arXiv:2602.07362v1 [math.AT] 7 Feb 2026

局部有限无穷构形空间与无穷辫群的拓扑基本群

Jyh-Haur Teh*

摘要

我们研究平面中局部有限无穷有序构形空间 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 的拓扑基本群，以及无穷置换群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{N})$ 对 $Conf_\infty^{lf}$ 的典范作用所产生的同伦商：

$$H^{lf}(\infty) := \pi_1^{\mathrm{top}}(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \widetilde{\mathbb{N}}), \qquad B^{lf}(\infty) := \pi_1^{\mathrm{top}}\big(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}) /\!\!/ \mathrm{Aut}(\mathbb{N}), [e_0, \widetilde{\mathbb{N}}]\big).$$

我们证明 $H^{lf}(\infty)$ 和 $B^{lf}(\infty)$ 是非离散的完备拓扑群。一项主要结构定理将 $H^{lf}(\infty)$ 识别为一个由有限纯辫群构造而成的典范局部有限逆极限模型；我们还构造了一个完备左不变超度量，它与 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 的环空间所诱导的商拓扑相容。有限纯辫群的直极限稠密嵌入到 $H^{lf}(\infty)$ 中，并且我们证明 $H^{lf}(\infty)$ 是该子群的 Raˇıkov 完备化。此外，有限辫群的直极限嵌入到 $B^{lf}(\infty)$ 中，并且在有限支撑子群 $B^{lf}{}_{\text{有限}}(\infty) \subseteq B^{lf}(\infty)$ 中稠密。

1 引言

构形空间处于拓扑、几何学与分析学的经典交界处。对于流形M 和 $n \geq 1$，有序配置空间

$$Conf_n(M) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in M^n \mid x_i \neq x_j \text{ for } i \neq j\}$$

及其无序商空间 $C_n(M) = Conf_n(M)/S_n$对曲面而言编码了纯辫群和辫群。Fadell–Neuwirth ([15], [16], [2]) 的基础纤维化以及 McDuff、Segal 等人随后开展的研究（例如 [21, 22]），使这些空间成为代数拓扑学中的基本对象之一；有关概述和更多参考文献，参见 ([18], [19])。

局部有限的无限构形。 在 [23], 中，我们引入并研究了一种真正“无限、局部有限”的平面构形空间，旨在模拟可数多个粒子逃向无穷远，同时保留对局部统计敏感的拓扑。具体而言，令 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ ˜表示 $\mathbb{C}$ 中的局部有限有序 构形 $A = (a_1, a_2, \ldots)$ 所构成的空间（无重复，且在紧子集中无聚点），并令 $C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$表示相应的无序 空间，该空间通过商 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})/\mathrm{Aut}(\mathbb{N})$得到。$C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$上的拓扑自然由简单计数测度上的模糊拓扑 诱导而来；我们在 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 上赋予一个相容度量（来自 [23] 的和度量），使得投影

$$P : Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}) \longrightarrow C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$$

连续。

*数学系 国立清华大学数学系，台湾。电子邮件： jyhhaur@math.nthu.edu.t w.

这种情形与直极限 $\lim_{\longrightarrow n} Conf_n(\mathbb{C})$ 有两个显著区别。首先，在每个阶段，构型都是真正无限的；局部有限性避免了紧致聚集，却不会截断尾部。其次，由此得到的基本群规模大得多：例如， $\pi_1(Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C}))$ 不可数，而 $\pi_1(\lim_{\longrightarrow n} Conf_n(\mathbb{C}))$ 可数。

从同伦类型到拓扑群结构。在 [23] 中，我们证明了 $Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})$及其同伦商 $Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})//\operatorname{Aut}(\mathbb{N})$ 是球面的。本文延续了 [23], 的工作，但将重点从 $Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})$和 $C^{lf}_\infty(\mathbb{C})$的同伦类型转向相关局部有限辫群所承载的典范拓扑群结构。记

$$H^{lf}(\infty) := \pi_1(Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C}), \widetilde{\mathbb{N}}), \qquad B^{lf}(\infty) := \pi_1(Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})//\operatorname{Aut}(\mathbb{N}), \widetilde{\mathbb{N}}),$$

~其中， $//$ 表示博雷尔（同伦）商，而 $\mathbb{N} = (1, 2, 3, \ldots)$是标准基点。作为抽象群， [23] 建立了一个局部有限的辫群正合列类比

$$1 \longrightarrow H^{lf}(\infty) \longrightarrow B^{lf}(\infty) \longrightarrow \operatorname{Aut}(\mathbb{N}) \longrightarrow 1, \tag{1}$$

其中将 $\operatorname{Aut}(\mathbb{N})$ 视为离散群。

本文为 $H^{lf}(\infty)$和 $B^{lf}(\infty)$赋予由构形空间的环境度量所诱导的一致拓扑基点环路空间所给出的商拓扑。一旦将环境构形空间视为主要的几何对象，这便是可赋予 π_1 的最自然拓扑。由此得到的拓扑群与经典辫群截然不同：在有限维流形情形下，同样的构造会得到一个离散群。而在这里，局部有限拓扑带来了一种真正非离散的无限维现象。数十年来，人们一直在研究拓扑基本群（参见 [11]）。关于构形空间拓扑基本群的较新研究可见 [13, 14, 7, 8, 9]。

主要结果：完备性与非离散性。我们的主要定理表明，局部有限辫群不仅仅是庞大的抽象群：它们还具有稳健且在分析上有意义的拓扑。赋予从基点环路空间继承的商拓扑后，相应的基本群通常只是准拓扑群，而不是真正的拓扑群。我们发现， $H^{lf}(\infty)$ 和 $B^{lf}(\infty)$ 具有若干令人惊叹的性质。下面列出其中一些：

- $H^{lf}(\infty)$ 和 $B^{lf}(\infty)$ 都是完全可度量化拓扑群。事实上，它们各自都具有一个能诱导其拓扑的左不变超度量，并且关于该度量的每个柯西序列都收敛。
- $H^{lf}(\infty)$ 和 $B^{lf}(\infty)$ 都不是离散的。
- $H^{lf}(\infty)$ 是有限纯辫群直极限的完备化。
- $B^{lf}(\infty)$ 的开闭子群 $B^{lf}{}_{\text{fin}}(\infty)$ 是有限辫群直极限的完备化。
- $H^{lf}(\infty)$ 和 $B^{lf}{}_{\text{有限}}$ 是波兰空间。

这种非离散性在几何层面上已清晰可见：可以在无穷远附近的构形中构造非平凡的辫子，使其支撑位置远离原点，而其代表元在一致度量下任意接近常值环路，因此在 π_1中收敛到单位元。换言之，在局部有限拓扑中“很小”并不 意味着在辫群中“平凡”。这种现象不可能出现在由 $Conf_n(\mathbb{C})$产生的经典辫群中，而它

恰恰是局部有限构形的尾部，为这种无穷远处消失的辫结创造了空间。

相比之下，完备性是一种结构性陈述：局部有限辫结的柯西族存在极限，因此所得群在取极限时仍封闭，这些极限对应于受无穷远处条件控制的无限辫结模式。从拓扑群论的角度看，完备性是运用标准工具（贝尔范畴方法、自动连续性问题以及作用的连续性）所需的最低正则性。

拓扑群范畴中的正合性。 第二个主题是，局部有限辫结序列与这些拓扑天然相容。

定理 （拓扑正合列）。 序列 (1) 作为一列拓扑群是正合的：包含映射 $H^{lf}(\infty) \to B^{lf}(\infty)$ 是到一个闭正规子群上的拓扑嵌入，而 $B^{lf}(\infty)/H^{lf}(\infty)$ 上的商拓扑将其识别为离散群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{N})$。

因此， $B^{lf}(\infty)$ 应被视为由一个离散对称群扩张非离散完备群所得到的拓扑扩张。这清楚地区分了复杂性的两个来源：连续的局部有限辫结（核）与无穷远处的离散重标记（商）。

背景与动机。 局部有限构形空间 $Conf^{lf}_{\infty}(\mathbb{C})$ 和 $C^{lf}_{\infty}(\mathbb{C})$ 自然地出现在经典辫群理论之外。正如 [23] 所阐释的，赋予模糊拓扑后， $C^{lf}_{\infty}(\mathbb{C})$ 是随机几何和点过程理论中简单点构形的标准状态空间；它也是通过魏尔斯特拉斯乘积得到的整函数族零点集的自然承载空间。本文对拓扑群的精化源于这样一种观察：许多应用（尤其是涉及参数化族、极限过程或动力系统的应用）所需的不只是作为抽象不变量的 π_1；它们还需要在 π_1 上赋予一种与底层构形空间的拓扑相容的拓扑。

从这个意义上说， $H^{lf}(\infty)$ 和 $B^{lf}(\infty)$ 的完备性与非离散性并非装饰性性质。它们刻画了一种新的“无穷远处辫群”连续性，这种连续性在有限构形空间中不可见，并且在局部有限拓扑固有的极限运算下保持稳定。

本文结构。 在第 2 节中，我们回顾拓扑基本群 $\pi_1^{top}(X,\ x_0)$ 的定义，它是基点环路空间 $\Omega(X,\ x_0)$ 按基点同伦取商所得的群。我们证明有限纯辫群 $P_n = \pi_1^{top}(Conf_n(\mathbb{C}))$ 是离散的，并且对于每个 $\varepsilon > 0$，构造一个 ε-小但本质的环路：在 $(Conf,\ d_{\Sigma})$ 中，仅通过在无穷远处编织一条线股来实现。这表明 $Conf^{lf}_{\infty}(\mathbb{C})$ 不是半局部单连通的，且 $H^{lf}(\infty)$ 是非离散的。

在第 3 节中，我们定义带有遗忘映射 $p_{m,\ n}$ 的逆极限 $\varprojlim P_n$，并证明它是完全可度量化的。截断投影 $Conf^{lf}_{\infty}(\mathbb{C}) \to Conf_n(\mathbb{C})$ 是 Hurewicz纤维化，因此可以基于纤维化进行论证，以提升同伦并控制截断。

在第4节中，我们引入关键的细化：$(\varprojlim_n P_n)_{lf} \subseteq \varprojlim_n P_n$，即由环路可实现的相容辫数据子群，其中的“额外股线”最终会始终位于任意给定紧集之外；并证明$(\varprojlim P_n)^{lf}$是$\varprojlim_n P_n$的一个真子群。

在第5节中，我们定义典范映射 $\Theta:\ H^{lf}(\infty) \to (\varprojlim_n P_n)^{lf}$，并证明它是连续双射群同态。

在第6节中，我们定义开正规子群 $V_n := \ker(p_n :\ H^{lf}(\infty) \to P_n)$，并证明$\{V_n\}$ 是单位元 $\bigcap_n V_n = \{1\}$处的邻域基。我们证明，任意 $g \in V_n$ 都有代表元，它们逐字固定最前面的 n 股，并使其余股位于指定紧致集之外。由此可得乘法的联合连续性，因此 $H^{lf}(\infty)$ 是一个拓扑群。将 $(\varprojlim P_n)^{lf}$中的柱状邻域与 V_n基进行比较，可将 Θ提升为拓扑群同构。我们在 $H^{lf}(\infty)$ 上定义了一个明确的左不变超度量，它与拓扑相容且完备。

在第7节中，我们证明了 $B^{lf}(\infty)$ 的完备性。我们证明，$\Omega(BG)$ 的连通分支是可缩的，且 $\pi_1^{top}(BG) \cong G$ 是离散的。我们的策略是将 $B^{lf}(\infty)$ 视为一个核为 $H^{lf}(\infty)$、商为离散群的拓扑群扩张，并由此推出 $B^{lf}(\infty)$ 是完备的。

在第8节中，我们通过 Borel 构造的基本群实现有限辫群，从而恢复标准正合列 $1 \to P_n \to B_n \to \Sigma_n \to 1$ 以及有限层面的离散性。我们构造了从有限构形空间（及辫群）到无限局部有限情形的相容包含映射，得到子群 $P_\infty \le H^{lf}(\infty)$ 和 $B_\infty \le B^{lf}(\infty)$。我们证明，“纯”直极限 P_∞ 在 $H^{lf}(\infty)$ 中稠密，而“全”直极限 B_∞ 并不稠密；其闭包恰好是有限支撑置换的原像：$B_\infty = \pi_*^{-1}(\mathrm{Sym}^f(\mathbb{N}))$，$B^{lf}(\infty)$ 的一个既开又闭子群。

