arXiv:2602.07353v1 [math.AT] 7 Feb 2026

微分分次幺半群的变形理论与余切复形

Yonatan Harpaz 和 Truong Hoang

摘要

第一部分中，我们明确描述了微分分次（dg）幺半群的余切复形，并将其建模为一个 operadic 无穷小双模。由此得到其相关代数的 Quillen 上同调的统一公式。我们进一步证明，dg E_∞-幺半群的余切复形可由 Pirashvili 函子表示，而 dg E_n-幺半群的余切复形则可通过其 Hochschild 复形方便地描述。第二部分中，我们建立了各种类型代数对象的变形理论与（谱）Quillen 上同调之间的明确联系。结合这些结果，我们给出了 dg 幺半群一阶变形空间的表述，尤其适用于 dg E_n-幺半群。

目录

1 引言 **2**

1.1 一些术语和记号.2 1.2 微分分次算子代数的余切复形 .3 1.3 变形理论与 Quillen 上同调 .5

2 B背景与约定 **7**

2.1 幺半群及其上各类模.7 2.2 幺半群上的无穷小双模 .9 2.3 自同态构造.11 2.4 切范畴与 Quillen 上同调 .13 2.5 一些基范畴与 operadic 模型结构.15 2.6 更多记号 .16

3 微分分次幺半群的 Quillen 上同调 **17** 3.1 微分分次算子代数的余切复形 .17 3.2 Kähler 微分的拟运算模与约化 Quillen 上同调 21 3.3 微分分次 E_∞-幺半群的余切复形. 23 **4 微分分次 E_n-歌剧的余切复形** **24** **5 变形理论与 Quillen 上同调** **29** 5.1 从形式模空间语境到形式模空间问题 . . . . . 29 5.2 主要定理 .32 5.3 形式模空间语境的例子 . 35 5.4 微分分次 E_n-歌剧的变形理论.40 **附录 A. 模型范畴的同伦笛卡尔方块** **41** **参考文献** **44**

*2020*年数学主题分类：14B12,18M60, 18M70, 18M75.

1. 引言

任何**幺半群** 都会确定其上的（**模运算**）**代数**范畴。通过这种方式，幺半群编码了熟悉的代数结构，例如**结合**、**交换**和**李代数**，以及拓扑情形中出现的更复杂结构，例如 E_n-**代数**。一个自然原则表明，对于给定类型的幺半群代数，足够广泛的一类代数所共有的任何性质，都可以根据幺半群本身的内在特征来解释。下面我们给出一些说明性例子。

(1) 设 $\mathcal{P}$ 是一个（足够良好的）对称幺半模型范畴 $\mathcal{S}$ 中的幺半群。已有研究指出，只要 $\mathcal{P}$ 是 Σ-余纤维的， $\mathcal{P}$-代数范畴就具有一个从 $\mathcal{S}$ 上的模型结构迁移而来的半模型结构。此外，所得半模型范畴的性质恰当： Σ-余纤维幺半群之间的任意弱等价，都会在相应的代数范畴之间诱导出 Quillen 等价（例如参见 [8, 31]）。这表明，小 n-圆盘幺半群为每个 $1 \leq n < \infty$ 的 E_n-代数同伦论提供了恰当的模型。另一方面，这也凸显了 E_∞-代数和 L_∞-代数的作用：它们分别是普通交换代数和李代数在（同伦意义上的）精化版本。

(2) 与经典代数情形一样，幺半群代数的（上）同调理论具有核心意义。最初， $\mathcal{P}$幺半群上同调代数是在二**次**（dg）**歌剧**的情形下建立的，在那里可以明确看出，相应的上链复形如何由 $\mathcal{P}$的运算控制。此外，如果 $\mathcal{P}$是**Koszul**的，那么所得的上同调与**André-Quillen 上同调**一致。（更多详情请参见 [18, §12.4]。）

(3) 在 [16], 中，针对幺半群代数的**Quillen** （以及**Hochschild**）**上同调**，人们在高度一般的情形下建立了一套形式体系。该体系结合了 Lurie 的余切复形形式体系 [21]以及 Harpaz-Nuiten-Prasma [13]关于幺半群切范畴的基础性结果。 [16] 的主要结果表明，$\mathcal{P}$-代数的 Quillen 上同调和 Hochschild 上同调可以用 $\mathcal{P}$ 的相应上同调来表示（对所有此类代数一概如此）。此外，对于 E_n-**空间**，还得到了这两种上同调理论之间的明确关系；这一结果仅以 E_n-幺半群本身的相应已知关系为依据，该关系见 [15]。

上述讨论阐明了歌剧在研究其相关代数中的作用，尤其是在上同调理论的背景下。尽管如此，即使不考虑幺半群代数，歌剧本身也具有独立的研究价值：E_n-歌剧丰富了**圆盘构形空间**的同伦类型，并使人们能够通过相关的无穷小双模结构研究**长嵌入空间** 的同伦（参见 [1]），此外还有广泛的其他应用。

基于这些动机，本文着重研究（**微分分次**）**歌剧**的 Quillen 上同调，以及 Quillen 上同调与**变形理论**之间的关系。本文与 [15] 和 [16], 一同，进一步阐明了歌剧及其相关代数的上同调理论，尤其是在单纯和微分分次背景下。此外，这些著作连同相关系列 [12, 13, 14], ，为在一般情形下研究切范畴和余切复形奠定了基础，重点关注富集范畴、富化拟运算子和幺半群代数。

1.1 一些术语和记号

为了方便概述主要结果，我们简要介绍一些相关术语和记号。

(i) 设$\mathbf{M}$ 为一个合适的模型（或半模型）范畴，且 $A \in \mathbf{M}$ 为一个对象。我们将 $\mathcal{T}_A\mathbf{M} := \mathrm{Sp}(\mathbf{M}^{A//A})$ 记为**稳定化**，即在之上且之下的对象范畴的稳定化，并称

其为**M 在处的切范畴**。它配备了一个 Quillen 伴随

$$\Sigma^{\infty}_{+} : \mathbf{M}_{/A} \rightleftarrows \mathcal{T}_A\mathbf{M} : \Omega^{\infty}_{+}$$

关于**悬挂-去悬挂谱函子**。 **余切复形**的 A 定义为

$$\mathrm{L}_A := \mathbb{L}\Sigma^{\infty}_{+}(A) \in \mathcal{T}_A\mathbf{M}.$$

对 A 的 Quillen 上同调，其系数取自某个 $M \in \mathcal{T}_A\mathbf{M}$ ，是空间 e

$$\mathrm{HQ}^{\star}(A; M) := \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{T}_A\mathbf{M}}(\mathrm{L}_A, M),$$

以及 n **阶 Quillen 上同调群**定义为

$$\mathrm{HQ}^{n}(A; M) := \pi_0 \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{T}_A\mathbf{M}}(\mathrm{L}_A, M[n]).$$

（关于这些构造的更多细节，请参见 §2.4 。）

（ii）设k 为一个固定的交换环，并令 $\mathcal{C}$（k）表示**微分分次 k-模范畴**。对于一个颜色集 C，记Op_C（$\mathcal{C}$（k））为 C-**着色歌剧在** $\mathcal{C}$（k）构成的**范畴，并记**Op（$\mathcal{C}$（k））为**颜色集不固定的歌剧范畴**（参见 §2.1）。

(iii) 一个歌剧 $\mathcal{P} \in \mathrm{Op}_C(\mathcal{C}(\mathbf{k}))$ 通常称为一个（C-**着色的**）**微分分次歌剧**。此外，我们记IbMod($\mathcal{P}$) 为**无穷小** $\mathcal{P}$-**双模**范畴。（详见 §2.2 。）

(iv) 我们主要关注 $\mathcal{P}$作为 Op($\mathcal{C}$(k)) 中一个对象时的 Quillen 上同调。相应地，我们将 $\mathrm{L}_{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ Op($\mathcal{C}$(k)) 记为 $\mathcal{P}$的（适当的）余切复形，并将其对应的 Quillen 上同调记为 $\mathrm{HQ}^{\star}(\mathcal{P}; –)$。

(v) **的 Hochschild 上同调**，其系数取在对象 $M \in$IbMod($\mathcal{P}$) 中，是空间

$$\mathrm{HH}^{\star}(\mathcal{P}; M) := \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})}(\mathcal{P}, M),$$

且第 n个 Hochschild 上同调群由下式给出

$$\mathrm{HH}^{n}(\mathcal{P}; M) := \pi_0 \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})}(\mathcal{P}, M[n]).$$

（详见 [16, §5。1] ）

（vi）按照约定，一个增广交换$\boldsymbol{k}$-代数 $\varepsilon : R \longrightarrow \mathbf{k}$ —如果其底层复形 R 是有限维的，并且 ε 使得 $\pi_0(R)$ （即 R的零次同调）是一个**局部k-代数**。我们记$\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$ 为**阿廷 k-代数范畴**。（详见 §5.1。）

1.2 微分分次算子代数的余切复形

令 $\mathcal{P} \in \mathrm{Op}_C(\mathcal{C}(\mathbf{k}))$ 为 $\mathcal{C}$(k) 中的 C-着色幺半群。我们假设 $\mathcal{P}$ 是 Σ-余纤维且 连通的（即，每个运算复形都集中于非负次数）。

根据 [15], 存在一个自然的 Quillen 等价

$$\mathrm{IbMod}(\mathcal{P}) \rightleftarrows \mathcal{T}_{\mathcal{P}}\,\mathrm{Op}(\mathcal{C}(\mathbf{k}))$$

在无穷小 $\mathcal{P}$-双模范畴与 Op($\mathcal{C}$(***k***)) 处的 $\mathcal{P}$ 的切范畴之间。我们的首个主要结果表述如下。

定理 1.2.1.（3.1.7）在等价 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$Op($\mathcal{C}$(k)) $\simeq$ IbMod($\mathcal{P}$) 下，余切复形 $L_{\mathcal{P}}$ 等同于 $L_{\mathcal{P}}[-1] \in$ IbMod($\mathcal{P}$)，其中对 $\mathcal{P}$的每个颜色元组 $(c_1, \cdots, c_m; c)$，$L_{\mathcal{P}}$ 定义为

$$\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}(c_1, \cdots, c_m; c) = \mathcal{P}(c_1, \cdots, c_m; c)^{\oplus m}$$

运算复形 $\mathcal{P}(c_1,\cdots,c_m;c)$的 m重直和。因此， $\mathcal{P}$ 以某个 $M\in\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$ 为系数的 *Quillen* 上同调由如下公式计算

$$\mathrm{HQ}^\star(\mathcal{P};M)\simeq \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})}(\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}[-1],M),$$

并且，第 n 个 *Quillen* 上同调群可表述为

$$\mathrm{HQ}^n(\mathcal{P};M)\cong \pi_0\,\mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})}(\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}},M[n+1]).$$

更多信息请参见，$\mathrm{L}_{\mathcal{P}}$ 可表示为

$$\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}\cong \mathcal{P}\circ_{(1)}\mathcal{I}_C$$

其 **无穷小复合积** $\mathcal{P}$ 与初始 C-着色歌剧 $\mathcal{I}_C$ (参见 §2.2)。它带有一个无穷小 $\mathcal{P}$-双模结构，如注3.1.5所述。

此外 ，我们将 $\mathcal{P}$-代数的 Quillen 上同调重新表述如下 s.

推论 1.2.2. (3.1.15) 设 A 是一个余纤维 $\mathcal{P}$-代数，且 N 是一个 A-模，定义在 $\mathcal{P}$上。具有系数 N 的 A *Quillen* 上同调可由以下公式计算

$$\mathrm{HQ}^\star(A;N)\simeq \Omega\,\mathrm{HQ}^\star(\mathcal{P};End_{A,N})\simeq \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})}(\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}},End_{A,N}) \tag{1.2.1}$$

其中 $End_{A,N}$ 是与对 $\mathcal{P}$相关联的无穷小 (A,N)-双模（见 §2.3）。因此，第 n 阶 *Quillen* 上同调群为

$$\mathrm{HQ}^n(A;N)\cong \pi_0\,\mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})}(\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}},End_{A,N}[n]).$$

注1.2.3. 通常通过以下方式计算：

$$\mathrm{HQ}^\star(A;N)\simeq \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{Mod}^A_{\mathcal{P}}}(\Omega_A,N)$$

其中 模范畴$^A_{\mathcal{P}}$ 表示在 A上的 $\mathcal{P}$-模范畴，而 Ω_A 表示 **Kähler 微分模** A （见 §3.1）。显然，在范畴 模范畴$^A_{\mathcal{P}}$ 中的计算不如在 $\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$ 中方便（后者仅以 $\mathcal{P}$为参数），而且 Ω_A 不像 $\mathrm{L}_{\mathcal{P}}$那样有简洁的描述。此外，公式（1.2.1）提供了一种统一的方式，可用于计算所有$\mathcal{P}$-代数的 Quillen 上同调。

下一个定 理给出了 **dg E_∞-幺半群**余切复形的一个显式模型 .

定理 *1.2.4. (3.3.1)* 在 *Quillen* 等价之字形链意义下，切范畴 $\mathcal{T}_{\mathrm{E}_\infty}$*Op(C(k))* 等价于投射模型范畴 *Fun(Fin$_*^{\mathrm{op}}$, C(k))*，其中 *Fin$_*$* 表示有限基点集范畴的骨架（参见 *§2.2*）。此外，余切复形 $L_{\mathrm{E}_\infty}\in\mathcal{T}_{\mathrm{E}_\infty}$ *Op(C(k))* 可由 $t[-1]:$*Fin$_*^{\mathrm{op}}\longrightarrow$ C(k)* 表示，即 *Pirashvili* 函子 t 的降悬。

注 1.2.5. 更多细节如下，**Pirashvili 函子** $t:\mathrm{Fin}_*^{\mathrm{op}}\longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{k})$ 将每个基点集 $m:=\{0,1,\cdots,m\}$ 映射为

$$t(\langle m\rangle):=[\langle m\rangle,\mathbf{k}]_*$$

基于$\mathbf{k}$-模范畴中保基点映射的集合 $\langle m\rangle\longrightarrow\mathbf{k}$，其中 $\mathbf{k}$ 的基点为 $0_{\mathbf{k}}$。根据定理 1.2.4，dg E_∞-幺半群的 Quillen 上同调与 Pirashvili [26] 引入的稳定上同伦 **一致。此外，它还为 dgE_∞-代数的 Quillen 上同调**提供了一种优雅的表述（参见推论 3.3.4）。

接下来，我们讨论 $\mathbb{E}_n$，即**微分分次版本的E_n-幺半群**的余切复形。记 $\mathcal{E}_*$ 为由$\mathbf{k}$ 集中于第 0 级给出的 Σ_*-对象，记 $\mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{E}_*)$ 为由 $\mathcal{E}_*$生成的自由无穷小 $\mathbb{E}_n$-双模。

定理1.2.6。(4.0.2) 在$\mathrm{IbMod}(\mathbb{E}_n)$中存在如下形式的余纤维序列

$$\mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{E}_*) \longrightarrow \mathbb{E}^{\mathrm{i}}_n \longrightarrow \overline{\mathrm{L}}_{\mathbb{E}_n}[n]$$

其中 $\mathbb{E}^{\mathrm{i}}_n$ 指的是 $\mathbb{E}_n$ 被视为其自身上的无穷小双模，而第一个映射由等同 $\boldsymbol{k} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{E}_n(0)$ 所诱导。因此，对于 $M \in \mathrm{IbMod}(\mathbb{E}_n)$，存在一个纤维序列

$$\Omega^{n+1}\,\mathrm{HQ}^{\star}(\mathbb{E}_n; M) \longrightarrow \mathrm{HH}^{\star}(\mathbb{E}_n; M) \longrightarrow \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{C}(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{k}, M(0)).$$

注 1.2.7。 定理 1.2.6 展示了幺半群 $\mathbb{E}_n$的一个值得注意的性质，即其 Quillen 上同调与 Hochschild 上同调之间的联系。它可被视为 *Quillen* 原理的微分分次版本，适用于 E_n歌剧 （参见 [15, 16]）。此外，它重新诠释了一个重要现象，该现象最初由 Quillen [28] 针对结合代数观察到，后来由 Francis [7] 与 Lurie[21] 针对 E_n代数加以发展（另见 [15, §1.2.3]以了解更多细节）。

定理1.2.6 的一个有趣推论如下。

Co推论1.2.8。(4.0.14) 对于 $m \geq n$ 以及每个 $k \neq 0$，存在一个典范同构 m

$$\mathrm{HQ}^{-k-n-1}(\mathbb{E}_n; \mathbb{E}_m) \cong \mathrm{HH}^{-k}(\mathbb{E}_n; \mathbb{E}_m),$$

其中， $\mathbb{E}_m$ 通过典范嵌入 $\mathbb{E}_n \longrightarrow \mathbb{E}_m$被视为一个无穷小 $\mathbb{E}_n$-双模。此外，零阶 *Hochschild* 上同调群分解为

$$\mathrm{HH}^0(\mathbb{E}_n; \mathbb{E}_m) \cong \mathrm{HQ}^{-n-1}(\mathbb{E}_n; \mathbb{E}_m) \oplus \boldsymbol{k}.$$

1.3 变形理论与 Quillen 上同调

我们进一步假设$\mathbf{k}$是一个特征为 0 的域，并令 R 为一个阿廷$\mathbf{k}$-代数，其增广映射为 $\varepsilon : R \longrightarrow \mathbf{k}$；在变形理论中，我们将其视为一种“小扰动”。

（无穷小）变形理论研究给定对象的“无穷小变化”，这些变化在结构上与原对象非常相似：沿增广映射进行基变换后，它们会还原为原对象。具体而言，对于代数对象 X （例如，$\mathbf{k}$ 上的微分分次算子代数、微分分次范畴或微分分次歌剧）， X 在 R 上的一个变形是同类型的对象 Y，定义在 R上，并配有一个弱等价 $\eta : Y \otimes_R \mathbf{k} \xrightarrow{\simeq} X$。此外，两个变形之间的等价（$Y$， η） $\xrightarrow{\simeq}$ （Y' η'）是一个弱等价 $Y \xrightarrow{\simeq} Y'$，与映射 η 和 η'相容。（更多详情见 §5.1。）

我们用 $\underline{\mathrm{Def}}(X, R)$ 表示 X **在** R 上的**变形集合**，并按照这种“等价”关系取商。

对于 $R = \mathbf{k}[t]/(t^2)$ 这个**对偶数代数**，我们称之为 X **的一阶变形**。

例 1.3.1。 过去几十年来，各种代数结构的变形理论得到了广泛研究（例如，参见 [9, 24, 18, 21]）。早期的研究聚焦于结合代数、交换代数和李代数，并揭示了一个统一特征：一阶变形的等价类与二阶上同调类相一致，即：

$$\underline{\mathrm{Def}}(A, \mathbf{k}[t]/(t^2)) \cong \mathrm{H}^2(A; A). \tag{1.3.1}$$

这里，相关的上同调理论是标准的：当 A 分别为结合代数、交换代数或李代数时，它们是**Hochschild**、**Harrison**或**李上同调**。然而，在更一般的情形下（例如，在微分分次情形中），这一结论不再成立。

我们的工作从两个方向对这一理论进行了细化和发展。（完整结果是在一个更抽象、更一般的框架中表述的，采用了一种称为**形式模空间语境**的构造，

在此不便介绍。因此，下面的陈述采用了简化形式。）

(1) 尽管这些标准上同调理论在计算上较为方便，但它们并不能给出正确的变形不变量；相反，Quillen 上同调可以。事实上，等同（1.3.1）可以等价地改写为

$$\underline{\mathrm{Def}}(A, \mathbf{k}[t]/(t^2)) \cong \mathrm{HQ}^1(A; A),$$

并且这一表述在远为广泛的情形中仍然成立。

我们还可以说得更多。对于如上所述的代数对象 X 以及 $R \in \mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$，可以把 X 在 R 上的所有变形组织成一个范畴，其中每个态射都是变形的等价。然后，我们取 $\mathbf{Def}(X, R)$ 为该范畴的神经的*Kan* 替换，并称之为 X **在** R**上的变形空间**。显然，

$$\pi_0 \mathrm{Def}(X, R) \cong \underline{\mathrm{Def}}(X, R).$$

此外，我们得到定理 5.2.7 的如下简化形式。

定理 1.3.2. 存在一个弱等价

$$\Omega \mathrm{Def}(X, \boldsymbol{k}[t]/(t^2)) \simeq \mathrm{HQ}^\star(X; X)$$

在 X 的一阶变形空间的环空间与X 的“以自身为系数”的*Quillen* 上同调之间。因此，存在一个典范同构

$$\pi_0 \mathrm{Def}(X, \boldsymbol{k}[t]/(t^2)) \cong \mathrm{HQ}^1(X; X),$$

并且对每一个 $n \geq 1$，存在一个典范同构

$$\pi_n \mathrm{Def}(X, \boldsymbol{k}[t]/(t^2)) \cong \mathrm{HQ}^{1-n}(X; X).$$

(2) 设$\mathbf{S}$ 表示**空间的** ∞**-范畴**。我们还证明**变形函子** $\mathbf{r}$

$$\mathrm{Def}(X, -) : \mathrm{CAlg}_\infty^{\mathrm{art}} \longrightarrow \mathbf{S},\ R \mapsto \mathrm{Def}(X, R)$$

构成一个 **形式模问题**（在Lurie的意义下，见§5.1）。因此，根据**Pridham-Lurie 定理**，X 的变形由单个微分分次李代数 所控制（参见 [27, 20]）。

例 1.3.3. 设 $\mathcal{P} \in \mathrm{Op}(\mathcal{C}(\mathbf{k}))$为一个（单色）连通增广微分分次拟手性。于是我们可以取 $\mathcal{P}$的一个形如

$$\phi : \Omega(\mathcal{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{P}$$

其中，$\mathcal{C}$ 是一个**微分分次余拟手性**，它刻画了 $\mathcal{P}$的**Bar 构造**，而 $\Omega(-)$ 指的是**cobar 构造**。映射 ϕ 对应于**卷积微分分次李代数**$\mathrm{Hom}_\Sigma(\mathcal{C}, \mathcal{P})$的一个*Maurer–Cartan* 元。（更多细节请参见 [18, 第 6] 章。）此外，我们可以证明，扭曲微分分次李代数**Hom(,** $\mathcal{P}$)恰好是对 $\mathcal{P}$（视为 $\mathrm{Op}(\mathcal{C}(\mathbf{k}))$中的一个对象）的变形进行分类的微分分次李代数。

最后，幺半群 $\mathbb{E}_n$ 的一阶变形可以用 Hochschild 上同调来解释，如下所述。

定理1.3.4。(5.4.4) 存在一个空间的纤维序列

$$\Omega^{n+2} \mathrm{Def}(\mathbb{E}_n, \boldsymbol{k}[t]/(t^2)) \longrightarrow \mathrm{HH}^\star(\mathbb{E}_n; \mathbb{E}_n^{\mathrm{i}}) \longrightarrow \boldsymbol{k}.$$

此外，对于 $k \geq -n-1$ 和 $k \neq 0$，存在一个典范同构

$$\pi_{k+n+2} \mathrm{Def}(\mathbb{E}_n, \boldsymbol{k}[t]/(t^2)) \cong \mathrm{HH}^{-k}(\mathbb{E}_n; \mathbb{E}_n^{\mathrm{i}}),$$

此外，

$$\mathrm{HH}^0(\mathbb{E}_n;\mathbb{E}_n^{\mathrm{i}}) \cong \pi_{n+2}\,\mathrm{Def}(\mathbb{E}_n, \boldsymbol{k}[t]/(t^2)) \oplus \boldsymbol{k}.$$

致谢。 本文是第二作者博士论文的一部分，该论文是在第一作者的指导下于巴黎北索邦大学完成的。作者感谢法国项目 ANR-16-CE40-0003 ChroK 提供支持。

2. 背景与约定

我们简要回顾一些基本概念及其记号，这些内容将在全文中使用。

2.1 幺半群及其上的各种类型的模

设 $(\mathcal{S},\ \otimes,\ 1_{\mathcal{S}})$ 是一个**对称幺半范畴**，其底层范畴 $\mathcal{S}$ 是完备的。今后我们将 $\mathcal{S}$称为**基范畴**。

令 C 为一个集合，并将其视为**颜色集**。我们用 $\mathrm{Coll}_C(\mathcal{S})$ 表示 $\mathcal{S}$ 中的（**对称**） C-**集合**范畴。更详细地说，$\mathrm{Coll}_C(\mathcal{S})$ 的一个对象是由 C 中的对象组成的一个集合

$$M = \{M(c_1,\cdots,c_n;c)\,|\,c_i, c \in C, n \geqslant 0\}$$

它对于每个置换 $\sigma \in \Sigma_n$ 和每个 C-**序列**$(c_1,\cdots,c_n;\ c)$，都配备了一个如下形式的映射

$$\sigma^* : M(c_1,\cdots,c_n;c) \longrightarrow M(c_{\sigma(1)},\cdots,c_{\sigma(n)};c).$$

此外，这些映射共同定义了 Σ_n 的一个右作用。

记号 2.1.1. (i) 我们用 $\mathcal{I}_C$ （分别用 $\mathcal{E}_C$）表示这样的 C-集合：它在所有层级上都是始对象 $\varnothing_{\mathcal{S}}$，但对每个 $c \in C$，$\mathcal{I}_C(c;\ c) = 1_{\mathcal{S}}$（分别为 $\mathcal{E}_C(c) = 1_{\mathcal{S}}$）。
(ii) 当 C 是单元素集时， C-集合称为 Σ_*-**对象**，相应的范畴记为 $\Sigma_*(\mathcal{S})$。此外，在这种情况下，上述两个对象分别记为 $\mathcal{I}_*$ 和 $\mathcal{E}_*$。

对象 $\mathcal{I}_C$ 表示 $\mathrm{Coll}_C(\mathcal{S})$ 关于幺半单位 和**复合积**的单位

$$-\circ-:\mathrm{Coll}_C(\mathcal{S})\times\mathrm{Coll}_C(\mathcal{S})\longrightarrow\mathrm{Coll}_C(\mathcal{S})$$

