0，6)（下弧）
束间（下方）	β_m^-/蓝色	$L2$	$\partial\mathbb{B}$(0，7)（下弧）

图19：从配对类型和标签到层级及连接弧的路由表。

图 20、21、22、23 展示了奇偶平衡过程中所有情形的示例。在这些图中，连接弧以水平线表示，而 ν 未显示。至此，斜率为 m 的配管子多重环 γ_m的构造完成。

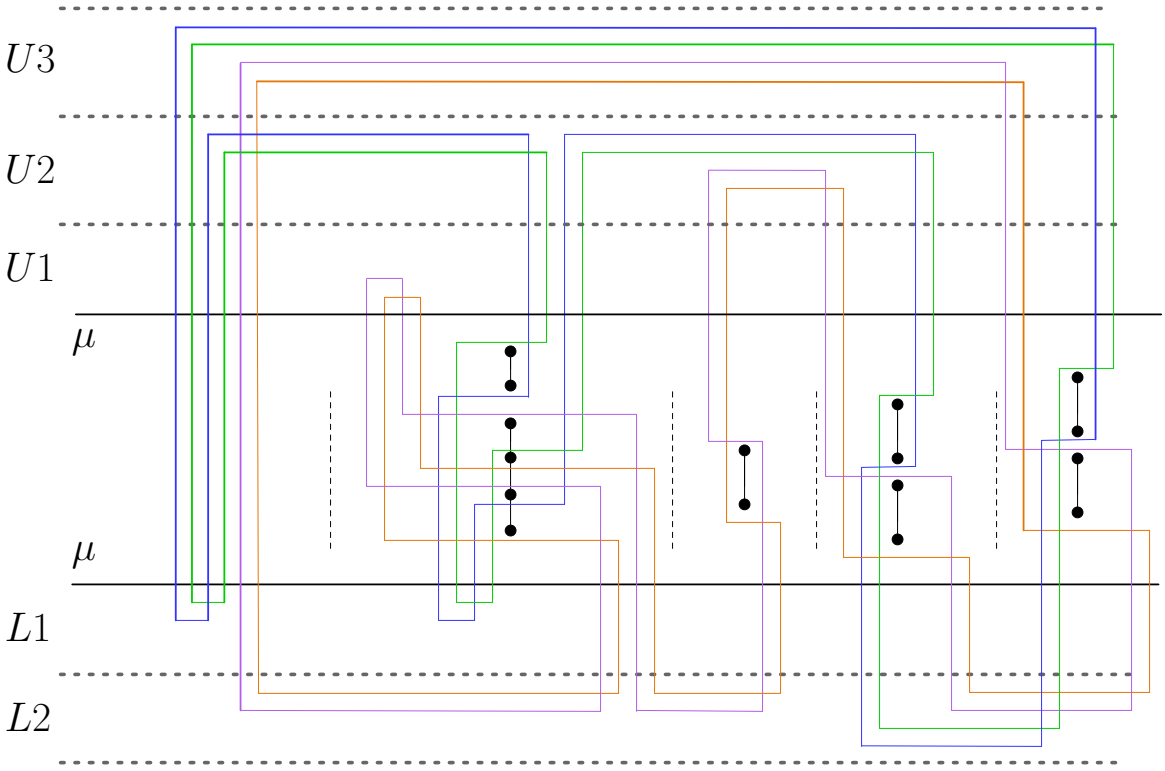


图20：当 n_α 为奇数且 n_β 为偶数时的拼接。

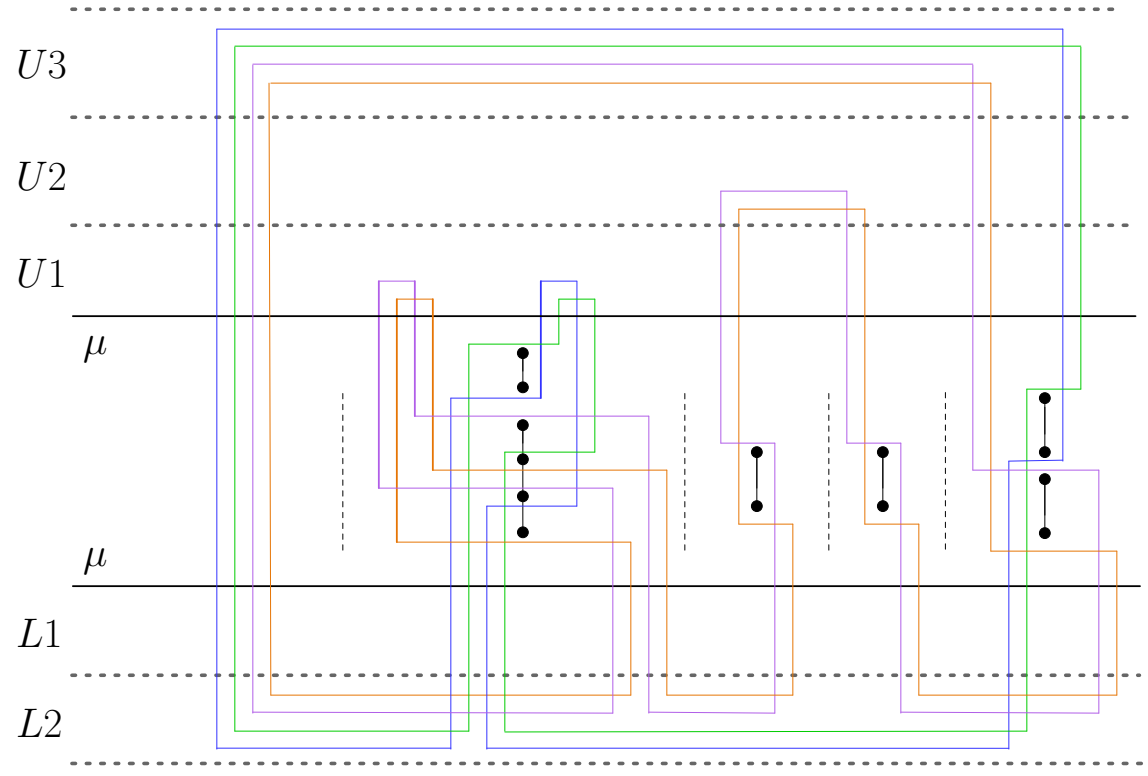


图21：当 n_α 为奇数且 n_β 为奇数时的拼接。

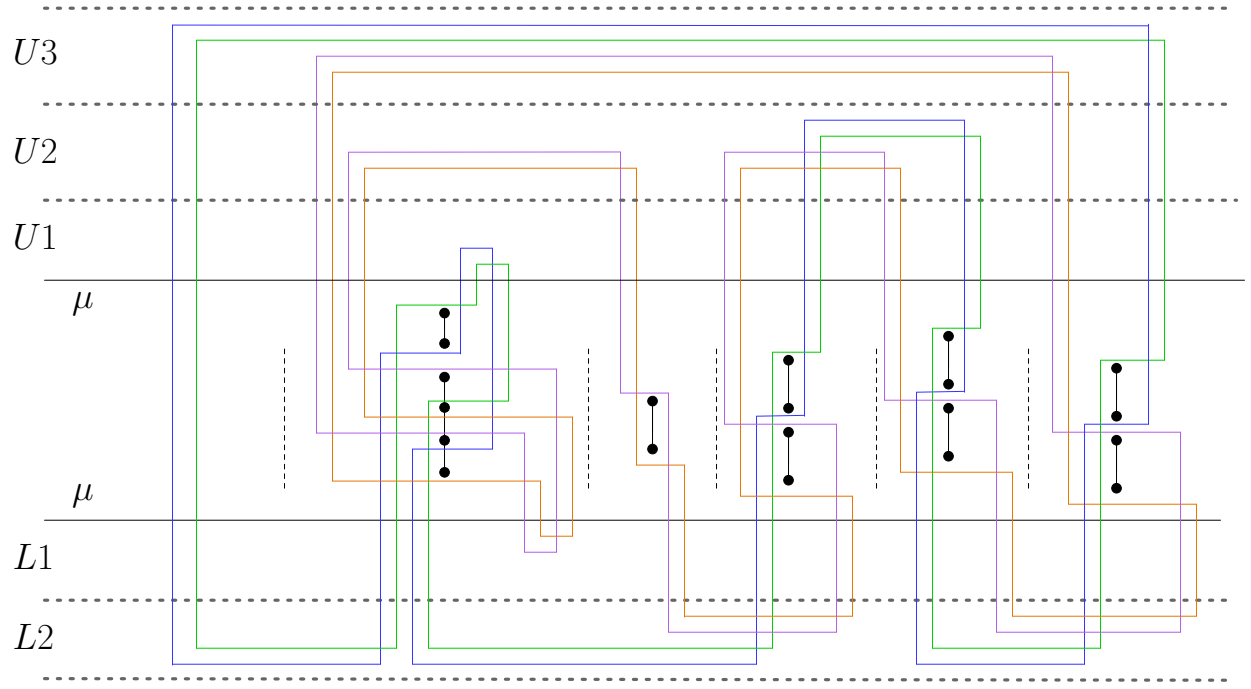


图22：当 n_α 为偶数且 n_β 为奇数时的拼接。

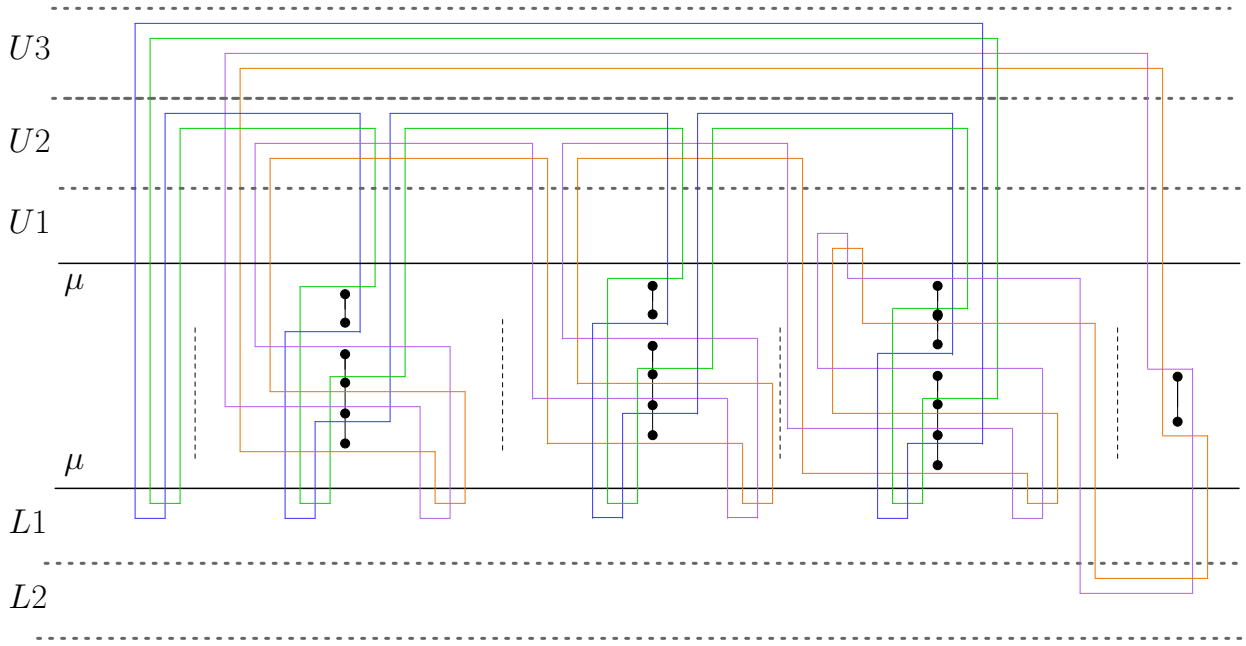