在第9节中，我们介绍 Ra˘ıkov 完备性和波兰性。我们证明，$H^{lf}(\infty)$ 是 Ra˘ıkov 完备的，也是稠密子群 P_∞的 Ra˘ıkov 完备化。我们证明，有限支撑全子群 $B^{lf}{}_{\mathrm{fin}}(\infty) := \pi_*^{-1}(\mathrm{Sym}^f(\mathbb{N}))$，以及 $B^{lf}(\infty)$ 是 Ra˘ıkov 完备的，并确认 $B^{lf}{}_{\mathrm{fin}}$ 是 B_∞的 Ra˘ıkov 完备化。此外，我们证明 $H^{lf}(\infty)$ 是波兰空间；$B^{lf}(\infty)$ 不是波兰空间；但 $B^{lf}{}_{\mathrm{fin}}(\infty)$ 是波兰空间。

2 拓扑基本群与完备性

2.1 拓扑基本群与完全可度量化空间

定义 2.1. 设 (X, x_0) 是一个带基点空间。记 $\Omega(X, x_0)$ 为赋予紧开拓扑的基点环路空间。定义拓扑基本群 $\pi_1^{\mathrm{top}}(X, x_0)$为集合$\pi_1(X, x_0)$，并赋予由典范满射诱导的商拓扑

$$q_X : \Omega(X, x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(X, x_0), \qquad \gamma \mapsto [\gamma].$$

注 2.2. 一般而言，$\pi_1^{\mathrm{top}}(X, x_0)$ 不一定是拓扑群：乘法可能不是联合连续的。总是成立的是下面记录的较弱的“拟拓扑”性质。

引理 2.3 (拟拓扑群结构). 对于任意带基点空间(X, x_0)，取逆 $[\gamma] \mapsto [\gamma^{-1}]$ 以及左/右平移 $L_{[\alpha]}([\gamma]) = [\alpha \cdot \gamma]$ 和 $R_{[\alpha]}([\gamma]) = [\gamma \cdot \alpha]$ 都是 $\pi_1^{\mathrm{top}}(X, x_0)$ 上的连续映射。特别地，每个平移都是同胚。

证明。 与一个固定 环路拼接，在紧开拓扑下是 $\Omega(X, x_0)$ 上的连续映射，反向 $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ 也是如此。这些映射保持基点同伦，因此可下降为商空间 $\pi_1^{\mathrm{top}}(X, x_0)$ 上的连续映射。由于 $L_{[\alpha]}^{-1} = L_{[\alpha^{-1}]}$ 和 $R_{[\alpha]}^{-1} = R_{[\alpha^{-1}]}$，平移是同胚。 □

定义 2.4 （完全可度量性）。如果某个完备度量所诱导的拓扑与一个拓扑空间的拓扑相同，则称该空间完全可度量化。如果一个拓扑群的底空间完全可度量化，则称该拓扑群为完备拓扑群。

2.2 局部有限纯辫群 $H^{lf}(\infty)$

2.2.1 模糊度量与求和度量

令 $C_c(\mathbb{C})$ 表示 $\mathbb{C}$ 上具有紧支撑的实值连续函数空间。对于$r > 0$，令

$$K_r := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \le r\} = \overline{B}(0, r).$$

为了定义模糊度量，我们需要构造一个由连续的、具有紧支撑的函数组成的函数族。下面的定义等价于 [23]，中的定义，但更适合本文后续进行的分析学。

引理 2.5。 存在一个序列 $(\varphi_j)_{j\geq 1} \subset C_c(\mathbb{C})$ 使得：

(a) 对于每个 $m \in \mathbb{N}$，子族 $\{\varphi_j : \text{支集}(\varphi_j) \subset K_m\}$ 在

$$C_c(K_m) := \{\psi \in C_c(\mathbb{C}) : \operatorname{supp}(\psi) \subset K_m\}$$

关于 $\|\cdot\|_\infty$ 的意义下是稠密的。

(b) 对于每个 $q \in \mathbb{Q}(i)$ 以及每个 $0 < r_1 < r_2$ 属于 $\mathbb{Q}$，存在 j 使得

$$0 \leq \varphi_j \leq 1, \qquad \varphi_j \equiv 1 \text{ on } \overline{B}(q, r_1), \qquad \operatorname{supp}(\varphi_j) \subset B(q, r_2).$$

(c) 对于每个 $j \geq 1$，有 支集$(\varphi_j) \subset K_j$。

证明。 固定 $m \in \mathbb{N}$。巴拿赫空间 $C(K_m)$ 是可分的。子空间

$$C_c(K_m) = \{\psi \in C(K_m) : \psi|_{\partial K_m} = 0\}$$

在 $C(K_m)$ 中是闭的（因此可分）。选取一个可数的 $\|\cdot\|_\infty$–稠密族 $\{f_{m,k}\}_{k\geq 1} \subset C_c(K_m)$。

接下来，对于每个满足 $q \in \mathbb{Q}(i)$ 且 $0 < r_1 < r_2$ 属于 $\mathbb{Q}$ 的三元组 (q, r_1, r_2)，选取一个连续函数 $\eta_{q,r_1,r_2} : \mathbb{C} \to [0, 1]$，使得

$$\eta_{q,r_1,r_2} \equiv 1 \text{ on } \overline{B}(q, r_1), \qquad \operatorname{supp}(\eta_{q,r_1,r_2}) \subset B(q, r_2).$$

对于每个 m，定义一个可数集

$$S_m := \{f_{m,k} : k \geq 1\} \cup \{\eta_{q,r_1,r_2} : \operatorname{supp}(\eta_{q,r_1,r_2}) \subset K_m\} \subset C_c(K_m),$$

并将 $S_m = \{\psi_{m,k}\}_{k\geq 1}$ 枚举。

现在定义一个序列 $(\varphi_j)_{j\geq 1}$，将 $\psi_{m,k}$ 放在指标

$$j(m, k) := 2^m(2k - 1), \qquad \varphi_{j(m,k)} := \psi_{m,k},$$

并令 $\varphi_j \equiv 0$ 取为指标 j（不具有 $j(m, k)$ 的形式）。

于是 $j(m, k) \geq 2^m \geq m$，且 $\operatorname{supp}(\psi_{m,k}) \subset K_m \subset K_{j(m,k)}$，并且 $\operatorname{supp}(0) = \varnothing \subset K_j$。因此 (c) 成立。固定 m，子族 $\{\varphi_j : \operatorname{supp}(\varphi_j) \subset K_m\}$ 包含 $\{f_{m,k}\}_{k\geq 1}$，所以它在 $C_c(K_m)$ 中稠密；这证明了 (a)。性质 (b) 成立，因为对任意 (q, r_1, r_2)，我们都可以选取足够大的 m，使得 $B(q, r_2) \subset K_m$，于是 $\eta_{q,r_1,r_2} \in S_m$，因此会出现在这些 φ_j 之中。 □

在全文中，固定 $\{\varphi_j\}_{j\geq 1}$，如引理 2.5 所示。

定义 2.6（模糊度量 $d_{\mathcal{V}}$）。 在 $C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 上定义 $d_{\mathcal{V}}$

$$d_{\mathcal{V}}(A, B) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\sum_{a\in A} \varphi_j(a) - \sum_{b\in B} \varphi_j(b)|}{1 + |\sum_{a\in A} \varphi_j(a) - \sum_{b\in B} \varphi_j(b)|}.$$

令 $P\colon Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}) \to C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 为投影。在 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 上赋予和度量

$$d_{\sum}(x,y) = d_{\mathrm{prod}}(x,y) + d_{\mathcal{V}}(P(x),P(y)), \tag{2}$$

其中

$$d_{\mathrm{prod}}(x,y) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}\,\min\{|x_j - y_j|,\,1\}$$

在 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$上诱导乘积拓扑。

$Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$的基点为 $\widetilde{\mathbb{N}} = (1,2,3,\dots) \in Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$。令

$$H^{lf}(\infty) := \pi_1^{\mathrm{top}}(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \widetilde{\mathbb{N}}).$$

引理 2.7 (环路空间上的一致度量)。 设(Z,d) 为度量空间，且 $z_0 \in Z$。定义$\bar{}$有界度量 $d(u,v) = \min\{d(u,v),1\}$于 Z上，并定义$\Omega(Z,z_0)$ 上的一致度量为

$$\bar{d}_\infty(\alpha,\beta) = \sup_{t\in[0,1]} \bar{d}(\alpha(t),\beta(t)).$$

$\bar{}$那么 d_∞ 在$\Omega(Z,z_0)$上诱导紧开拓扑。

证明。 由于 $[0,1]$ 是紧致的，紧开拓扑与关于 Z上任意有界相容度量的$\bar{}$一致收敛拓扑一致。度量 d 有界且$\bar{}$与 d相容，因此 d_∞ 在 $\Omega(Z,z_0)$上诱导紧开拓扑。

□

2.3 一致有限性引理

引理 2.8。 设 T 为紧致空间，且 $F\colon T \to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 关于 $d_{\sum}$连续。那么对每个紧致 $K \subset \mathbb{C}$，都存在 $N = N(K)$ 使得

$$F(t)_m \notin K \qquad \textit{for all } t \in T \textit{ and all } m > N.$$

特别地，对每个 n，都存在 $N(n)$使得 $F(t)_m \notin K_n$对所有 $t \in T$和所有 $m > N(n)$均成立。

证明。 反设不然。则存在一个紧集 $K \subset \mathbb{C}$，使得对每个 N，都可以找到$t_N \in T$ 以及一个指标 $m_N > N$，使得

$$x_N := F(t_N)_{m_N} \in K.$$

由于 $m_N > N$，我们有 $m_N \to \infty$。由 T和 K的紧致性，取子列后可设 $t_N \to t_* \in T$ 且 $x_N \to z \in K$。

令 $A_* := P(F(t_*)) \subset \mathbb{C}$为 t_*处的底层局部有限子集。豪斯多夫空间 $\mathbb{C}$ 中的局部有限子集是闭且离散的。因此存在 $r > 0$ 使得

$$\overline{B}(z,r) \cap A_* \subset \{z\}. \tag{3}$$

选择有理数据 $q \in \mathbb{Q}(i)$ 和 $0 < r_1 < r_2$，使其属于 $\mathbb{Q}$，满足

$$\overline{B}(q,r_2) \subset B(z,r) \quad \text{and} \quad z \in B(q,r_1).$$

那么对于所有 $N \gg 0$，都有 $x_N \in B(q,r_1)$。

由引理 2.5(b)，选取指标 j_0，使得

$$0 \le \varphi_{j_0} \le 1, \qquad \varphi_{j_0} \equiv 1 \text{ on } \overline{B}(q,r_1), \qquad \mathrm{supp}(\varphi_{j_0}) \subset B(q,r_2) \subset B(z,r).$$

因此，对于 $N \gg 0$， $\varphi_{j_0}(x_N) = 1$。

若 $B(z,r) \cap A_* = \varnothing$，则 $\sum_{a\in A_*} \varphi_{j_0}(a) = 0$，而 $\sum_{a\in P(F(t_N))} \varphi_{j_0}(a) \geq 1$ 对于 $N \gg 0$（因为 x_N 贡献 1）。因此对于 $N \gg 0$,

$$\Big| \sum_{a\in P(F(t_N))} \varphi_{j_0}(a) - \sum_{a\in A_*} \varphi_{j_0}(a) \Big| \geq 1.$$

若 $B(z,r) \cap A_* = \{z\}$，令 i_0 为满足 $F(t_*)_{i_0} = z$ 的唯一指标。F 的连续性（特别是对于 d_{prod}–项）蕴含 $F(t_N)_{i_0} \to z$，从而对 $N \gg 0$ 有 $F(t_N)_{i_0} \in B(q, r_1)$。此外，对于 $N \gg 0$ 我们有 $m_N > i_0$，故 $m_N \neq i_0$。因此对于 $N \gg 0$，$B(q,r_1)$ 中至少有 $P(F(t_N))$ 的两个不同点（x_N 与 $F(t_N)_{i_0}$），从而

$$\sum_{a\in P(F(t_N))} \varphi_{j_0}(a) \geq 2 \quad \text{while} \quad \sum_{a\in A_*} \varphi_{j_0}(a) = \varphi_{j_0}(z) = 1.$$

因此，对于 $N \gg 0$,

$$\Big| \sum_{a\in P(F(t_N))} \varphi_{j_0}(a) - \sum_{a\in A_*} \varphi_{j_0}(a) \Big| \geq 1.$$

在任一情况下，对于 $N \gg 0$，$d_{\mathcal{V}}\big(P(F(t_N)),\ P(F(t_*))\big)$ 中的 j_0 项都不小于 $2^{-j_0}\cdot \frac{1}{2}$，所以 $d_{\sum}(F(t_N),\ F(t_*)) \not\to 0$。这与 F 在 t_* 处的连续性矛盾。 □

2.4 离散性判据

以下 内容是 [10] 中主定理的一个部分结果。这里我们给出一个更简单的证明 .