（例如参见 [13]）。于是有如下定义。

定义 2.1.2. 我们用 $\mathrm{Op}_C(\mathcal{S})$ 表示 $(\mathrm{Coll}_C(\mathcal{S})\ -\bigcirc\ -,\mathcal{I}_C)$ 中幺半对象 所成的范畴，并称其为（**对称**） $\mathcal{S}$-**着色幺半群在** 中的范畴。具体而言， $\mathcal{S}$中的 C-着色幺半群是一个 C-集合 $\mathcal{P}$，配备有

(i) 一个**复合**，由如下形式的 Σ_*-等变映射构成

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(c_1,\cdots,c_n;c)\otimes\mathcal{P}(c_{1,1},\cdots,c_{1,k_1};c_1)\otimes\cdots\otimes\mathcal{P}(c_{n,1},\cdots,c_{n,k_n};c_n)&\\ \longrightarrow\mathcal{P}(c_{1,1},\cdots,c_{1,k_1},\cdots,c_{n,1},\cdots,c_{n,k_n};c),&\end{aligned}$$

(ii) 并且对每个 $c \in C$，都有一个**单位运算** $\mathrm{id}_c : 1_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{P}(c;c)$。

这些结构需满足通常的结合律和含幺性公理。

W我们将 $\mathrm{Op}_*(\mathcal{S})$ 记作 $\mathcal{S}$ **中单色歌剧的范畴**。

例 2.1.3. (i) **交换幺半群** Com $\in$Op$_*$($\mathcal{S}$) 的定义是，对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 Com(n) = $1_{\mathcal{S}}$，并赋予其对称群的平凡作用。复合以显然的方式定义。

(ii) 进一步假设幺半积在 $\mathcal{S}$ 中对余极限满足分配律。于是可以通过对每个 $n \in \mathbb{N}$ 设定 Ass(n) = $\coprod 1_{\mathcal{S}}$，来定义结合幺半群 Ass $\in$ Op$_*$($\mathcal{S}$)。对称群作用由 Σ_n 中的乘法诱导，而复合则由线性序的连接诱导。

定义 2.1.4。 $\mathcal{S}$-富化拟运算子的范畴，记作 Op($\mathcal{S}$)，其对象为形如 $(C, \mathcal{P})$ 的对，其中 $C \in$Sets 且 $\mathcal{P} \in$Op$_C$($\mathcal{S}$)。从 $(C, \mathcal{P})$ 到 $(D, \mathcal{Q})$ 的态射由一个集合映射 $\alpha : C \longrightarrow D$ 以及 Op$_C$($\mathcal{S}$) 中形如 $\mathcal{P} \dashrightarrow \alpha^*\mathcal{Q}$ 的一个映射构成，其中 $\alpha^*\mathcal{Q}$ 是逐层定义的 C-着色幺半群，定义如下：

$$\alpha^*\mathcal{Q}(c_1, \cdots, c_n; c) := \mathcal{Q}(\alpha(c_1), \cdots, \alpha(c_n); \alpha(c)).$$

Remark 2.1.5。对于任意 $\mathcal{P} \in$ Op$_C$($\mathcal{S}$)，存在一个下方范畴之间的伴随

$$\mathrm{Op}_C(\mathcal{S})_{\mathcal{P}/} \rightleftarrows \mathrm{Op}(\mathcal{S})_{\mathcal{P}/}$$

其中，左伴随是典范嵌入，而右伴随由颜色限制诱导，如定义2.1.4中所述。

注 2.1.6。我们用 Cat($\mathcal{S}$) 表示**在 $\mathcal{S}$中富集的（小）范畴范畴**。存在一个显然的嵌入 ι :Cat($\mathcal{S}$) $\longrightarrow$ Op($\mathcal{S}$)。反过来，对于一个幺半群 $\mathcal{P} \in$ Op($\mathcal{S}$)，我们用$\mathcal{P}_1 \in$Cat($\mathcal{S}$) 表示这样一个范畴：其对象是 $\mathcal{P}$ 的颜色，其映射空间由一元（即 1 元）运算集给出。我们称 $\mathcal{P}_1$ 为 $\mathcal{P}$ 的**底层范畴**。这些构造确定了一个伴随

$$\iota : \mathrm{Cat}(\mathcal{S}) \rightleftarrows \mathrm{Op}(\mathcal{S}) : (-)_1.$$

现在令 $\mathcal{P} \in$ Op$_C$($\mathcal{S}$) 为一个固定的 C-着色幺半群。通过将 $\mathcal{P}$ 视为幺半对象，可以自然地得到 $\mathcal{P}$ 上的各种类型的模。

定义 2.1.7。（i）一个**左 $\mathcal{P}$-模**是一个 C-集族 M，配备一个映射 $\mathcal{P} \bigcirc M \longrightarrow M$，由以下形式的一族 Σ_*-等变映射指定

$$\circ^{\ell} : \mathcal{P}(c_1, \cdots, c_n; c) \otimes M(d_{1,1}, \cdots, d_{1,k_1}; c_1) \otimes \cdots \otimes M(d_{n,1}, \cdots, d_{n,k_n}; c_n) \longrightarrow M(d_{1,1}, \cdots, d_{1,k_1}, \cdots, d_{n,1}, \cdots, d_{n,k_n}; c).$$

此外，这些映射必须满足左模的结合律和含幺性公理。

（ii）一个**右 $\mathcal{P}$-模**是一个 C-集族 M，配备一个映射 $M \bigcirc \mathcal{P} \longrightarrow M$，由以下形式的一族 Σ_*-等变映射指定

$$\circ^{\mathrm{r}} : M(c_1, \cdots, c_n; c) \otimes \mathcal{P}(d_{1,1}, \cdots, d_{1,k_1}; c_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(d_{n,1}, \cdots, d_{n,k_n}; c_n) \longrightarrow M(d_{1,1}, \cdots, d_{1,k_1}, \cdots, d_{n,1}, \cdots, d_{n,k_n}; c)$$

满足右模的结合律和含幺性公理。

（iii）一个 $\mathcal{P}$-**双模**是一个 C-集族 M，同时配备左模和右模结构，并满足两个作用之间的相容公理。

我们分别用 LMod($\mathcal{P}$)、RMod($\mathcal{P}$) 和 BMod($\mathcal{P}$) 表示**左 $\mathcal{P}$-模**、**右$\mathcal{P}$-模**和 $\mathcal{P}$-**双模**的范畴。

注 2.1.8. 和往常一样，$\mathrm{Op}_C(\mathcal{S})$ 中的映射 $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ 赋予 $\mathcal{Q}$ 一个 $\mathcal{P}$-双模结构（在 $\mathcal{P}$ 下）。因此我们得到一个限制函子 $\mathrm{Op}_C(\mathcal{S})^{\mathcal{P}/} \longrightarrow \mathrm{BMod}(\mathcal{P})^{\mathcal{P}/}$。在实际应用中，这通常是诱导-限制函子伴随的一部分：

$$\mathrm{BMod}(\mathcal{P})_{\mathcal{P}/} \rightleftarrows \mathrm{Op}_C(\mathcal{S})_{\mathcal{P}/}.$$

接下来，$\mathcal{P}$-代数只是在 0 级集中的左 $\mathcal{P}$-模。其具体描述如下。

定义 2.1.9。$\mathcal{P}$-**代数** A 由 $\mathcal{S}$ 中的一族 $\{A(c)\}_{c\in C}$ 对象组成，并配备形如下述形式的作用映射

$$\mathcal{P}(c_1,\cdots,c_n;c)\otimes A(c_1)\otimes\cdots\otimes A(c_n)\longrightarrow A(c)$$

它们满足结合律、含幺性和等变性的通常公理。我们将 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathcal{S})$ 记作-**代数的范畴**。

此外，A-模范畴上的模 $\mathcal{P}$为 $\mathcal{P}$-代数 A提供表示 .

定义 2.1.10. 一个 A-**模**（**关于** $\mathcal{P}$）是一个对象族 $M=\{M(c)\}_{c\in C}$，取自 $\mathcal{S}$，并且对每个 C-序列 $(c_1,\cdots,c_n;c)$ 以及 $k\in\{1,\cdots,n\}$，都赋有如下形式的作用映射

$$\mathcal{P}(c_1,\cdots,c_n;c)\otimes\bigotimes_{i\in\{1,\cdots,n\}\smallsetminus\{k\}}A(c_i)\otimes M(c_k)\longrightarrow M(c).$$

这些映射必须满足通常的结合律、含幺性和等变性公理。我们用 $\mathrm{Mod}^A_{\mathcal{P}}$ 表示 A-**模**范畴。

注 2.1.11. 一个 $A\longrightarrow B$ 的 $\mathcal{P}$-代数映射赋予 B 一个 A-模结构（在 A 之下）。此过程给出一个限制函子 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathcal{S})^{A/}\longrightarrow(\mathrm{Mod}^A_{\mathcal{P}})^{A/}$。同样，这通常是诱导-限制函子伴随的一部分：

$$(\mathrm{Mod}^A_{\mathcal{P}})_{A/}\rightleftarrows\mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathcal{S})_{A/}.$$

2.2 幺半群上的无穷小双模

在本小节中，我们始终假设 $(\mathcal{S},\ \otimes,\ 1_{\mathcal{S}})$ 是一个**闭对称幺半范畴**，其底层范畴 $\mathcal{S}$ 是双完备的。设 $\mathcal{P}\in\mathrm{Op}_C(\mathcal{S})$ 是 $\mathcal{S}$ 中一个以 C 为颜色集的 C-着色幺半群。

板模算子无穷小双模，由 Merkulov-Vallette 引入的 [22], 将在本文中受到特别关注。首先，我们用“$\circ_{(1)}$”表示**无穷小复合积**

$$-\circ_{(1)}-:\mathrm{Coll}_C(\mathcal{S})\times\mathrm{Coll}_C(\mathcal{S})\longrightarrow\mathrm{Coll}_C(\mathcal{S})$$

它被刻画为通常复合积 $-\bigcirc-$ 的右线性化（见 [18, 22]）。特别地，$-\bigcirc_{(1)}-$ 在余极限下保持分配性。

定义 2.2.1。（i）一个**无穷小左** $\mathcal{P}$-**模**是一个 C-collection M，配备有作用映射 $\mathcal{P}\bigcirc_{(1)}M\longrightarrow M$，其数据由如下形式的 Σ_*-等变映射组成：

$$\circ^{i\ell}:\mathcal{P}(c_1,\cdots,c_n;c)\otimes M(d_1,\cdots,d_m;c_i)\longrightarrow M(c_1,\cdots,c_{i-1},d_1,\cdots,d_m,c_{i+1},\cdots,c_n;c),$$

满足左模通常的结合律和含幺性公理。

(ii) 一个**无穷小** $\mathcal{P}$-**双模**是一个 C-簇 M，同时具有无穷小左$\mathcal{P}$-模和右 $\mathcal{P}$-模结构，并且这两种结构满足通常的相容公理。（更多详情请参见[15, 18, 22]。）

注 2.2.2. 赋予 $M \in \mathsf{Coll}_C(\mathcal{S})$右 $\mathcal{P}$-模结构，等价于赋予它**无穷小右 $\mathcal{P}$-模**结构。具体而言，后者由一个映射 $M\bigcirc_{(1)}\mathcal{P} \longrightarrow M$ 给出，其数据由如下形式的 Σ_*-等变映射构成：

$$\circ^{\mathrm{ir}} : M(c_1,\cdots,c_n;c)\otimes\mathcal{P}(d_1,\cdots,d_m;c_j) \longrightarrow M(c_1,\cdots,c_{j-1},d_1,\cdots,d_m,c_{j+1},\cdots,c_n;c).$$

我们将 Iℓ模范畴$(\mathcal{P})$(分别记作 $\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$)，即 **无穷小左 $\mathcal{P}$-模的范畴**(分别为**无穷小 $\mathcal{P}$-双模**)。

记号 2.2.3. 我们将记

$$\mathrm{Free}^{i\ell}_{\mathcal{P}} : \mathrm{Coll}_C(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathrm{I}\ell\mathrm{Mod}(\mathcal{P}),\ \text{and}$$
$$\mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{P}} : \mathrm{Coll}_C(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$$

为相应遗忘函子的左伴随 自由函子。

注 2.2.4. 如 [15, §2。2], 对每个 C-集 M，我们有

$$\mathrm{Free}^{i\ell}_{\mathcal{P}}(M) \cong \mathcal{P}\circ_{(1)} M \ \text{ and } \ \mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{P}}(M) \cong \mathcal{P}\circ_{(1)} (M\circ\mathcal{P}).$$

特别是，当 $C=\{*\}$ 且 $M=\mathcal{E}_*$ (见记号 2.1.1) 时，我们得到

$$\mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{E}_*) \cong \mathcal{P}\circ_{(1)} (\mathcal{E}_*\circ\mathcal{P}) \cong \mathcal{P}\circ_{(1)} \mathcal{E}_* \cong \mathrm{Free}^{i\ell}_{\mathcal{P}}(\mathcal{E}_*).$$

具体而言，这在每一层由 $(\mathcal{P}\bigcirc_{(1)}\mathcal{E}_*)(n) = \mathcal{P}(n+1)$ 给出，其无穷小 $\mathcal{P}$-双模结构由 $\mathcal{P}$中的复合典范诱导。

注 2.2.5. $\mathrm{BMod}(\mathcal{P})$ 中的映射 $\mathcal{P}\longrightarrow M$ 典范地赋予 M 一个无穷小 $\mathcal{P}$-双模结构（在 $\mathcal{P}$ 下）。由此我们得到一个 限制函子 $\mathrm{BMod}(\mathcal{P})_{\mathcal{P}/} \longrightarrow \mathrm{IbMod}(\mathcal{P})_{\mathcal{P}/}$。此外，通常存在 诱导-限制函子的伴随：

$$\mathrm{BMod}(\mathcal{P})_{\mathcal{P}/} \rightleftarrows \mathrm{IbMod}(\mathcal{P})_{\mathcal{P}/}.$$

这些范畴中的每一个IbMod$(\mathcal{P})$、RMod$(\mathcal{P})$与Iℓ模范畴$(\mathcal{P})$都可以表示为一个范畴，其对象为$\mathcal{S}$-值充实函子（参见 [16]）。这里我们回顾 IbMod$(\mathcal{P})$ 的构造。

记号 2.2.6. 记 Fin_* 为**有限基点集范畴**的骨架。其对象是基点集 $m := \{0,\ 1,\ \cdots,\ m\}$（对 $m\geqslant 0$），以 0 为基点。

构造 2.2.7. 编码无穷小 $\mathcal{P}$-双模的范畴记作 $\mathbf{Ib}^{\mathcal{P}}$。其对象恰为 C-序列，映射空间定义如下。首先，对于 Fin_* 中的每个映射 $f : m\longrightarrow n$，定义

$$\mathrm{Map}^{f}_{\mathbf{Ib}^{\mathcal{P}}}((c_1,\cdots,c_n;c),(d_1,\cdots,d_m;d)) := \mathcal{P}\left(c,\{d_j\}_{j\in f^{-1}(0)};d\right)\otimes\bigotimes_{i=1,\cdots,n}\mathcal{P}\left(\{d_j\}_{j\in f^{-1}(i)};c_i\right).$$

然后定义

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{Ib}^{\mathcal{P}}}((c_1,\cdots,c_n;c),(d_1,\cdots,d_m;d)) := \coprod_{\langle m\rangle\xrightarrow{f}\langle n\rangle}\mathrm{Map}^{f}_{\mathbf{Ib}^{\mathcal{P}}}((c_1,\cdots,c_n;c),(d_1,\cdots,d_m;d))$$

其中余积遍历 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fin}_*}(m,\ n)$。$\mathbf{Ib}^{\mathcal{P}}$ 的单位态射通过 $\mathcal{P}$ 的单位运算定义；此外，范畴结构映射由 $\mathcal{P}$ 中的复合典范地诱导。

命题 2.2.8。 （[15],§2.2）存在一个范畴同构

$$\mathrm{Fun}(\boldsymbol{Ib}^{\mathcal{P}},\mathcal{S}) \cong \mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$$

在 $\boldsymbol{Ib}^{\mathcal{P}}$ 上的 $\mathcal{S}$ 富化函子与无穷小 $\mathcal{P}$ 双模之间。

记号 2.2.9。当 C 为单元素集时，$\mathbf{Ib}^{\mathcal{P}}$ 的对象可以与非负整数对应起来，记为 $\{0, 1, 2, \cdots\}$。对于 Fin_* 中的每个映射 $f : m \longrightarrow n$，我们有

$$\mathrm{Map}^{f}_{\mathbf{Ib}^{\mathcal{P}}}(\underline{n}, \underline{m}) = \mathcal{P}(k_{f,0}) \otimes \mathcal{P}(k_{f,1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(k_{f,n})$$

其中 $k_{f,\,i} := |f^{-1}(i)|$ 对于 $i = 0, \cdots, n$。

现在我们描述一些例子，以便讨论 §§3-4，此后假设 $C = \{*\}$。

记号 2.2.10. 我们用 $*_{\mathcal{S}}$ 表示具有单个对象的 $\mathcal{S}$-富化范畴，其映射对象为 $1_{\mathcal{S}}$。

例 2.2.11. 我们将记作

$$\underline{0}_!\,[1_{\mathcal{S}}] : \mathbf{Ib}^{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{S}$$

函子 $*_{\mathcal{S}}\ \{1_{\mathcal{S}}\} \longrightarrow \mathcal{S}$ 沿嵌入 $*_{\mathcal{S}}\ \{0\} \longrightarrow \mathbf{Ib}^{\mathcal{P}}$ 的左 Kan 扩张。显然，在如下识别下 函子$(\mathbf{Ib}^{\mathcal{P}}, \mathcal{S}) \simeq \mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$，函子 $0_![1_{\mathcal{S}}]$ 可识别为 $\mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{E}_*)$ （见注2.2.4）。

例 2.2.12. 对于对象 $X \in \mathcal{S}$，我们将 $1_*[X] : \mathbf{Ib}^{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{S}$ 记作函子 $*_{\mathcal{S}}\ \{X\} \longrightarrow \mathcal{S}$ 沿 $*_{\mathcal{S}}\ \{1\} \longrightarrow \mathbf{Ib}^{\mathcal{P}}$的右 Kan 扩张。它在对象上的定义为

$$\underline{1}_*[X](\underline{m}) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{S}}(\mathrm{Map}_{\mathbf{Ib}^{\mathcal{P}}}(\underline{m}, \underline{1}), X).$$

我们将 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Fin}_*}(1, m) = \{\rho_i \,|\, 0 \le i \le m\}$ 记作，其中 $\rho_i : 1 \longrightarrow m$ 定义为 $\rho_i(1) = i$，并记

$$\underline{1}_*[X](\underline{m}) \simeq \prod_{i=0}^{m} T^i_m$$

其中 $T^i_m := \mathrm{Map}_{\mathcal{S}}(\mathrm{Map}^{\rho_i}_{\mathbf{Ib}^{\mathcal{P}}}(\underline{m}, \underline{1}),\ X)$。最后，注意到

$$\mathrm{Map}^{\rho_0}_{\mathbf{Ib}^{\mathcal{P}}}(\underline{m}, \underline{1}) \simeq \mathcal{P}(2) \otimes \mathcal{P}(0)^{\otimes m} \quad \text{and} \quad \mathrm{Map}^{\rho_i}_{\mathbf{Ib}^{\mathcal{P}}}(\underline{m}, \underline{1}) \simeq \mathcal{P}(1)^{\otimes 2} \otimes \mathcal{P}(0)^{\otimes (m-1)}$$

对每个 $1 \le i \le m$。

例 2.2.13. 我们还将 $0_*[X] : \mathbf{Ib}^{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{S}$ 记作 $*_{\mathcal{S}}\ \{X\} \longrightarrow \mathcal{S}$ 沿嵌入 $*_{\mathcal{S}}\ \{0\} \longrightarrow \mathbf{Ib}^{\mathcal{P}}$的右 Kan 扩张。它在对象上的定义为

$$\underline{0}_*[X](\underline{m}) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{S}}(\mathrm{Map}_{\mathbf{Ib}^{\mathcal{P}}}(\underline{m}, \underline{0}), X) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{S}}(\mathcal{P}(1) \otimes \mathcal{P}(0)^{\otimes m}, X).$$

特别地，若 $\mathcal{P}(0) \simeq \mathcal{P}(1) \simeq 1_{\mathcal{S}}$，则对每个 $m \ge 0$，都有 $0_*[X](m) \simeq X$，因此 $0_*[X]$ 可视为取值为 X 的常值函子。

例 2.2.14. 注意到 $\mathbf{Ib}^{\mathrm{Com}}$ 同构于（$\mathcal{S}$-富集版本的）$\mathrm{Fin}^{\mathrm{op}}_*$。因此，$\mathrm{IbMod}(\mathrm{Com})$ 中的每个对象都可以表示为一个函子 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{op}}_* \longrightarrow \mathcal{S}$。在 $\mathcal{S} = \mathcal{C}(\mathbf{k})$ 的情形（见 §3.3），**Pirashvili 函子** $t : \mathrm{Fin}^{\mathrm{op}}_* \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{k})$ 在对象上的定义如下：

$$t(\langle m \rangle) := [\langle m \rangle, \mathbf{k}]_*$$

即，$\mathbf{k}$-模的保基点映射 $\langle m \rangle \longrightarrow \mathbf{k}$，其中 $\mathbf{k}$ 的基点为 $0_{\mathbf{k}}$（见 [26]）。正如我们将在 §3.1中看到的，经过平移后，这个函子 t刻画了**dg E_∞-幺半群**的余切复形。

2.3 自同态构造

在本小节中，我们假设 $(\mathcal{S}, \otimes, 1_{\mathcal{S}})$ 是一个**闭对称幺半范畴**，其底层范畴 $\mathcal{S}$ 存在余等化子。设 $\mathcal{P}$是 C 上的一个带颜色的幺半群，颜色集为C，并设 A 是一个 $\mathcal{P}$-代数。

我们将讨论各种自同态构造，它们自然地将 $\mathcal{P}$-代数（分别地，A-模）与 $\mathcal{P}$-双模（分别地，无穷小 $\mathcal{P}$-双模）联系起来。

对于每一对（M，N）$\in \mathbf{RMod}(\mathcal{P}) \times \mathbf{LMod}(\mathcal{P})$，**相对复合积** $M\bigcirc_{\mathcal{P}} N \in \mathbf{Coll}_C(\mathcal{S})$由 C-集合的余等化子图确定：

$$M \circ \mathcal{P} \circ N \rightrightarrows M \circ N \longrightarrow M \circ_{\mathcal{P}} N.$$

特别地，与 A 取相对复合积（将其视为集中在第 0 级的左 $\mathcal{P}$-模）可得到一个函子

$$(-) \circ_{\mathcal{P}} A : \mathrm{RMod}(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{S}^{\times C}.$$

此外，这个函子可下降为以下函子

$$(-) \circ_{\mathcal{P}} A : \mathrm{BMod}(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathcal{S}), \text{ and}$$
$$(-) \circ_{\mathcal{P}} A : \mathrm{IbMod}(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathrm{Mod}^{A}_{\mathcal{P}}.$$

现在我们来构造这些函子的相应右伴随。

构造 2.3.1. 对于 $\mathcal{S}^{\times C}$ 中的一对对象（X，Y），**自同态对象**$\mathbf{End}_{X,\,Y}$是通过如下定义的 C-集合：

$$\mathrm{End}_{X,Y}(c_1,\cdots,c_n;c) \coloneqq \mathrm{Map}_{\mathcal{S}}(X(c_1)\otimes\cdots\otimes X(c_n), Y(c)).$$

右 Σ_n-作用通过置换因子 $X(c_i)$自然产生。特别地，与**相关的自同态幺半群**为 X $\mathbf{End}_X \coloneqq \mathrm{End}_{X,\,X}$。更多细节请参阅 [8, 29]。

命题2.3.2。构造$(-)\circ_{\mathcal{P}} A$ 和 $\mathit{End}_{A,\,-}$ 确定了以下伴随：

(i) $(-)\bigcirc_{\mathcal{P}} A : \mathbf{RMod}(\mathcal{P}) \rightleftarrows \mathcal{S}^{\times C} : \mathit{End}_{A,\,-}$，(ii) $(-)\bigcirc_{\mathcal{P}} A : \mathbf{BMod}(\mathcal{P}) \rightleftarrows \mathbf{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathcal{S}) : \mathit{End}_{A,\,-}$，以及

(iii) $(-)\bigcirc_{\mathcal{P}} A : \mathbf{IbMod}(\mathcal{P}) \rightleftarrows$ 模范畴$^{A}_{\mathcal{P}} : \mathit{End}_{A,\,-}$.