图23：当 n_α 为偶数且 n_β 为偶数时的拼接。

3.3.4 束拼接的最内层双边形结构

以下引理将用于证明：在斜率为 m 的拼接子多重环 γ_m 中，不存在这样一个最内层嵌入双边形：其 γ_m 两个标记点都位于拼接的一条连接弧上。

引理 3.5（连接弧交错排列）。 设 $m \in [0, \pi)$ 和 λ_m 和 λ'_m 是斜率为 m 的拼接子多重环 γ_m 中的连接弧，且它们同属上层或同属下层。设 r 和 r' 分别是它们对应的半径。设 a、b 分别是 λ_m 连接点的左、右 x 坐标（相对于斜率为 m 的垂直定向），设 a' 和 b' 分别是 λ'_m 连接点的左、右 x 坐标。若 $r > r'$，则 $a < a'$ 或 $b > b'$。

证明。 设 $r > r'$，并考虑 λ_m 和 λ'_m的所有可能层级组合。我们考虑 λ_m和 λ'_m位于上层 $\{U1, U2, U3\}$的情况。以下论证稍作调整即可适用于 λ_m 和 λ'_m 位于下层 $\{L1, L2\}$的情况。

1. $U3$**与** $\{U1, U2, U3\}$。

• 设 $\lambda_m \in U3$ 和 $\lambda'_m \in U1$，或 $\lambda_m \in U3$ 和 $\lambda'_m \in U2$。这里 $a < a'$，因为 a 位于奇偶平衡块中，而 a' 不在其中。
• 设 λ_m，$\lambda'_m \in U3$。如果 λ_m和 λ'_m都属于 α股，那么 λ_m属于负股线，而 λ'_m属于正股线，因此 $a < a'$，因为 $a + \delta = a'$。如果λ_m 和 λ'_m 都是 β 股，同样的论证也适用。另一方面，如果 λ_m 是 β 股，而 λ'_m 是 α 股，那么$a < a'$，因为 $a + \delta \leq a'$。