命题 2.9（π_1^{top} 的离散性判据）。设 (X, x_0) 是一个带基点空间，且 局部道路连通并且 半局部单连通。那么 $\pi_1^{\mathrm{top}}(X, x_0)$ 是离散的。

证明。令 $q\colon \Omega(X,x_0) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{top}}(X,x_0)$ 为商映射。只需证明 $q^{-1}(\{1\})$ 在 $\Omega(X,x_0)$ 中是开集。

令 $\alpha \in q^{-1}(\{1\})$ 为一个零伦带基点环路。对每个 $t \in [0,1]$，由于 X 在 $\alpha(t)$ 处半局部单连通，选取一个开邻域 $U_t \ni \alpha(t)$，使得包含映射 $\pi_1(U_t, \alpha(t)) \to \pi_1(X, \alpha(t))$ 是平凡的。利用局部道路连通性，我们可以假设每个 U_t 都是道路连通的。（于是对任意 $u \in U_t$，在 U_t 内作基点变换可知，以 u 为基点的 U_t 中每个环路在 X 中也都是零伦的。）

由紧 致性，选取一个细分 $0 = t_0 < \cdots < t_m = 1$ 和指标 t_i^*，使得 at

$$\alpha\big([t_{i-1}, t_i]\big) \subset U_{t_i^*} =: U_i \qquad (1 \leq i \leq m).$$

对于每个内部顶点 t_i $(1 \leq i \leq m-1)$，令 $x_i := \alpha(t_i) \in U_i \cap U_{i+1}$ 并选取一个包含 x_i 的开路径连通邻域 $W_i \subset U_i \cap U_{i+1}$。在紧开拓扑中，将 α 的一个邻域定义为

$$\mathcal{N} := \Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{\beta \in \Omega(X,x_0) : \beta([t_{i-1},t_i]) \subset U_i\} \Big) \ \cap \ \Big(\bigcap_{i=1}^{m-1} \{\beta \in \Omega(X,x_0) : \beta(t_i) \in W_i\} \Big).$$

我们断言 $\mathcal{N} \subset q^{-1}(\{1\})$。

固定 $\beta \in \mathcal{N}$。对于每个 $i = 1, \ldots, m-1$，选取一条路径 λ_i in W_i from $\alpha(t_i)$ 到 $\beta(t_i)$。令 λ_0 and λ_m 为 x_0 处的常值路径。对于每个 i，定义一条路径

$$\widetilde{\beta}_i \ := \ \lambda_{i-1} \cdot \beta|_{[t_{i-1},t_i]} \cdot \lambda_i^{-1}.$$

~于是， β_i 是一条从 $\alpha(t_{i-1})$ 到 $\alpha(t_i)$ 的路径，且其像包含于 U_i 中（因为根据构造，$\lambda_{i-1}, \beta|_{[t_{i-1},t_i]}, \lambda_i$ 都包含于 U_i 中）。因此，环路 $\alpha|_{[t_{i-1},t_i]} \cdot \widetilde{\beta}_i^{-1}$ 是 U_i 中的环路，故在 X 中零伦。因此， $\alpha|_{[t_{i-1},t_i]}$ 在 X 中相对于端点同伦于 β_i。将 $i = 1, \dots, m$ 上的情形串接起来可知， α 相对于端点同伦于 β，因此 β 是零伦的。因此， $q^{-1}(\{1\})$ 是开集。

因此，$\{1\}$ 在 $\pi_1^{\mathrm{top}}(X, x_0)$ 中是开集，并且根据平移（引理 2.3），每个单点集都是开集；因此 $\pi_1^{\mathrm{top}}(X, x_0)$ 是离散的。 □

推论 2.10 （$(Conf_n(\mathbb{C}))$ 的离散性）。对于每个 $n \geq 1$，拓扑基本群

$$P_n = \pi_1^{\mathrm{top}}(Conf_n(\mathbb{C}), (1, \dots, n))$$

是离散的。

证明。流形 $Conf_n(\mathbb{C})$ 是局部道路连通且半局部单连通的，因此该断言由命题 2.9 得出。 □

2.5 $Conf_\infty^{lf}$（$Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ $d_\sum$）的非半局部单连通性与 $H^{lf}(\infty)$ 的非离散性

回顾基点 $\widetilde{\mathbb{N}} = (1, 2, 3, \dots\dots) \in Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$，和度量

$$d_\sum = d_{\mathrm{prod}} + d_{\mathcal{V}} \circ (P \times P),$$

以及拓扑基本群

$$H^{lf}(\infty) := \pi_1^{\mathrm{top}}(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \widetilde{\mathbb{N}}),$$

其中 π_1^{top} 带有由典范满射诱导的商拓扑

$$q : \Omega(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \widetilde{\mathbb{N}}) \twoheadrightarrow \pi_1(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \widetilde{\mathbb{N}}), \qquad \alpha \mapsto [\alpha].$$

命题 2.11. 对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个整数 $m \geq 3$ 和一个基点环路 $\gamma^{(m)} : [0,1] \to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$，其基点为 $\widetilde{\mathbb{N}}$，使得：

(i) $\gamma^{(m)}([0,1]) \subset B_{d_\sum}(\varepsilon); \widetilde{\mathbb{N}}$,

(ii) $[\gamma^{(m)}] \neq 1$ 在 $\pi_1(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \widetilde{\mathbb{N}})$。

特别地，$(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), d_\sum)$ 在 $\widetilde{\mathbb{N}}$ 处不是半局部单连通的。

证明。固定 $\varepsilon > 0$。

步骤 1：选取参数 J 和 m。选取 $J \geq 1$ 使得

$$\sum_{j > J} 2^{-j} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

接下来选取一个足够大的整数 m，使得

$$m \geq J + 3 \qquad \text{and} \qquad 2^{-m} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

同时固定一个半径 $0 < \rho < \frac{1}{4}$。

步骤 2：定义一个环路 z_m，它位于带孔平面中。令 $z_m : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{1、2、\dots\dots、m-1\}$为以 m 为基点的基点环路，它以正向绕穿孔点 $m-1$ 一周，并避开其余穿孔点 $\{1、\dots\dots、m-2\}$。具体而言，可以将 z_m 取为以下三条路径的拼接：

(a) 从 m 到 $m-1+\rho$的线段;

(b) 正向圆周 $t \mapsto (m-1)+\rho e^{2\pi i t}$;

(c) 从 $m-1+\rho$ 返回 m的线段。

于是，对所有 t， $z_m(t) \in B(m-1,\ \rho) \cup [m-1+\rho, m]$。特别地，由于 $\rho < \frac{1}{4}$，对于每个整数 $k > m$，我们有 $z_m(t) \neq k$；并且根据构造，对于所有 t， $z_m(t) \notin \{1, \dots, m-1\}$。

步骤 3：定义 $\gamma^{(m)}$ 在 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$中的环路。 定义 $\gamma^{(m)}:\ [0,1] \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 通过

$$\gamma_k^{(m)}(t) \equiv k \quad (k \neq m), \qquad \gamma_m^{(m)}(t) := z_m(t).$$

于是 $\gamma^{(m)}(0) = \gamma^{(m)}(1) = \widetilde{\mathbb{N}}$。此外，对于每个 t，坐标 $\gamma_m^{(m)}(t) = z_m(t)$都避开所有整数 $k \neq m$，因此 $\gamma^{(m)}(t)$的坐标两两不同。因此，对于所有 t， $\gamma^{(m)}(t) \in Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$，也就是说， $\gamma^{(m)}$ 是 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$中的一个基点环路。

步骤 4： $\gamma^{(m)}$ 是 ε–小的，在 $d_\sum$。 由于只有第 m个坐标在移动，对所有 t，

$$d_{\mathrm{prod}}(\gamma^{(m)}(t), \widetilde{\mathbb{N}}) = \sum_{k \geq 1} 2^{-k} \min\{|\gamma_k^{(m)}(t) - k|, 1\} = 2^{-m} \min\{|z_m(t) - m|, 1\} \leq 2^{-m} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对于模糊项，固定 $1 \leq j \leq J$。根据引理 2.5(c)， $\mathrm{supp}(\varphi_j) \subset K_j \subset K_J$。由于 $m \geq J+3$ 和 $z_m(t) \in \overline{B}(m-1,\ \rho) \cup [m-1+\rho, m]$，且 $\rho < \frac{1}{4}$，我们有

$$|z_m(t)| \geq m - 1 - \rho > J,$$

因此，对所有 t，都有 $z_m(t) \notin K_J$，所以 $\varphi_j(z_m(t)) = 0$。此外， $m \notin K_J$，因此 $\varphi_j(m) = 0$。其余所有坐标均保持不变，所以对每个 t 以及每个 $1 \leq j \leq J$，

$$\sum_{a \in P(\gamma^{(m)}(t))} \varphi_j(a) = \sum_{a \in \mathbb{N}} \varphi_j(a),$$

因此， $d_{\mathcal{V}}(P(\gamma^{(m)}(t))\ P(\widetilde{\mathbb{N}}))$ 中的前 J 个加项为零。于是

$$d_{\mathcal{V}}(P(\gamma^{(m)}(t)), P(\widetilde{\mathbb{N}})) \leq \sum_{j > J} 2^{-j} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

结合这两个估计，

$$d_\sum(\gamma^{(m)}(t), \widetilde{\mathbb{N}}) = d_{\mathrm{prod}}(\gamma^{(m)}(t), \widetilde{\mathbb{N}}) + d_{\mathcal{V}}(P(\gamma^{(m)}(t)), \mathbb{N})) < \varepsilon \qquad (\text{ for all } t \in [0,1]).$$

因此 $\gamma^{(m)}([0,1]) \subset B_{d_\sum}(\widetilde{\mathbb{N}},\ \varepsilon)$，从而证明了 (i)。

步骤 5： $\gamma^{(m)}$ 在 $\pi_1(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})\ \widetilde{\mathbb{N}})$ 中是本质的。 考虑投影 $\mathrm{pr}_m:\ Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}) \to Conf_m(\mathbb{C})$。于是 $\mathrm{pr}_m \circ \gamma^{(m)}$ 是 $Conf_m(\mathbb{C})$ 中以 $(1,\ \dots\dots,\ m)$ 为基点的基点环路，其前 $m-1$ 个坐标保持不变，而第 m 个坐标为 z_m。令 $u_{m-1,\ m}(t)$ 为相应的 S^1 值环路

$$u_{m-1,m}(t) = \frac{(\mathrm{pr}_m \circ \gamma^{(m)})_m(t) - (\mathrm{pr}_m \circ \gamma^{(m)})_{m-1}(t)}{\left|(\mathrm{pr}_m \circ \gamma^{(m)})_m(t) - (\mathrm{pr}_m \circ \gamma^{(m)})_{m-1}(t)\right|} = \frac{z_m(t) - (m-1)}{|z_m(t) - (m-1)|} \in S^1.$$

根据构造， z_m 沿正方向绕 $m-1$一周，因此 $\deg(u_{m-1,\ m}) = 1$。所以$[\mathrm{pr}_m \circ \gamma^{(m)}] \neq 1$ 属于 P_m。由于$(\mathrm{pr}_m)_*:\ \pi_1(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})\ \widetilde{\mathbb{N}}) \to P_m$ 是一个群同态，由此可得

$$[\gamma^{(m)}] \neq 1 \in \pi_1(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \widetilde{\mathbb{N}}),$$