证明。前两个伴随已在 [8, 29], 中建立，而另一个则包含在 [16]中。 □

注 2.3.3. 由于识别 $\mathcal{P}\bigcirc_{\mathcal{P}} A \cong A$，我们可以将上述伴随合并为一个伴随的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{RMod}(\mathcal{P})_{\mathcal{P}/} & \underset{\top}{\rightleftarrows} & \mathrm{IbMod}(\mathcal{P})_{\mathcal{P}/} & \underset{\top}{\rightleftarrows} & \mathrm{BMod}(\mathcal{P})_{\mathcal{P}/} \\
{\scriptstyle (-)\circ_{\mathcal{P}} A}\downarrow \dashv \uparrow{\scriptstyle \mathrm{End}_{A,-}} & & {\scriptstyle \mathrm{End}_{A,-}}\uparrow \dashv \downarrow{\scriptstyle (-)\circ_{\mathcal{P}} A} & & {\scriptstyle \mathrm{End}_{A,-}}\uparrow \dashv \downarrow{\scriptstyle (-)\circ_{\mathcal{P}} A} \\
(\mathcal{S}^{\times C})_{A/} & \underset{\top}{\leftrightarrows} & (\mathrm{Mod}^{A}_{\mathcal{P}})_{A/} & \underset{\top}{\leftrightarrows} & (\mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathcal{S}))_{A/}
\end{array} \tag{2.3.1}$$

其中，水平方向的各对由诱导-限制函子的伴随给出（参见注2.1.11 和 2.2.5）。

注 2.3.4。自由 A-模函子，记作 $\mathrm{Free}_A : \mathcal{S}^{\times C} \longrightarrow$模范畴$^{A}_{\mathcal{P}}$，描述如下。设 $X \in \mathcal{S}^{\times C}$ 给定，并将其视为一个集中在第 C 层的 0-集族。结合命题 2.3.2(iii) 中的伴随与注2.2.4，我们得到 模范畴$^{A}_{\mathcal{P}}$ 中的一列同构：

$$\mathrm{Free}_A(X) \cong \mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{P}}(X)\circ_{\mathcal{P}} A \cong (\mathcal{P}\circ_{(1)} X)\circ_{\mathcal{P}} A.$$

此外，当 $C = \{*\}$ 和 $X = 1_{\mathcal{S}}$ 时，我们得到

$$\mathrm{Free}_A(1_{\mathcal{S}}) \cong (\mathcal{P}\circ_{(1)} \mathcal{E}_*)\circ_{\mathcal{P}} A.$$

这为 **泛包络代数**提供了一个模型，它属于 A。（另请参见 [16, §5。2] 了解更多详情。）

2.4 切范畴与 Quillen 上同调

我们简要概述建立余切复形形式体系和*Quillen* 上同调的方法。更多细节请参见 [15, 16, 14, 12]。

设$\mathbf{M}$ 是一个**半模型范畴**（参见 [31, 8]）。根据定义，如果$\mathbf{M}$ 包含一个弱零对象0，且它既是同伦初始对象又是终对象，则称$\mathbf{M}$ 是**弱指点**的。

Defi定义 2.4.1. 如果以下等价条件成立，则称$\mathbf{M}$是**稳定**的：

(i) ∞-**范畴** $\mathbf{M}_\infty$ 的**底层**范畴按照 [21] 的意义是稳定的。(ii) $\mathbf{M}$ 是弱指点的，并且$\mathbf{M}$ 中的方形是同伦余笛卡尔的，当且仅当它是同伦笛卡尔的。(iii) $\mathbf{M}$ 是弱指点的，并且该伴随

$$\Sigma : \mathrm{Ho}(\mathbf{M}) \rightleftarrows \mathrm{Ho}(\mathbf{M}) : \Omega$$

悬挂函子和降悬函子构成伴随等价。

接下来，假设 $\mathbf{M}$ 是一个弱指点半模型范畴。对于一个 $\mathbf{M}$ 上的 $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$-图$X$ $\epsilon^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$，我们将如下形式的方形称为

$$\begin{array}{ccc} X_{n,n} & \longrightarrow & X_{n,n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{n+1,n} & \longrightarrow & X_{n+1,n+1} \end{array}$$

作为**对角方形**。

定义 2.4.2。$\mathbf{M}$ 中的一个 $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$-图称为

(1) 若其所有非对角项都是$\mathbf{M}$中的弱零对象，则称为**预谱**；(2) 若它是预谱且所有对角方形都是同伦笛卡尔的，则称为 Ω-**谱**；(3) 若它是预谱且所有对角方形都是同伦余笛卡尔的，则称为**悬挂谱**。

我们用 $\mathbf{M}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}{}_{\mathrm{proj}}$ 表示$\mathbf{M}$中 $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$-图的投射半模型范畴 .

定义 2.4.3. 若映射 $f : X \longrightarrow Y$ in $\mathbf{M}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ 对每个 Ω-谱 Z 所诱导的导出映射空间之间的映射

$$\mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathbf{M}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}_{\mathrm{proj}}}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathbf{M}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}_{\mathrm{proj}}}(X,Z)$$

是弱等价。

The 构造稳定近似的过程依赖于以下定义。

定义 2.4.4. 设$\mathbf{M}$ 是一个弱带基点组合半模型范畴，且生成余纤维化的定义域均为余纤维对象。稳定化 Sp(M) 是$\mathbf{M}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}{}_{\mathrm{proj}}$ 在以 Ω-谱为局部对象时的左 Bousfield 局部化。更明确地说，Sp(M) 是一个余纤维生成半模型范畴，使得

(i) 弱等价恰好是稳定等价，且 d
(ii) （生成）余纤维化与 $\mathbf{M}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}{}_{\mathrm{proj}}$ 的相同。

特别地，Sp(M) 是一个稳定半模型范畴，其中纤维对象恰好是逐层纤维的 Ω-谱。

注 2.4.5. 存在一个 Quillen 伴随

$$\Sigma^\infty : \mathbf{M} \rightleftarrows \mathrm{Sp}(\mathbf{M}) : \Omega^\infty$$

其中，$\Omega^\infty(X) = X_{0,\ 0}$ 而 $\Sigma^\infty(A)$ 是取值为 $A \in \mathbf{M}$ 的常值图表。

在下文中，我们假设 $\mathbf{M}$ 满足定义 2.4.4 的假设，并令 $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{M})$ 为一个固定对象。

记号 2.4.6. 我们用$\mathbf{M}^{A//A}$ 表示 A上的对象范畴。具体而言，$\mathbf{M}^{A//A}$ 中的一个对象是$\mathbf{M}$ 中的映射序列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$，满足 $g \bigcirc f = \mathrm{Id}_A$。

我们将$\mathbf{M}^{A//A}$ 视为一个（严格）基点范畴，其零对象由 A上的恒等映射序列给出。它继承了从$\mathbf{M}$上的半模型结构传递而来的半模型结构。

De定义 2.4.7. A 处的**切范畴**是$\mathbf{M}^{A//A}$的稳定化：

$$\mathcal{T}_A\mathbf{M} := \mathrm{Sp}(\mathbf{M}_{A//A}).$$

记 $\Sigma^\infty_+ : \mathbf{M}_{/A} \rightleftarrows \mathcal{T}_A\mathbf{M} : \Omega^\infty_+$为 Quillen 伴随，其中对于 $B \in \mathbf{M}_{/A}$ 和$X \in \mathcal{T}_A\mathbf{M}$，有

$$\Sigma^\infty_+(B) = \Sigma^\infty(A \longrightarrow A \sqcup B \longrightarrow A), \text{ and}$$
$$\Omega^\infty_+(X) = (X_{0,0} \longrightarrow A).$$

定义 2.4.8. A 的**余切复形**是 $A \in \mathbf{M}_{/A}$的导出悬挂谱：

$$\mathrm{L}_A := \mathbb{L}\Sigma^\infty_+(A) \in \mathcal{T}_A\mathbf{M}.$$

Mo更一般地，对于$\mathbf{M}$中的映射 $f : A \longrightarrow B$， f的**相对余切复形** is

$$\mathrm{L}_{B/A} := \mathrm{hocofib}\,[\,\mathbb{L}\Sigma^\infty_+(f) \longrightarrow \mathrm{L}_B\,],$$

即， $\mathcal{T}_B\mathbf{M}$中映射 $\mathbb{L}\Sigma^\infty_+(f) \longrightarrow \mathrm{L}_B$ 的同伦余纤维。

注 2.4.9. 映射 $\mathbb{L}\Sigma^\infty_+(f) \longrightarrow \mathrm{L}_B$ 与典范映射弱等价 $f_!(\mathrm{L}_A) \longrightarrow \mathrm{L}_B$，其中 $f_!$ 指诱导的左 Quillen 函子 $f_! : \mathcal{T}_A\mathbf{M} \longrightarrow \mathcal{T}_B\mathbf{M}$ (详见 [15, §2.5] 了解更多详情)。

现在我们可以给出主要定义了。

定义 2.4.10. 假设 $A \in \mathbf{M}$ 是一个纤维对象。 A 在对象 $M \in \mathcal{T}_A\mathbf{M}$ 中的系数下的 Quillen 上同调是空间

$$\mathrm{HQ}^\star(A; M) := \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{T}_A\mathbf{M}}(\mathrm{L}_A, M).$$

此外， n **阶 Quillen 上同调群**为

$$\mathrm{HQ}^n(A; M) := \pi_0\,\mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{T}_A\mathbf{M}}(\mathrm{L}_A, M[n])$$

其中 $M[n]$ 表示 $\mathcal{T}_A\mathbf{M}$中的 M 的 n-重悬挂。

注 2.4.11. 设 $A \in \mathbf{M}$ 为纤维对象。由 Quillen 伴随 $\Sigma^\infty_+ : \mathbf{M}_{/A} \rightleftarrows \mathcal{T}_A\mathbf{M} : \Omega^\infty_+$, 对每个 $M \in \mathcal{T}_A\mathbf{M}$，都有一个典范弱等价

$$\mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathbf{M}_{/A}}(A, \mathbb{R}\Omega^\infty_+ M) \simeq \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{T}_A\mathbf{M}}(\mathrm{L}_A, M) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{HQ}^\star(A; M).$$

2.5 一些基范畴与幺半群模型结构

我们假设 $(\mathcal{S}, \otimes, 1_{\mathcal{S}})$ 是一个**对称幺半模型范畴**，其模型结构是余纤维生成的，且幺半单位 $1_{\mathcal{S}}$ 是余纤维对象。

设 $\mathcal{P}$ 是 C 中一个以 C 为颜色集的着色幺半群，且 A 是一个 $\mathcal{P}$-代数。若 $\mathcal{P}$ 在 $\mathrm{Coll}_C(\mathcal{S})$ 中相对于从 $\mathcal{S}$ 转移而来的（投射）模型结构是余纤维的，我们就称 $\mathcal{P}$ 为 **余纤维的**。

定义 2.5.1。如果存在，$\mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathcal{S})$ 上的**转移模型（或半模型）结构**是沿自由-遗忘伴随 $\mathcal{S}^{\times C} \rightleftarrows \mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathcal{S})$ 转移得到的结构。更具体地说，它是一个余纤维生成的（半）模型范畴，其中弱等价（分别为纤维化）恰为逐层弱等价（分别为逐层纤维化）。

注 2.5.2. 我们记

$$\mathbb{A} := \{\mathrm{Op}_C(\mathcal{S}), \mathrm{LMod}(\mathcal{P}), \mathrm{RMod}(\mathcal{P}), \mathrm{BMod}(\mathcal{P}), \mathrm{IbMod}(\mathcal{P}), \mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathcal{S}), \mathrm{Mod}^A_{\mathcal{P}}\}. \tag{2.5.1}$$

$\mathbb{A}$ 中的每个范畴都可以表示为某个幺半群上的代数范畴，或表示为取值于 $\mathcal{S}$ 的、定义在某个富化范畴上的函子范畴（详见 [15] ）。根据 [8, 31]，$\mathrm{Op}_C(\mathcal{S})$ 上的转移半模型结构存在。只要 $\mathcal{P}$ 是 Σ-余纤维的，同样的结论也适用于 $\mathrm{LMod}(\mathcal{P})$、$\mathrm{BMod}(\mathcal{P})$ 和 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathcal{S})$ 等范畴。与此同时，当 $\mathcal{P}$ 逐层余纤维时，$\mathrm{RMod}(\mathcal{P})$ 和 $\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$ 具有转移的（完整）模型结构。此外，只要 $\mathcal{P}$ 是 Σ-余纤维的，且 $A \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathcal{S})$ 是余纤维的，$\mathrm{Mod}^A_{\mathcal{P}}$ 上就存在转移模型结构。

接下来，我们讨论 $\mathcal{S}$-富化拟运算子的同伦论。

定义 2.5.3. $\mathrm{Op}(\mathcal{S})$ 中的映射 $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ 称为**逐层弱等价**，如果对于 $\mathcal{P}$ 的每个颜色序列 $(c_1, \cdots, c_n; c)$，诱导映射

$$\mathcal{P}(c_1, \cdots, c_n; c) \longrightarrow \mathcal{Q}(f(c_1), \cdots, f(c_n); f(c))$$

是 $\mathcal{S}$ 中的弱等价。此外，逐层（余）纤维化和逐层平凡（余）纤维化也以类似方式定义。

同伦范畴$\mathrm{Ho}(\mathcal{P})$ 是一个（普通）范畴，其对象是 $\mathcal{P}$的颜色，而其态射由下式给出

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{P})}(c, d) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{S})}(1_{\mathcal{S}}, \mathcal{P}(c; d)).$$

定义 2.5.4. (1) $\mathrm{Op}(\mathcal{S})$ 中的映射 $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ 称为**Dwyer-Kan 等价**，如果它是逐层弱等价，且诱导函子

$$\mathrm{Ho}(f) : \mathrm{Ho}(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{Q})$$

在同伦范畴之间本质满。

（2）$\mathrm{Op}(\mathcal{S})$ 中的映射是**Dwyer-Kan 平凡纤维化**，当且仅当它是逐层平凡纤维化且在颜色上满射。

注 2.5.5。在 [5]，中，Caviglia 引入了 $\mathrm{Op}(\mathcal{S})$ 上的**Dwyer-Kan 模型结构**这一概念，其弱等价（分别是平凡纤维化）恰好是 Dwyer-Kan 等价（分别是 Dwyer-Kan 平凡纤维化）。

例 2.5.6。在这里，我们介绍一些将作为本文研究背景的基范畴。设$\mathbf{k}$ 是一个交换环。

（1）我们赋予范畴 Set_{Δ} 中的**单纯集合**以笛卡尔幺半结构和经典（*Kan-Quillen*）模型结构。

（2）我们用 sMod(k) 表示**单纯 k-模**的范畴，其上配备了在k 上的（逐次）张量积，以及由 Set_Δ 上的经典模型结构转移而来的模型结构。

(3) 我们用 $\mathcal{C}(\mathbf{k})$（分别用 $\mathcal{C}_{\geqslant 0}(\mathbf{k})$）表示**微分分次 k-模**（分别表示**连通微分分次 k-模**，即集中于非负次数的那些）的范畴。这两个范畴都配备链复形的通常张量积和投射模型结构，其中弱等价恰为拟同构，而 $\mathcal{C}(\mathbf{k})$（分别是 $\mathcal{C}_{\geqslant 0}(\mathbf{k})$）中的纤维化为逐次数满射的映射（分别为每个正次数上满射的映射）。

(4) 设 R 是 $\mathcal{C}_{\geqslant 0}(\mathbf{k})$ 中的交换幺半群。我们也关注范畴 Mod_R（R-**模对象，位于** $\mathcal{C}_{\geqslant 0}(\mathbf{k})$ 中）。该范畴配备通常的张量积 $-\otimes_R -$ 以及从 $\mathcal{C}_{\geqslant 0}(\mathbf{k})$ 上的模型结构传递而来的投射模型结构。

注 2.5.7. 对于 $\mathcal{S}=\mathrm{Set}_\Delta$ 或 sMod(k)，$\mathbb{A}$ (2.5.1) 中的每个范畴对任意 $\mathcal{P}\in\mathrm{Op}_C(\mathcal{S})$ 和 $A\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathcal{S})$ 都具有传递得到的（完整）模型结构。例如，这可由 [25]，的结果结合注 2.5.2 得出。此外，在此情形下，Op($\mathcal{S}$) 上的 Dwyer-Kan 模型结构也存在（见 [5]）。

注 2.5.8. 对于 $\mathcal{S}$ 如例 2.5.6(3-4) 所示，在 $\mathbb{A}$ 中的每个范畴上转移得到的同伦论（至少）在适当假设下构成半模型范畴，如注2.5.2所述。此外，$\mathrm{Op}(\mathcal{S})$ 上存在一个 余纤维生成半模型结构，其弱等价和生成（平凡）余纤维化如 [5, 定理 8 所述。6]我们称之为在 $\mathrm{Op}(\mathcal{S})$ 上的Dwyer-Kan 半模型结构。此外，只要 k 包含有理数域 $\mathbb{Q}$，以上这些结构都存在为（完整）模型范畴。

2.6 更多记号

设 $(\mathcal{S},\otimes,1_{\mathcal{S}})$ 是一个合适的对称幺半模型范畴。设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{S}$ 中的一个 C-着色幺半群，并设 A 是一个 $\mathcal{P}$-代数。除已引入的记号外，我们还将使用以下记号。

(i) 对于对象 $X\in\mathcal{S}$，我们用 $|X|:=\mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{S}}(1_{\mathcal{S}},X)$ 表示从 $1_{\mathcal{S}}$ 到X 的导出映射空间，并称其为 X 的**底层空间**。(ii) 对于整数 $n\geq 0$，我们用 $\mathbb{S}^n:=\Sigma^n(1_{\mathcal{S}}\amalg^{\mathrm{h}}1_{\mathcal{S}})$ 表示同伦余积 $1_{\mathcal{S}}\amalg^{\mathrm{h}}1_{\mathcal{S}}\in\mathcal{S}_{1_{\mathcal{S}}//1_{\mathcal{S}}}$ 的 n- 重悬挂，并称 $\mathbb{S}^n$ 为 $\mathcal{S}$ 中的（**带基点**）**- 球面**。(iii) 我们将用 $\mathcal{P}^{\mathrm{b}}$ 和 $\mathcal{P}^{\mathrm{i}}$ 分别表示视为 BMod($\mathcal{P}$) 和 IbMod($\mathcal{P}$) 中对象的 $\mathcal{P}$ 本身。(iv) 对于与 $\mathcal{P}$ 和 A 有关的各种余切复形，我们将使用以下记号：

- $\mathbb{L}_{\mathcal{P}}\in\mathcal{T}_{\mathcal{P}}\mathrm{Op}(\mathcal{S})$：将 $\mathcal{P}$ 视为 Op($\mathcal{S}$) 中对象时的余切复形。
- $\mathbb{L}_{\text{约化 }\mathcal{P}}\in\mathcal{T}_{\mathcal{P}}\mathrm{Op}_C(\mathcal{S})$：将 $\mathcal{P}$ 视为 $\mathrm{Op}_C(\mathcal{S})$ 中的对象时的余切复形。
- $\mathbb{L}_A\in\mathcal{T}_A\mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathcal{S})$：将 A 视为 $\mathcal{P}$-代数时的余切复形。

(v) 我们将.....记为

$$\mathrm{HQ}^\star(\mathcal{P};-)\ \text{ and }\ \mathrm{HQ}^\star_{\mathrm{red}}(\mathcal{P};-)$$

$\mathcal{P}$ 分别作为 Op($\mathcal{S}$) 和 $\mathrm{Op}_C(\mathcal{S})$ 中的对象时的 Quillen 上同调。前者称为 $\mathcal{P}$ 的（**适当**）**Quillen 上同调**（由 $\mathbb{L}_{\mathcal{P}}$ 分类），后者称为其 **约化 Quillen 上同调**（由约化余切复形$\mathbb{L}^{\mathrm{red}}_{\mathcal{P}}$ 分类）。

此外，我们用 $\mathrm{HQ}^\star(A;-)$ 表示 A 作为 $\mathcal{P}$-代数的**Quillen 上同调**。

3. 微分分次幺半群的 Quillen 上同调

设$\mathbf{k}$为一个固定的交换环。在本节中，我们工作于基范畴$\mathcal{S}=\mathcal{C}(\mathbf{k})$或$\mathcal{C}_{\geq 0}(\mathbf{k})$（参见例2.5.6）。相关的幺半群（半）模型结构如§2.5所述。

我们首先给出微分分次幺半群余切复形的显式描述。随后说明，微分分次歌剧上的代数的余切复形如何由歌剧本身的余切复形控制。特别地，我们也考虑**微分分次 E_∞-歌剧**的情形。

3.1 微分分次算子代数的余切复形

我们先回顾以下基本定理。

定理 3.1.1。 ([15]) 设给定一个基范畴 $\mathcal{S}$ 以及一个 C-着色幺半群 $\mathcal{P}\in \mathrm{Op}_C(\mathcal{S})$，其颜色集为 C。

(1) 假设 $\mathcal{S}$ 是稳定充分的（参见 *[15,§3]*），且 $\mathcal{P}$ 是 Σ-余纤维的。存在一列自然的 *Quillen* 等价

$$\mathrm{IbMod}(\mathcal{P}) \underset{\iota}{\overset{\simeq}{\rightleftarrows}} \mathcal{T}_{\mathcal{P}^{\mathrm{i}}}\mathrm{IbMod}(\mathcal{P}) \underset{\iota}{\overset{\simeq}{\rightleftarrows}} \mathcal{T}_{\mathcal{P}^{\flat}}\mathrm{BMod}(\mathcal{P}) \underset{\iota}{\overset{\simeq}{\rightleftarrows}} \mathcal{T}_{\mathcal{P}}\mathrm{Op}_C(\mathcal{S}) \underset{\iota}{\overset{\simeq}{\rightleftarrows}} \mathcal{T}_{\mathcal{P}}\mathrm{Op}(\mathcal{S}) \tag{3.1.1}$$

（记号见 *§2.6* ）。这里，第一个伴随由复合的 *Quillen* 等价给出

$$\mathrm{IbMod}(\mathcal{P}) \underset{\ker}{\overset{(-)\oplus\mathcal{P}^{\mathrm{i}}}{\underset{\iota}{\rightleftarrows}}} \mathrm{IbMod}(\mathcal{P})_{\mathcal{P}^{\mathrm{i}}//\mathcal{P}^{\mathrm{i}}} \underset{\Omega^\infty}{\overset{\Sigma^\infty}{\rightleftarrows}} \mathcal{T}_{\mathcal{P}^{\mathrm{i}}}\mathrm{IbMod}(\mathcal{P}),$$

而其余的则由诱导-限制函子的伴随诱导（参见注*2.1.5*、*2.1.8* 和*2.2.5*）。

(2) 进一步假设 $\mathcal{S}$ 是稳定丰足的（参见 *[15, §3]*），且 $\mathcal{P}\in \mathrm{Op}_C(\mathcal{S})$ 是余纤维的，并且按照 *[15, §5.1]* 的定义是良好的。在等价 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}\mathrm{Op}(\mathcal{S}) \simeq \mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$ 下，余切复形 $L_{\mathcal{P}}\in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}\mathrm{Op}(\mathcal{S})$ 与 $L_{\mathcal{P}}[-1]\in \mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$ 相对应，其中 $L_{\mathcal{P}}$ 在每一级由下式给出

$$\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}(c_1,\cdots,c_m;c) \simeq \mathcal{P}(c_1,\cdots,c_m;c)\otimes \mathrm{hocolim}_n\, \Omega^n[\,(\mathrm{S}^n)^{\otimes m}\times^{\mathrm{h}}_{k} 0\,]. \tag{3.1.2}$$

此处S^n指的是 n-球面 $\mathcal{S}$（见 *§2.6* (*ii*)）。

现在令 $\mathcal{P}\in \mathrm{Op}_C$（$\mathcal{C}(\mathbf{k})$为 C-着色的幺半群 $\mathcal{C}(\mathbf{k})$。下面概述推导定理3.1.7 的步骤。

定义 3.1.2. 若 $\mathcal{C}(\mathbf{k})$中的一个幺半群是 Σ-余纤维且**连通**的，则称其为**适当的**，这里的连通性是指它来自 $\mathcal{C}_{\geq 0}(\mathbf{k})$中的一个幺半群。

注 3.1.3。 定理3.1.1（2）的陈述对于适当的微分分次幺半群已经成立。事实上，首先注意到范畴 $\mathcal{C}(\mathbf{k})$是稳定丰足的。假设 $\mathcal{P}$ 是适当的，并考虑 $\mathcal{Q}\xrightarrow{\simeq}\mathcal{P}$ 关于 $\mathcal{P}\in \mathrm{Op}_C(\mathcal{C}_{\geq 0}(\mathbf{k}))$ §5.1], 中所讨论的，幺半群 $\mathcal{Q}$ 自动是良好的。此外，我们有一个由 Quillen 等价组成的交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{IbMod}(\mathcal{Q}) & \underset{\perp}{\overset{\simeq}{\rightleftarrows}} & \mathrm{IbMod}(\mathcal{P}) \\ \simeq\dashv & & \dashv\simeq \\ \mathcal{T}_{\mathcal{Q}}\mathrm{Op}(\mathcal{C}(\mathbf{k})) & \underset{\top}{\overset{\simeq}{\rightleftarrows}} & \mathcal{T}_{\mathcal{P}}\mathrm{Op}(\mathcal{C}(\mathbf{k})). \end{array}$$

我们通过如下观察推出该结论：下方的 Quillen 等价将 $\mathrm{L}_{\mathcal{Q}}$ 与 $\mathrm{L}_{\mathcal{P}}$ 等同，而上方的那个将 $\mathrm{L}_{\mathcal{Q}}$ 与 $\mathrm{L}_{\mathcal{P}}$ 等同。

为了更具体地描述 $\mathrm{L}_{\mathcal{P}}$，我们进行如下简单计算。

引理 3.1.4. 对于每个 C-序列 $(c_1,\cdots,c_m;c)$，存在一个弱等价

$$\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}(c_1,\cdots,c_m;c)\simeq\mathcal{P}(c_1,\cdots,c_m;c)^{\oplus m}.$$

证明。 首先，我们有

$$(\mathrm{S}^n)^{\otimes m}\ \simeq\ (\mathbf{k}\oplus\mathbf{k}[n])^{\otimes m}\ \cong\ \bigoplus_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\mathbf{k}[in],$$

由此进一步得到

$$\Omega^n[\,(\mathrm{S}^n)^{\otimes m}\times^{\mathrm{h}}_{\mathbf{k}}0\,]\ \simeq\ \Omega^n\left(\bigoplus_{i=1}^{m}\binom{m}{i}\mathbf{k}[in]\right)\ \simeq\ \bigoplus_{i=1}^{m}\binom{m}{i}\mathbf{k}[(i-1)n].$$

因此我们可以写成

$$\mathrm{hocolim}_n\,\Omega^n[\,(\mathrm{S}^n)^{\otimes m}\times^{\mathrm{h}}_{\mathbf{k}}0\,]\ \simeq\ \bigoplus_{i=1}^{m}\binom{m}{i}\,\mathrm{hocolim}_n\,\mathbf{k}[(i-1)n].$$

注意到，对于每个 $i>1$，复形 $\mathbf{hocolim}_n\mathbf{k}[(i-1)n]$ 都消失，这是因为同调函子与滤过余极限可交换。对于 $i=1$ 的情形，存在一个显然的拟同构 $\mathbf{hocolim}_n\mathbf{k}[(i-1)n]\simeq\mathbf{k}$。因此，我们得到

$$\mathrm{hocolim}_n\,\Omega^n[\,(\mathrm{S}^n)^{\otimes m}\times^{\mathrm{h}}_{\mathbf{k}}0\,]\ \simeq\ \mathbf{k}^{\oplus m},$$

由此证明完成。 □

注 3.1.5。$\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}$ 上的无穷小 $\mathcal{P}$-双模结构描述如下。

（i）作为无穷小左 $\mathcal{P}$-模，$\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}$ 由 $\mathcal{I}_C$ 自由生成。因此我们可以写成

$$\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}\cong\mathcal{P}\circ_{(1)}\mathcal{I}_C$$