2. $U2$**与** $\{U1, U2\}$。

•假设 $\lambda_m \in U2$且 $\lambda'_m \in U1$。在这种情况下， λ_m来自丛内配对，而 λ'_m来自束间配对。因此 $b' - a' = 2\delta$且 $b - a > 2\delta$，所以 $a < a'$或 $b > b'$。
•假设 λ_m，$\lambda'_m \in U2$。在这种情况下， λ_m和 λ'_m均来自束间配对。若 λ_m 和 λ'_m 都属于 α 股，那么 λ_m 属于负股线，而 λ'_m 属于正股线。于是， λ_m 和 λ'_m 要么不连接同一对块（此时$[a, b] \cap [a', b'] = \emptyset$），要么连接同一对块，此时 $a < a'$，因为 $a + \delta = a'$。若 λ_m 和 λ'_m 都属于 β 股，同样的论证也适用。另一方面，若 λ_m属于一条 β 股，而 λ'_m 属于一条 α 股，我们按如下方式论证。由于与 b关联的边装置束至少有一条 α 边，同一束中存在一个上端点，其标签为 α，且其 x 坐标位于 $[a, b]$ 中。 λ'_m无法跳过这个端点。因此， $[a, b] \cap [a', b'] = \emptyset$或 a'，b'之一位于 $[a, b]$ 中。

3. $U1$**与** $U1$。

•假设 λ_m，$\lambda'_m \in U1$。在这种情况下， λ_m和 λ'_m都来自束内配对。如果 λ_m 和 λ'_m 都属于 α 股，那么 λ_m 属于负股线，而 λ'_m 属于正股线，因此 $[a, b] \cap [a', b'] = \emptyset$或 $a + \delta = a'$成立。如果 λ_m 和 λ'_m都属于 β 股，同样的论证也适用。另一方面，如果 λ_m 和 λ'_m 中一个属于 α 股，另一个属于 β股，那么 $[a, b] \cap [a', b'] = \emptyset$。

引理的证明至此完成。 □

引理 3.6（束拼接中不存在意外的最内层双边形）。 固定一个斜率 $m \in [0, \pi)$，并考虑一个斜率为 m 的拼接子多重环 γ_m，它有6 股，如第*3.3.3*节所定义。对于$\epsilon > 0$ 足够小的情形（我们可以在多项式时间内计算）， γ_m 的最内层嵌入单环双边形只有两类：围绕 M_e 边 e 的双边形（如图 *13*所示），以及位于 μ 和 ν 之间的双边形（如图*14*所示）。

证明。 设 B 是 γ_m 的一个最内层双边形，其标记点为 x， y，边界由路径 λ， λ' 构成。

首先，假设 λ 或 λ' 是 μ 或 ν的子弧。在这种情况下， x 和 y 都沿着 μ 或 ν分布，而 B包含一个齿状大边形或细分齿状大边形。因此，我们可以假设 λ 和 λ' 的标签属于 $\{\alpha_m^+, \alpha_m^-, \beta_m^+, \beta_m^-\}$。

现在假设 λ 或 λ' 与 μ 或 ν相交。那么它与 $\mu = \partial\,\mathbb{B}(0,1)$相交，并且沿着 μ，该交点的左右两侧各有齿状双边形，其中一个必定包含在B中。因此，我们可以假设 B 完全位于 $\mathbb{B}(0,1)$内部，或位于其外部。

如果 B 完全位于 $\mathbb{B}(0,1)$内部，那么选择 ϵ 足够小，就能确保 $\{\alpha_m^+, \alpha_m^-, \beta_m^+, \beta_m^-\}$ 的所有股都与斜率 m任意接近平行。这意味着，正如左侧的图(0， 1)中的每条弧与 $\beta_m^{\pm} \cap \mathbb{B}(0,1)$中的每条弧至多相交一次。由此可知， 14 所示。因此， B 必定是一个 M_e 双边形。

因此，我们可以假设 B 完全位于 $\mathbb{B}(0,1)$ 之外，并根据 λ 和 λ' 是否在上层 $\{U_1, U_2, U_3\}$ 或下层 $\{L_1, L_2\}$ 中有子弧，分为两种情况（两者都包含子弧是不可能的，因为 λ 和 λ' 都不与 μ 相交）。

我们的构造意味着 λ 和 λ' 至多有两个角点。具体而言，每个对象都属于以下类型之一：

- 类型 0（无角点）：它是某条连接弧的子弧，
- 类型 1（一个角点）：它由一条竖直弧和一条连接弧的子弧组成（竖直弧上的标记点半径小于连接弧上的标记点半径），
- 类型 2（两个角点）：它由两条竖直弧组成，两者之间是一条完整的连接弧，角点位于连接点处。

首先请注意，类型 1 实际上不可能出现，因为不失一般性地，若 λ 属于类型 1，则 λ'没有可用的类型。并且， λ、 λ' 不可能都属于类型 0，λ、 λ' 也不可能都属于类型 2。事实上， λ 与 λ' 构成双边形的唯一方式，是 λ 属于类型 2，而λ' 属于类型 0。但这样一来，与 λ 相关联的连接弧半径就会大于 λ'的半径，这与引理3.5矛盾。 □