证明了 (ii)。

第 6 步：得出非半局部单连通性。令 U 为$Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$中 $\mathbb{N}$ 的任意邻域。选取 $\varepsilon > 0$，使得 $B_{d_\sum}(\widetilde{\mathbb{N}},\ \varepsilon) \subset U$。根据前面的步骤，存在一个本质基环 $\gamma^{(m)} \subset B_{d_\sum}(\widetilde{\mathbb{N}},\ \varepsilon) \subset U$。因此，没有任何 $\widetilde{\mathbb{N}}$的邻域具有平凡的包含映射诱导的基本群，即 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 在 $\widetilde{\mathbb{N}}$ 处不是半局部单连通的。 □

定理 2.12 （ H^{lf}（∞）的非离散性）。拓扑基本群 H^{lf}（∞）不是离散的。

证明。反设 $H^{lf}(\infty)$ 是离散的。则 $\{1\}$ 在 $H^{lf}(\infty)$ 中是开集。由于 $q\colon \Omega(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})\ \widetilde{\mathbb{N}}) \twoheadrightarrow H^{lf}(\infty)$ 是商映射，原像 $q^{-1}(\{1\})$ 在 $\Omega(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})\ \widetilde{\mathbb{N}})$ 中是开集。

令 $c_{\widetilde{\mathbb{N}}}$ 表示 $\widetilde{\mathbb{N}}$ 处的常值环路。由于 $c_{\widetilde{\mathbb{N}}} \in q^{-1}(\{1\})$，且紧开拓扑的子基由形如 $\langle K, U\rangle = \{\alpha\colon \alpha(K) \subset U\}$ 的集合组成，因此存在紧集 $K_1, \dots, K_r \subset [0,1]$ 以及 $\widetilde{\mathbb{N}}$ 的开邻域 $U_1, \dots, U_r \subset Conf_\infty^{lf}$，使得

$$c_{\widetilde{\mathbb{N}}} \in \bigcap_{i=1}^{r} \langle K_i, U_i\rangle \subset q^{-1}(\{1\}).$$

令 $U := \bigcap_{i=1}^{r} U_i$，它是 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 中 $\widetilde{\mathbb{N}}$ 的一个开邻域。那么对于任意基点环路 $\alpha\colon [0,1] \to U$，对每个 i 都有 $\alpha(K_i) \subset U_i$，因此 $\alpha \in \bigcap_{i=1}^{r} \langle K_i, U_i\rangle \subset q^{-1}(\{1\})$。所以，$U$ 中的每个基点环路在 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 中都是零伦的，这意味着 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 在 $\widetilde{\mathbb{N}}$ 处半局部单连通。这与命题 2.11 矛盾。因此 $H^{lf}(\infty)$ 不是离散的。 □

3 逆极限与典范映射 Θ

定义 3.1. 对于 $m \geq n$，记 $p_{m,n}\colon P_m \to P_n$ 为由映射 $\mathrm{pr}_{m,n}\colon Conf_m(\mathbb{C}) \to Conf_n(\mathbb{C})$诱导的标准“遗忘线股”同态，并定义逆极限

$$\varprojlim_n P_n := \Big\{(g_n)_{n\geq 1} \in \prod_{n\geq 1} P_n \;\Big|\; p_{m,n}(g_m) = g_n \ \text{ for all } m \geq n\Big\}.$$

我们将 $\mathrm{pr}_n\colon Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}) \to Conf_n(\mathbb{C})$记为投影映射

$$\mathrm{pr}_n((a_j)_{j\geq 1}) = (a_1, \dots, a_n)$$

并将其诱导的群同态记为

$$p_n : H^{lf}(\infty) \to P_n$$

定理 3.2. 在 $\prod_{n\geq 1} P_n$ 上赋予度量

$$d_{\prod}((g_n),(h_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\,\delta(g_n, h_n), \qquad \delta(u,v) = \begin{cases} 0, & u = v, \\ 1, & u \neq v. \end{cases}$$

那么 $d_{\prod}$ 是完备的，并诱导乘积拓扑。此外，$\varprojlim_n P_n$ 是 $\prod_{n\geq 1} P_n$的闭子群，因此$\varprojlim_n P_n$ 是一个完全可度量化拓扑群。

证明。 每个 P_n 都是离散的，因而对于离散度量 δ是完备的。度量 $d_{\prod}$ 是标准的加权乘积度量，因此它诱导乘积拓扑并且是完备的。

定义等式 $p_{m,n}(g_m) = g_n$ 刻画了一个闭子集，因为每个 $p_{m,n}$ 都是离散空间之间的连续映射。因此 $\varprojlim_n P_n$ 是完备度量空间中的闭子集，因而是完备的。它作为拓扑群的一个闭子群，本身也是拓扑群。 □

定理 3.3. 投影 $\mathrm{pr}_n:\ Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}) \longrightarrow Conf_n(\mathbb{C})$ 是一个局部平凡纤维丛。特别地，pr_n 是一个 *Hurewicz*纤维化。

证明。 固定 $x=(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_n)\in Conf_n(\mathbb{C})$，并令

$$\delta := \min_{i\neq j}|x_i-x_j|>0, \qquad r:=\frac{\delta}{2}.$$

Th且闭圆盘 $B(x_i,\ 2r/3)$ 两两不相交。定义一个开邻域 d

$$U_x := \Big\{ y=(y_1,\dots,y_n)\in Conf_n(\mathbb{C}):\ |y_i-x_i|<\frac{r}{6}\ \text{ for all } i\Big\}.$$

步骤 1：紧支撑平面同胚的连续族。 根据 [23,引理 4.1]，存在一个 Lipschitz函数 $\eta\colon [0,\infty)\to[0,1]$ (具有该处列出的性质；在构造中，可以如 [23, 引理 4.1]的证明中那样安排 $\mathrm{Lip}(\eta)\le 3/r$)，使得对任意 $a\in\mathbb{C}$ 以及任意满足 $|p-a|\le r/6$ 的 p，映射

$$h_{a,p}(z) := z+(p-a)\eta(|z-a|)$$

是一个同胚，满足 $h_{a,\ p}(a)=p$，并且在 $\mathbb{C}\setminus B(a,\ 2r/3)$ 上等于 id；此外，$(a,\ p,\ z)\mapsto h_{a,\ p}(z)$ 在 $\{|p-a|\le r/6\}$ 上连续。

对每个 $y=(y_1、\ \ldots\ldots、\ y_n)\in U_x$，定义

$$H_y := h_{x_1,y_1}\circ h_{x_2,y_2}\circ\cdots\circ h_{x_n,y_n}.$$

由于支集 $B(x_i、\ 2r/3)$ 两两不相交，H_y 是 $\mathbb{C}$ 的同胚，满足 $H_y(x_i)=y_i$ 对所有 i 均成立，并且

$$H_y=\mathrm{id}\quad \text{on } \mathbb{C}\setminus S, \qquad S:=\bigcup_{i=1}^n \overline{B}(x_i,2r/3),$$

其中 S 是一个固定的紧集，与 y 无关。此外，$(y、\ z)\mapsto H_y(z)$ 在 $U_x\times\mathbb{C}$ 上连续，因为它是引理 4.1] 中连续映射的有限复合。

步骤 2：逆族的连续性 $(y、\ z)\mapsto H_y^{-1}(z)$。 我们先证明单个隆起映射的连续性。

断言。 固定上述的 $a\in\mathbb{C}$ 和 $r>0$。映射

$$(p,w)\longmapsto h_{a,p}^{-1}(w)$$

在 $\{(p、\ w)\in\mathbb{C}^2:\ |p-a|\le r/6\}$ 上连续。

断言的证明。写作 $v:=p-a$ 和 $g_p(z):=v\,\eta(|z-a|)$，使得 $h_{a,\ p}(z)=z+g_p(z)$。利用 $\mathrm{Lip}(\eta)\le 3/r$ 和 $|v|\le r/6$，我们得到一致有界性

$$\mathrm{Lip}(g_p)\le |v|\,\mathrm{Lip}(\eta)\le \frac{r}{6}\cdot\frac{3}{r}=\frac{1}{2}.$$

给定 $w\in\mathbb{C}$，定义一个压缩映射

$$T_{p,w}(z):=w-g_p(z).$$

因此 $\mathrm{Lip}(T_{p,w})\ \le\ 1/2$，故 $T_{p,w}$ 有唯一的不动点 $z=z(p,w)$。根据构造，z满足 $z=w-g_p(z)$，即 $h_{a,p}(z)=w$，所以 $z(p,w)=h_a^{-1}{}_{,p}(w)$。

为了证明连续性，固定 (p_0, w_0)，并令 $z_0 := z(p_0, w_0)$。那么

$$\begin{aligned}|z(p,w) - z_0| &= |T_{p,w}(z(p,w)) - T_{p_0,w_0}(z_0)| \\ &\le |T_{p,w}(z(p,w)) - T_{p,w}(z_0)| + |T_{p,w}(z_0) - T_{p_0,w_0}(z_0)| \\ &\le \frac{1}{2}|z(p,w) - z_0| + |T_{p,w}(z_0) - T_{p_0,w_0}(z_0)|.\end{aligned}$$

因此

$$|z(p,w) - z_0| \le 2\,|T_{p,w}(z_0) - T_{p_0,w_0}(z_0)|.$$

现在，$(p,w) \mapsto T_{p,w}(z_0) = w - g_p(z_0)$ 是连续的（因为 $(a,p,z) \mapsto h_{a,p}(z)$ 根据 [23,引理 4.1]是连续的），所以当 $(p,w) \to (p_0,w_0)$ 时，右侧趋于 0。这证明了该断言。 □

将该断言应用于 $a = x_i$，可知 $(y_i, z) \mapsto h^{-1}_{x_i,y_i}(z)$ 是连续的。因此

$$H_y^{-1} = h^{-1}_{x_n,y_n} \circ \cdots \circ h^{-1}_{x_1,y_1},$$

并且 $(y,z) \mapsto H_y^{-1}(z)$ 在 $U_x \times \mathbb{C}$ 上是连续的。由于每个 $h_{x_i,y_i} = \mathrm{id}$ 在 $\mathbb{C} \setminus B(x_i, 2r/3)$ 上，$h^{-1}_{x_i,y_i}$ 也同样如此，因此

$$H_y^{-1} = \mathrm{id} \quad \text{on } \mathbb{C} \setminus S.$$

步骤 3：pr_n 的一个局部平凡化。 令纤维位于 x上

$$F_x := \mathrm{pr}_n^{-1}(x) = \Big\{A = (a_j)_{j\ge1} \in Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C}) : \ (a_1, \dots, a_n) = x\Big\}.$$

定义

$$\Phi : U_x \times F_x \longrightarrow \mathrm{pr}_n^{-1}(U_x), \qquad \Phi\big(y, (a_j)\big) := \big(H_y(a_j)\big)_{j\ge1}.$$

这是定义良好的：由于 H_y 是单射，坐标仍然彼此不同；又由于 H_y 是同胚，局部有限性得以保留（紧集的原像仍是紧集）。此外

$$\mathrm{pr}_n(\Phi(y,(a_j))) = (H_y(x_1), \dots, H_y(x_n)) = (y_1, \dots, y_n) = y.$$

定义

$$\Psi : \mathrm{pr}_n^{-1}(U_x) \longrightarrow U_x \times F_x, \qquad \Psi\big((b_j)\big) := \Big(\mathrm{pr}_n((b_j)),\ \big(H^{-1}_{\mathrm{pr}_n((b_j))}(b_j)\big)_{j\ge1}\Big).$$

若 $y = \mathrm{pr}_n((b_j))$，则 $\big(H_y^{-1}(b_j)\big)_{j\ge1}$ 的前 n 个坐标为

$$(H_y^{-1}(y_1), \dots, H_y^{-1}(y_n)) = (x_1, \dots, x_n),$$

因此第二个分量确实属于 F_x。代数地，我们有 $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{U_x \times F_x}$ 和 $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathrm{pr}_n^{-1}(U_x)}$。

步骤 4：关于度量 $d_{\sum}$，Φ 和 Ψ 的连续性。 回顾一下 $d_{\sum} = d_{\mathrm{prod}} + d_{\mathcal{V}} \circ (P \times P)$ 以及$d_{\mathcal{V}}$ 是一个度量（见 [23, 命题 2。3]）。