（见注 2.2.4）。

（ii）对于（无穷小）右 $\mathcal{P}$-作用，我们需要定义如下形式的映射

$$\circ^{\mathrm{ir}}:\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}(c_1,\cdots,c_m;c)\otimes\mathcal{P}(d_1,\cdots,d_n;c_j)\longrightarrow\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}(c_1,\cdots,c_{j-1},d_1,\cdots,d_n,c_{j+1},\cdots,c_m;c)$$

（见注 2.2.2）。这包括对每个 $i\in\{1,\ \cdots,\ m\}$，一个分量映射

$$\circ^{\mathrm{ir}}:\mathcal{P}(c_1,\cdots,c_m;c)^{\{c_i\}}\otimes\mathcal{P}(d_1,\cdots,d_n;c_j)\longrightarrow\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}(c_1,\cdots,c_{j-1},d_1,\cdots,d_n,c_{j+1},\cdots,c_m;c)$$

其中，$\mathcal{P}(c_1,\ \cdots,\ c_m;\ c)^{\{c_i\}}$ 表示 $\mathcal{P}(c_1,\ \cdots,\ c_m;\ c)$本身作为 $\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}(c_1,\ \cdots,\ c_m;\ c)$的一个直和项，该直和项对应于 c_i。当 $i\neq j$时，后一个映射由 $\mathcal{P}$中的复合诱导：

$$\mathcal{P}(c_1,\cdots,c_m;c)^{\{c_i\}}\otimes\mathcal{P}(d_1,\cdots,d_n;c_j)\longrightarrow\mathcal{P}(c_1,\cdots,c_{j-1},d_1,\cdots,d_n,c_{j+1},\cdots,c_m;c)^{\{c_i\}}.$$

当 $i=j$， 映射 $\bigcirc^{\mathrm{ir}}$ 可分解为一次幺半群代数组合，随后接一个对角映射 ：

$$\mathcal{P}(c_1,\cdots,c_m;c)^{\{c_j\}}\otimes\mathcal{P}(d_1,\cdots,d_n;c_j)\longrightarrow\bigoplus_{k=1}^{n}\mathcal{P}(c_1,\cdots,c_{j-1},d_1,\cdots,d_n,c_{j+1},\cdots,c_m;c)^{\{d_k\}}.$$

注 3.1.6. 从集合论视角看，运算 $\bigcirc^{\mathrm{ir}}$ 定义如下。对于 $\mu\in\mathcal{P}(c_1,\cdots,c_m;\ c)$ 以及每个 $i\in\{1,\cdots,m\}$，我们将 $\mu^{\{c_i\}}\in\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}(c_1,\cdots,c_m;c)$ 所表示的元素记作 μ，并视为属于直和项 $\mathcal{P}(c_1,\cdots,c_m;c)^{\{c_i\}}$。于是，对于 $\lambda\in\mathcal{P}(d_1,\cdots,d_n;c_j)$，我们定义

$$\mu^{\{c_i\}}\circ^{\mathrm{ir}}\lambda\ =\ \begin{cases}(\mu\circ\lambda)^{\{c_i\}} & \text{if } j\neq i\\ \sum_{k=1}^{n}(\mu\circ\lambda)^{\{d_k\}} & \text{if } j=i\end{cases}$$

其中，按照惯例，$-\bigcirc-$ 表示运算的（部分）复合。

我们现在陈述本截面的主要结果。

定理 3.1.7. 假设 $\mathcal{P} \in \mathrm{Op}_{C}(\mathcal{C}(\boldsymbol{k}))$ 是适当的（见定义 *3.1.2*）。

(i) 在等价 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}\mathrm{Op}(\mathcal{C}(\boldsymbol{k})) \simeq \mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$下，余切复形 $\mathrm{L}_{\mathcal{P}}$ 可识别为$\mathrm{L}_{\mathcal{P}}[-1] \in \mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$，其中$\mathrm{L}_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}\circ_{(1)} \mathcal{I}_{C}$ 在每个层级上由下式给出

$$\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}(c_1, \cdots, c_m; c) = \mathcal{P}(c_1, \cdots, c_m; c)^{\oplus m},$$

具有无穷小 $\mathcal{P}$-双模结构，如注 *3.1.5*所述。

(ii) 因此，$\mathcal{P}$ 关于系数为对象 $M \in \mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$ 的 ***Quillen*** 上同调表述为

$$\mathrm{HQ}^{\star}(\mathcal{P}; M) \simeq \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})}(\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}[-1], M),$$

而第 n 个 ***Quillen*** 上同调群由下式给出

$$\mathrm{HQ}^{n}(\mathcal{P}; M) \cong \pi_0 \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})}(\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}, M[n+1]).$$

在本小节的其余部分，我们将讨论对象 $\mathrm{L}_{\mathcal{P}} \in \mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$ 的一些关键性质。

注 3.1.8. 对象 $\mathrm{L}_{\mathcal{P}}$ 已在 [8, §10.3] 和 [23, §7.2] 中作为右 $\mathcal{P}$-模范畴，用来控制 **Kähler 微分模** 的 $\mathcal{P}$-代数。我们将在下文的推论 3.1.13中重新讨论这一结果。

定义 3.1.9. 设 A 是一个 $\mathcal{P}$-代数，且 $N \in$模范畴$_{\mathcal{P}}^{A}$ 是一个 A-模。

(1) 从 A **到** N 的**导子** 是一个映射 $\delta : A \longrightarrow N$，属于 $\mathcal{C}(\mathbf{k})^{\times C}$，由一组映射$\delta = \{A(c) \xrightarrow{\delta_c} N(c)\}_{c \in C}$给出，满足如下形式的方程

$$\delta_c(\mu \cdot (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)) = \sum_{i=1}^{m} \mu \cdot (\alpha_1, \cdots, \delta_{c_i}(\alpha_i), \cdots, \alpha_m) \tag{3.1.3}$$

其中 $\mu \in \mathcal{P}(c_1, \cdots, c_m; c)$ 以及 $\alpha_i \in A(c_i)$ 对于 $i = 1, \cdots, m$(例如参见 [18, 8])。我们用$\mathrm{Der}(A, N)$ 表示 **从** A**到** N的导子集合。

(2) A的**Kähler 微分模**记作 Ω_A，它是表示函子 $N \mapsto \mathrm{Der}(A, N)$ 的 A-模。也就是说，存在如下形式的自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{A}_{\mathcal{P}}}(\Omega_A, N) \cong \mathrm{Der}(A, N).$$

注 3.1.10. 另外，Ω_A 还可以如下刻画。余积 $A \oplus N$（作为 $\mathcal{C}(\mathbf{k})^{\times C}$ 中的对象）具有典范的 $\mathcal{P}$-代数结构，定义在 A 上，称为 A**通过** N得到的**平方零扩张**，记作 $A \ltimes N$（见 [18, §12.3.3]）。此外，该构造确定了一个右伴随

$$A \ltimes (-) : \mathrm{Mod}^{A}_{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathcal{C}(\mathbf{k}))_{/A}.$$

我们记 作相应的左伴随 $\Omega^{/A}$。于是可以验证 $\Omega_A \cong \Omega^{/A}(\mathrm{Id}_A)$.

我们引入以下概念。

定义 3.1.11. 设 $M \in \mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$ 是一个无穷小 $\mathcal{P}$-双模。在 M 上的**切结构**是 C-簇之间的一个映射 $\varepsilon : \mathcal{I}_C \to M$，由一族 $\varepsilon = \{\varepsilon_c \in M(c; c) \mid c \in C\}$ 给出，其中每个 ε_c 的次数均为 0，并且对任意 $\mu \in \mathcal{P}(c_1, \cdots, c_m; c)$，下述关系成立：

$$\varepsilon_c \circ^{\mathrm{ir}} \mu = \sum_{i=1}^{m} \mu \circ^{i\ell} \varepsilon_{c_i} \tag{3.1.4}$$

（记号见定义2.2.1 ）。我们用$\mathrm{Tan}_{\mathcal{P}}(M)$ 表示**在** M上的切结构集合。

下面的陈述说明了这一概念的主要意义。

命题 3.1.12. 设 A 是一个 $\mathcal{P}$-代数， N 是一个 A-模，且 M 是一个无穷小 $\mathcal{P}$-双模。

(1) 存在如下形式的自然同构

$$Hom_{\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})}(\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}, M) \cong \mathrm{Tan}_{\mathcal{P}}(M).$$

(2) 存在一个自然同构

$$\mathrm{Der}(A, N) \cong \mathrm{Tan}_{\mathcal{P}}(End_{A,N})$$

将从 A 到 N 的导子与 *End* 上的切结构对应起来$_{A,\ N}\in\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$ *(*参见 *§2.3)*。

证明。 (1) 设 $f:\mathrm{L}_{\mathcal{P}}\overline{\longrightarrow} M$ 是 IbMod($\mathcal{P}$) 中的一个映射。回忆一下，作为一个无穷小左 $\mathcal{P}$-模，$\mathrm{L}_{\mathcal{P}}$由 $\mathcal{I}_C$自由生成。因此，将其视为 Iℓ模范畴($\mathcal{P}$) 中的映射时， f 由一个 C-集合的映射$\varepsilon:\mathcal{I}_C\longrightarrow M$唯一确定。如定义 3.1.11 中所述，我们记作 $\varepsilon=\{\varepsilon_c\in M(c;\ c)\ |c\in C\}$。相应地，对于 $\mu\in\mathcal{P}(c_1,\ \cdots,\ c_m;c)$，映射 f将每个 $\mu^{\{c_i\}}\in\mathrm{L}_{\mathcal{P}}(c_1,\ \cdots,\ c_m;c)$ 送到

$$f(\mu^{\{c_i\}})=\mu\circ^{i\ell}\varepsilon_{c_i}\in M(c_1,\cdots,c_m;c).$$

该规则与右侧 $\mathcal{P}$-模结构相容，并且可以验证，这一相容条件等价于关系式（3.1.4）。因此，给出 f 就等同于指定一个切结构 $\varepsilon:\mathcal{I}_C\longrightarrow M$。

(2) 根据定义，$\mathrm{End}_{A,N}$ 上的切结构由一个映射表示 $\delta:\mathcal{I}_C\longrightarrow\mathrm{End}_{A,N}$，这等价于一组映射 $\delta=\{A(c)\overset{\delta_c}{\longrightarrow}N(c)\}_{c\in C}$，它们属于 $\mathcal{C}(\mathbf{k})$。此外，它们还必须满足关系式（3.1.4）：

$$\delta_c\circ^{\mathrm{ir}}\mu=\sum_{i=1}^{m}\mu\circ^{i\ell}\delta_{c_i}$$

对每个 $\mu\in\mathcal{P}(c_1,\cdots,c_m;c)$，这一要求等价于条件： δ是一个导子$A\longrightarrow N$ (3.1.3).

□

我们给出以下结果的一个更具概念性的证明。

推论 3.1.13. (Fresse [8], Millès [23])设 A 是一个 $\mathcal{P}$-代数。存在一个自然同构 A-模:

$$\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}\circ_{\mathcal{P}}A\cong\Omega_A \tag{3.1.5}$$

（参见*§2.3* 中的记号）。

证明。 对于一个 A-模 N，我们有一串自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}^{A}}(\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}\circ_{\mathcal{P}}A,N)\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})}(\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}},\mathrm{End}_{A,N})\cong\mathrm{Der}(A,N)$$

其中第一个同构来自命题 2.3.2（iii）中的伴随，第二个同构则由结合命题 3.1.12的两部分得到。然后，该断言直接由Ω_A的定义推出。

□

注 3.1.14。 同一性（3.1.5）给出了 Ω_A的一个显式描述，例如见 [18, 8, 23]。此外，将其与 [16, 定理 5.1], 结合起来，我们可以得到如下重要结果：的 Kähler 微分模是余切复形$\mathrm{L}_A\in\mathcal{T}_A\mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}$（$\mathcal{C}$（$\mathbf{k}$））的一个模型，前提是 $A\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}$（$\mathcal{C}$（$\mathbf{k}$）） 是余纤维的（另见 [12]，其中给出了另一种概念性的证明）。

最后，结合定理 3.1.7 与 [16, 注5。28], 我们可以将 $\mathcal{P}$-代数的 Quillen 上同调重新表述如下。

推论 3.1.15。 设 $A \in$ 代数$_{\mathcal{P}}(\mathcal{C}(\boldsymbol{k}))$ 是一个余纤维 $\mathcal{P}$-代数，且 $N \in$模范畴$^{A}_{\mathcal{P}}$ 是一个 A-模。 A 的 *Quillen* 上同调在系数取为 N 时可由以下公式计算：

$$\mathrm{HQ}^{\star}(A;N) \simeq \Omega\,\mathrm{HQ}^{\star}(\mathcal{P};End_{A,N}) \simeq \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})}(\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}, End_{A,N}),$$

且第 n 个 *Quillen* 上同调群由下式计算

$$\mathrm{HQ}^{n}(A;N) \cong \pi_0\,\mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})}(\overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}, End_{A,N}[n]).$$

3.2 Kähler 微分的拟运算模与约化 Quillen 上同调

如前所述，对于某个颜色集 C，我们令 $\mathcal{P} \in \mathrm{Op}_C(\mathcal{C}(\mathbf{k}))$ 表示 C-颜色的 $\mathcal{C}(\mathbf{k})$ 中的一个固定幺半群。

回顾一下，$\mathrm{L}^{\mathrm{red}}_{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}\,\mathrm{Op}_C(\mathcal{C}(\mathbf{k}))$ 表示 $\mathcal{P}$ 作为 $\mathrm{Op}_C(\mathcal{S})$ 中的对象时的余切复形(见 §2.6)。如§3.1中所述，我们有一个 Quillen 等价

$$\mathrm{IbMod}(\mathcal{P}) \underset{\perp}{\overset{\simeq}{\rightleftarrows}} \mathcal{T}_{\mathcal{P}}\,\mathrm{Op}_C(\mathcal{C}(\mathbf{k})), \tag{3.2.1}$$

只要 $\mathcal{P}$ 是 Σ-余纤维的。因此， $\mathcal{P}$的**约化 Quillen 上同调**（其系数取在对象 $M \in$IbMod($\mathcal{P}$) 中）由下式给出

$$\mathrm{HQ}^{\star}_{\mathrm{red}}(\mathcal{P};M) \simeq \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})}(\mathrm{L}^{\mathrm{red}}_{\mathcal{P}}, M) \tag{3.2.2}$$

其中，我们对 $\mathrm{L}^{\mathrm{red}}_{\mathcal{P}}$ 在识别（3.2.1）下的导出像使用相同的记号。

现在我们来描述 $\mathrm{L}^{\mathrm{red}}_{\mathcal{P}}$ ，先从下面的观察开始。

注 3.2.1. 如 [10, §3]， S^C 表示 **-着色幺半群**，从而得到一个范畴同构

$$\mathrm{Op}_C(\mathcal{C}(\mathbf{k})) \cong \mathrm{Alg}_{S^C}(\mathcal{C}(\mathbf{k})). \tag{3.2.3}$$

因此 $\mathcal{P}$ma 可以视为一个 S^C-代数，并且容易验证以下范畴同构

$$\mathrm{IbMod}(\mathcal{P}) \cong \mathrm{Mod}^{\mathcal{P}}_{S^C}$$

在无穷小 $\mathcal{P}$-双模与 $\mathcal{P}$-模（关于 S^C）之间。此外，在这些识别下，从 $\mathcal{P}$ 到 $M \in$ IbMod($\mathcal{P}$) 的一个（**幺半群的**）**导子** 是一个映射 $d : \mathcal{P} \longrightarrow M$ ，它是 C-集族之间满足如下形式方程的映射

$$d(\mu \circ \nu) = \mu \circ^{i\ell} d(\nu) + d(\mu) \circ^{\mathrm{ir}} \nu \tag{3.2.4}$$

其中，对于某个 $i \in \{1, \cdots, m\}$，有 $\mu \in \mathcal{P}(c_1, \cdots, c_m; c)$ 和 $\nu \in \mathcal{P}(d_1, \cdots, d_n; c_i)$。

因此，定义3.1.9 的幺半群类比定义如下。

定义 3.2.2。 $\mathcal{P}$ 作为 S^C-代数的 **（幺半群）Kähler 微分模** $\Omega_{\mathcal{P}} \in$IbMod($\mathcal{P}$)，就是它的 Kähler 微分模。它由如下形式的自然同构刻画：

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})}(\Omega_{\mathcal{P}}, M) \cong \mathrm{Der}(\mathcal{P}, M)$$

其中 Der($\mathcal{P}$, M) 表示从 $\mathcal{P}$ 到 $M \in$IbMod($\mathcal{P}$)的导子集合。（更多详情见 [22] 。 ）

注 3.2.3。如注 3.1.10 中所示，我们可以如下定义 $\mathcal{P}$ 的平方零扩张 $\mathcal{P} \ltimes M \in \mathrm{Op}_C(\mathcal{C}(\mathbf{k}))_{/\mathcal{P}}$，其中 $M \in$ IbMod($\mathcal{P}$) 中的一个对象作为扩张项。作为一个 C- 集族， $\mathcal{P} \ltimes M$ 是逐级余积 $\mathcal{P} \oplus M$。单位运算由 (id_c, 0) 给出，其中 $c \in C$。此外，对于 $(\mu, p) \in (\mathcal{P} \oplus M)(c_1, \cdots, c_m;\ c)$ 和 $(\nu, q) \in (\mathcal{P} \oplus M)(d_1, \cdots, d_n;\ c_i)$，复合定义为

$$(\mu, p) \circ (\nu, q) := (\mu \circ \nu, \mu \circ^{i\ell} q + p \circ^{\mathrm{ir}} \nu).$$

最后，这一构造确定了一个右伴随

$$\mathcal{P} \ltimes (-) : \mathrm{IbMod}(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathrm{Op}_C(\mathcal{C}(\mathbf{k}))_{/\mathcal{P}},$$

然后我们得到 $\Omega_{\mathcal{P}} \simeq \Omega^{/\mathcal{P}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{P}})$，其中 $\Omega^{/\mathcal{P}}$ 表示 $\mathcal{P}\ltimes(-)$ 的左伴随。

例 3.2.4. 假设我们有一个映射 $f:\mathcal{P}\longrightarrow \mathcal{Q}$，它连接 C-着色的微分分次幺半群，并赋予 $\mathcal{Q}$ 一个无穷小 $\mathcal{P}$-双模结构。存在一个典范导子 $d_f:\mathcal{P}\longrightarrow \mathcal{Q}$，它将每个 $\lambda\in\mathcal{P}$（其元数为 k）映射为

$$d_f(\lambda) := (k-1)f(\lambda).$$

特别地，d_f 在零元（即 0 元）运算上由 $-f$ 给出，将每个一元运算映射为零，并且在二元运算上与 f 一致。

现在陈述本节的主要结果。

命题 3.2.5. 假设 $\mathcal{P}\in \mathrm{Op}_C(\mathcal{C}(\boldsymbol{k}))$ 是余纤维的。在如下识别下

$$\mathcal{T}_{\mathcal{P}}\,\mathrm{Op}_C(\mathcal{C}(\boldsymbol{k}))\simeq \mathrm{IbMod}(\mathcal{P}),$$

约化余切复形 $\mathrm{L}^{\mathrm{red}}_{\mathcal{P}}\in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}\,\mathrm{Op}_C(\mathcal{C}(\boldsymbol{k}))$ 对应于 $\Omega_{\mathcal{P}}\in \mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$。因此，$\mathcal{P}$ 的约化 *Quillen* 上同调（其系数取自对象 $M\in\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$）可由下式计算

$$\mathrm{HQ}^{\star}_{\mathrm{red}}(\mathcal{P};M)\simeq \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})}(\Omega_{\mathcal{P}},M). \tag{3.2.5}$$

证明。同构（3.2.3）确定了一个 Quillen 等价 $\mathrm{Op}_C(\mathcal{C}(\mathbf{k}))\overset{\simeq}{\longrightarrow}\mathrm{Alg}_{S^C\cdot}(\mathcal{C}(\mathbf{k}))$ 之间的转移的半模型结构（见 §2.5），由此我们进一步得到切范畴之间的 Quillen 等价

$$\mathcal{T}_{\mathcal{P}}\,\mathrm{Op}_C(\mathcal{C}(\mathbf{k}))\rightleftarrows \mathcal{T}_{\mathcal{P}}\,\mathrm{Alg}_{S^C}(\mathcal{C}(\mathbf{k})).$$

显然，后者保持余切复形不变；也就是说，它将 $\mathrm{L}^{\mathrm{red}}_{\mathcal{P}}$ 映射为$\mathcal{P}$ 的余切复形，其中 S^C-代数。将这一点与 [12, 推论 2.5.11]（另见注 3.1.14）结合起来，即完成证明。

□

接下来，我们概述 之间 Quillen 上同调与约化 Quillen 上同调的关系 $\mathcal{P}$.

引理 3.2.6。假设 $\mathcal{P}\in \mathrm{Op}_C(\mathcal{C}(\boldsymbol{k}))$ 是 Σ-余纤维的。那么在$\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$ 中存在一个形如以下形式的（同伦）余纤维序列

$$\mathrm{L}^{\mathrm{red}}_{\mathcal{P}}\longrightarrow \mathcal{P}\circ_{(1)}\mathcal{P}\longrightarrow \mathrm{L}_{\mathcal{P}}[1] \tag{3.2.6}$$

其中，按照惯例，我们对 $\mathrm{L}^{\mathrm{red}}_{\mathcal{P}}$ 和$\mathrm{L}_{\mathcal{P}}$ 在$\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$ 中的导出像使用相同的记号，并且$\mathcal{P}\circ_{(1)}\mathcal{P}$ 表示由 $\mathcal{P}$-双模生成的自由无穷小 $\mathcal{I}_C$（参见注 2.2.4）。

证明。令 $\mathrm{L}_{\mathcal{P}/\mathcal{I}_C}\in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}\mathrm{Op}(\mathcal{C}(\mathbf{k}))$ 表示单位映射的相对余切复形 $\eta:\mathcal{I}_C\longrightarrow\mathcal{P}$（见定义 2.4.8）。它由 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}\,\mathrm{Op}(\mathcal{C}(\mathbf{k}))$ 中的如下余纤维序列给出

$$\eta_!(\mathrm{L}_{\mathcal{I}_C})\longrightarrow \mathrm{L}_{\mathcal{P}}\longrightarrow \mathrm{L}_{\mathcal{P}/\mathcal{I}_C}$$

其中 $\eta_!$ 表示诱导函子 $\eta_!:\mathcal{T}_{\mathcal{I}_C}\,\mathrm{Op}(\mathcal{C}(\mathbf{k}))\longrightarrow\mathcal{T}_{\mathcal{P}}\mathrm{Op}(\mathcal{C}(\mathbf{k}))$（见注 2.4.9），它与自由函子（同伦等价）

$$\mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{P}}:\mathrm{Coll}_C(\mathcal{C}(\mathbf{k}))\simeq\mathrm{IbMod}(\mathcal{I}_C)\longrightarrow\mathrm{IbMod}(\mathcal{P}).$$

根据定理 3.1.7，$\mathrm{L}_{\mathcal{I}_C}$在 $\mathrm{Coll}_C(\mathcal{C}(\mathbf{k}))$ 中的导出像是 $\mathrm{L}_{\mathcal{I}_C}[-1]=\mathcal{I}_C[-1]$，其经 $\mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{P}}$ 的像恰为 $(\mathcal{P}\bigcirc_{(1)}\mathcal{P})[-1]$。利用 [15, 引理 5.2.9], 可完成证明，该引理证明 $\mathrm{L}^{\mathrm{red}}_{\mathcal{P}}$ 和 $\mathrm{L}^{\mathcal{P}/\mathcal{I}_C}$ 在 $\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$ 中具有相同的导出像。

□

上述引理有如下直接推论。

推论 3.2.7. 设 $\mathcal{P}$ 是 Σ-余纤维的，并给定一个对象 $M \in \mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$。那么存在如下形式的空间纤维序列

$$\Omega\,\mathrm{HQ}^{\star}(\mathcal{P};M) \longrightarrow \prod_{c\in C} |M(c;c)| \longrightarrow \mathrm{HQ}^{\star}_{\mathrm{red}}(\mathcal{P};M) \tag{3.2.7}$$

其中 $|M(c;\ c)|$指的是 $M(c;\ c) \in \mathcal{C}(\boldsymbol{k})$ （见 §2.6） 。

注3.2.8。若 $\mathcal{P}$ 是余纤维且连通的，则根据定理3.1.7 和命题3.2.5，序列（3.2.6）具有如下形式

$$\Omega_{\mathcal{P}} \xrightarrow{\Psi_{\mathcal{P}}} \mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P} \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{P}}} \overline{\mathrm{L}}_{\mathcal{P}}. \tag{3.2.8}$$

我们来更详细地说明这两个映射。如前所述， $\Psi_{\mathcal{P}}$ 由单个导子 $d : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \bigcirc_{(1)} \mathcal{P}$分类，该导子通过将每个 $\mu \in \mathcal{P}(c_1,\ \cdots,\ c_m; c)$映至

$$d(\mu) := (\mu\,;\,\mathrm{id}_{c_1}) + \cdots + (\mu\,;\,\mathrm{id}_{c_m}) - (\mathrm{id}_c\,;\,\mu).$$

另一方面，映射 $\varphi_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}\bigcirc_{(1)} \mathcal{P} \longrightarrow \mathrm{L}_{\mathcal{P}}$ 由C-集合的典范映射 $\mathcal{I}_C \longrightarrow \mathrm{L}_{\mathcal{P}}$ 分类，该映射通过将单位运算id_c 插入$\mathrm{L}_{\mathcal{P}}(c;c)$ $= \mathcal{P}(c;c)$来定义，对每个 $c \in C$均如此。

3.3 dg E_∞-幺半群的余切复形

我们将为幺半群 Com $\in \mathbf{Op}_*(\mathcal{C}(\mathbf{k}))$ 固定一个 Σ-余纤维模型，记为 E_∞，并称其为**微分分次 E_∞-幺半群**。范畴 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Fin}_*^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}(\mathbf{k}))$ 配备了投射模型结构。

定理 3.3.1. 存在一条左 *Quillen* 等价之字形链

$$\mathrm{Fun}(\mathrm{Fin}_*^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}(\boldsymbol{k})) \xleftarrow{\simeq} \mathrm{IbMod}(\mathrm{E}_\infty) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{T}_{\mathrm{E}_\infty}\,\mathrm{Op}(\mathcal{C}(\boldsymbol{k})).$$