定理 0.9 的证明

我们可以通过将 3C3PVC 归约到 SimplePin（Σ， s）来构造并证明主定理。我们重述定理 0.9。

定理 3.7。 对于任意固定的可定向曲面 Σ 和 $s \geq 20$，SimplePin（Σ, s）是 *NP* 完全问题。

证明。 首先注意，SimplePin（Σ， s）属于 NP。事实上，可以查阅 [SS25] ，或参见推论 1.16。

为了证明该问题是 NP困难的，设（G = （V， E） k）是 3C3PVC的一个实例，其中 $k \in \mathbb{Z}$。我们将构造一个 γ， k'）的 SimplePin（Σ， s）实例，其中 $k' = 8|E| + f + k$ 对于某个 $24 \leq f \leq 72$ ，它取决于 G 的嵌入方式，具体将在下文描述。我们将在多项式时间内完成构造，并证明这两个问题等价。应用定理 3.1 即可完成证明。

我们可以假设 $k > 0$ 并且 $\Sigma = \mathbb{R}^2$ 根据注0.10。

构造一个具有六种斜率的嵌入。由引理3.2，我们在线性时间内构造 G 在 $\mathbb{R}^2$ 中的直线嵌入，使得边斜率的并集是一个含有 6 个元素的集合 $\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}$，其中某个 ϕ_1， ϕ_2， $\phi_3 \in [0, \pi)$ ，并且 ϕ_1， ϕ_2 以及 ϕ_3 各自在 G的外面上恰好由一条边实现一次。

对于每条边 $e \in G$，令 L_e 为包含 e 的直线。对嵌入进行缩放，使得 $G \subset \mathbb{B}(0, 1/2)$，此外，所有不同直线 L_e 与 $L_{e'}$ 之间的交点都包含在$\mathbb{B}(0, 1/2)$ 内。

通过束拼接构造多重环。 接下来，我们对每个斜率3.3.3中的构造各应用一次，以构造一个含有 $4*6+2=26$股的简单多重环 $\bar{\gamma}$，并为它们全部选取相同的 $\epsilon > 0$。我们选择足够小的 ϵ，使得不同拼接子多重环 γ_m 和 $\gamma_{m'}$ 之间的所有交点都位于 $\mathbb{B}(0, 1/2)$内。此外，我们声称，可以在多项式时间内计算出足够小的 ϵ，使其满足以下性质。证明随后给出。

1. **变形收缩条件**。 令 M_e 表示边 e周围的双边形。对于所有 $\{e_i\}_{i=1}^n \subset E$，

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_{e_i} \quad \text{retracts by deformation onto} \quad \bigcap_{i=1}^{n} e_i.$$

此性质确保构件双边形的拓扑与 G的拓扑相仿。

2. **角度条件**。 令 σ_m，$\sigma_{m'} \in \{\alpha_m^+, \alpha_m^-, \beta_m^+, \beta_m^-\}$ 为与不同斜率 $m \neq m'$相关联的任意两条条带。令 λ_m 和 $\lambda_{m'}$分别为 $\sigma_m \cap \mathbb{B}(0, 1/2)$和 $\sigma_{m'} \cap \mathbb{B}(0, 1/2)$中的任意两条极大路径。那么 $\lambda_m \cap \lambda_{m'}$ 是一个单点。

此性质确保 γ 的所有交点都是横截多重点，也有助于控制 mobidisc 结构。

各项断言的证明。

1. **变形收缩条件的证明**。 为此，我们必须控制 gadget 双边形的垂直和水平方向。

- **垂直分离**。 对于 G 的一条边 e，令 $\ell(e)$ 表示该边的长度。我们选取 $\epsilon < \frac{1}{5} \min_{e \in E} \ell(e)$。
- 水平分离。考虑斜率为 m 的边集。这些边被划分为一组 $\mathcal{C}_m$ 共线类，它们定义了平行直线。对于不同的共线类 C、$C' \in \mathcal{C}_m$，令 $\#C$ 表示该共线类中的边数，并令 $d(C, C')$ 表示这些直线之间的距离。由于图 13 中的角度随 ϵ 趋于 0，我们可以将 ϵ 选得足够小，使得记 $d_m = \min\{d(C, C') : C, C' \in \mathcal{C}_m, C \neq C'\}$ 以及 $c_m = 5 \times \max\{\#C : C \in \mathcal{C}_m\}$，我们有

$$\epsilon \tan \epsilon < \min\left\{d_m/c_m : m \in \{\pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}\right\}.$$

2. **角度条件的证明**。 路径 λ_m 和 $\lambda_{m'}$ 至少相交一次，因为它们的端点在 $\mathbb{B}(0, 1/2)$ 上相连。由于图 13 中的角度随 ϵ趋于 0，我们可以使 λ_m 和 $\lambda_{m'}$ 的所有线段的斜率分别任意接近 m 和 m'，从而使 λ_m 和 $\lambda_{m'}$ 恰好横截相交一次（例如，令 max

$$\max_{e \in E} \min_{i \in \{1,2,3,4\}} \theta_i < \frac{1}{3} \quad \{|m - \bar{m}'| \; m \neq \max \min :\}$$