(*i*) 乘积部分。对于每个固定的 j，映射 $(y, (a_k)) \mapsto H_y(a_j)$ 是连续的，因为 $(y,z) \mapsto H_y(z)$ 是连续的。于是，根据 d_{prod} 的加权级数定义，可知 Φ 在 d_{prod}中连续。对于 Ψ，同样的论证也适用，因为 $(y,z) \mapsto H_y^{-1}(z)$ 根据步骤 2 是连续的。

(*ii*) 通过 *[23,* 引理 *5。2]*。我们证明 Φ 在 $d_{\mathcal{V}}$ 项中的连续性；对 Ψ 的论证完全相同，只需用 H_y^{-1} 替换 H_y。

令 $(y_m, A_m) \to (y, A)$ 属于 $U_x \times F_x$。令

$$K := \{(y, A)\} \cup \{(y_m, A_m) : m \ge 1\}.$$

则 K 是紧致的。定义 $F\colon K \to C^{lf}_{\infty}(\mathbb{C})$，使得 $F(y', A') := P(A')$；根据 $d_{\sum}$ 的定义，这是连续的。定义一个连续映射

$$\widetilde{\Phi} : K \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \widetilde{\Phi}\big((y', A'); z\big) := H_{y'}(z).$$

~每个 $\Phi_{(y',A')} = H_{y'}$ 都是同胚，并且在 $\mathbb{C} \setminus S$ 上均为单位元，其中包含步骤 1 中相同的固定紧致 S。因此，[23, 引理 5.2] 适用，并推出以下映射的连续性

$$(y', A') \longmapsto (H_{y'})_*(F(y', A')) = (H_{y'})_*(P(A'))$$

在模糊拓扑下，因此

$$d_{\mathcal{V}}(P(\Phi(y_m, A_m)), P(\Phi(y, A))) \to 0.$$

因此，Φ 在 $d_{\mathcal{V}}$部分上连续，进而在 $d_{\sum}$上连续。对连续族 $H_{y'}^{-1}$（步骤 2）应用相同论证，可得 Ψ 也连续。

因此，Φ 是一个同胚 $U_x \times F_x \cong \mathrm{pr}_n^{-1}(U_x)$，且与到 U_x的投影相交换。由于 x是任意的，pr_n 是一个局部平凡纤维丛。

步骤 5：Hurewicz纤维化。 由于 $Conf_n(\mathbb{C})$是一个仿紧流形，上述局部平凡纤维丛是可数化的，因此是一个Hurewicz纤维化。 □

4 局部有限逆极限

定义 4.1。 相容序列 $(g_n)_{n\geq 1} \in \varprojlim_n P_n$ 称为**局部有限 的**，如果存在基点环路

$$\alpha^{(n)} : [0,1] \to Conf_n(\mathbb{C}) \qquad (n \geq 1)$$

使得：

(i) $\alpha^{(n)}(0) = \alpha^{(n)}(1) = (1, \dots, n)$ 和 $[\alpha^{(n)}] = g_n \in P_n$；

(ii) $\mathrm{pr}_{n+1,n} \circ \alpha^{(n+1)} = \alpha^{(n)}$ 作为映射 $[0,1] \to Conf_n(\mathbb{C})$；

(iii) 对每个 $\ell \geq 1$，都存在 $M(\ell) \geq 1$，使得对所有 $n \geq M(\ell)$ 以及所有满足$M(\ell) < m \leq n$ 的 m，

$$\alpha_m^{(n)}(t) \notin K_\ell \qquad \text{for all } t \in [0,1].$$

将这类序列构成的子集记为

$$\Big(\varprojlim_n P_n\Big)_{\mathrm{lf}} \;\leq\; \varprojlim_n P_n.$$

引理 4.2. 子集 $\big(\varprojlim_n P_n\big)_{\mathrm{lf}}$ 是 $\varprojlim_n P_n$ 的一个子群。

证明. 设 $(g_n)_{n\geq 1}$，$(h_n)_{n\geq 1} \in \big(\varprojlim_n P_n\big)_{\mathrm{lf}}$。按定义 4.1，为 (g_n) 选取见证基于点的环路 $\alpha^{(n)}$，并为 (h_n) 选取 $\beta^{(n)}$。

（1）乘积下的封闭性。对于每个 $n \geq 1$，定义基点环路

$$\gamma^{(n)} := \alpha^{(n)} * \beta^{(n)} : [0,1] \to Conf_n(\mathbb{C}),$$

i.e.

$$\gamma^{(n)}(t) = \begin{cases} \alpha^{(n)}(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta^{(n)}(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

于是 $\gamma^{(n)}(0) = \gamma^{(n)}(1) = (1, \ldots, n)$ 并且

$$[\gamma^{(n)}] = [\alpha^{(n)}]\,[\beta^{(n)}] = g_n h_n \in P_n,$$

因此，定义 4.1(i) 对于（$g_n h_n$）成立。

对于（ii），由于 $\mathrm{pr}_{n+1,\,n}$ 是逐点地应用的，并且上述重参数化在两侧匹配，因此我们得到一个映射恒等式:

$$\mathrm{pr}_{n+1,n} \circ (\alpha^{(n+1)} * \beta^{(n+1)}) = (\mathrm{pr}_{n+1,n} \circ \alpha^{(n+1)}) * (\mathrm{pr}_{n+1,n} \circ \beta^{(n+1)}).$$

利用定义 4.1(ii) 对 $\alpha^{(n)}$ 和 $\beta^{(n)}$的结论，可得

$$\mathrm{pr}_{n+1,n} \circ \gamma^{(n+1)} = \alpha^{(n)} * \beta^{(n)} = \gamma^{(n)}.$$

因此（ii）成立。

对于（iii），固定 $\ell \geq 1$。设 $M_\alpha(\ell)$ 和 $M_\beta(\ell)$ 分别是 $\alpha^{(n)}$ 和 $\beta^{(n)}$满足（iii）的见证，并令

$$M(\ell) := \max\{M_\alpha(\ell),\, M_\beta(\ell)\}.$$

设 $n \geq M(\ell)$ 和 m满足 $M(\ell) < m \leq n$。那么对于所有 $t \in [0,1]$，都有 $\alpha_m^{(n)}(t) \notin K_\ell$以及 $\beta_m^{(n)}(t) \notin K_\ell$。根据 $\gamma^{(n)}$的显式分段公式，

$$\gamma_m^{(n)}(t) = \begin{cases} \alpha_m^{(n)}(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta_m^{(n)}(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

因此对所有 $t \in [0,1]$，$\gamma_m^{(n)}(t) \notin K_\ell$。于是 (iii) 对 $\gamma^{(n)}$ 成立，且 $(g_n h_n)_{n\geq 1} \in (\varprojlim_n P_n)_{\mathrm{lf}}$。

(2) 在逆元下封闭。设 $(g_n)_{n\geq 1} \in (\varprojlim_n P_n)_{\mathrm{lf}}$，其见证为 $\alpha^{(n)}$。通过时间反转定义 $\delta^{(n)}$：$\overline{} = \alpha^{(n)}$，

$$\delta^{(n)}(t) := \alpha^{(n)}(1-t).$$

于是 $\delta^{(n)}$ 是有基点的，$[\delta^{(n)}] = [\alpha^{(n)}]^{-1} = g_n^{-1}$，因此 (i) 成立。

对于 (ii)，对所有 $t \in [0,1]$,

$$\mathrm{pr}_{n+1,n} \circ \delta^{(n+1)}(t) = \mathrm{pr}_{n+1,n}(\alpha^{(n+1)}(1-t)) = \alpha^{(n)}(1-t) = \delta^{(n)}(t),$$

利用 $\mathrm{pr}_{n+1,n} \circ \alpha^{(n+1)} = \alpha^{(n)}$。对于 (iii)，若 $M(\ell)$ 见证 $\alpha^{(n)}$ 的 (iii)，则对 $n \geq M(\ell)$ 与$M(\ell) < m \leq n$,

$$\delta_m^{(n)}(t) = \alpha_m^{(n)}(1-t) \notin K_\ell \qquad (\text{ for all } t \in [0,1]),$$

因此 (iii) 成立。故 $(g_n^{-1})_{n\geq 1} \in (\varprojlim_n P_n)_{\mathrm{lf}}$。

显然，$(1, 1, \ldots\ldots) \in (\varprojlim_n P_n)_{\mathrm{lf}}$, $(\varprojlim_n P_n)_{\mathrm{lf}}$是 $\varprojlim_n P_n$ 的一个子群。 □

定义 4.3（两两绕数同态）。设 $n \geq 2$，并设 $\alpha\colon [0,1] \to Conf_n(\mathbb{C})$ 是以 $(1, \ldots\ldots, n)$ 为基点的基点环路。对于 $1 \leq i < j \leq n$，定义

$$u_{ij}^{\alpha}(t) := \frac{\alpha_j(t) - \alpha_i(t)}{|\alpha_j(t) - \alpha_i(t)|} \in S^1.$$

Set

$$\omega_{ij}([\alpha]) := \deg(u_{ij}^{\alpha}) \in \mathbb{Z}.$$

引理 4.4。对于每个 $1 \leq i < j \leq n$，映射 ω_{ij}： $P_n \to \mathbb{Z}$ 定义良好，且是一个群同态。

证明。 如果 $\alpha \simeq \alpha'$ 通过 $Conf_n(\mathbb{C})$ 中的基点环路，那么 $t \mapsto \alpha_j(t) - \alpha_i(t)$ 与 $t \mapsto \alpha'_j(t) - \alpha'_i(t)$ 在 $\mathbb{C}^\times$ 中同伦，因此 u_{ij}^{α} 在 S^1 中与 $u_{ij}^{\alpha'}$ 同伦。因此 $\deg(u_{ij}^{\alpha}) = \deg(u_{ij}^{\alpha'})$，故 ω_{ij} 定义良好。

若 $\alpha * \beta$ 表示拼接，则 $u_{ij}^{\alpha*\beta}$ 与 S^1中的拼接 $u_{ij}^{\alpha} * u_{ij}^{\beta}$ 同伦，因此 $\deg(u_{ij}^{\alpha*\beta}) = \deg(u_{ij}^{\alpha}) + \deg(u_{ij}^{\beta})$。所以 ω_{ij} 是一个同态。 □

引理 4.5。 固定 $\ell \geq 1$。令 $\alpha : [0,1] \to Conf_n(\mathbb{C})$ 为一个基点环路，使得

$$\alpha_1([0,1]) \cup \alpha_2([0,1]) \subset K_\ell \qquad and \qquad \alpha_m([0,1]) \cap K_\ell = \varnothing$$

对某个 $m \in \{3, \ldots, n\}$成立。则 $\omega_{1m}([\alpha]) = \omega_{2m}([\alpha])$。

证明。 对于 $s \in [0,1]$，定义

$$H(s,t) := \alpha_m(t) - \big((1-s)\alpha_1(t) + s\,\alpha_2(t)\big) \in \mathbb{C}.$$

由于 K_ℓ 是凸的，且 $\alpha_1(t)\ \alpha_2(t) \in K_\ell$，我们有 $(1-s)\alpha_1(t) + s\alpha_2(t) \in K_\ell$，从而$|(1-s)\alpha_1(t) + s\alpha_2(t)| \leq \ell$。另一方面，$\alpha_m(t) \notin K_\ell$ 意味着 $|\alpha_m(t)| > \ell$。因此，对所有 $(s,\ t) \in [0,1]^2$，

$$|H(s,t)| \geq |\alpha_m(t)| - \big|(1-s)\alpha_1(t) + s\alpha_2(t)\big| > \ell - \ell = 0,$$

因此 $H(s,t) \in \mathbb{C}^\times$。因此

$$\frac{H(s,t)}{|H(s,t)|} \in S^1$$

给出了从 $u_{1m}^{\alpha}(t)$（在 $s=0$ 处）到 $u_{2m}^{\alpha}(t)$（在 $s=1$ 处）的同伦，因此 S^1 中的两个环路具有相同的度。 □