此外，余切复形 $\mathrm{L}_{\mathrm{E}_\infty} \in \mathcal{T}_{\mathrm{E}_\infty}\mathrm{Op}(\mathcal{C}(\boldsymbol{k}))$ 于是可识别为 $t[-1] : \mathrm{Fin}_*^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{k})$，即 *Pirashvili* 函子 t的降悬（见例2.2.14） 。

证明。 显然，诱导函子 $\mathbf{Ib}^{\mathrm{E}_\infty} \longrightarrow \mathbf{Ib}^{\mathrm{Com}} \cong \mathrm{Fin}_*^{\mathrm{op}}$ 是微分分次范畴之间的弱等价（见 §2.2）。因此，我们得到一个 Quillen 等价 $\mathrm{IbMod}(\mathrm{E}_\infty) \xrightleftharpoons{\simeq} \mathrm{Fun}(\mathrm{Fin}_*^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}(\mathbf{k}))$。结合定理3.1.1(1)，即可证明第一个结论。

对于第二个陈述，我们只需证明，在左 Quillen 等价 $\mathbf{IbMod}(\mathrm{E}_\infty) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Fun}(\mathrm{Fin}_*^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}(\mathbf{k}))$ 下，$\mathrm{L}_{\mathrm{E}_\infty}$ 的导出像与 t 弱等价。为此，只需验证 $\mathrm{L}_{\mathrm{Com}} \in \mathbf{IbMod}(\mathbf{Com})$ 作为函子 $\mathrm{Fin}_*^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{k})$ 同构于 t。展开定义，$\mathrm{L}_{\mathrm{Com}}$ 将每个对象 m 映至 $\mathrm{L}_{\mathrm{Com}}(m) = \mathbf{k}^{\oplus m}$；此处，对于 Fin_* 中每个映射 $f : m \longrightarrow n$，相应的映射

$$\overline{\mathrm{L}}_{\mathrm{Com}}(\langle n\rangle) = \mathbf{k}^{\oplus\{1,\cdots,n\}} \longrightarrow \mathbf{k}^{\oplus\{1,\cdots,m\}} = \overline{\mathrm{L}}_{\mathrm{Com}}(\langle m\rangle)$$

对于每个 $i \in \{1,\cdots,n\}$，将直和项 $\mathbf{k}^{\{i\}}$ 映至 $\mathbf{k}_{\oplus\{f^{-1}(i)\}} \subseteq \mathbf{k}^{\oplus\{1,\cdots,m\}}$，由对角映射给出。这给出了定义 t 的一种等价方式。 □

鉴于上述定理，dg E_∞-幺半群的 Quillen 上同调将以函子 $\mathrm{Fin}_*^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{k})$ 为系数。

推论 3.3.2. E_∞ 的 *Quillen* 上同调，以给定函子 $\mathcal{F} : \mathrm{Fin}_*^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{k})$ 为系数，由

$$\mathrm{HQ}^{\star}(\mathrm{E}_\infty;\mathcal{F}) \simeq \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{Fun}(\mathrm{Fin}_*^{\mathrm{op}},\mathcal{C}(\boldsymbol{k}))}(t[-1],\mathcal{F}).$$

此外， n阶 *Quillen* 上同调群由以下公式计算：

$$\mathrm{HQ}^{n}(\mathrm{E}_\infty;\mathcal{F}) \cong \pi_0\,\mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{Fun}(\mathrm{Fin}_*^{\mathrm{op}},\mathcal{C}(\boldsymbol{k}))}(t,\mathcal{F}[n+1]).$$

注 3.3.3。 因此，$\mathrm{HQ}^\star(\mathrm{E}_\infty;\mathcal{F})$ 等价于（相差一个移位）函子 $\mathcal{F}$ 的**稳定上同伦**（参见 [26]）。这表明，由 Robinson [30],开创的E_∞-**结构**的障碍理论，可以用E_∞ 自身的 Quillen 上同调来编码（参见定理 5]）。

接下来，设 A是一个 E_∞-代数， N是一个 A-模。如 §2.3 中所述，数对 (A,N) 导出一个对象 $\mathrm{End}_{A,N}\in\mathrm{IbMod}(\mathrm{E}_\infty)$。对于后者在 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Fin}_*^{\mathrm{op}},\mathcal{C}(\mathbf{k}))$ 中的导出像，我们也使用相同的记号。结合定理 3.3.1 与 [16, 注 5.28], ，可得到另一个值得注意的推论。

推论 3.3.4. 假设 $A\in\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_\infty}(\mathcal{C}(\boldsymbol{k}))$ 是余纤维的。那么， A的 *Quillen* 上同调（系数取在一个 A-模 N 中）由下式计算：

$$\mathrm{HQ}^\star(A;N)\simeq\Omega\,\mathrm{HQ}^\star(\mathrm{E}_\infty;End_{A,N})\simeq\mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{Fun}(\mathrm{Fin}_*^{\mathrm{op}},\mathcal{C}(\boldsymbol{k}))}(t,End_{A,N}).$$

4. 微分分次 E_n-幺半群的余切复形

我们先回顾**拓扑小** n**-圆盘幺半群**E_n 的定义。记

$$\mathrm{D}^n:=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\|x\|<1\}$$

该**开（单位）** n**-圆盘**。根据定义，映射 $\mathrm{D}^n\longrightarrow\mathrm{D}^n$ 是**直线嵌入**，如果它具有形式 $x\mapsto\lambda x+c$，其中 $\lambda>0$。此外，从 k 个互不相交的开 n-圆盘到另一个k开 n-圆盘的映射 $\bigsqcup\mathrm{D}^n\longrightarrow\mathrm{D}^n$ 是直线嵌入，如果它是开嵌入，且其在每个分支 D^n 上的限制都是直线的。于是，幺半群 E_n 定义为具有以下性质的单色拓扑运算子：

$$\mathrm{E}_n(k)=\mathrm{Rect}(\bigsqcup_k\mathrm{D}^n,\mathrm{D}^n)$$

在另一个开 n-圆盘中， k 个互不相交的开 n-圆盘的直线嵌入空间，赋予从 Top 中映射空间继承的子空间拓扑。幺半群复合以显然的方式由直线嵌入的复合诱导。

记号 4.0.1. 对每个 $n\geq 0$，我们用相同的记号 E_n 表示小 n-圆盘幺半群的单纯版本。此外，我们用 $\mathbb{E}_n$ 表示 E_n 的**微分分次（dg）版本**。具体而言， $\mathbb{E}_n$ 由 E_n 经由复合函子得到

$$\mathrm{Op}_*(\mathrm{Set}_\Delta)\xrightarrow{\mathbf{k}[-]}\mathrm{Op}_*(\mathrm{sMod}(\mathbf{k}))\xrightarrow{\mathrm{N}}\mathrm{Op}_*(\mathcal{C}(\mathbf{k}))$$

其中，第一个函子是逐层应用自由函子 $\mathbf{k}[-]:\mathrm{Set}_\Delta\longrightarrow\mathrm{sMod}(\mathbf{k})$定义的，而 N 则是逐层应用**正规化**（或**正规化链复形函子**）定义的（参见例如 [17]）。

注意， $\mathbb{E}_n$ 是适当的（参见定义3.1.2），因此，根据定理3.1.7 其余切复形由$\mathrm{L}_{\mathbb{E}_n}[-1]\in\mathrm{IbMod}(\mathbb{E}_n)$表示。本节的主要目标是证明以下结果。

定理 4.0.2. 在$\mathrm{IbMod}(\mathbb{E}_n)$中存在如下形式的余纤维序列

$$\mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{E}_*)\longrightarrow\mathbb{E}_n^{\mathrm{i}}\longrightarrow\overline{\mathrm{L}}_{\mathbb{E}_n}[n]\tag{4.0.1}$$

其中第一个映射由以下识别诱导：$\boldsymbol{k}\xrightarrow{\cong}\mathbb{E}_n(0)$ *(*参见注 *2.2.4* 和 *§2.6* 中的记号）。

证明将用到以下辅助材料。

构造 4.0.3。 根据例 2.2.12，我们考虑函子（或无穷小 $\mathbb{E}_n$- 双模）

$$\underline{1}_*\left[\mathbf{k}[n-1]\right]:\mathbf{Ib}^{\mathbb{E}_n}\longrightarrow\mathcal{C}(\mathbf{k}),\ \underline{k}\mapsto\bigoplus_{i=0}^{k}T_k^i$$

其中，对每个 $i=0,\cdots,k$，都有 $T_k^i:=\underline{\mathrm{Map}}^{\mathcal{C}(\mathbf{k})}(\mathrm{Map}^{\rho_i}\mathbf{Ib}^{\mathbb{E}_n}(k,\mathbf{1}),\mathbf{k}[n-1])$。注意，$\mathbb{E}_n(\mathbf{1})\simeq\mathbb{E}_n(\mathbf{0})\cong\mathbf{k}$，且 $\mathbb{E}_n(\mathbf{2})\simeq S^{n-1}\cong\mathbf{k}\oplus\mathbf{k}[n-1]$。因此，我们还可得到

$$T_k^0=\mathrm{Map}_{\mathcal{C}(\mathbf{k})}(\mathbb{E}_n(2),\mathbf{k}[n-1])\simeq S^{n-1}\quad\text{and}\quad T_k^i=\mathrm{Map}_{\mathcal{C}(\mathbf{k})}(\mathbb{E}_n(1)^{\otimes 2},\mathbf{k}[n-1])\simeq\mathbf{k}[n-1]$$

对于 $i=1,\cdots,k$。接下来，我们将 $M_n:=\mathbb{E}_n^{\mathrm{i}}\otimes\underline{1}_*\left[\mathbf{k}[n-1]\right]$ 记作 $\mathbb{E}_n^{\mathrm{i}}$ 与 $\underline{1}_*\left[\mathbf{k}[n-1]\right]$ 的逐层张量积。由于 $\mathbb{E}_n$ 来自一个单纯形歌剧，它具有由对角作用诱导的典范无穷小 $\mathbb{E}_n$-双模结构。对于每个 $k\geq 0$，我们有

$$\begin{aligned}M_n(k)&=\bigoplus_{i=1}^{k}\left(\mathbb{E}_n(k)\otimes T_k^i\right)\oplus\left(\mathbb{E}_n(k)\otimes T_k^0\right)\\&\simeq\bigoplus_k\mathbb{E}_n(k)[n-1]\oplus\left(\mathbb{E}_n(k)\oplus\mathbb{E}_n(k)[n-1]\right).\end{aligned}$$

构造 4.0.4. 给定 $X\in\mathcal{C}(\mathbf{k})$，根据例 2.2.13，我们考虑函子

$$\underline{0}_*[X]:\mathbf{Ib}^{\mathbb{E}_n}\longrightarrow\mathcal{C}(\mathbf{k}),\ \underline{k}\mapsto\mathrm{Map}_{\mathcal{C}(\mathbf{k})}(\mathbb{E}_n(1)\otimes\mathbb{E}_n(0)^{\otimes k},X)\simeq X.$$

我们将 $0_*[X]$ 视为一个取值为 X 的弱常值函子 $\mathbf{Ib}^{\mathbb{E}_n}\longrightarrow\mathcal{C}(\mathbf{k})$。对于 $X=\mathbf{k}[n-1]$ 和 $X=S^{n-1}$，定义

$$P_n:=\mathbb{E}_n^{\mathrm{i}}\otimes\underline{0}_*\left[\mathbf{k}[n-1]\right]\quad\text{and}\quad Q_n:=\mathbb{E}_n^{\mathrm{i}}\otimes\underline{0}_*[S^{n-1}].$$

如 Construction 4.0.3，这两者都具有无穷小 $\mathbb{E}_n$-双模结构。

备注 4.0.5. 由于 $\mathbb{E}_n$ 源自一个单纯形歌剧，我们可以考虑取值为 X 的（严格）常值函子 $X:\mathbf{Ib}^{\mathbb{E}_n}\longrightarrow\mathcal{C}(\mathbf{k})$。由 Id_X 分类的典范映射 $X\longrightarrow 0_*[X]$ 是 $\mathrm{IbMod}(\mathbb{E}_n)$ 中的弱等价。因此，我们在 $\mathrm{IbMod}(\mathbb{E}_n)$ 中得到两个弱等价：

$$\mathbb{E}_n^{\mathrm{i}}[n-1]=\mathbb{E}_n^{\mathrm{i}}\otimes\overline{\mathbf{k}[n-1]}\xrightarrow{\simeq}P_n\quad\text{and}\quad\mathbb{E}_n^{\mathrm{i}}\oplus\mathbb{E}_n^{\mathrm{i}}[n-1]=\mathbb{E}_n^{\mathrm{i}}\otimes\overline{S^{n-1}}\xrightarrow{\simeq}Q_n.$$

备注 4.0.6. 我们用 $\mu_0\in\mathrm{E}_n(0)$ 表示 E_n 的唯一零元运算，并考虑映射

$$(-)\circ_1\mu_0:\mathrm{E}_n(k+1)\longrightarrow\mathrm{E}_n(k).$$

直观地说，这是通过从单位 n-圆盘内 $k+1$ 个互不相交的 n-圆盘的每个构型中删除第一个圆盘而得到的，并将这样的构型视为 $\mathrm{E}_n(k+1)$ 中的一个点。映射 $(-)\circ_1\mu_0$ 是一个纤维丛，其纤维同伦等价于 k 重楔和 $\bigvee S^{n-1}$ 的拓扑 k （$n-1$）-球面 S^{n-1}，此外，它在一次悬挂后分裂：

$$\Sigma\,\mathrm{E}_n(k+1)\simeq\Sigma\left(\mathrm{E}_n(k)\times\bigvee_k S^{n-1}_{\mathrm{t}}\right).$$

鉴于此，我们得到一个典范准同构：

$$\mathbb{E}_n(k+1)\simeq\bigoplus_k\mathbb{E}_n(k)[n-1]\oplus\mathbb{E}_n(k).\tag{4.0.2}$$

构造 4.0.7。这个拟同构可以描述如下。对于 $k=0$，它由投影 $\mathbb{E}_n(\mathbf{1})\xrightarrow{\simeq}\mathbb{E}_n(\mathbf{0})\cong\mathbf{k}$ 给出。现在假设 $k\geq 1$。由于 $\mathbb{E}_n(\mathbf{2})\simeq S^{n-1}$，我们可以写成

$$\bigoplus_k\mathbb{E}_n(k)[n-1]\oplus\mathbb{E}_n(k)\simeq\left(\mathbb{E}_n(k)\otimes\mathbb{E}_n(2)\right)\bigsqcup_{\mathbb{E}_n(k)}\cdots\bigsqcup_{\mathbb{E}_n(k)}\left(\mathbb{E}_n(k)\otimes\mathbb{E}_n(2)\right)=:\mathfrak{B}_k$$

其中 $\mathfrak{B}_k$ 指的是映射 $\mathbb{E}_n(k) \longrightarrow \mathbb{E}_n(k) \otimes \mathbb{E}_n(2)$ 的 k 重余纤维余积，该映射由包含映射 $\mathbf{k} \longrightarrow \mathrm{S}^{n-1} \simeq \mathbb{E}_n(2)$ 诱导。我们用 $\mathrm{id} \in \mathrm{E}_n(1)$ 表示恒等运算。对于每个 $1 \leq i \leq k$，我们定义一个映射 $\tau_i : \mathbb{E}_n(k+1) \longrightarrow \mathbb{E}_n(k) \otimes \mathbb{E}_n(2)$，该映射由映射

$$\mathrm{E}_n(k+1) \longrightarrow \mathrm{E}_n(k) \times \mathrm{E}_n(2),\ \nu \mapsto (\nu \circ_1 \mu_0, \nu \circ (\mathrm{id}, \mu_0, \cdots, \mu_0, \mathrm{id}, \mu_0, \cdots, \mu_0))$$

其中，后者 “id” 位于第 $(i+1)$ 个位置。（从视觉上看，后一个运算是从 ν 中删去除第一个和第 $(i+1)$ 个圆盘之外的所有圆盘得到的。）拟同构（4.0.2）由以下复合建模：

$$\mathbb{E}_n(k+1) \overset{(\tau_1, \cdots, \tau_k)}{\longrightarrow} \bigoplus_k \mathbb{E}_n(k) \otimes \mathbb{E}_n(2) \longrightarrow \mathfrak{B}_k \tag{4.0.3}$$

其中，第二个映射是典范投影。

引理 4.0.8。 在$\mathrm{IbMod}(\mathbb{E}_n)$中存在形如以下的余纤维序列：

$$\overline{\mathrm{L}}_{\mathbb{E}_n}[n-1] \xrightarrow{\iota} M_n \xrightarrow{\rho} Q_n. \tag{4.0.4}$$

证明。 首先，考虑函子（或无穷小 $\mathbf{Com}$-双模）$\mathrm{L}_{\mathrm{Com}} : \mathbf{Ib}^{\mathrm{Com}} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{k})$（见 §3.3），并令 $\overline{\mathrm{L}}^{n}{}_{\mathrm{Com}}$: $\mathbf{Ib}^{\mathbb{E}_n} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{k})$ 表示其在$\mathbf{Ib}^{\mathbb{E}_n}$上的限制。接着注意到 $\mathrm{L}_{\mathbb{E}_n} \cong \mathbb{E}_n^{\mathrm{i}} \otimes \overline{\mathrm{L}}^{n}{}_{\mathrm{Com}}$。由伴随性可得一个典范映射：

$$\overline{\mathrm{L}}^{n}_{\mathrm{Com}}[n-1] \longrightarrow \underline{1}_* [\mathbf{k}[n-1]]$$

分类 由 $\mathbf{k}[n-1]$ 上的恒等映射给出。因此，映射 ι 由诱导映

$$\iota : \overline{\mathrm{L}}_{\mathbb{E}_n}[n-1] = \mathbb{E}_n^{\mathrm{i}} \otimes \overline{\mathrm{L}}^{n}_{\mathrm{Com}}[n-1] \longrightarrow \mathbb{E}_n^{\mathrm{i}} \otimes \underline{1}_* [\mathbf{k}[n-1]] = M_n.$$

展开这些定义，在每一层 k，此映射都弱等价于嵌入

$$\overline{\mathrm{L}}_{\mathbb{E}_n}[n-1](k) \simeq \bigoplus_k \mathbb{E}_n(k)[n-1] \longrightarrow \bigoplus_k \mathbb{E}_n(k)[n-1] \oplus (\mathbb{E}_n(k) \oplus \mathbb{E}_n(k)[n-1]) \simeq M_n(k).$$

接下来，由于 $\underline{1}_* [\mathbf{k}[n-1]]$ 在第 0 层由 T_0^0给出，我们得到一个映射 $\underline{1}_* [\mathbf{k}[n-1]] \longrightarrow \underline{0}_* [\mathrm{S}^{n-1}]$，它由识别 $T_0^0 \simeq \mathrm{S}^{n-1}$分类。因此，映射 ρ 是诱导映射

$$\rho : M_n = \mathbb{E}_n^{\mathrm{i}} \otimes \underline{1}_* [\mathbf{k}[n-1]] \longrightarrow \mathbb{E}_n^{\mathrm{i}} \otimes \underline{0}_* [\mathrm{S}^{n-1}] = Q_n.$$

此外，在每一层，此映射（在同伦意义下）都由投影给出

$$M_n(k) \simeq \bigoplus_k \mathbb{E}_n(k)[n-1] \oplus (\mathbb{E}_n(k) \oplus \mathbb{E}_n(k)[n-1]) \longrightarrow \mathbb{E}_n(k) \oplus \mathbb{E}_n(k)[n-1] \simeq Q_n(k).$$

从上面两段可知，我们确实得到了预期的余纤维序列（4.0.4）。 □

引理 4.0.9。 在$\mathrm{IbMod}(\mathbb{E}_n)$中存在一个如下形式的余纤维序列

$$\mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{E}_*) \xrightarrow{\varepsilon} M_n \xrightarrow{\pi} P_n. \tag{4.0.5}$$

证明。首先回顾一下，$\mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{E}_*) \cong 0_!\mathbf{k}$（参见例 2.2.11），并且 $M_n(0) = \mathbb{E}_n(0) \otimes T_0^0$。令$\varepsilon : \mathbf{k} \longrightarrow M_n(0)$ 为由一对 (μ_0, κ) 分类的映射，其中 μ_0 表示$\mathbb{E}_n(0) \cong \mathbf{k}$ 的生成元（见备注 4.0.6），而 κ 表示投影 $\mathbb{E}_n(2) \simeq \mathrm{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbf{k}[n-1]$。（因此，$\varepsilon$与包含映射 $\mathbf{k} \longrightarrow \mathbf{k} \oplus \mathbf{k}[n-1]$ 弱等价。）据此，$\varepsilon : \mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{E}_*) \longrightarrow M_n$ 是由 ε通过伴随诱导的映射，并且在每一层，k 具有如下形式

$$\varepsilon(k) : \mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{E}_*)(k) = \mathbb{E}_n(k+1) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{k} \left(\mathbb{E}_n(k) \otimes T_k^i\right) \oplus \left(\mathbb{E}_n(k) \otimes T_k^0\right) = M_n(k)$$

（另见注2.2.4）。具体而言，映射 $\varepsilon(k)$ 对每个 $0 \leq i \leq k$，由一个分量映射$\varepsilon_i(k) : \mathbb{E}_n(k+1) \longrightarrow \mathbb{E}_n(k) \otimes T_k^i$ 构成，其定义步骤如下：

(i) 首先，令 $\upsilon_0 : \mathbb{E}_n(k+1) \longrightarrow T^0_k$ 为由复合分类的映射

$$\mathbb{E}_n(k+1) \otimes \mathbb{E}_n(2) \longrightarrow \mathbb{E}_n(2) \xrightarrow{\kappa} \mathbf{k}[n-1]$$

其中第一个映射由以下规则给出

$$\mathrm{E}_n(k+1) \times \mathrm{E}_n(2) \ni (\nu, \mu) \mapsto \mu \circ_1 \nu \circ (\mathrm{id}, \mu_0, \cdots, \mu_0) \in \mathrm{E}_n(2).$$

(ii) 接下来，对于 $1 \leq i \leq k$，令 $\upsilon_i : \mathbb{E}_n(k+1) \longrightarrow T^i_k$ 为由下式诱导的映射

$$\mathbb{E}_n(k+1) \otimes \mathbb{E}_n(1)^{\otimes 2} \longrightarrow \mathbb{E}_n(2) \xrightarrow{\kappa} \mathbf{k}[n-1]$$

其中第一个映射由下式确定

$$\mathrm{E}_n(k+1) \times \mathrm{E}_n(1) \times \mathrm{E}_n(1) \ni (\nu, \alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ \nu \circ (\mathrm{id}, \mu_0, \cdots, \mu_0, \beta, \mu_0, \cdots, \mu_0) \in \mathrm{E}_n(2)$$

使得 β 位于第 $(i+1)$ 个位置。

(iii) 最后，对于每个 $0 \leq i \leq k$，映射 $\varepsilon_i(k)$ 是复合映射

$$\mathbb{E}_n(k+1) \longrightarrow \mathbb{E}_n(k+1) \otimes \mathbb{E}_n(k+1) \xrightarrow{(-\circ_1 \mu_0) \otimes \upsilon_i} \mathbb{E}_n(k) \otimes T^i_k$$

其中，第一个映射由对角映射诱导。

显然，$\varepsilon_0(k)$通过映射$(-) \bigcirc_1 \mu_0$将 $\mathbb{E}_n(k+1)$映至直和项 $\mathbb{E}_n(k) \subseteq \mathbb{E}_n(k) \otimes T^0_k$ 上；此外，可以证明，将 $\varepsilon(k)$余限制到 $M_n(k)$中直和项$\mathbb{E}_n(k)[n-1] \subseteq \mathbb{E}_n(k) \otimes T^0_k$的补上的映射弱等价于映射(4.0.3)。这意味着 $\varepsilon(k)$弱等价于包含映射

$$\bigoplus_k \mathbb{E}_n(k)[n-1] \oplus \mathbb{E}_n(k) \longrightarrow \bigoplus_k \mathbb{E}_n(k)[n-1] \oplus (\mathbb{E}_n(k) \oplus \mathbb{E}_n(k)[n-1]).$$

另一方面，映射 $\pi : M_n \longrightarrow P_n$ 由以下复合给出

$$M_n \xrightarrow{\rho} Q_n \longrightarrow P_n.$$

这里，第二个映射由映射 $0_*\left[\mathrm{S}^{n-1}\right] \longrightarrow 0_*[\mathbf{k}[n-1]]$诱导，该映射由投影$\mathrm{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbf{k}[n-1]$导出。我们可以验证，$\pi$ 在每一层上（相差一个同伦）均由投影到特异直和项 $\mathbb{E}_n(k)[n-1] \subseteq \mathbb{E}_n(k) \otimes T^0_k$给出：

$$M_n(k) \simeq \bigoplus_k \mathbb{E}_n(k)[n-1] \oplus (\mathbb{E}_n(k) \oplus \mathbb{E}_n(k)[n-1]) \longrightarrow \mathbb{E}_n(k)[n-1] \simeq P_n(k).$$

结合上一段，这给出余纤维序列（4.0.5）。 □

定理 4.0.2 的证明。我们用 $K_n := \mathbb{E}^{\mathrm{i}}_n \otimes 0_*[\mathbf{k}]$，表示，并将其视为一个无穷小 $\mathbb{E}_n$-双模（见构造 4.0.4）。如备注 4.0.5 所述，存在由映射 $\mathbf{k} \xrightarrow{\simeq} 0_*[\mathbf{k}]$ 诱导的弱等价 $\mathbb{E}^{\mathrm{i}}_n \xrightarrow{\simeq} K_n$。此外，由于 $\mathrm{S}^{n-1} \cong \mathbf{k} \oplus \mathbf{k}[n-1]$，我们有 $Q_n \simeq K_n \oplus P_n$。将其与余纤维序列 (4.0.4) 和 (4.0.5) 相结合，我们在 $\mathbf{IbMod}(\mathbb{E}_n)$ 中得到一个同伦（余）笛卡尔方的图：

$$\begin{array}{ccccc} \overline{\mathrm{L}}_{\mathbb{E}_n}[n-1] & \longrightarrow & \mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{E}_*) & \xrightarrow{\varepsilon} & M_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \rho \\ 0 & \longrightarrow & K_n & \longrightarrow & Q_n \end{array}$$