$m' \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{-3\pi}{4}, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}\}$。

消解多重点。 现在我们来处理孤立多重点。我们在多项式时间内计算多重环的所有交点，以及它们之间的最小距离 ϵ'，并任意在局部（例如在半径为 $\epsilon'/2$的球内）将多重点消解为若干横截双重点。

剪除多余股。 现在我们有一个恰好包含 26 股的多重环。要达到 $s \geq 20$股，我们按如下方式进行。由于斜率 ϕ_1、 ϕ_2 和 ϕ_3 分别对应于 G外面上的唯一一条边，因此这些斜率满足 $n_\alpha = 1$ 和 $n_\beta = 0$ 。特别是，可以保证这些斜率对应的边没有 β 双边形。现在我们移除与这些边对应的 β 股，以及它们之间与之关联的齿状双边形 μ 和 ν 。这样便得到一个恰好包含 20 股的多重环。接着，我们在远离 γ 的位置添加 $s - 20$ 个两两不相交的闭环，并将 γ 重新定义为所得的多重环。

计算强制针的数量。回想一下， G 的每条边都会在μ 和 ν之间产生 8 个双边形，因此我们需要将 $8|E|$ 加入 γ的候选钉扎集中。

现在定义数目 f，它对应奇偶平衡过程所产生的强制针数量。回想一下，对于每个斜率 $m \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\}$，针对斜率为 m 的管接子环，奇偶平衡过程有 4 种可能的执行方式。我们统计每种情况下 μ 和 ν 之间额外产生的双边形数量，该数量等于拼接构造最左侧所需额外竖直弧数量的 4 倍。

- 若 n_α 为奇数且 n_β 为偶数，则会有 6 条额外的竖直弧，从而在 $f_m = 24$ 和 μ 之间产生 ν 个额外的双边形（见图15）。
- 若 n_α 为奇数且 n_β 为奇数，则会有 4 条额外的竖直弧，从而在 $f_m = 16$ 和 μ 之间产生 ν 个额外的双边形（见图16）。
- 若 n_α 为偶数且 n_β 为奇数，则会有 2 条额外的竖直弧，从而产生 $f_m = 8$ 个额外的双边形，位于μ与 ν 之间（见图 17）。
- 若 n_α 为偶数且 n_β 为偶数，则会有 4 条额外的竖直弧，从而产生 $f_m = 16$个额外的双边形，位于 μ 与 ν 之间（见图 18）。

现在令 $f = f_{\frac{\pi}{4}} + f_{\frac{\pi}{2}} + f_{\frac{3\pi}{4}}$。注意， $f \equiv 0$模 8 且 $24 \leq f \leq 72$。

定义问题实例并界定其内存占用。 最后，令 $k' = 8|E| + f + k$。至此完成了 SimplePin($\mathbb{R}^2$, s) 问题实例（γ, k'）的多项式时间构造。

注意， γ 的内存占用关于 G的大小呈二次增长。事实上， γ 可以看作是几乎与 G的边平行的 $2|E| + \frac{f}{4}$ 条路径的并集，再加上 $|E| + \frac{f}{8}$条连接弧。它们两两相交的次数均不超过 2 次，并且几乎与 G 的边平行的 $2|E| + \frac{f}{4}$ 条路径中的每一条，都会产生 4 个涉及 μ和 ν的双重点。因此，一个粗略的上界为

$$\#\gamma \leq 4(2|E| + f/4) + 2\binom{(2|E| + f/4) + (|E| + f/8)}{2}.$$

论证这些问题是等价的。还需论证：图 G 具有大小至多为 k 的顶点覆盖，当且仅当简单多重环 γ 具有大小至多为 k' 的钉扎集。

从钉扎集到顶点覆盖。假设 γ 有一个大小至多为 k'的钉扎集，并选取这样一个钉扎集。注意，每个 $4|E| + \frac{f}{2}$区域齿双边形都必须有一枚针，此外还有 $4|E| + \frac{f}{2}$枚针用于细分齿。因此至少用了 $8|E| + f$ 枚针。我们构造一个从其余 $\leq k$ 枚针到 G 的顶点的映射，方法如下：如果一枚针不在任何 M_e中，就任意选取一个顶点；如果一枚针只在一个 M_e中，就选取与该双边形关联的任一顶点；如果它位于多个 M_e中，由于 G 满足**变形收缩条件**(1)，这些双边形相交于一个非空区域，其中恰有 G 的一个顶点，并将其选作对应顶点。由于每个 M_e 至少包含一枚针（根据推论1.14），因此得到一个至多使用 k 个顶点的图的顶点覆盖。