构造 4.6（一个相容序列 $(g_n)_{n\geq 1} \in \varprojlim_n P_n$）。对于每个 $m \geq 3$，选取一个基点环路 $\beta^{(m)}$: $[0,1] \to Conf_m(\mathbb{C})$，其基点为 $(1,\ldots,m)$，使得

$$\beta_k^{(m)}(t) \equiv k \quad (1 \leq k \leq m-1)$$

并且第 m 个坐标 $\beta_m^{(m)}$ 是 $\mathbb{C} \setminus \{1,2,\ldots,m-1\}$ 中的一个环路，基点为 m，且在该带孔平面中与围绕穿孔点 1 的一个小正向圆周同伦。（例如：从 m 移动到实轴上方的一个点 $1+\rho$，沿着圆周 $1+\rho e^{2\pi i t}$ 绕行，其中 $0<\rho<\frac{1}{2}$，然后沿原路返回；这样就避开了 $\{1,2,\ldots,m-1\}$。）令 -

$$a_m := [\beta^{(m)}] \in P_m.$$

对于 $n \geq 3$，通过标准包含“添加平凡股”，将每个 a_m（带有 $3 \leq m \leq n$）视为 P_n 的一个元素，并定义

$$g_1 := 1 \in P_1, \qquad g_2 := 1 \in P_2, \qquad g_n := a_3 a_4 \cdots a_n \in P_n \quad (n \geq 3).$$

引理 4.7. 序列 $(g_n)_{n\geq 1}$ 属于逆极限 $\varprojlim_n P_n$。

证明。 根据构造，忘掉第（n+1）股后，a_{n+1} 变为平凡，即 $p_{n+1,n}(a_{n+1}) = 1$；对于 $m \leq n$，我们有 $p_{n+1,n}(a_m) = a_m$（因为 a_m 只涉及前 m 股，而最后一股是平凡股）。因此

$$p_{n+1,n}(g_{n+1}) = p_{n+1,n}(a_3 \cdots a_n a_{n+1}) = a_3 \cdots a_n = g_n.$$

因此 $(g_n) \in \varprojlim_n P_n$。 □

引理 4.8 (绕数数据)。 对于每个 $m \geq 3$，我们有

$$\omega_{1m}(g_m) = 1 \qquad and \qquad \omega_{2m}(g_m) = 0.$$

证明。 在 $g_m = a_3 a_4 \cdots a_m$ 中，每个带有 $k < m$ 的因子 a_k 在表示环路的整个过程中都固定第 m 个坐标（因为它是通过添加平凡股纳入的），因此对 ω_{1m} 和 ω_{2m} 的贡献均为 0。最后一个因子 a_m 固定在 1 和 2 的股 1 和 2，而第 m 个坐标绕 1 缠绕一次，绕 2 缠绕零次（根据构造 4.6 中 $\beta_m^{(m)}$ 的选取）。因此， $\omega_{1m}(a_m) = 1$ 且 $\omega_{2m}(a_m) = 0$。由于 ω_{ij} 是同态（引理 4.4），关于 g_m 的等式随之成立。 □

命题 4.9。 构造 *4.6* 中构造的相容序列 $(g_n)_{n\geq 1} \in \varprojlim_n P_n$ 不属于局部有限子群 $(\varprojlim_n P_n)_{\mathrm{lf}}$。因此，

$$\Big(\varprojlim_n P_n\Big)_{\mathrm{lf}} \subsetneq \varprojlim_n P_n.$$

证明。 反设 $(g_n) \in (\varprojlim_n P_n)_{\mathrm{lf}}$。根据定义 4.1，存在基点环路

$$\alpha^{(n)} : [0,1] \to Conf_n(\mathbb{C}) \qquad (n \geq 1)$$

使得 (i)–(iii) 成立。

由 (ii) 可知，对每个固定的 k，坐标路径 $\alpha_k^{(n)} : [0,1] \to \mathbb{C}$ 与 $n \geq k$ 无关。对任意 $n \geq k$，定义$\gamma_k : [0,1] \to \mathbb{C}$，使 $\gamma_k(t) := \alpha_k^{(n)}(t)$。特别地， γ_1， γ_2 是连续的，因此其像是紧致的。选取 $\ell \geq 1$ 使得

$$\gamma_1([0,1]) \cup \gamma_2([0,1]) \subset K_\ell.$$

现在将此 ℓ 代入 (iii)：存在 $M(\ell)$，使得对每个 $m > \max\{M(\ell), 2\}$，取 $n = m$ 可得

$$\alpha_m^{(m)}([0,1]) \cap K_\ell = \varnothing.$$

由于 $\alpha_1^{(m)} = \gamma_1$ 和 $\alpha_2^{(m)} = \gamma_2$，由引理 4.5 得

$$\omega_{1m}(g_m) = \omega_{1m}([\alpha^{(m)}]) = \omega_{2m}([\alpha^{(m)}]) = \omega_{2m}(g_m) \qquad \text{for all } m > \max\{M(\ell), 2\}.$$

这与引理 4.8 矛盾；引理 4.8 给出，对于每个 $m \geq 3$， $\omega_{1m}(g_m) = 1$ 且 $\omega_{2m}(g_m) = 0$。因此 $(g_n) \notin (\varprojlim_n P_n)_{\mathrm{lf}}$。 □

5 典范映射的连续性与双射性 Θ

5.1 Θ 的连续性与满射性

定义 5.1 （典范映射 Θ）。 定义

$$\Theta : H^{lf}(\infty) \longrightarrow \prod_{n\geq 1} P_n, \qquad \Theta(g) := \big(p_n(g)\big)_{n\geq 1}.$$

引理 5.2 （函子性关于 π_1^{top}）是连续的。 设 $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ 是一个保基点连续映射。则诱导映射

$$f_* : \pi_1^{\mathrm{top}}(X, x_0) \longrightarrow \pi_1^{\mathrm{top}}(Y, y_0)$$

是连续的。

证明。令 $q_X\colon \Omega(X,x_0) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{top}}(X,x_0)$ 和 $q_Y\colon \Omega(Y,y_0) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{top}}(Y,y_0)$ 为商映射。环空间上的诱导映射 $\Omega(f):\Omega(X,x_0)\to\Omega(Y,y_0)$ 在紧开拓扑下是连续的。此外，标准单位元

$$q_Y \circ \Omega(f) = f_* \circ q_X$$

根据 f_* 的定义成立。由于 q_X 是商映射，这个等式意味着 f_* 是连续的。 □

引理 5.3。对于每个 $g \in H^{lf}(\infty)$，相容序列 $\Theta(g) \in \lim_{\longleftarrow n} P_n$ 按照定义 *4.1* 的意义是局部有限的。因此，Θ 限制为一个映射

$$\Theta : H^{lf}(\infty) \to \left(\varprojlim_n P_n\right)_{\mathrm{lf}}.$$

证明。固定 $g \in H^{lf}(\infty)$，并选取一个代表元基点环路 $\gamma\colon [0,1]\to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$，使得$g=[\gamma]$。对于每个 $n\ge 1$，令 $\alpha^{(n)} := \mathrm{pr}_n\circ\gamma$。那么 $\alpha^{(n)}$ 是基点环路，且 $[\alpha^{(n)}] = p_n(g)$，从而得到定义 4.1 的 (i)。此外，$\mathrm{pr}_{n+1,n}\circ\alpha^{(n+1)} = \alpha^{(n)}$，从而得到 (ii)。

对于 (iii)，固定 $\ell\ge 1$，并将引理 2.8 应用于紧参数空间 $T=[0,1]$、连续映射 $F=\gamma$：$[0,1]\to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 和紧集 $K=K_\ell$。由此可得 $N(\ell)$，使得对所有 $t\in[0,1]$ 以及所有 $m>N(\ell)$，$\gamma_m(t)\notin K_\ell$。令 $M(\ell):=N(\ell)$，则对于每个 $n\ge M(\ell)$ 以及每个满足 $M(\ell)<m\le n$ 的 m，我们有

$$\alpha_m^{(n)}(t) = \gamma_m(t) \notin K_\ell \qquad (\text{ for all } t\in[0,1]),$$

这正是 (iii)。 □

定理 5.4. 典范映射

$$\Theta : H^{lf}(\infty) \longrightarrow \left(\varprojlim_n P_n\right)_{\mathrm{lf}}$$

是连续且满射的。

证明。**连续性**。根据引理 5.2，每个诱导映射

$$p_n : H^{lf}(\infty) \to P_n$$

都是连续的。因此，乘积映射 $g\mapsto (p_n(g))_{n\ge1}$ 是到带有乘积拓扑的 $\prod_{n\ge1}P_n$ 中的连续映射。根据引理 5.3，其像包含于子空间 $\left(\varprojlim_n P_n\right)_{\mathrm{lf}}$中，因此 Θ 作为到该子空间的映射是连续的。

满射性。设 $(g_n)_{n\ge1}\in(\varprojlim_n P_n)_{\mathrm{lf}}$。取见证基于点的环路 $\alpha^{(n)}:[0,1]\to Conf_n(\mathbb{C})$，满足定义 4.1 的 (i)–(iii)。对每个 $m\ge1$，定义

$$\gamma_m(t) := \alpha_m^{(n)}(t) \quad \text{for any } n\ge m.$$

这是定义良好的：如果 $n'\ge n\ge m$，那么 (ii) 意味着 $\alpha^{(n')}$ 的前 n 个坐标等于 $\alpha^{(n)}$，因此 $\alpha^{(n')}{}_m = \alpha_m^{(n)}$。令 $\gamma(t):=(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\dots)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$。

命题 *1*：$\gamma(t)\in Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 对每个 $t\in[0,1]$ 都成立。对于每个 n，我们有

$$(\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t)) = \alpha^{(n)}(t) \in Conf_n(\mathbb{C}),$$

因此这些坐标两两不同。为证明局部有限性，固定 $\ell\ge1$，并令 $M(\ell)$ 如 (iii) 所示。若 $m>M(\ell)$，取 (iii) 中的 $n=m$，得到对所有 t，$\gamma_m(t)=\alpha_m^{(m)}(t)\notin K_\ell$。因此，对每个固定的

t，只有有限多个指标 $m \le M(\ell)$ 会与 K_ℓ 相交。因此 $\{\gamma_m(t)\}^{m\ge1}$ 是局部有限的，所以 $\gamma(t)$ $\in Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$。

断言 2： $\gamma:\ [0,1] \to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 在 $d_{\sum}$ 上连续。 d_{prod} 的连续性是显然的，因为每个坐标 γ_m 都是连续的。对于模糊项，固定 $j \ge 1$。由引理 2.5(c)，$\mathrm{supp}(\varphi_j) \subset K_j$。令 $M := M(j)$，取自 (iii)，其中 $\ell = j$。那么对所有 $m > M$ 和所有 t， $\gamma_m(t) \notin K_j$，因此 $\varphi_j(\gamma_m(t)) = 0$。所以对所有 t，

$$\sum_{a\in P(\gamma(t))} \varphi_j(a) = \sum_{m=1}^{M} \varphi_j(\gamma_m(t)),$$

这是关于 t 的有限个连续函数之和，因此连续。固定 t_0。于是， j 在 $d_{\mathcal{V}}(P(\gamma(t))\ P(\gamma(t_0))$ 中的第 j 项关于 t 连续，且其上界为 2^{-j}。由魏尔斯特拉斯 M 判别法，定义 $d_{\mathcal{V}}$ 的级数在 t 上一致收敛，因此 $t \mapsto d_{\mathcal{V}}(P(\gamma(t))\ P(\gamma(t_0)))$ 连续。故 γ 在 $d_{\sum} = d_{\mathrm{prod}} + d_{\mathcal{V}}$ 上连续。

由于每个 $\alpha^{(n)}$ 都是基于基点的，我们有 $\gamma(0) = \gamma(1) = \widetilde{\mathbb{N}}$，因此 γ 是 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 中的基点环路。令 $g := [\gamma] \in H^{lf}(\infty)$。