其中，顶部水平复合映射弱等价于 $\mathrm{L}_{\mathbb{E}_n}[n-1] \xrightarrow{\iota} M_n$，中间垂直箭头由复合映射 $\mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{E}_*) \longrightarrow \mathbb{E}^{\mathrm{i}}_n \xrightarrow{\simeq} K_n$ 给出。因此，我们得到如下形式的余纤维序列

$$\overline{\mathrm{L}}_{\mathbb{E}_n}[n-1] \longrightarrow \mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{E}_*) \longrightarrow \mathbb{E}^{\mathrm{i}}_n, \tag{4.0.6}$$

由此即可完成证明。 □

记号 4.0.10. 我们用 $\varphi : \mathrm{L}_{\mathbb{E}_n}[n-1] \longrightarrow \mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{E}_*)$ 表示余纤维序列 (4.0.6) 中出现的映射。

注 **4.0.11.** 在每一层 k，映射 φ 弱等价于包含映射

$$\overline{\mathrm{L}}_{\mathbb{E}_n}[n-1](k) \simeq \bigoplus_k \mathbb{E}_n(k)[n-1] \longrightarrow \bigoplus_k \mathbb{E}_n(k)[n-1] \oplus \mathbb{E}_n(k) \simeq \mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{E}_*)(k).$$

注 4.0.12. 余纤维序列 (4.0.1) 是所谓的 拓扑 E_n-幺半群的 *Quillen* 原理(参见 [15, §6.3]和 [16, §6.3])。

与 [16, 例 5.10] 中一样， $\mathbb{E}^{\mathrm{i}}_n \in \mathrm{IbMod}(\mathbb{E}_n)$ 表示幺半群$\mathbb{E}_n$的 **Hochschild 复形**，对于 $M \in \mathrm{IbMod}(\mathbb{E}_n)$，空间

$$\mathrm{HH}^\star(\mathbb{E}_n; M) := \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{IbMod}(\mathbb{E}_n)}(\mathbb{E}^{\mathrm{i}}_n, M)$$

是 **Hochschild 上同调**，其对象为 $\mathbb{E}_n$，系数取自 M。以下结论是定理 4.0.2 的直接推论。

推论 4.0.13。 设给定一个对象 $M \in \mathrm{IbMod}(\mathbb{E}_n)$。那么存在一个形如以下的空间纤维序列

$$\Omega^{n+1}\,\mathrm{HQ}^\star(\mathbb{E}_n; M) \longrightarrow \mathrm{HH}^\star(\mathbb{E}_n; M) \longrightarrow |M(0)|$$

*(*记号见 *§2.6(i))*。因此，存在一个k-模的长正合序列：

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{HQ}^{-k-n-1}(\mathbb{E}_n; M) \longrightarrow \mathrm{HH}^{-k}(\mathbb{E}_n; M) \longrightarrow \mathrm{H}_k(M(0))$$
$$\longrightarrow \mathrm{HQ}^{-k-n}(\mathbb{E}_n; M) \longrightarrow \mathrm{HH}^{-k+1}(\mathbb{E}_n; M) \longrightarrow \mathrm{H}_{k-1}(M(0)) \longrightarrow \cdots.$$

下面的陈述给出了一个有趣的例子。回忆一下，对每个整数 $m \geq n$，都存在一个微分分次歌剧的嵌入 $\mathbb{E}_n \longrightarrow \mathbb{E}_m$，它赋予 $\mathbb{E}_m$ 无穷小$\mathbb{E}_n$-双模结构。

推论 4.0.14。 对每个整数 $k \neq 0$，都存在一个典范同构

$$\mathrm{HQ}^{-k-n-1}(\mathbb{E}_n; \mathbb{E}_m) \cong \mathrm{HH}^{-k}(\mathbb{E}_n; \mathbb{E}_m).$$

此外，零阶 *Hochschild* 上同调群可分解为

$$\mathrm{HH}^0(\mathbb{E}_n; \mathbb{E}_m) \cong \mathrm{HQ}^{-n-1}(\mathbb{E}_n; \mathbb{E}_m) \oplus \boldsymbol{k}.$$

证明。 首先注意到 $\mathrm{H}_\bullet(\mathbb{E}_m(0)) \cong \mathbf{k}$，集中在次数 0。结合推论 4.0.13 的长正合序列，可得

$$\mathrm{HQ}^{-k-n-1}(\mathbb{E}_n; \mathbb{E}_m) \cong \mathrm{HH}^{-k}(\mathbb{E}_n; \mathbb{E}_m)$$

对所有 $k \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{-1, 0\}$ 均成立。此外，我们得到一个 $\mathbf{k}$-模的正合列：

$$0 \longrightarrow \mathrm{HQ}^{-n-1}(\mathbb{E}_n; \mathbb{E}_m) \longrightarrow \mathrm{HH}^0(\mathbb{E}_n; \mathbb{E}_m) \longrightarrow \mathbf{k} \xrightarrow{\overline{\varphi}} \mathrm{HQ}^{-n}(\mathbb{E}_n; \mathbb{E}_m) \longrightarrow \mathrm{HH}^1(\mathbb{E}_n; \mathbb{E}_m) \longrightarrow 0 \quad (4.0.7)$$

其中 φ—是映射

$$\mathbf{k} \cong \pi_0 \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{IbMod}(\mathbb{E}_n)}(\mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{E}_*), \mathbb{E}_m) \xrightarrow{\overline{\varphi}} \pi_0 \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{IbMod}(\mathbb{E}_n)}(\overline{\mathrm{L}}_{\mathbb{E}_n}[n-1], \mathbb{E}_m) \cong \mathrm{HQ}^{-n}(\mathbb{E}_n; \mathbb{E}_m)$$

由 $\varphi : \mathrm{L}_{\mathbb{E}_n}[n-1] \longrightarrow \mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{E}_*)$ (参见记号 4.0.10)。因此，根据（4.0.7）的正合性，只需证明 φ 是平凡的。

我们将 $\xi_m : \mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{E}_*) \longrightarrow \mathbb{E}_m$ 记作由识别 $\mathbf{k} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{E}_m(0)$ 诱导的映射，并令 ξ_m 表示 φ定义域的生成元。因此， φ 由复合 $\xi_m \bigcirc \varphi$分类。此外，注意到 ξ_m 与复合映射

$$\mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{E}_*) \xrightarrow{\xi_n} \mathbb{E}_n \longrightarrow \mathbb{E}_m,$$

因此， $\xi_m \circ \varphi$ 等同于复合映射 $\mathrm{L}_{\mathbb{E}_n}[n-1] \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Free}^{\mathrm{i}}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{E}_*) \xrightarrow{\xi_n} \mathbb{E}_n \longrightarrow \mathbb{E}_m$。但是$\xi_n \circ \varphi$ 与零映射弱等价（如定理 4.0.2 的证明所示）。因此，$\xi_m \circ \varphi$ 确实表示 φ 的陪域中的平凡类。证明至此完成。 □

5. 变形理论与 Quillen 上同调

本节的主要目的是确立**变形理论**与 Quillen 上同调之间的精确关系。我们通过考察 dg（E_n-）幺半群的情形来阐述主要定理。

5.1 从形式模空间语境到形式模问题

我们引入**形式模空间语境**这一概念，旨在刻画与所关注模型范畴中对象的**变形空间**相关联的**形式模空间问题**。

我们将使用以下记号和约定。

(i) 在本节中，我们假设 k 是特征为 0 的域。(ii) 我们用 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{aug}} := \mathrm{Alg}^{\mathrm{aug}}\ \mathrm{Com}(\mathcal{C}_{\geq 0}(\mathrm{k}))$ 表示 $\mathcal{C}_{\geq 0}$(k) 中增广交换代数所成的范畴。具体而言，$\mathrm{CAlg}^{\mathrm{aug}}$ 的一个对象是一个交换 dg k-代数 R，其集中于非负次数，并且配备一个 dg k-代数映射 $R \longrightarrow \mathrm{k}$。(iii) 我们在范畴 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{aug}}$ 上赋予转移模型结构（见 §2.5）。这是一个带基点模型范畴，其零对象就是 k 本身。接下来我们考虑稳定化 $\mathrm{Sp}(\mathrm{CAlg}^{\mathrm{aug}})$，它具有半模型范畴结构。(iv) 对于 $R \in \mathrm{CAlg}^{\mathrm{aug}}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们令 $\pi_n(R)$ 表示 R 的底层复形的第 n 个同调群。(v) 按照约定，增广交换代数 $\varepsilon : R \longrightarrow \mathrm{k}$ 是阿廷的，当且仅当 R 的底层复形有限维，并且映射 $\pi_0(\varepsilon) : \pi_0(R) \longrightarrow \pi_0(\mathrm{k}) = \mathrm{k}$ 将 $\pi_0(R)$ 表示为一个局部 k-代数（即， $\pi_0(\varepsilon)$ 的核是 $\pi_0(R)$ 的唯一极大理想）。(vi) 我们用 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}} \subseteq \mathrm{CAlg}^{\mathrm{aug}}$ 表示由阿廷代数张成的全子范畴。(vii) 此外，我们滥用记号，将 $\mathrm{Sp}(\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}})$ 用来表示 $\mathrm{Sp}(\mathrm{CAlg}^{\mathrm{aug}})$ 中由满足如下条件的谱对象 $X : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{CAlg}^{\mathrm{aug}}$ 张成的全子范畴：对每一对 $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$，$X_{m,n}$ 都是阿廷的。

(viii) 我们令 ModCat 表示这样一个范畴，其对象是模型范畴，态射是 Quillen 伴随，且其源和目标分别是左 Quillen 函子的源和目标。(ix) 我们关注函子 $\mathcal{F} : \mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}} \longrightarrow \mathrm{ModCat}$。对于 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$ 中的每个映射 $f : R \longrightarrow S$，我们用 $f_! : \mathcal{F}(R) \rightleftarrows \mathcal{F}(S) : f^*$ 表示它在函子 $\mathcal{F}$ 下的像 f。(x) 最后，我们用 $\mathbf{S} := (\mathrm{Set}_\Delta)_\infty$ 表示空间的 ∞-范畴，并用 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}_\infty$ 表示由阿廷 k-代数张成的 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{aug}}_\infty$ 的全 ∞-子范畴。

我们先回顾 [20]中的以下定义。

定义 5.1.1. 一个**形式模问题** 是一个函子 $\mathcal{G} : \mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}_\infty \longrightarrow \mathbf{S}$，满足空间

$\mathcal{G}(\mathbf{k})$ 是可缩的，并且如果 σ 是 $\mathrm{CAlg}_{\infty}^{\mathrm{art}}$ 中的一个笛卡尔方块，形式如下：

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & U \end{array}$$

若诱导映射 $\pi_0(S) \longrightarrow \pi_0(U)$ 和 $\pi_0(T) \longrightarrow \pi_0(U)$ 均为满射，则 $\mathcal{G}(\sigma)$ 也是S中的笛卡尔方块。

由此便得到预期的定义。

定义 5.1.2。**形式模空间语境** 是一个函子 $\mathcal{F} : \mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}} \longrightarrow$ModCat，满足以下性质：

(1) $\mathcal{F}$ 将 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$ 中的弱等价映为 Quillen 等价，并且对于 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$ 中的任意态射 $f : R \longrightarrow S$，右伴随 $f^* : \mathcal{F}(S) \longrightarrow \mathcal{F}(R)$ 保持弱等价。
(2) 对于每个同伦笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & U \end{array}$$

在 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$ 中，使映射 $\pi_0(S) \longrightarrow \pi_0(U)$ 和 $\pi_0(T) \longrightarrow \pi_0(U)$ 为满射的相应图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(R) & \longrightarrow & \mathcal{F}(S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(T) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \end{array}$$

模型范畴的同伦笛卡尔（按定义 A.0.5 的意义）。

我们将在 §5.3 中看到有趣的形式模空间语境例子。现在，让我们继续讨论抽象理论。

定义 5.1.3. 假设给定一个形式模空间语境 $\mathcal{F} : \mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}} \longrightarrow$ModCat。令 $X \in \mathcal{F}(\mathbf{k})$ 为一个纤维对象，并令 $R \in \mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$ 为一个带有增广 $\varepsilon : R \longrightarrow \mathbf{k}$ 的阿廷 $\mathbf{k}$-代数。

(i) X 在 R 上的变形是一个对 (Y, η)，其中 $Y \in \mathcal{F}(R)$ 是余纤维的，且 $\eta : \varepsilon_! Y \xrightarrow{\simeq} X$ 是 $\mathcal{F}(\mathbf{k})$ 中的弱等价。(ii) 给定两个 X 在 R上的变形 (Y, η) 和 $(Y' \eta')$，从 (Y, η) 到 $(Y' \eta')$ 的等价是一个弱等价 $Y \xrightarrow{\simeq} Y'$，它属于 $\mathcal{F}(R)$，并以显然的方式与结构态射 η 和 η' 相容。(iii) X 在 R上的变形空间记为 $\mathrm{Def}(X, R)$，它是以下范畴的神经的 Kan 替换：该范畴的对象是 X 在 R 上的变形，态射是变形之间的等价。我们将 $\mathrm{Def}(X, R)$ 视为一个带基点空间，其基点由平凡变形 $(u_! X, \eta) \in \mathrm{Def}(X, R)$ 给出，其中 $u : \mathbf{k} \longrightarrow R$ 是 R 的单位，而$\eta : \varepsilon_! u_! X \xrightarrow{\simeq} X$ 是典范同构。

记号 5.1.4. 对于一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，我们用 $\mathcal{C}^{\simeq}$ 表示**最大 ∞-子群胚** 中的 $\mathcal{C}$。众所周知，赋值 $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}^{\simeq}$ 确定了一个 ∞-范畴右伴随函子，从 ∞-范畴到∞-群胚（参见 [19]）。

注 5.1.5. 在定义 5.1.3的设定下，令 $\widetilde{\varepsilon}_! : \mathcal{F}(R)^{\simeq}_{\infty} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{k})^{\simeq}_{\infty}$ 表示由 $\varepsilon : R \longrightarrow \mathbf{k}$诱导的映射。空间 $\mathrm{Def}(X, R)$ 于是可以识别为同伦拉回

$$(\mathcal{F}(R)^{\simeq}_{\infty})_{/X} := \mathcal{F}(R)^{\simeq}_{\infty} \times^{\mathrm{h}}_{\mathcal{F}(\mathbf{k})^{\simeq}_{\infty}} (\mathcal{F}(\mathbf{k})^{\simeq}_{\infty})_{/X}.$$

（这是因为截面模型范畴具有正确的类型，如附录 A 中所讨论的。）特别地，$\mathbf{Def}(X, R)$ 与映射 $\widetilde{\varepsilon}_! : \mathcal{F}(R)^{\simeq}_{\infty} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{k})^{\simeq}_{\infty}$在 X 上的同伦纤维弱等价。结合定义 5.1.2(1)，我们推出赋值$R \mapsto \mathbf{Def}(X, R)$ 确定了一个 ∞-函子 $\mathbf{CAlg}^{\mathrm{art}}_{\infty} \longrightarrow \mathbf{S}$。

形式模空间语境这一概念的主要意义在于，它自然地产生形式模空间问题。

命题 5.1.6. 设 $\mathcal{F} : \mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}} \longrightarrow \mathrm{ModCat}$ 为一个形式模空间语境，并设 $X \in \mathcal{F}(\boldsymbol{k})$ 为一个纤维对象。则函子

$$\mathrm{Def}(X, -) : \mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}_{\infty} \longrightarrow \boldsymbol{S},\ R \mapsto \mathrm{Def}(X, R)$$

是一个形式模问题。

证明。 我们需要验证 $\mathrm{Def}(X,\mathbf{k})$ 是弱可缩的，并且 $\mathrm{Def}(X, -)$ 保持定义 5.1.1 中出现的笛卡尔方块的类型。第一个断言直接由注 5.1.5 得出。

现在我们来验证第二个断言，同样利用表示$\mathrm{Def}(X, -)$ 的同伦拉回（见注5.1.5）。假设给定CAlg$^{\mathrm{art}}$ 中的一个如下形式的同伦笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & U \end{array}$$

使得两个映射 $\pi_0(S) \longrightarrow \pi_0(U)$ 和 $\pi_0(T) \longrightarrow \pi_0(U)$ 均为满射。根据假设，存在一个模型范畴的同伦笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(R) & \longrightarrow & \mathcal{F}(S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(T) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U). \end{array}$$

根据注 A.0.6，这诱导出底层 ∞-范畴的一个同伦笛卡尔方块，因此我们进一步得到一个 ∞-群胚的同伦笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(R)^{\simeq}_{\infty} & \longrightarrow & \mathcal{F}(S)^{\simeq}_{\infty} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(T)^{\simeq}_{\infty} & \longrightarrow & \mathcal{F}(U)^{\simeq}_{\infty}. \end{array} \tag{5.1.1}$$

由同伦极限与同伦极限的交换性可知， ∞-群胚的方块

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{F}(R)^{\simeq}_{\infty})_{/X} & \longrightarrow & (\mathcal{F}(S)^{\simeq}_{\infty})_{/X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{F}(T)^{\simeq}_{\infty})_{/X} & \longrightarrow & (\mathcal{F}(U)^{\simeq}_{\infty})_{/X} \end{array}$$

同样也是同伦笛卡尔的。因此证明完成。 □

5.2 主要定理

我们首先引入以下重要概念。

定义 5.2.1. 设 $\mathcal{F}:\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}\longrightarrow \mathrm{ModCat}$ 是一个形式模空间语境，$X\in\mathcal{F}(\mathbf{k})$ 是一个纤维对象，且 $M\in \mathrm{Sp}(\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}})$ 是一个 Ω-谱。（于是，结构映射 $\Omega^\infty M\longrightarrow \mathbf{k}$ 表明 $\Omega^\infty M$ 是一个阿廷$\mathbf{k}$-代数。）我们将其记为

$$\mathrm{Def}(X,M):=\mathrm{Def}(X,\Omega^\infty M),$$

并称其为沿方向 的 X 一**阶变形空间**。

约定 5.2.2. 在本小节余下部分中，设 $\mathcal{F}:\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}\longrightarrow \mathrm{ModCat}$ 是一个固定的形式模空间语境，并假设 $X\in\mathcal{F}(\mathbf{k})$ 满足切范畴 $\mathcal{T}_X\mathcal{F}(\mathbf{k})$ 至少存在为一个半模型范畴。

注 5.2.3. 设 $R\in\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$ 带有单位 $u:\mathbf{k}\longrightarrow R$ 和增广 $\varepsilon:R\longrightarrow\mathbf{k}$。规范自然变换 $u_!\longrightarrow\varepsilon^*$ 诱导出自然变换 $u^*u_!\longrightarrow\mathrm{Id}\cong u^*\varepsilon^*$，后者构成单位 $\mathrm{Id}\longrightarrow u^*u_!$ 的一个截面。因此，我们得到 Id_X 的一个自然分解 $X\longrightarrow u^*u_!X\longrightarrow X$。据此，我们作出如下定义。

定义 5.2.4. 给定一个谱对象 $M:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$，我们将 $M(X)\in\mathcal{T}_X\mathcal{F}(\mathbf{k})$ 记为如下谱对象：

$$M(X)_{n,m}:=u^*_{n,m}(u_{n,m})_!X\in\mathcal{F}(\mathbf{k})_{X//X}$$

其中 $u_{n,m}:\mathbf{k}\longrightarrow M_{n,m}$ 指的是 $M_{n,m}\in\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$ 的单位。

引理 5.2.5. 进一步假设 $X\in\mathcal{F}(\boldsymbol{k})$ 是余纤维的，并且 $M\in\mathrm{Sp}(\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}})$ 是一个 Ω-谱。那么 $M(X)\in\mathcal{T}_X\mathcal{F}(\boldsymbol{k})$ 也是一个 Ω-谱。

证明。首先，我们证明 $M(X)$ 是一个预谱。对于 $(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ with $n\neq m$，我们需要证明单位映射 $X\longrightarrow u^*_{n,m}(u_{n,m})_!X$ 是一个弱等价。由于 M 尤其是一个预谱，单位映射 $u_{n,m}:\mathbf{k}\longrightarrow M_{n,m}$ 是一个弱等价。因此，伴随

$$(u_{n,m})_!:\mathcal{F}(\mathbf{k})\rightleftarrows\mathcal{F}(M_{n,m}):(u_{n,m})^*$$

是一个 Quillen 等价，并且 $(u_{n,m})^*$ 保持弱等价（参见定义 5.1.2(1)）。这些事实，加上 X 的余纤维性，证明 $X\longrightarrow u^*_{n,m}(u_{n,m})_!X$ 确实是一个弱等价。

仍 待证明的是，对于每个 $n\geq 0$，$\mathcal{F}(\mathbf{k})$ 中的下列方块是同伦笛卡尔 n:

$$\begin{array}{ccc} u^*_{n,n}(u_{n,n})_!X & \longrightarrow & u^*_{n,n+1}(u_{n,n+1})_!X \\ \downarrow & & \downarrow \\ u^*_{n+1,n}(u_{n+1,n})_!X & \longrightarrow & u^*_{n+1,n+1}(u_{n+1,n+1})_!X. \end{array} \tag{5.2.1}$$

对于 $i,j\in\{n,n+1\}$，我们将 $\varphi_{i,j}:M_{n,n}\longrightarrow M_{i,j}$ 记作由 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 中的 $(n,n)\longrightarrow(i,j)$ 诱导的映射。由于 $u_{i,j}=\varphi_{i,j}\bigcirc u_{n,n}$，我们有 $u^*_{i,j}=u^*_{n,n}\bigcirc\varphi^*_{i,j}$，且 $(u_{i,j})_!=(\varphi_{i,j})_!\bigcirc(u_{n,n})_!$。因此，方块（5.2.1）与以下 $\mathcal{F}(M_{n,n})$ 中方块在 $u^*_{n,n}$ 下的像一致：

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & \varphi^*_{n,n+1}(\varphi_{n,n+1})_!X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi^*_{n+1,n}(\varphi_{n+1,n})_!X' & \longrightarrow & \varphi^*_{n+1,n+1}(\varphi_{n+1,n+1})_!X' \end{array} \tag{5.2.2}$$

其中 $X' := (u_{n,\ n})_! X$。因此，只需验证该方块是同伦笛卡尔的。根据假设，$\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$ 中的以下方块

$$\begin{array}{ccc} M_{n,n} & \longrightarrow & M_{n,n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{n+1,n} & \longrightarrow & M_{n+1,n+1} \end{array} \tag{5.2.3}$$

是同伦笛卡尔的，其中 $M_{n,\ n+1} \simeq M_{n+1,\ n} \simeq \mathbf{k}$。此外，注意到

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{CAlg}^{\mathrm{aug}}) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Sp}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{aug}}_{\mathrm{Com}}(\mathcal{C}_{\geq 0}(\mathbf{k}))) \simeq \mathrm{Sp}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{aug}}_{\mathrm{Com}}(\mathcal{C}(\mathbf{k})))$$

（二者都与 $\mathcal{C}(\mathbf{k})$ Quillen等价）。因此，我们可以假设 M 来自 $\mathrm{Sp}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{aug}}\ \mathrm{Com}(\mathcal{C}(\mathbf{k})))$ 中的一个 Ω-谱，因此 (5.2.3) 底层的链复形方块也是同伦余笛卡尔的。此外，根据定义，存在 $M_{n,n} \in \mathcal{C}_{\geq 0}(\mathbf{k})$，使得 $M_{n,n} \cong \mathbf{k} \oplus M_{n,n}$ 作为链复形。由此，$M_{n+1,n+1} \simeq \mathbf{k} \oplus M_{n,n}[1]$ 作为链复形。因此，映射 $M_{n,n+1} \longrightarrow M_{n+1,n+1}$ 和 $M_{n+1,n} \longrightarrow M_{n+1,n+1}$ 在 π_0 上诱导同构。因此，我们得到一个模型范畴的同伦笛卡尔方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(M_{n,n}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(M_{n,n+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(M_{n+1,n}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(M_{n+1,n+1}) \end{array}$$

（参见定义 5.1.2（2））。最后，根据注 A.0.8 我们得出，方形（5.2.2）确实是同伦笛卡尔的。

□

注 5.2.6. 假设 $\mathcal{F}$ 还满足：对于每个带有单位 $u : \mathbf{k} \longrightarrow R$ 的 $R \in \mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$，所诱导的函子 $u_! : \mathcal{F}(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathcal{F}(R)$ 保持弱等价。那么，按照引理 5.2.5 的证明，对于每个 $X \in \mathcal{F}(\mathbf{k})$ 和每个 Ω-谱 $M \in \mathrm{Sp}(\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}})$，$M(X)$ 已经是一个 Ω-谱。例如，命题 5.3.3、5.3.4、5.3.5 和 5.3.7 中所考虑的函子都满足这一条件。

现在我们可以证明本节的主要定理了。

定理 5.2.7。进一步假设 $X \in \mathcal{F}(\boldsymbol{k})$ 是双纤维的（即同时是纤维和余纤维的），并令 $M \in \mathrm{Sp}(\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}})$ 为一个 Ω- 谱。那么存在一个空间的弱等价

$$\mathrm{Def}(X, M) \simeq \mathrm{HQ}^{\star}(X; M(X)[1])$$

（参见定义5.2.1 中的记号）。因此，存在一个典范同构

$$\pi_0 \mathrm{Def}(X, M) \cong \mathrm{HQ}^1(X; M(X)),$$

并且对于每个 $n \geq 1$，都存在一个典范同构

$$\pi_n(\mathrm{Def}(X, M), *) \cong \mathrm{HQ}^{1-n}(X; M(X))$$

其中 $*$ 指任意基点。

证明。根据注2.4.11，只需证明 $\mathbf{Def}(X, M)$ 弱等价于导出映射空间 $\mathbf{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{F}(\mathbf{k})/X}(X, \Omega^{\infty-1}_{+} M(X))$。

首先，根据假设，我们有 $M_{1,0} \simeq M_{0,1} \simeq \mathbf{k}$、$M_{0,0} \simeq \Omega^{\infty} M$ 和 $M_{1,1} \simeq \Omega^{\infty} M[1]$。此外，映射 $M_{1,0} \longrightarrow M_{1,1}$ 和 $M_{0,1} \longrightarrow M_{1,1}$ 在 π_0 上诱导同构（参见引理 5.2.5 的证明）。我们将 $u_M : \mathbf{k} \longrightarrow \Omega^{\infty} M[1]$ 简记为单位，将 $\varepsilon_M : \Omega^{\infty} M[1] \longrightarrow \mathbf{k}$ 简记为增广，