从顶点覆盖到钉扎集。假设图 G 有一个大小至多为 k的顶点覆盖，并选取这样一个顶点覆盖。我们断言， γ 的每个最内层双边形要么是μ 与 ν之间的双边形之一，要么是 M_e 双边形之一。事实上，引理 3.6 表明，每个管接子环内部唯一的最内层双边形都具有这种形式；又由于每个管接子环 γ_m的条带斜率在 $\mathbb{B}$(0, 1 2)内都非常接近 m ，角度条件 (2) 以及区域齿双边形的充足数量意味着，不存在由来自两个不同管接子环的两条股构成的最内层双边形。现在按如下方式为 γ 钉扎。 μ 与 ν 之间的每个 $8|E|+f$ 双边形都放置一枚针（细分齿的针任意选取）。对于覆盖中的每个顶点 v，我们在区域 $M_{e_1} \cap M_{e_2} \cap M_{e_3}$中放置一枚针；在该区域中， e_1、 e_2 和 e_3 是连接到 v的三条边。根据变形收缩条件 (1)，该区域非空且单连通。由于我们从一个顶点覆盖出发，所有 M_e 双边形都已钉扎，且使用的针不超过 k 枚；因此根据推论 1.14， γ 的钉扎所用针数不超过 k' 枚。

□

3.3.6 总结

回想定理0.8和0.9提出的问题：对于固定的曲面 Σ，困难度阈值 $s_{\mathsf{mP}} = \max\{s \in \mathbb{N}$是多少： $\mathsf{SimplePin}(\Sigma, s)$ $\in$ P 类 $\}$? 我们的定理表明（假设 P 类 $\neq$NP ），$3 \le s_{\mathsf{mP}} \le 19$ 而我们猜想 $s_{\mathsf{mP}} = 3$ 在第 2.3 节中。

最后，我们简要讨论一下，能否通过降低定理 s_{mP} 中 s 的取值，来降低0.9中给出的上界。

备注 *3.8*（改进条带数量的上界）。如引言所述，定理 *0.9* 的证明使用了 *20*股，原因如下。对于三次平面图 G 的六斜率绘图，它对 $\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\}$ 中的每个斜率使用 *4* 股，对 $\{\phi_1, \phi_2, \phi_e\}$ 中恰好在外部面上出现一次的每个斜率使用 *2* 股，并在单位圆周围额外使用 *2* 股来锚定构造。或许可以运用我们提出的类似思路（代价是需要更精细的构造或证明），将股数减少到低至 $s \ge 12$（仅使用对应于斜率 $\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\}$ 的 *12* 股），从而证明 $s_{mP} \le 11$。若不对我们的方法作出重大修改，这大概就是所能达到的极限。请注意，*Uehara* 在引理 *3.1* 的证明中给出的构造（最初发表于 *[Ueh96]*）可用于构造一个围长至少为 *4*（即无三角形）的 *3*-连通三次平面图；这一额外限制或许有助于此类尝试。

致谢

我们谨此感谢 DavidEppsteinfor 对引理 3.2提出的宝贵意见，并感谢 Ryuhei Uehara 允许我们转载图 11 ，该图最初发表于 [Ueh96]。

参考文献

[AH76] K. Appel 和 W. Haken。每个平面图都可以四色着色。《美国数学会通报》，82(5):711 – 712，1976。 https://bookstore.ams.org/conm-98。11[BKT15] Hans L. Bodlaender、Dieter Kratsch 和 Sjoerd T. Timmer。凯利斯游戏的精确算法。理论计算机科学，562:165–176，2015。 https://doi.org/10.1016/j.tcs.2014.09.042。6[BM76] J.A. Bondy 和 U.S.R. Murty。《应用图论》。美国爱思唯尔出版公司，1976。 https://books.google.com/books?id=4bwrAAAAYAAJ。4, 12[BM07] G. Brinkmann 和 B.D. McKay。平面图的快速生成。MATCH《数学、计算与化学通讯》，58(2):323–357，2007。 https://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/plantri/。2[CDGW] Marc Culler、Nathan M. Dunfield、Matthias Goerner 和 Jeffrey R. Weeks。SnapPy：用于研究三维流形几何与拓扑的计算机程序。可在此获取http://snappy.computop.org。2[CS03] Charles R. Collins 和 Kenneth Stephenson。圆堆积算法。计算几何，25(3):233–256，2003。 https://doi.org/10.1016/S0925-7721(02)00099-8。1[DESW07] Vida Dujmovi´c、David Eppstein、Matthew Suderman 和 David R. Wood。具有较少斜率和线段的平面图绘制。《计算几何：理论与应用》，38(3):194–212，2007年10月。 https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2006.09.002。4, 17, 18[Din70] Yefim Dinitz。求解带有容量估计的网络最大流问题的算法。《苏联数学文献》，11:1277–1280，1970年1月。 https://www.researchgate.net/publication/228057696_Algorithm_for_Solution_of_a_Problem_of_Maximum_Flow_in_Networks_with_Power_Estimation。4, 12[EK72] Jack Edmonds 和 Richard M. Karp。网络流问题算法效率的理论改进。《ACM期刊》，19(2):248–264，1972年4月。 https://doi.org/10.1145/321694.321699。4, 12[Epp25] David Eppstein。CirclePack.py。收录于 PADS：Python算法与数据结构库。 https://ics.uci.edu/~eppstein/PADS/，2025。访问日期：2025-12-15。1[GJ77] M. R. Garey 和 D. S. Johnson。直角斯坦纳树问题是 NP 完全的。《SIAM应用数学期刊》，32(4):826–834，1977。 https://doi.org/10.1137/0132071。15[GJS76] M. R. Garey、D. S. Johnson 和 L. Stockmeyer。若干简化的NP完全图问题。理论计算机科学，1(3):237–267，1976。https://doi.org/10.1016/0304-3975(76)90059-1。10