对于每个 n 以及所有 t，我们有 $(\gamma_1(t)\dots,\gamma_n(t)) = \alpha^{(n)}(t)$，因此 $\mathrm{pr}_n \circ \gamma = \alpha^{(n)}$ 作为映射相等。因此

$$p_n(g) = [p_n \circ \gamma] = [\alpha^{(n)}] = g_n,$$

所以 $\Theta(g) = (g_n)$。这证明了满射性。 □

5.2 Θ 的单射性

引理 5.5。 固定 $n \ge 2$。令 $\beta\colon [0,1] \to Conf_n(\mathbb{C})$ 是一个以 $(1,\dots,n)$ 为基点的环路，使得

$$\beta_k(t) \equiv k \qquad (1 \le k \le n-1).$$

设 $z(t) := \beta_n(t)$。则 z 是 $\mathbb{C} \setminus \{1,\dots,n-1\}$ 中以 n 为基点的环路，并且如果

$$\iota : \mathbb{C} \setminus \{1,\dots,n-1\} \longrightarrow Conf_n(\mathbb{C}), \qquad \iota(w) := (1,\dots,n-1,w),$$

then

$$[\beta] = \iota_*([z]) \in P_n = \pi_1(Conf_n(\mathbb{C}),(1,\dots,n)).$$

特别地，如果 $[\beta] = 1$ 属于 P_n，那么 z 在 $\mathbb{C} \setminus \{1,\dots,n-1\}$ 中是零伦的。

证明。令

$$p : Conf_n(\mathbb{C}) \to Conf_{n-1}(\mathbb{C}), \qquad p(z_1,\dots,z_n) = (z_1,\dots,z_{n-1})$$

为遗忘映射。根据 Fadell–Neuwirth 定理， p 是一个局部平凡纤维丛。纤维在 $(1,\dots,n-1)$ 上的原像通过 ι 与 $\mathbb{C} \setminus \{1,\dots,n-1\}$ 典范地同构。

由于对 $1 \le k \le n-1$， $\beta_k(t) \equiv k$，因此对所有 t，都有 $(p \circ \beta)(t) = (1,\dots,n-1)$，故 β 是纤维 $p^{-1}(1,\dots,n-1)$ 中的一个环路。写作 $z(t) = \beta_n(t)$，得到 $\beta = \iota \circ z$，于是

$$[\beta] = \iota_*([z]) \in \pi_1(Conf_n(\mathbb{C}),(1,\dots,n)).$$

为推出最后一个断言，我们利用 π_1 上 ι_* 的单射性。考虑纤维化 p 在基点 $(1,\dots,n)$ 处的同伦群长正合序列：

$$\pi_2(Conf_{n-1}(\mathbb{C}),(1,\dots,n-1)) \xrightarrow{\partial} \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{1,\dots,n-1\},n) \xrightarrow{\iota_*} \pi_1(Conf_n(\mathbb{C}),(1,\dots,n)).$$

正合性表明 $\ker(\iota_*) = \mathrm{im}(\partial)$。已知 $Conf_{n-1}(\mathbb{C})$ 是无球的（对于 $n \ge 2$），因此 ι_* 是单射。因此，若 $[\beta] = \iota_*([z]) = 1$，则 $[z] = 1$ 属于 $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{1,\dots,n-1\}\ n)$，所以 z 相对于端点是零伦的。

□

引理 5.6。设 $A \subset \mathbb{C}$ 是有限的，且 $b \in \mathbb{C} \setminus A$。设 $z_0 \colon [0,1] \to \mathbb{C} \setminus A$ 是以 b 为基点的环路，并设 $z \colon [0,1]^2 \to \mathbb{C} \setminus A$ 是一个基点零伦，其中

$$z(0,t) = z_0(t), \qquad z(1,t) \equiv b, \qquad z(s,0) = z(s,1) \equiv b.$$

那么存在一个紧集 $S \subset \mathbb{C}$ 和一个连续映射

$$(s,t,w) \longmapsto H_{s,t}(w) \quad from\ [0,1]^2 \times \mathbb{C}\ to\ \mathbb{C}$$

使得对于每个 (s,t)，映射 $H_{s,t} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 都是同胚，并且：

(i) $H_{s,t}(a) = a$ 对所有 $a \in A$均成立；

(ii) $H_{s,t} = \mathrm{id}$ 在 $\mathbb{C} \setminus S$ 上（特别地，支集$(H_{s,t}) \subset S$）；

(iii) $H_{0,t} = \mathrm{id}$ 对所有 t均成立，且 $H_{s,0} = H_{s,1} = \mathrm{id}$ 对所有 s均成立；

(iv) $H_{s,t}(z_0(t)) = z(s,t)$ 对所有 $(s,t) \in [0,1]^2$.

证明。设 $K := z([0,1]^2) \subset \mathbb{C} \setminus A$。则 K 是紧致的，且 $K \cap A = \varnothing$，因此

$$d := \mathrm{dist}(K, A) > 0.$$

取足够小的 $r > 0$，使得 $\overline{B}(K, 2r/3) \cap A = \varnothing$。

按照引理 4.1（参数为 r），选取一个 Lipschitz函数 $\eta \colon [0,\infty) \to [0,1]$，使得对每个 a, $p \in \mathbb{C}$，若 $|p-a| \le r/6$，则映射

$$h_{a,p}(w) := w + (p-a)\eta(|w-a|)$$

是 $\mathbb{C}$ 的一个同胚，满足 $h_{a,p}(a) = p$，在 $\mathbb{C} \setminus B(a, 2r/3)$ 上等于恒等映射，并且映射 $(a,p,w) \mapsto h_{a,p}(w)$ 在 $\{(a,p) \colon |p-a| \le r/6\} \times \mathbb{C}$ 上连续。

由于 z 在紧致正方形 $[0,1]^2$，上一致连续，取 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$|z(s,t) - z(s',t)| < r/6 \quad \text{whenever } |s-s'| \le 1/N, \text{ for all } t \in [0,1].$$

对于每个 $(s,t) \in [0,1]^2$，定义细分点 $s_k := ks/N (k = 0, 1, \ldots, N)$ 以及点

$$w_k(s,t) := z(s_k, t) \in K.$$

于是，对每个 $k = 1, \ldots, N$，$|w_k(s,t) - w_{k-1}(s,t)| < r/6$。

定义

$$H_{s,t} := h_{w_{N-1}(s,t),\, w_N(s,t)} \circ h_{w_{N-2}(s,t),\, w_{N-1}(s,t)} \circ \cdots \circ h_{w_0(s,t),\, w_1(s,t)}.$$

(i)–(ii). 每个因子 h_{w_{k-1},w_k} 在 $B(w_{k-1}, 2r/3) \subset B(K, 2r/3)$ 之外都等于恒等映射，因此固定每个$a \in A$（因为 $B(K, 2r/3) \cap A = \varnothing$）。所以，对于所有 $a \in A$，$H_{s,t}(a) = a$。此外，每个因子在 $\mathbb{C} \setminus B(K, 2r/3)$ 上都等于恒等映射，因此 $H_{s,t} =$ 在 $\mathbb{C} \setminus S$ 上等于恒等映射，其中

$$S := \overline{B}(K, 2r/3),$$

与 (s,t) 无关。

(iii). 若 $s = 0$，则对所有 k，$w_k(0,t) = z(0,t) = z_0(t)$，因此每个因子都是 $h_{a,a} = \mathrm{id}$，从而$H_{0,t} = \mathrm{id}$。若 $t \in \{0,1\}$，则对所有 k，$w_k(s,t) = z(s,t) = b$，因此每个因子仍然都是 id，且$H_{s,0} = H_{s,1} = \mathrm{id}$。

(iv). 我们有 $w_0(s,t) = z(0,t) = z_0(t)$ 和 $w_N(s,t) = z(s,t)$，且每个因子都满足 $h_{w_{k-1},w_k}(w_{k-1}) = w_k$。因此

$$H_{s,t}(z_0(t)) = H_{s,t}(w_0(s,t)) = w_N(s,t) = z(s,t).$$

关于 (s,t,w) 的连续性。对于每个 k，映射 $(s,t) \mapsto (w_{k-1}(s,t)\ w_k(s,t))$ 是连续的，而 $(a,p,w) \mapsto h_{a,p}(w)$ 也是连续的。因此，每个因子 $(s,t,w) \mapsto h_{w_{k-1}(s,t)\ w_k(s,t)}(w)$ 都是连续的；这类映射的有限复合仍是连续的。因此，$(s,t,w) \mapsto H_{s,t}(w)$ 在 $[0,1]^2 \times \mathbb{C}$ 上连续。 □

引理 5.7. 设 K 是一个紧致度量空间，并设

$$\Phi : K \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad (x,w) \mapsto \Phi_x(w),$$

是连续的，其中每个 $\Phi_x : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 都是一个同胚。假设存在一个紧集 $S \subset \mathbb{C}$，使得对于所有 $x \in K$，$\Phi_x = \mathrm{id}$ 在 $\mathbb{C} \setminus S$ 上成立。定义诱导映射

$$\Phi^\infty : K \times Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C}) \to Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C}), \qquad \Phi^\infty(x,(a_m)_{m\geq 1}) := \big(\Phi_x(a_m)\big)_{m\geq 1}.$$

那么 Φ^∞ 定义良好，并且关于和度量 $d_{\sum}$ 连续。因此，若 $\gamma : [0,1] \to Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})$ 连续，则

$$(x,t) \longmapsto \Phi^\infty(x,\gamma(t))$$

在 $K \times [0,1]$ 上连续。

证明。定义良好性。固定 $x \in K$ 和 $(a_m) \in Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})$。由于 Φ_x 是单射，条目 $(\Phi_x(a_m))$ 两两不同。令 $A := P((a_m)) \subset \mathbb{C}$ 为其底层局部有限集。对于任意紧致集 $C \subset \mathbb{C}$，其原像 $\Phi_x^{-1}(C)$ 是紧致的，因此 $A \cap \Phi_x^{-1}(C)$ 是有限的。因此

$$\Phi_x(A) \cap C = \Phi_x\big(A \cap \Phi_x^{-1}(C)\big)$$

是有限的，所以 $\Phi_x(A)$ 是局部有限的。因此 $\Phi^\infty(x,(a_m)) \in Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})$。

连续性。由于 $K \times Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})$ 是度量空间，只需证明序列连续性。设 $(x_n,\ A^{(n)}) \to (x,A)$ 属于 $K \times Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})$，其中 $A^{(n)} = (a_m^{(n)})$ 且 $A = (a_m)$，相对于 $d_K + d_{\sum}$。

(1) 乘积部分。由于 $d_{\sum} \geq d_{\mathrm{prod}}$，我们有 $d_{\mathrm{prod}}(A^{(n)},A) \to 0$，因此对每个固定的 m，$a_m^{(n)} \to a_m$ 都属于 $\mathbb{C}$。固定 $\varepsilon > 0$，并选择满足 $\sum_{m>M} 2^{-m} < \varepsilon/3$ 的 M。对于每个 $1 \leq m \leq M$，由 $(x,w) \mapsto \Phi_x(w)$ 的连续性可得

$$\Phi_{x_n}(a_m^{(n)}) \longrightarrow \Phi_x(a_m).$$

因此，对所有充分大的 n，

$$\sum_{m=1}^{M} 2^{-m} \min\{1, |\Phi_{x_n}(a_m^{(n)}) - \Phi_x(a_m)|\} < \varepsilon/3,$$

从而

$$d_{\mathrm{prod}}\big(\Phi^\infty(x_n,A^{(n)}), \Phi^\infty(x,A)\big) < \varepsilon/3 + \sum_{m>M} 2^{-m} < 2\varepsilon/3.$$

因此 $d_{\mathrm{prod}}(\Phi^\infty(x_n,\ A^{(n)})\ \Phi^\infty(x,\ A)) \to 0$。

(2) 模糊部分。设

$$K_0 := \{(x, A)\} \cup \{(x_n, A^{(n)}) : n \geq 1\} \subset K \times Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}).$$

于是 K_0 是紧致的。定义

$$F : K_0 \to C_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \qquad F(x', B) := P(B).$$

这是连续的，因为 $d_{\sum}$ 中的收敛意味着 $d_{\mathcal{V}}$ 项的收敛，即在（$C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ $d_{\mathcal{V}}$）中， $P(B_n) \to P(B)$。

还定义

$$\widetilde{\Phi} : K_0 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \widetilde{\Phi}\big((x', B); w\big) := \Phi_{x'}(w).$$

~此映射是连续的，每个$\Phi_{(x',B)} = \Phi_{x'}$ 都是一个同胚，并且根据假设，对于所有具有相同紧致 S 的（x', B）， $\Phi_{x'}$ =在$\mathbb{C} \setminus S$ 上为恒等映射。