$\Omega^\infty M[1]$。如命题 5.1.6 的证明所示，存在一个 ∞-群胚的同伦笛卡尔方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\Omega^\infty M)^{\simeq}_\infty & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbf{k})^{\simeq}_\infty \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\widetilde{u}_M)_!} \\ \mathcal{F}(\mathbf{k})^{\simeq}_\infty & \xrightarrow[(\widetilde{u}_M)_!]{} & \mathcal{F}(\Omega^\infty M[1])^{\simeq}_\infty. \end{array}$$

结合注 5.1.5，我们推得 $\mathrm{Def}(X,\ M)$ 与右侧垂直映射在 $(\widetilde{u}_M)_! X$ 上的同伦纤维弱等价。接下来，考虑如下形式的 ∞-群胚图

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{\{X\}} & \mathcal{F}(\mathbf{k})^{\simeq}_\infty \\ \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \downarrow{\scriptstyle (\widetilde{u}_M)_!} \\ Z & \longrightarrow & \mathcal{F}(\Omega^\infty M[1])^{\simeq}_\infty \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\widetilde{\varepsilon}_M)_!} \\ * & \xrightarrow{\{X\}} & \mathcal{F}(\mathbf{k})^{\simeq}_\infty \end{array}$$

其中 Z 的选取使得底部正方形是同伦笛卡尔的。特别地，顶部正方形也是同伦笛卡尔的。因此，我们可以将 $\mathbf{Def}(X,\ M)$ 识别为环空间 $\Omega_{\iota(*)} Z$。由此可知，$\mathbf{Def}(X,\ M)$ 与环空间之间映射在 X 处的常值环路上的同伦纤维弱等价

$$\Omega_{(\widetilde{u}_M)_! X}\, \mathcal{F}(\Omega^\infty M[1])^{\simeq}_\infty \longrightarrow \Omega_X\, \mathcal{F}(\mathbf{k})^{\simeq}_\infty \tag{5.2.4}$$

由 $(\widetilde{\varepsilon}_M)_!$ 诱导。令 $\mathcal{K}(X,\ M)$ 表示这个同伦纤维。还需证明，$\mathcal{K}(X,\ M)$ 与 $\mathbf{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{F}(\mathbf{k})/X}(X,\ \Omega^{\infty-1}_{+} M(X))$ 弱等价。

已知映射 (5.2.4) 弱等价于映射

$$\mathrm{Aut}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{F}(\Omega^\infty M[1])}((u_M)_! X, (u_M)_! X) \longrightarrow \mathrm{Aut}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{F}(\mathbf{k})}(X, X)$$

其中 $\mathrm{Aut}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{F}(\mathbf{k})}(X,X) \subseteq \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{F}(\mathbf{k})}(X,X)$ 表示 X上的自等价子空间，而定义域的定义类似（例如参见 [6]）。此外，采用引理 5.2.5 证明中的相同论证，所诱导的 ∞- 范畴

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\Omega^\infty M[1])_\infty & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbf{k})_\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(\mathbf{k})_\infty & \longrightarrow & \mathcal{F}(\Omega^\infty M[2])_\infty \end{array}$$

是笛卡尔的。这意味着函子 $\mathcal{F}(\Omega^\infty M[1])_\infty \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{k})_\infty$ 检测等价。因此我们得到一个空间的同伦笛卡尔方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{F}(\Omega^\infty M[1])}((u_M)_! X, (u_M)_! X) & \longrightarrow & \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{F}(\Omega^\infty M[1])}((u_M)_! X, (u_M)_! X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Aut}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{F}(\mathbf{k})}(X, X) & \longrightarrow & \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{F}(\mathbf{k})}(X, X). \end{array} \tag{5.2.5}$$

因此，$\mathcal{K}(X, M)$ 弱等价于右侧竖直映射在 Id_X 处的同伦纤维。此外，根据 Quillen 伴随 $(u_M)_! \dashv u_M^*$，此映射弱等价于映射

$$\mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{F}(\mathbf{k})}(X, u_M^*(u_M)_! X) \longrightarrow \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{F}(\mathbf{k})}(X, X) \tag{5.2.6}$$

由 $u_M^*(u_M)_!X \longrightarrow X$诱导。最后，由于 X 是纤维的，映射（5.2.6）在Id_X 上的同伦纤维可以识别为导出映射空间

$$\mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{F}(\mathbf{k})_{/X}}(X, u_M^*(u_M)_!X) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Map}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{F}(\mathbf{k})_{/X}}(X, \Omega^{\infty-1}_+ M(X)).$$

因此，证明完成。 □

注 5.2.8。 在实践中，定理 5.2.7 通常对 X 仍然成立，即使不假设（余）纤维性，如注5.3.8中所述。

5.3 形式模空间语境的例子

在本小节中，我们描述形式模空间语境的一些有趣例子。在此过程中，我们需要验证定义5.1.2中的两个条件。

记号 5.3.1. 对于任意 $R \in \mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$，我们将 $\mathcal{C}_{\geq 0}(\mathbf{k})$ 中的 R-模的范畴记为 $\mathrm{Mod}_R := \mathrm{Mod}_R(\mathcal{C}_{\geq 0}(\mathbf{k}))$。

下面的引理将会派上用场。

引理 5.3.2. 设有一个映射 $R \longrightarrow S$ 属于 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$，且在 π_0上是满射。那么，只要 $K \otimes_R S$ 是无环，任意对象$K \in$模范畴$_R$ 都是无环的。

证明。 假设 $K \otimes_R S$ 是无环，并反设 K 不是。设 $k \geq 0$ 是使得 $\pi_k K$ 非平凡的最小整数，并令 $\mathfrak{a} := \ker(\pi_0(R) \longrightarrow \pi_0(S))$。于是我们得到

$$\pi_k K/\mathfrak{a}(\pi_k K) \cong \pi_k K \otimes_{\pi_0 R} \pi_0 S \cong \pi_k(K \otimes_R S) = 0.$$

现在，等式 $\pi_k K = \mathfrak{a}(\pi_k K)$ 导致矛盾： $\pi_k K = 0$，因为局部阿廷代数的每个理想都是幂零的。 □

命题 5.3.3。该函子

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Mod}} : \mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}} \longrightarrow \mathrm{ModCat},\ R \mapsto \mathrm{Mod}_R \tag{5.3.1}$$

是一个形式模空间语境。

证明。 (1) 我们首先验证定义 5.1.2 的第一个条件。设 $f : R \longrightarrow S$ 是 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$中的一个映射。那么 $f_!$: 模范畴$_R \rightleftarrows$ 模范畴$_S : f^*$ 是诱导-限制函子的伴随。显然，f^* 保持弱等价。此外，由于 $\mathbf{k}$ 是一个域， R 和 S的底层复形在 $\mathcal{C}_{\geq 0}(\mathbf{k})$中自动是余纤维的。因此，如果 f 是一个弱等价，那么伴随 $f_! \dashv f^*$确实是一个 Quillen 等价。

(2) 现在我们将验证定义5.1.2的第二个条件。设

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ T & \xrightarrow{q} & U \end{array} \tag{5.3.2}$$

是 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$ 中的一个同伦笛卡尔方块，其中 p 与 q 在 π_0 上满射。我们需要证明相应的模型范畴方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mod}_R & \longrightarrow & \mathrm{Mod}_S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Mod}_T & \longrightarrow & \mathrm{Mod}_U \end{array} \tag{5.3.3}$$

在定义 A.0.5 的意义下是同伦笛卡尔的。设 $\mathcal{F}' : [1]\times[1] \longrightarrow \mathbf{ModCat}$ 表示方块 (5.3.3)，并设 $\mathcal{I} \subseteq [1]\times[1]$ 表示由顶点 (0, 1)、(1, 0) 和 (1, 1) 张成的全子范畴。我们需要证明伴随 $\mathcal{L}^{\mathrm{coc}} : \mathrm{Mod}_R \rightleftarrows \mathrm{Sec}^{\mathrm{coc}}(\mathcal{F}'|_{\mathcal{I}}) : \mathcal{R}^{\mathrm{coc}}$ 是一个 Quillen 等价。为此，只需证明 $\mathbb{R}\mathcal{R}^{\mathrm{coc}}$ 能检测（余纤维对象之间的）弱等价，并且对每个余纤维对象 $X \in \mathrm{Mod}_R$，导出单位 $X \longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{R}^{\mathrm{coc}}\mathcal{L}^{\mathrm{coc}}(X)$ 是一个弱等价。

（2a）我们首先证明第二个断言。根据注 A.0.8，我们只需证明该方块

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X\otimes_R S \\ \downarrow & & \downarrow \\ X\otimes_R T & \longrightarrow & X\otimes_R U \end{array} \tag{5.3.4}$$

在模范畴$_R$中是同伦笛卡尔的。事实上，只需证明该方块在模范畴$_R$中是同伦余笛卡尔的。将方块 (5.3.4) 视为 (5.3.2) 在左 Quillen 函子 $X\otimes_R(-)$:模范畴$_R$ $\longrightarrow$模范畴$_R$下的像，尚需证明 (5.3.2) 在模范畴$_R$中是同伦余笛卡尔的。（由于 X 是余纤维的，函子 $X\otimes_R(-)$ 保持弱等价。）注意到方块 (5.3.2) 在模范畴$_R$($\mathcal{C}$(k)) 中已经是同伦笛卡尔的，这是因为模范畴$_R$($\mathcal{C}_{\geq 0}$(k)) 中的映射只要在每个正次数上满射且在 π_0 上满射，便是满态射。因此，方块 (5.3.2) 在模范畴$_R$中确实是同伦余笛卡尔的，因为范畴模范畴$_R$($\mathcal{C}$(k)) 是稳定的，且嵌入模范畴$_R$ $\longrightarrow$模范畴$_R$($\mathcal{C}$(k)) 能检测同伦余笛卡尔方块。

(2b) 现在验证 $\mathbb{R}\mathcal{R}^{\mathrm{coc}}$:$\mathrm{Sec}^{\mathrm{coc}}(\mathcal{F}'|_{\mathcal{I}}) \longrightarrow \mathrm{Mod}_R$ 能检测余纤维对象之间的弱等价。首先注意，在 $\mathrm{Sec}^{\mathrm{coc}}(\mathcal{F}'|_{\mathcal{I}})$ 中，一个映射是弱等价，当且仅当其余纤维是弱零对象（即各分量都是弱零对象的截面）。事实上，弱等价这一性质和同伦余纤维的构造，都是由投影 $\mathrm{Sec}^{\mathrm{coc}}(\mathcal{F}'|_{\mathcal{I}}) \longrightarrow \mathrm{Mod}_S$、$\mathrm{Sec}^{\mathrm{coc}}(\mathcal{F}'|_{\mathcal{I}}) \to \mathrm{Mod}_T$ 和 $\mathrm{Sec}^{\mathrm{coc}}(\mathcal{F}'|_{\mathcal{I}}) \longrightarrow \mathrm{Mod}_U$ 联合生成的；而通过余纤维刻画弱等价这一结论，在 $\mathcal{C}_{\geq 0}$(k) 中的任意模范畴都成立。因此，只需证明 $\mathbb{R}\mathcal{R}^{\mathrm{coc}}$ 能检测弱零余纤维对象。根据定义，余纤维截面 $s \in \mathrm{Sec}^{\mathrm{coc}}(\mathcal{F}'|_{\mathcal{I}})$ 由一个三元组 $(X_S, X_T, X_U) \in \mathrm{Mod}_S \times \mathrm{Mod}_T \times \mathrm{Mod}_U$ 组成，其中各对象均为余纤维对象，并附带 Mod_U 中的映射 $\varphi : X_T\otimes_T U \longrightarrow X_U$ 和 $\psi : X_S\otimes_S U \longrightarrow X_U$。此外，当 s 为纤维对象时，这些映射都是弱等价。总之，只需证明：若 $s = (X_S, X_T, X_U)$ 是双纤维对象，且同伦拉回 $X_T \times^{\mathrm{h}}_{X_U} X_S$ 是无环的，那么 X_S、X_T 和 X_U 各自也都是无环的。

从此假设 $X_T \times^{\mathrm{h}}_{X_U} X_S$ 是无环的。若 X_T 是无环的，则弱等价 $\varphi : X_T\otimes_T U \xrightarrow{\simeq} X_U$与 $X_T \in$模范畴$_T$的余纤维性表明， X_U是无环的。因此，由弱等价 $\psi : X_S\otimes_S U \xrightarrow{\simeq} X_U$ 和引理 5.3.2， X_S 也无环。类似地，若 X_S 是无环的，则 X_T 和 X_U也无环。因此，只需验证 X_T 或 X_S 是无环的。反设二者均非无环，并令 $l \geq 0$ 为满足 $\pi_l(X_T)$ 或 $\pi_l(X_S)$ 至少一个非平凡的最小整数。于是 $\pi_l(X_T\otimes_T U) \cong \pi_l(X_T)\otimes_{\pi_0(T)} \pi_0(U)$。因此，映射 $\pi_l(X_T) \longrightarrow \pi_l(X_U)$ 与复合映射一致

$$\pi_l(X_T) \longrightarrow \pi_l(X_T)\otimes_{\pi_0(T)} \pi_0(U) \xrightarrow[\cong]{\pi_l(\varphi)} \pi_l(X_U),$$

是满射。同样，映射 $\pi_l(X_S) \longrightarrow \pi_l(X_U)$ 也是满射。另一方面，由于$X_T \times^{\mathrm{h}}_{X_U} X_S$是无环的，诱导映射 $f_l : \pi_l(X_T) \oplus \pi_l(X_S) \longrightarrow \pi_l(X_U)$ 是单射。这些观察表明 $\pi_l(X_T) = \pi_l(X_S) = 0$，这就产生了矛盾。□

对于映射 $f : R \longrightarrow R'$ 在 $\mathbf{CAlg}^{\mathrm{art}}$ 中，所诱导的伴随 $\mathrm{Mod}_R \rightleftarrows \mathrm{Mod}_{R'}$ 满足：左伴随（分别地，右伴随）是对称幺半（分别地，松对称幺半）。因此，它给出一个 Quillen 伴随 $f_! : \mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Mod}_R) \rightleftarrows \mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Mod}_{R'}) : f^*$。

命题 5.3.4。 设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{C}_{\geq 0}(k)$ 中的一个幺半群。那么函子

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Alg}} : \mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}} \longrightarrow \mathrm{ModCat},\ R \mapsto \mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Mod}_R) \tag{5.3.5}$$

是一个形式模空间语境。

证明。设 $f : R \longrightarrow R'$ 是 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$ 中的一个映射。右伴随 f^* 就是限制函子，因此保持弱等价。此外，如上面的证明所示，若 $f : R \xrightarrow{\simeq} R'$ 是一个弱等价，则 $\mathrm{Mod}_R \rightleftarrows \mathrm{Mod}_{R'}$ 是一个 Quillen 等价，因此伴随 $f_! : \mathrm{Alg}^{\dagger}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Mod}_R) \rightleftarrows \mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Mod}_{R'}) : f^*$ 也为 Quillen 等价。由此，我们验证了定义 5.1.2 的第一个条件。

此外，注意到诱导出的伴随 $f_! : \mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\text{模范畴}_R) \rightleftarrows \mathcal{P}(\text{模范畴}_{R'}) : f^!$ 在底层模上由同一个伴随给出：模范畴$_R \rightleftarrows$模范畴$_{R'}$。这使我们可以应用命题 5.3.3 的证明来验证定义 5.1.2的第二个条件。

□

设 $f : R \longrightarrow R'$ 是 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$ 中的一个映射。诱导的伴随 $\mathrm{Mod}_R \rightleftarrows \mathrm{Mod}_{R'}$ 导出了富集范畴之间的一个伴随：

$$f_! : \mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_R) \rightleftarrows \mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_{R'}) : f^*. \tag{5.3.6}$$

具体而言，对于每个 $\mathcal{C} \in$ 范畴(Mod_R)，范畴 $\mathcal{C} \otimes_R R' := f_!(\mathcal{C}) \in$ 范畴$(\mathrm{Mod}_{R'})$ 与 $\mathcal{C}$ 具有相同的对象，而其映射对象则通过将函子 $(-) \otimes_R R'$ 应用于$\mathcal{C}$的映射对象得到。类似地，对于 $\mathcal{C}' \in$ 范畴$(\mathrm{Mod}_{R'})$，$f^*(\mathcal{C}') \in$ 范畴(Mod_R) 与 $\mathcal{C}'$ 具有相同的对象，其映射对象由沿 f 的限制诱导。为简便起见，我们再次将此范畴记为 $\mathcal{C}'$。

命题 5.3.5。函子

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Cat}} : \mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}} \longrightarrow \mathrm{ModCat},\ R \mapsto \mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_R) \tag{5.3.7}$$

是一个形式模空间语境。

证明需要一个技术引理。映射 $\alpha : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ 在 范畴(模范畴$_R$) 中被称为一个 **等纤维**，如果诱导函子 $\mathrm{Ho}(\alpha) : \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{D})$ 在同伦范畴之间（参见 §2.5）按通常意义是一个等纤维。

引理 5.3.6. 设 $p : R \longrightarrow S$ 是 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$ 中的一个映射，且它在 π_0 上是满射；设 $\mathcal{C} \in \mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_R)$ 是一个逐层余纤维的 Mod_R-富化范畴。那么诱导映射 $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \otimes_R S$ 是 $\mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_R)$ 中的一个等纤维。更一般地，对于 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$ 中的映射链 $R \longrightarrow S \longrightarrow U$，若映射 $S \longrightarrow U$ 在 π_0 上是满射，则诱导映射 $\mathcal{C} \otimes_R S \longrightarrow \mathcal{C} \otimes_R U$ 是 $\mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_R)$ 中的一个等纤维。

证明。 首先，由自由-遗忘伴随 $\mathcal{C}_{\geq 0}(k) \rightleftarrows \mathrm{Mod}_R$ 可知，Mod_R-富化范畴的同伦范畴与其底层的 $\mathcal{C}_{\geq 0}(k)$-富化范畴的同伦范畴一致。展开定义可知，函子 $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{C} \otimes_R S)$ 在对象上是恒等函子；对于每一对对象 (x, y)，诱导映射 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{C})}(x, y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{C} \otimes_R S)}(x, y)$ 可识别为投影

$$\pi_0 \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \pi_0 \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes_{\pi_0 R} \pi_0 S \cong \pi_0 \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x, y)/\mathfrak{a}(\pi_0 \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x, y))$$

其中 $\mathfrak{a} := \ker(\pi_0(R) \longrightarrow \pi_0(S))$. 因此，只需证明：只要对应的映射 $f : x \longrightarrow y$ 在 $\mathrm{Ho}(\mathcal{C} \otimes_R S)$ 中是同构，任意映射 $f : x \longrightarrow y$ 在 $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ 中就是同构。此外，f 是同构，当且仅当对每个对象 $z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，诱导映射 $f \circ (-) : \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(z, x) \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(z, y)$ 是弱等价。（对 f 也有类似结论。）因此，接下来只需证明，只要诱导映射

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(z, x) \otimes_R S \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(z, y) \otimes_R S$$

成立。现在，由于函子 $(-) \otimes_R S$ 保留余纤维之间映射的同伦余纤维，其中这些余纤维是余纤维 R-模 $M \in$ 模范畴$_R$ 在 $M \otimes_R S$ 成立时无环。这由引理 5.3.2 得出。第二个断言的验证方法相同。

□

命题 5.3.5 的证明。 与前文一样，定义 5.1.2 的第一个条件很容易验证。接下来，我们通过证明对于形如（5.3.2）的方形，所诱导的模型范畴方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_R) & \longrightarrow & \mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_S) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_!} \\ \mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_T) & \xrightarrow[q_!]{} & \mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_U) \end{array} \tag{5.3.8}$$

是同伦笛卡尔的。令 $\mathcal{F}' : [1]\times[1] \longrightarrow \mathbf{ModCat}$ 表示方形 (5.3.8)，并令 $\mathcal{I} \subseteq [1]\times[1]$ 表示由 (0,1)、(1,0) 和 (1, 1) 张成的全子范畴。我们需要证明伴随 $\mathcal{L}^{\mathrm{coc}} : \mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_R) \rightleftarrows \mathrm{Sec}^{\mathrm{coc}}(\mathcal{F}'|_{\mathcal{I}}) : \mathcal{R}^{\mathrm{coc}}$ 是 Quillen 等价。我们将证明 $\mathcal{R}^{\mathrm{coc}}$ 能检测双纤维对象之间的弱等价，并且对于每个余纤维对象 $\mathcal{C} \in \mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_R)$，导出单位 $\mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{R}^{\mathrm{coc}}\mathcal{L}^{\mathrm{coc}}(\mathcal{C})$ 都是弱等价。

我们先来看第二个断言。根据注 A.0.8，只需证明所诱导的方形

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C}\otimes_R S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}\otimes_R T & \longrightarrow & \mathcal{C}\otimes_R U \end{array} \tag{5.3.9}$$

在 $\mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_R)$ 中是同伦笛卡尔的。根据 [12, 引理 3.1。11], ，接下来只需检查对所有 x， $y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，诱导的映射对象方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x,y) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x,y)\otimes_R S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x,y)\otimes_R T & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x,y)\otimes_R U \end{array}$$

是同伦笛卡尔的，并且诱导映射 $\mathcal{C}\otimes_R T \longrightarrow \mathcal{C}\otimes_R U$ 和 $\mathcal{C}\otimes_R S \longrightarrow \mathcal{C}\otimes_R U$ 是等纤维化。前者已包含在命题 5.3.3 的证明中，后者则由引理 5.3.6 得出。

接下来，我们证明 $\mathcal{R}^{\mathrm{coc}}$ 能检测双纤维化对象之间的弱等价。设 $f : s \to s'$ 是 $\mathrm{Sec}^{\mathrm{coc}}(\mathcal{F}'|_{\mathcal{I}})$ 中双纤维化对象之间的映射，且 $\mathcal{R}^{\mathrm{coc}}(s) \longrightarrow \mathcal{R}^{\mathrm{coc}}(s')$ 是 $\mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_R)$ 中的弱等价。我们需要证明 f 本身是弱等价。由于 s 特别是余笛卡尔的， $s(1,1)$ 的同伦类型可通过（导出的）张量化由 $s(0,1)$ 或 $s(1,0)$ 确定； s' 也同样如此。因此，只需证明 $f_{0,1} : s(0,1) \longrightarrow s'(0,1)$ 和 $f_{1,0} : s(1,0) \longrightarrow s'(1,0)$ 分别是 $\mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_T)$ 和 $\mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_S)$ 中的弱等价。由对称性，只需处理 $f_{0,1}$。我们先证明 $f_{0,1}$ 是全忠实的。设 x, y 是 $s(0,1) \in \mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_T)$ 中的两个对象，并设 x', y' 表示它们在 $s(1,1) \in \mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_U)$ 中的像。映射 $s(1,0) \longrightarrow p^* s(1,1)$ 是纤维化（参见观察 A.0.7），因而特别是等纤维的；而它的伴随 $p_! s(1,0) \longrightarrow s(1,1)$ 是弱等价，因此本质满。这些事实共同推出， $s(1,0) \longrightarrow p^* s(1,1)$ 对象满射。设 $x'', y'' \in s(1,0)$ 是分别映至 $x', y' \in s(1,1)$ 的对象。由于 $\mathcal{R}^{\mathrm{coc}}(s) \longrightarrow \mathcal{R}^{\mathrm{coc}}(s')$ 是弱等价，映射

$$\mathrm{Map}_{s(0,1)}(x,y) \times^{\mathrm{h}}_{\mathrm{Map}_{s(1,1)}(x',y')} \mathrm{Map}_{s(1,0)}(x'',y'') \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Map}_{s'(0,1)}(x,y) \times^{\mathrm{h}}_{\mathrm{Map}_{s'(1,1)}(x',y')} \mathrm{Map}_{s'(1,0)}(x'',y'')$$

是 Mod_R 中的弱等价。按照命题 5.3.3 的证明，映射 $\mathrm{Map}^{s(0,1)}(x,y) \longrightarrow \mathrm{Map}^{s'(0,1)}(x,y)$ 是弱等价。因此，$f_{0,1}$ 是全忠实的。接下来只需证明它本质满。设 z 是 $s'(0,1) \in \mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_T)$ 中的一个对象，并令 z' 表示它在 $s'(1,1)$ 中的像。如上所述，存在一个映射到 z' 的 $z'' \in s'(1,0)$。因此，我们得到 $\mathrm{Cat}(\mathrm{Mod}_R)$ 中的一个对象 $\omega := (z, z', z'')$，属于 $\mathcal{R}^{\mathrm{coc}}(s') = s'(0,1) \times^h_{s'(1,1)} s'(1,0)$。由于 $\mathcal{R}^{\mathrm{coc}}(s) \longrightarrow \mathcal{R}^{\mathrm{coc}}(s')$ 是本质满的，

存在一个对象 $\omega \in \mathcal{R}^{\mathrm{coc}}(s)$，其在 $\mathcal{R}^{\mathrm{coc}}(s')$ 中的像与 ω 等价。现在，我们有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}^{\mathrm{coc}}(s) & \xrightarrow{\varphi} & s(1,0) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{0,1}} \\ \mathcal{R}^{\mathrm{coc}}(s') & \xrightarrow[\varphi']{} & s'(1,0) \end{array} \tag{5.3.10}$$

其中，左侧竖直映射将 $\omega \in \mathcal{R}^{\mathrm{coc}}(s)$ 映至 $\omega \in \mathcal{R}^{\mathrm{coc}}(s')$（在等价意义下），底部水平映射将 ω 映至 z。该方形的交换性意味着，z 等价于 $f_{0,1}$ 下 $\varphi(\omega) \in s(1,0)$ 的像。因此，$f_{0,1} : s(0,1) \longrightarrow s'(0,1)$ 本质满，正如所需。 □

最后，我们来到最重要的主要例子。设 $f : R \longrightarrow R'$ 是 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}$中的一个映射。它诱导出一个伴随 $f_! : \mathrm{Op}(\text{模范畴}_R) \rightleftarrows \mathrm{Op}(\text{模范畴}_{R'}) : f^*$，它连接富化拟运算子，并扩展了（5.3.6）中的情形。与该情形一样，我们设 $(-) \otimes_R R' := f_!$，并且对于每个 $\mathcal{O}' \in \mathrm{Op}(\text{模范畴}_{R'})$，我们用相同的记号表示它在 f^* 下的像