[Gru39] Patrick Michael Grundy。《数学与博弈》。Eureka，2：6–8，1939。网址不可用。6[HS85] Joel Hass 和 Peter Scott。曲面上曲线的相交。《Israel J. Math.》，51(1- 2)：90–120，1985。 https://doi.org/10.1007/BF02772960。7，8，9[HT74] 约翰·霍普克罗夫特和罗伯特·塔扬。高效的平面性测试。《J. Assoc. Comput. Mach.》，21：549–568，1974。 https://doi.org/10.1145/321850.321852。10，17[Kan96] G. Kant。使用规范序绘制平面图。《Algorithmica》，16(1)：4–32，1996年7月。 https://doi.org/10.1007/BF02086606。17[Kar72] Richard M. Karp。组合问题之间的可约性，第85–103页。施普林格美国，马萨诸塞州波士顿，1972年。 https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2_9。10[KBEG06] 列昂尼德·哈奇扬、Endre Boros、Khaled Elbassioni 和 Vladimir Gurvich。用于生成超图横贯的拟多项式算法的高效实现及其在联合生成中的应用。《离散应用数学》，154(16)：2350–2372，2006年。离散算法与优化，献给京都大学退休的茨木俊秀教授。参见 https://doi.org/10.1016/j.dam.2006.04.012。5[Kob18] 小林靖明。关于 Node Kayles 的结构参数化。载于《离散与计算几何、图与博弈：第21届日本会议，JCD-CGGG 2018》，菲律宾奎松市，2018年9月1日至3日，修订精选论文，第96–105页，柏林、海德堡，2018年。施普林格出版社。 https://doi.org/10.1007/978-3-030-90048-9_8。6[MU14] Keisuke Murakami 和宇野毅明。大型超图对偶化的高效算法。《离散应用数学》，170：83–94，2014年。 https://doi.org/10.1016/j.dam.2014.01.012。5[PSS26] Ryan Pham、Christopher-Lloyd Simon 和 Ben Stucky。计算平面环路的 mobidisc公式：扩展 Shor–Van Wyk算法以计算编码钉扎问题的 mobidisc合取范式的实现，2026年1月。 https://github.com/beanstalk555/mobidisc。1[RSST96] Neil Robertson、Daniel P. Sanders、Paul Seymour 和 Robin Thomas。高效地对平面图进行四着色。载于《第28届年度ACM计算理论研讨会论文集，STOC 1996》，《年度ACM计算理论研讨会论文集》，第571–575页。美国计算机协会，1996年7月。出版方版权：© 1996 ACM；第28届年度ACM计算理论研讨会，STOC 1996；会议日期：1996年5月22日至1996年5月24日。参见 https://doi.org/10.1145/237814.238005。11[Sch76] Thomas J. Schaefer。基于有限双人完全信息博弈的判定问题的复杂性。载于《第八届年度ACM计算理论研讨会论文集，STOC '76》，第41–49页，美国纽约，1976年。美国计算机协会。 https://doi.org/10.1145/800113.803629。6

.[Spr35] R. Sprague。《关于数学博弈》。《东北数学杂志》，第一辑，41：438–444，1935年。 https://www.jstage.jst.go.jp/article/tmj1911/41/0/41_0_438/_article/-char/ja/。6[SS24] Christopher-Lloyd Simon 和 Ben Stucky。《LooPindex：小多重环钉扎数据的数字目录》，2024年。电子版自行出版， https://christopherlloyd.github.io/LooPindex/。2[SS25] Christopher-Lloyd Simon 和 Ben Stucky。《多重环的钉扎理想》，2025年。https://arxiv.org/abs/2405.16216。2，3，4，7，8，10，27[Ueh96] Ryuhei Uehara。3-连通三次平面图上的 NP 完全问题及其应用。东京女子基督教大学，日本东京，技术报告 TWCU-M-0004，1996年。 https://www.jaist.ac.jp/~uehara/pdf/triangle.pdf。15，17，30