命题 5.3.7. 函子

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Op}} : \mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}} \longrightarrow \mathrm{ModCat},\ R \mapsto \mathrm{Op}(\mathrm{Mod}_R) \tag{5.3.11}$$

是一个形式模空间语境。

证明。 验证定义5.1.2 的第一条条件是直接的。第二条主要依赖命题 5.3.3 和 5.3.5。设给定一个形如 (5.3.2) 的方块。我们需要证明所诱导的模型范畴方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Op}(\mathrm{Mod}_R) & \longrightarrow & \mathrm{Op}(\mathrm{Mod}_S) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_!} \\ \mathrm{Op}(\mathrm{Mod}_T) & \xrightarrow[q_!]{} & \mathrm{Op}(\mathrm{Mod}_U) \end{array} \tag{5.3.12}$$

是同伦笛卡尔的。需要证明伴随

$$\mathcal{L}^{\mathrm{coc}} : \mathrm{Op}(\mathrm{Mod}_R) \rightleftarrows \mathrm{Sec}^{\mathrm{coc}}(\mathcal{F}'|_{\mathcal{I}}) : \mathcal{R}^{\mathrm{coc}}$$

是一个 Quillen 等价，其中照例 $\mathcal{I} \subseteq [1] \times [1]$ 表示由以下对象张成的全子范畴$(0,1)$、$(1,0)$ 和 $(1,1)$；而 $\mathcal{F}' : [1] \times [1] \longrightarrow \mathrm{ModCat}$ 是方块 (5.3.12)。

我们首先证明导出单位 $\mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{R}^{\mathrm{coc}}\mathcal{L}^{\mathrm{coc}}(\mathcal{O})$ 对每个余纤维对象 $\mathcal{O} \in \mathrm{Op}(\mathrm{Mod}_R)$都是弱等价。根据注A.0.8，这等价于说方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{O} \otimes_R S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O} \otimes_R T & \longrightarrow & \mathcal{O} \otimes_R U \end{array} \tag{5.3.13}$$

在$\mathrm{Op}(\text{模范畴}_R)$中是同伦笛卡尔的。按照 [15, 引理 4.1。3]，，只需验证所诱导的底层范畴的方形（参见注2.1.6）

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_1 & \longrightarrow & \mathcal{O}_1 \otimes_R S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_1 \otimes_R T & \longrightarrow & \mathcal{O}_1 \otimes_R U \end{array}$$

在范畴(模范畴$_R$)中是同伦笛卡尔的，并且所诱导的运算空间方形

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(c_1,\cdots,c_n;c) & \longrightarrow & \mathcal{O}(c_1,\cdots,c_n;c)\otimes_R S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}(c_1,\cdots,c_n;c)\otimes_R T & \longrightarrow & \mathcal{O}(c_1,\cdots,c_n;c)\otimes_R U \end{array}$$

在 模范畴$_R$ 中对每个元组 $(c_1,\cdots,c_n;c)$ （取自 $\mathcal{O}$的颜色）都是同伦笛卡尔的。前者已在命题 5.3.5的证明中讨论，而后者可由命题 5.3.3的证明推出。

剩下需要验证的是， $\mathcal{R}^{\mathrm{coc}}$ 能检测双纤维化对象之间的弱等价。注意，在 $\mathbf{Op}(\mathbf{Mod}_R)$ 中，映射 $f:\mathcal{O}\longrightarrow\mathcal{O}'$ 是弱等价，当且仅当底层范畴之间的诱导映射 $\mathcal{O}_1\longrightarrow\mathcal{O}'_1$ 在 $\mathbf{Cat}(\mathbf{Mod}_R)$ 中是弱等价，并且对于每个元组 $(c_1,\cdots,c_n;c)$，相应的映射

$$\mathcal{O}(c_1,\cdots,c_n;c)\longrightarrow\mathcal{O}'(f(c_1),\cdots,f(c_n);f(c))$$

在 模范畴$_R$中。因此， $\mathcal{R}^{\mathrm{coc}}$ 所需的性质可直接由函子$\mathcal{R}^{\mathrm{coc}}:\mathrm{Sec}^{\mathrm{coc}}(\mathcal{F}'|_{\mathcal{I}})\longrightarrow\mathrm{Cat}(\text{模范畴}_R)$ (命题 5.3.5) 以及 $\mathcal{R}^{\mathrm{coc}}:\mathrm{Sec}^{\mathrm{coc}}(\mathcal{F}'|_{\mathcal{I}})\longrightarrow$模范畴$_R$ (命题5.3.3) 的性质推出。

□

注 5.3.8. 设 $\mathcal{F}$ 为函子 $\mathcal{F}_{\mathrm{Alg}}$、 $\mathcal{F}_{\mathrm{Cat}}$或 $\mathcal{F}_{\mathrm{Op}}$中的任意一个。则每个对象 $X\in\mathcal{F}(\mathbf{k})$ 自动是纤维的。将此与注5.2.6相结合，我们得出定理 5.2.7对每个 $X\in\mathcal{F}(\mathbf{k})$成立。

5.4 dg E_n-歌剧的变形理论

将 §§4-5的主要结果结合起来，我们现在可以将幺半群$\mathbb{E}_n\in\mathrm{Op}(\mathcal{C}(\mathbf{k}))$ （记号 4.0.1）的变形理论与其 Hochschild 上同调联系起来。

考虑形式模空间语境

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Op}}:\mathrm{CAlg}^{\mathrm{art}}\longrightarrow\mathrm{ModCat},\ R\mapsto\mathrm{Op}(\mathrm{Mod}_R)$$

（参见命题 5.3.7），并设 $\mathcal{P}\in\mathcal{F}_{\mathrm{Op}}(\mathbf{k})\overset{\text{定义}}{=}\mathbf{Op}(\mathcal{C}_{\geq 0}(\mathbf{k}))$ 已给定。

构造 5.4.1. 设 $A\in\mathcal{C}_{\geq 0}(\mathbf{k})$ 为一个有限维（连通）dg k-模。对每个$n\in\mathbb{N}$，平方零扩张 $\mathbf{k}\ltimes A[n]$ 是一个 Artin k-代数。考虑 Ω-谱 $M\in\mathbf{Sp}(\mathbf{CAlg}^{\mathrm{art}})$，其由 $M_{n,\ n}=\mathbf{k}\ltimes A[n]$ 与 $M_{n,\ m}=\mathbf{k}$ 对 $n\neq m$ 定义。由此得到一个 Ω-谱$M(\mathcal{P})\in\mathcal{T}_{\mathcal{P}}\ \mathbf{Op}(\mathcal{C}_{\geq 0}(\mathbf{k}))$（参见引理 5.2.5 与注 5.2.6），其中

$$M(\mathcal{P})_{n,n}=\mathcal{P}\ltimes(\mathcal{P}\otimes A[n])$$

的平方零扩张 $\mathcal{P}$ 由 $\mathcal{P}\otimes A[n]\in\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$ （见注 3.2.3）。更明确地说，对于 $(c_1,\ \cdots,\ c_r;\ c)$ 中的每个颜色元组，该扩张由下式给出： $\mathcal{P}$：

$$(\mathcal{P}\otimes A[n])(c_1,\cdots,c_r;c):=\mathcal{P}(c_1,\cdots,c_r;c)\otimes A[n],$$

带有由 $\mathcal{P}$ 中的复合自然诱导的无穷小 $\mathcal{P}$-双模结构。

我们由定理 5.2.7 得到如下推论。

推论 5.4.2。 进一步假设 $\mathcal{P}$是 Σ-余纤维的。则存在空间之间的弱等价

$$\mathrm{Def}(\mathcal{P},\boldsymbol{k}\ltimes A)\simeq\mathrm{HQ}^{\star}(\mathcal{P};\mathcal{P}\otimes A[1])$$

右侧的空间是 $\mathcal{P}\in\mathrm{Op}(\mathcal{C}(\boldsymbol{k}))$ 关于 $\mathcal{P}\otimes A[1]\in\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$的 ***Quillen*** 上同调（参见 *§3.1*）。

证明。 根据注 5.3.8，定理5.2.7适用于 $\mathcal{P}$，无需余纤维性要求。此外，如果我们将 $\mathcal{P}$ 视为 $\mathrm{Op}(\mathcal{C}(\mathbf{k}))$ 中的对象（而不是$\mathrm{Op}(\mathcal{C}_{\geq 0}(\mathbf{k}))$中的对象），那么 Σ-余纤维性假设给出一个右 Quillen 等价

$$\mathcal{T}_{\mathcal{P}}\,\mathrm{Op}(\mathcal{C}(\mathbf{k})) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$$

（参见定理 3.1.1）。观察到在此函子下，Ω-谱$M(\mathcal{P}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}\,\mathrm{Op}(\mathcal{C}(\mathbf{k}))$ 对应于 $\mathcal{P}\otimes A \in \mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$。 □

例 5.4.3. 在 $A=\mathbf{k}$ 的情形下，$\mathrm{Def}(\mathcal{P},\mathbf{k}\ltimes A)$ 表示 $\mathcal{P}$ 在**对偶数代数** $\mathbf{k}\ltimes\mathbf{k}\cong\mathbf{k}[t]/(t^2)$ 上的变形空间。因此，$\mathrm{Def}(\mathcal{P},\mathbf{k}[t]/(t^2))$ 空间弱等价于 $\mathrm{HQ}^{*}(\mathcal{P};\mathcal{P}^{\mathrm{i}}[1])$，即 $\mathcal{P}$ 以 $\mathcal{P}^{\mathrm{i}}[1]\in\mathrm{IbMod}(\mathcal{P})$ 为系数的 Quillen 上同调。

推论 5.4.2、4.0.13 和 4.0.14 共同得出以下结论。

定理 5.4.4。 存在一个空间的纤维序列

$$\Omega^{n+2}\,\mathrm{Def}(\mathbb{E}_n,\boldsymbol{k}\ltimes A)\longrightarrow \mathrm{HH}^{\star}(\mathbb{E}_n;\mathbb{E}_n\otimes A)\longrightarrow |A|.$$

此外，对于 $k\geq -n-1$ 和 $k\neq 0$，存在一个典范同构

$$\pi_{k+n+2}\,\mathrm{Def}(\mathbb{E}_n,\boldsymbol{k}[t]/(t^2))\cong \mathrm{HH}^{-k}(\mathbb{E}_n;\mathbb{E}_n^{\mathrm{i}}),$$

并且，此外，

$$\mathrm{HH}^{0}(\mathbb{E}_n;\mathbb{E}_n^{\mathrm{i}})\cong \pi_{n+2}\,\mathrm{Def}(\mathbb{E}_n,\boldsymbol{k}[t]/(t^2))\oplus\boldsymbol{k}.$$

附录 A. 模型范畴的同伦笛卡尔方块

本附录为 §5 提供相关材料。回顾一下，ModCat 表示这样一个范畴：其对象是模型范畴，态射是 Quillen 伴随，且源和目标分别是左 Quillen 函子的源和目标。令 $\mathcal{F}:\mathcal{I}\longrightarrow$ModCat 为一个以小范畴 $\mathcal{I}$为指标的模型范畴图。

定义 A.0.1. $\mathcal{F}$ 的一个**截面**是自然投影 $\int_{\mathcal{I}}\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{I}$ 的一个截面，该投影从 $\mathcal{F}$ 的 Grothendieck 构造映到 $\mathcal{I}$。更明确地说，一个截面由每个 $i\in\mathcal{I}$对应的对象 $s(i)\in\mathcal{F}(i)$，以及每个 $\mathcal{I}$中的映射 $\alpha:i\to j$ 对应的态射 $f_\alpha:\alpha_!s(i)\longrightarrow s(j)$组成，并且对于 $\mathcal{I}$中每一对可复合的态射，都满足自然的相容性条件。我们用 $\mathrm{Sec}(\mathcal{F})$ 表示 $\mathcal{F}$的**截面范畴**。

假设每个 $\mathcal{F}(i)$ 都是组合模型范畴。根据 [3], ，可以在截面$(\mathcal{F})$ 上赋予投射或内射模型结构（另见 [11] 和 [2]）。这里，我们关注内射模型结构，记作 截面$(\mathcal{F})^{\mathrm{inj}}$，其中映射 $s\to s'$ 是余纤维（分别为弱等价），当且仅当 $s(i)\longrightarrow s'(i)$ 对每个$i\in\mathcal{I}$都是余纤维（分别为弱等价）。

De定义 A.0.2. 截面 $s:\mathcal{I}\longrightarrow\int_{\mathcal{I}}\mathcal{F}$ 称为**余笛卡尔** 截面，若复合映 p

$$\alpha_!(s(i)^{\mathrm{cof}})\longrightarrow\alpha_!s(i)\xrightarrow{f_\alpha}s(j)$$

对每个 $\alpha:i\to j$ 属于 $\mathcal{I}$都是弱等价，其中 $s(i)^{\mathrm{cof}}\longrightarrow s(i)$ 是$s(i)\in\mathcal{F}(i)$的余纤维替换。

注 A.0.3. 当所有模型范畴 $\mathcal{F}(i)$此外还是左真时，$\mathrm{Sec}(\mathcal{F})^{\mathrm{inj}}$ 也是左真的。于是可对 $\mathrm{Sec}(\mathcal{F})^{\mathrm{inj}}$作左 Bousfield 局部化，使得新的纤维对象恰好是

内射纤维余笛卡尔截面。我们将所得的模型结构记为 $\mathrm{Sec}(\mathcal{F})^{\mathrm{coc}}$。若$\mathcal{F}(i)$ 并非全都是左真，我们仍可将局部化 $\mathrm{Sec}(\mathcal{F})^{\mathrm{coc}}$ 定义为一个半模型范畴（参见 [4]）。无论哪种情形，$\mathrm{Sec}(\mathcal{F})^{\mathrm{coc}}$ 都具有正确的类型，即其底 ∞-范畴$\mathrm{Sec}(\mathcal{F})^{\mathrm{coc}}_{\infty}$是该图极限的一个模型

$$\mathcal{I} \ni i \mapsto \mathcal{F}(i)_{\infty} \in \mathrm{Cat}_{\infty}$$

其中，对每个 $\alpha : i \to j$，函子 $\mathcal{F}(i)_{\infty} \longrightarrow \mathcal{F}(j)_{\infty}$ 由 $(\alpha_!)_{\infty}$ 给出（参见推论 3.45）。

构造 A.0.4. 设 $\mathcal{F} : [1]\times[1] \longrightarrow$ ModCat 是正方形范畴上的组合模型范畴图。记 $\mathcal{I} \subseteq [1]\times[1]$ 为由 (0,1),(1,0) 和 $(1,1)$ 张成的全子范畴；并记 $\alpha_i : (0,0) \longrightarrow i$ 为从 (0,0) 到对象 $i \in \mathcal{I}$ 的唯一映射。于是得到一个函子 $\mathcal{L} : \mathcal{F}(0,0) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\mathcal{F}|_{\mathcal{I}})$，它将对象 $X \in \mathcal{F}(0,0)$ 送到截面

$$\mathcal{L}(X)(i) := (\alpha_i)_! X \in \mathcal{F}(i).$$

该函子有一个右伴随 $\mathcal{R} : \mathrm{Sec}(\mathcal{F}|_{\mathcal{I}}) \longrightarrow \mathcal{F}(0,0)$，它将截面 $s : \mathcal{I} \longrightarrow \int_{\mathcal{I}} \mathcal{F}$ 取为拉回

$$\mathcal{R}(s) := \lim_{i\in\mathcal{I}} \alpha_i^* s(i) \in \mathcal{F}(0,0).$$

最后，由于 $\mathcal{L}$ 将（平凡）余纤维化映射为单射（平凡）余纤维化，我们推得 $\mathcal{L} \dashv \mathcal{R}$是一个 Quillen 伴随。

定义 A.0.5. 设 $\mathcal{F} : [1]\times[1] \longrightarrow$ ModCat 是组合模型范畴的一个图。若复合左 Quillen 函子 $\mathcal{F}$ 是**同伦笛卡尔** 的，我们称

$$\mathcal{L}^{\mathrm{coc}} := [\mathcal{F}(0,0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathrm{Sec}(\mathcal{F}|_{\mathcal{I}})^{\mathrm{inj}} \longrightarrow \mathrm{Sec}(\mathcal{F}|_{\mathcal{I}})^{\mathrm{coc}}]$$

是一个左 Quillen 等价，其中 $\mathrm{Sec}(\mathcal{F}|_{\mathcal{I}})^{\mathrm{inj}} \longrightarrow \mathrm{Sec}(\mathcal{F}|_{\mathcal{I}})^{\mathrm{coc}}$ 是恒等函子，按构造它是一个左 Quillen 函子。我们将相应的右 Quillen 函子记为 $\mathcal{R}^{\mathrm{coc}} : \mathrm{Sec}(\mathcal{F}|_{\mathcal{I}})^{\mathrm{coc}} \longrightarrow \mathcal{F}(0,0)$。

注记 A.0.6. 设 $\mathcal{F} : [1]\times[1] \longrightarrow$ ModCat 是一个由组合模型范畴构成的图，如左 Quillen 函子组成的方形所示

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(0,0) & \longrightarrow & \mathcal{F}(0,1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(1,0) & \longrightarrow & \mathcal{F}(1,1). \end{array}$$

若 $\mathcal{F}$ 按照定义 A.0.5的意义是同伦笛卡尔的，那么相应的底层 ∞范畴

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(0,0)_{\infty} & \longrightarrow & \mathcal{F}(0,1)_{\infty} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(1,0)_{\infty} & \longrightarrow & \mathcal{F}(1,1)_{\infty} \end{array}$$

也同样是同伦笛卡尔的。这是因为模型范畴 $\mathrm{Sec}(\mathcal{F}|_{\mathcal{I}})^{\mathrm{coc}}$ 具有上述提到的正确类型。

观察 A.0.7. 设 $\mathcal{G} : \mathcal{I} \longrightarrow$ModCat 是一个组合模型范畴的图，其中$\mathcal{I} \subseteq [1]\times[1]$ 是构造 A.0.4 中描述的范畴。设 $s \in \mathrm{Sec}(\mathcal{G})$ 是 $\mathcal{G}$的一个截面。若 s 是单射纤维，则结构态射 $s(0,1) \longrightarrow \beta^* s(1,1)$ 和 $s(1,0) \longrightarrow \gamma^* s(1,1)$ 是纤维化，其中 $\beta : (0,1) \longrightarrow (1,1)$ 和 $\gamma : (1,0) \longrightarrow (1,1)$ 是 $\mathcal{I}$中的态射。

证明。由对称性，只需证明 $s(0,1) \longrightarrow \beta^* s(1,1)$ 是 $\mathcal{G}(0,1)$ 中的纤维化。设在 $\mathcal{G}(0,1)$ 中给定如下形式的交换方块

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & s(0,1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & \beta^* s(1,1), \end{array} \tag{A.0.1}$$

其中 $A \longrightarrow B$ 是一个平凡余纤维化。我们通过设定 $s'(0,1) = A, s'(1,1) = \beta_! A$, $s'(1,0) = \varnothing$；以及 $s''(0,1) = B$, $s''(1,1) = \beta_! B$, $s''(1,0) = \varnothing$，典范地定义两个截面 s', s''。映射 $A \longrightarrow B$ 诱导出截面的映射 $s' \longrightarrow s''$，这显然是一个单射平凡余纤维化。此外，存在一个典范的截面映射 $s' \longrightarrow s$，其结构态射由以下给出

$$s'(0,1) = A \longrightarrow s(0,1), \quad s'(1,1) = \beta_! A \longrightarrow \beta_! s(0,1) \longrightarrow s(1,1) \text{ and } s'(1,0) = \varnothing \longrightarrow s(1,0).$$

现在，由于 s 是单射纤维，因此存在一个映射 $s'' \longrightarrow s$，沿着单射平凡余纤维化 $s' \longrightarrow s''$提升 $s' \longrightarrow s$。特别地，我们得到一个映射 $B = s''(0,1) \longrightarrow s(0,1)$，它为方块（A.0.1）提供了一个提升。 □

注 A.0.8. 设 $\mathcal{F} : [1] \times [1] \longrightarrow \mathbf{ModCat}$ 是一个由组合模型范畴组成的图，并且对每个态射 α in $[1] \times [1]$，右伴随 α^* 都保弱等价。由于 $\mathcal{L} : \mathcal{F}(0,0) \longrightarrow \mathbf{Sec}(\mathcal{F}|_{\mathcal{I}})^{\mathrm{inj}}$ 将余纤维对象映为余笛卡尔截面，因此对任意余纤维对象 $X \in \mathcal{F}(0,0)$，导出单位 $X \longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{R}^{\mathrm{coc}}\mathbb{L}\mathcal{L}^{\mathrm{coc}}(X)$ 是弱等价，当且仅当 $X \longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{R}\mathbb{L}\mathcal{L}(X)$ 是弱等价。现在，对于一个截面 $s : \mathcal{I} \longrightarrow \int_{\mathcal{I}} \mathcal{F}$，根据观察 A.0.7，值 $\mathbb{R}\mathcal{R}(s)$ 可识别为同伦纤维积 $\mathbf{holim}_{i \in \mathcal{I}} \alpha_j^* s(i)$。总之，若 $X \in \mathcal{F}(0,0)$ 是余纤维对象，则导出单位映射 $X \longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{R}^{\mathrm{coc}}\mathbb{L}\mathcal{L}^{\mathrm{coc}}(X)$ 是弱等价，当且仅当下面的方块

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \alpha^*_{(0,1)}(\alpha_{(0,1)})_! X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \alpha^*_{(1,0)}(\alpha_{(1,0)})_! X & \longrightarrow & \alpha^*_{(1,1)}(\alpha_{(1,1)})_! X \end{array}$$

在 $\mathcal{F}(0,0)$ 中是同伦笛卡尔的。

参考文献

1 G. Arone 和 V. Turchin，《高维长结空间类比物的有理同调》，《几何与拓扑》18 (3) (2014) 1261-1322。2 E. Balzin，《族中的 Reedy 模型结构》，预印本，arXiv:1803.00681，2019。3 C. Barwick，《关于左、右模型范畴及左、右 Bousfield 局部化》，《同调与同伦应用》12 (2) (2010) 245-320。4 M. Batanin 和 D. White，《无需左适当性的左 Bousfield 局部化》，《纯粹与应用代数》228 (6) (2024)，107570。5 G. Caviglia，《对称谱中富集着色运算子的模型结构》，预印本，arXiv:1401.6983，2015。6 W.G. Dwyer 和 D.M. Kan，《单纯集合图表的分类定理》，《拓扑学杂志》23 (1984) 139-155。7 J. Francis，《 E_n-环的切复形与 Hochschild 上同调》，《组合数学》149 (3) (2013) 430-480。8 B. Fresse，《运算子上的模与函子》，《数学讲义》1967，Springer-Verlag，柏林 (2009)。9 M. Gerstenhaber，《环与代数的变形》，《数学年刊》 79 (1964) 59-103。10 J. J. Gutiérrez 和 R. M. Vogt，《对称谱中着色运算子的模型结构》，《数学杂志》270 (2012) 223-239。11 Y. Harpaz，《模型范畴的弱极限》，《范畴论：理论与应用》35 (2020) 959-978。12 Y. Harpaz、J. Nuiten 和 M. Prasma，《富集范畴的抽象余切复形与 Quillen 上同调》，《拓扑学杂志》11 (3) (2018) 752-798。13 Y. Harpaz、J. Nuiten 和 M. Prasma，《运算子上的代数的切范畴》，《以色列数学杂志》234 (2) (2019) 691-742。14 Y. Harpaz、J. Nuiten 和 M. Prasma，《模型范畴的切丛》，《范畴论：理论与应用》34 (2019) 1039-1072。15 T. Hoang，《富化拟运算子的 Quillen 上同调》，《数学进展》465 (2025)，110151。16 T. Hoang，《幺半群代数的 Hochschild 复形与余切复形》，《美国数学会会刊》378 (11) (2025) 7799-7841。17 T. Hoang，《运算子 Dold-Kan 对应及富化运算子之间的映射空间》，预印本，arXiv:2312.07906，2023。18 J.-L. Loday 和 B. Vallette，《代数运算子》，《数学科学基础丛书》346，Springer-Verlag (2012)。19 J. Lurie，《高阶拓扑斯理论》，《数学年刊研究》170，普林斯顿大学出版社 (2009)。20 J. Lurie，《导出代数几何 X：形式模空间问题》，见 https://www.math.ias.edu/~lurie/ (2011)。21 J. Lurie，《高阶代数》，预印本，见 https://www.math.ias.edu/~lurie/ (2011)。22 S. Merkulov 和 B. Vallette，《prop(erad)s 表示的变形理论 II》，《纯粹与应用数学杂志》636 (2009) 1-52。23 J. Millès，《运算子上的代数的 André-Quillen 上同调》，《数学进展》226 (6) (2011) 5120-5164。24 A. Nijenhuis 和 R. W. Richardson, Jr.，《李代数结构的变形》，《数学与力学杂志》17 (1967) 89-105。25 D. Pavlov 和 J. Scholbach，《着色对称运算子的容许性与整直化》，《拓扑学杂志》11 (3) (2018) 559–601。26 T. Pirashvili，《高阶 Hochschild 同调的 Hodge 分解》，《高等师范学校科学年刊》33 (2) (2000) 151-179。27 J. Pridham，《统一导出变形理论》，《数学进展》224 (2010) 772-826。

28 D. Quillen，交换环的（上）同调，载于：范畴代数的应用，纽约，1968年；载于：纯数学研讨会论文集，第17卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1970年，第65-87页。29 C. Rezk，代数结构空间与歌剧运算子的上同调，博士论文，麻省理工学院，1996年。30 A. Robinson，E_∞-障碍理论，《同调与同伦应用》20（1）（2018年）155-184。31 M. Spitzweck，一般模型范畴中的幺半群、代数与模，预印本，arXiv:math/0101102，2001年。

Yonatan Harpaz
朱西厄-巴黎左岸数学研究所 邮箱：
yonatan.harpaz@imj-prg.fr

Truong Hoang
河内FPT大学数学系 邮箱：truonghm@fe.edu.vn