因此 [23, 引理 5.2]适用，并给出下式的连续性

$$(x', B) \longmapsto (\Phi_{x'})_*\big(P(B)\big) = \Phi_{x'}\big(P(B)\big)$$

在模糊拓扑中，从而在度量 $d_{\mathcal{V}}$ 中也成立（参见 [23, 命题 2.3]）。等价地，

$$d_{\mathcal{V}}\Big(P\big(\Phi^\infty(x_n, A^{(n)})\big),\, P\big(\Phi^\infty(x, A)\big)\Big) \to 0.$$

（3）结论。 综合（1）和（2）， Φ^∞ 是连续的。

最终陈述。 映射（x, t） $\mapsto$ （x, γ（t））是连续的 $K \times [0,1] \to K \times Conf_\infty^{lf}$（$\mathbb{C}$）， 且$\Phi^\infty$ 是连续的，因此（x, t） $\mapsto \Phi^\infty$（x, γ（t））是连续的。 □

引理 5.8。 固定 $R > 0$。设 $A_{\text{out}} \subset \mathbb{C} \mid K_R$ 为有限，并设 $A_{\text{in}} \subset \text{int}(K_R)$ 为有限且非空。令

$$X := \mathbb{C} \setminus (K_R \cup A_{\text{out}}), \qquad Y := \mathbb{C} \setminus (A_{\text{in}} \cup A_{\text{out}}),$$

并选取一个基点 $b \in X$。则包含映射 $i : X$ ，$\to Y$ 诱导一个单同态

$$i_* : \pi_1(X, b) \longrightarrow \pi_1(Y, b).$$

等价地，若 X 中的一条环路在 Y中是零伦的，则它在 X中也是零伦的。

证明。 选取 $\eta > 0$ 使得

$$\{z \in \mathbb{C} : R < |z| < R + \eta\} \cap A_{\text{out}} = \varnothing \qquad \text{and} \qquad \{z \in \mathbb{C} : R \leq |z| \leq R + \eta\} \cap A_{\text{in}} = \varnothing.$$

定义 Y 的开子集为

$$U := \{z : |z| < R + \eta\} \setminus A_{\text{in}}, \qquad V := X = \mathbb{C} \setminus (K_R \cup A_{\text{out}}).$$

那么 $Y = U \cup V$、 U 和 V 都是道路连通的，并且

$$W := U \cap V = \{z : R < |z| < R + \eta\}$$

是一个圆环，因此 $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$。

选取一个基点 $b_0 \in W$（例如 $b_0 = R + \eta/2$）。若 $b \neq b_0$，则在 $V = X$ 中固定一条从 b 到 b_0 的路径，并使用基点变换；单射性不受影响。因此，只需在 b_0 处进行讨论。

根据范坎彭定理，

$$\pi_1(Y, b_0) \;\cong\; \pi_1(U, b_0) \;*_{\pi_1(W, b_0)}\; \pi_1(V, b_0).$$

在合并自由积中，来自 $\pi_1(U)$ 和 $\pi_1(V)$ 的典范映射到合并积是单射的，前提是粘接映射 $\pi_1(W) \to \pi_1(U)$ 和 $\pi_1(W) \to \pi_1(V)$ 是单射的（例如由正规形定理可得；见 [17, 命题 1.20]）。因此，只需证明 $\pi_1(W, b_0) \to \pi_1(U, b_0)$ 和 $\pi_1(W, b_0) \to \pi_1(V, b_0)$ 的单射性。

到 V中的单射性。设 $r_0 := R + \eta/2$。注意 $V \subset \{|z| > R\}$，因此 $z \neq 0$ 在 V上。定义一个连续映射

$$\rho : V \to \{|z| = r_0\}, \qquad \rho(z) = r_0 \, \frac{z}{|z|}.$$

于是 $\rho|_{\{|z|=r_0\}} = \mathrm{id}$，所以圆周 $\{|z| = r_0\} \subset W \subset V$是 V的一个收缩。因此，诱导映射$\pi_1(\{|z| = r_0\} \, b_0) \to \pi_1(V, b_0)$ 是单射。由于 W变形收缩到 $\{|z| = r_0\}$，映射 $\pi_1(W, b_0) \to \pi_1(V, b_0)$ 是单射。

到 U中的单射性。空间 U 是去掉非空有限点集 A_{in}的圆盘，因此 U变形收缩到由 $|A_{\mathrm{in}}|$ 个圆周组成的楔和，尤其是

$$H_1(U; \mathbb{Z}) \;\cong\; \mathbb{Z}^{|A_{\mathrm{in}}|},$$

它是无挠的。设 ℓ 是 $\pi_1(W, b_0) \cong \mathbb{Z}$ 的标准生成元，由环路 $\ell(t) = r_0 e^{2\pi i t}$表示。此环路绕 $A_{\mathrm{in}} \subset \{|z| < R\}$中的每个穿孔点一周。在阿贝尔化（Hurewicz映射） $\pi_1(U, b_0) \to H_1(U; \mathbb{Z})$下， ℓ的类映射到

$$(1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^{|A_{\mathrm{in}}|},$$

它非零且具有无限阶。因此， $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$ 的生成元在 $\pi_1(U)$ 中的像具有无限阶，所以同态 $\pi_1(W, b_0) \to \pi_1(U, b_0)$ 是单射。

因此， $\pi_1(V, b_0) \to \pi_1(Y, b_0)$ 是单射；由于 $V = X$这恰好就是i_*的单射性： $\pi_1(X, b) \to \pi_1(Y, b)$。 □

命题 5.9. 典范同态

$$\Theta : \; H^{lf}(\infty) \longrightarrow \left(\varprojlim_n P_n \right)_{\mathrm{lf}}$$

是单射。

证明. 设 $g \in H^{lf}(\infty)$ 满足 $\Theta(g) = 1$。取一条基点环路 $\gamma\colon [0, 1] \to Conf^{lf}_{\infty}(\mathbb{C})$，其基点为 $\widetilde{\mathbb{N}}$，且$g = [\gamma]$。

步骤 1：的尾部界。对每个 $\ell \in \mathbb{N}$，应用引理 2.8，取 $T = [0, 1]$、 $F = \gamma$ 和$K = K_\ell$ ，得到 N_ℓ ，使得

$$\gamma_m(t) \notin K_\ell \qquad \text{for all } t \in [0, 1] \text{ and all } m > N_\ell. \tag{4}$$

步骤 2：初始股线的归纳拉直。我们构造基点环路 $\gamma^{(n)}$ ： $[0, 1] \to Conf^{lf}_{\infty}(\mathbb{C})$ $(n \geq 0)$，使得：

(i) $\gamma^{(0)} = \gamma$；(ii) $\mathrm{pr}_n(\gamma^{(n)}(t)) =$ $(1, \ldots, n)$ 对所有 t；(iii) $[\gamma^{(n)}] = [\gamma]$ 属于 $\pi_1(Conf^{lf}_{\infty}(\mathbb{C}), \widetilde{\mathbb{N}})$。

假设 $\gamma^{(n-1)}$ 已构造（$n \geq 1$）。令

$$\beta := \mathrm{pr}_n \circ \gamma^{(n-1)} : [0,1] \to Conf_n(\mathbb{C}),$$

在 $(1, \ldots, n)$ 处的一条基点环路。由于 $\Theta(g) = 1$，我们有

$$[\beta] = p_n([\gamma^{(n-1)}]) = p_n([\gamma]) = p_n(g) = 1 \in P_n.$$

由归纳假设，$\beta_k(t) \equiv k$ 对于 $1 \leq k \leq n-1$。令 $z_0(t) := \beta_n(t)$，为$\mathbb{C} \setminus \{1, \ldots, n-1\}$ 中以 n 为基点的一条环路。由引理 5.5，$[z_0] = 1$ 在 $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{1, \ldots, n-1\}\ n)$ 中。

固定一个基点零伦

$$z : [0,1]^2 \to \mathbb{C} \setminus \{1, \ldots, n-1\}$$

with

$$z(0,t) = z_0(t), \qquad z(1,t) \equiv n, \qquad z(s,0) = z(s,1) \equiv n.$$

对 $A = \{1, \ldots, n-1\}$ 与 $b = n$ 应用引理 5.6，得到一个紧集 $S_n \subset \mathbb{C}$ 以及一个连续同胚族 $H_{s\,t}^{(n)}$,使得:

$$H_{s,t}^{(n)}(a) = a \ (a \in A), \qquad H_{s,t}^{(n)} = \mathrm{id} \ \text{ on } \mathbb{C} \setminus S_n,$$

$$H_{0,t}^{(n)} = \mathrm{id}, \qquad H_{s,0}^{(n)} = H_{s,1}^{(n)} = \mathrm{id}, \qquad H_{s,t}^{(n)}(z_0(t)) = z(s,t).$$

定义

$$\mathcal{H}^{(n)} : [0,1]^2 \to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \qquad \mathcal{H}^{(n)}(s,t) := \left(H_{s,t}^{(n)}(\gamma_m^{(n-1)}(t))\right)_{m \geq 1}.$$

由引理 5.7，$\mathcal{H}^{(n)}$ 是连续的，并且是一条由基点环路组成的基点同伦。令 $\gamma^{(n)} := \mathcal{H}^{(n)}(1, \cdot)$。则 $\mathrm{pr}_n(\gamma^{(n)}(t)) = (1, \ldots, n)$ 且 $[\gamma^{(n)}] = [\gamma^{(n-1)}] = [\gamma]$。

步骤 3：最终支撑控制，远离 K_{j+1}。固定 $j \geq 1$ 并令 $R := j + 1 + \frac{1}{2}$。设$L := N_{j+2}$来自 (4)。则对 $m > L$，$\gamma_m([0,1]) \cap K_{j+2} = \varnothing$，从而 $\gamma_m([0,1]) \cap K_R = \varnothing$。令 $S_{\leq L} := \bigcup_{n=1}^{L} S_n$（紧致）。对 γ与紧集 $S_{\leq L} \cup K_{j+2}$应用引理 2.8，得到M_R，使得对 $m > M_R$,

$$\gamma_m([0,1]) \cap (S_{\leq L} \cup K_{j+2}) = \varnothing. \tag{5}$$

特别地，对 $m > M_R$，$\gamma_m([0,1])$ 对 $1 \leq k \leq L$ 避开每一个 S_k，故按阶段归纳，对阶段 $1, \ldots, L$，得到 $\gamma_m^{(L)} = \gamma_m$，从而

$$\gamma_m^{(L)}([0,1]) \subset \mathbb{C} \setminus K_R \qquad (m > M_R).$$

我们断言存在 $n_0(j)$，使得对所有 $n \geq n_0(j)$，我们可以选择阶段 n 的同伦，使得

$$S_n \cap K_R = \varnothing, \qquad \text{hence} \qquad H_{s,t}^{(n)}|_{K_{j+1}} = \mathrm{id}_{K_{j+1}} \ \text{ for all } (s,t). \tag{6}$$

设 $n_{\mathrm{start}} := \max\{L,\ M_R,\ j+2\} + 1$，并对 $n \geq n_{\mathrm{start}}$ 作归纳，假设对所有 $L < k < n$ 都有 $S_k \cap K_R = \varnothing$。那么，每个满足 $L < k < n$ 的阶段 k 都逐点固定 K_R（因为它在 $\mathbb{C} \setminus S_k$ 和 $K_R \cap S_k = \varnothing$ 上是恒等映射），所以它保留 $\mathbb{C} \setminus K_R$。由于 $n > M_R$ 且 $\gamma_n^{(L)}([0,1]) \subset \mathbb{C} \setminus K_R$，可得 $\gamma_n^{(n-1)}([0,1]) \subset \mathbb{C} \setminus K_R$。

定义

$$A_{\mathrm{in}} := \{1, \ldots, j+1\} \subset \mathrm{int}(K_R), \qquad A_{\mathrm{out}} := \{j+2, \ldots, n-1\} \subset \mathbb{C} \setminus K_R,$$

并设

$$X := \mathbb{C} \setminus \big(K_R \cup A_{\text{out}}\big), \qquad Y := \mathbb{C} \setminus \big(A_{\text{in}} \cup A_{\text{out}}\big) = \mathbb{C} \setminus \{1, \dots, n-1\}.$$

于是， $t \mapsto \gamma_n^{(n-1)}(t)$ 是 X 中的一个基点环路，并且在 Y 中是零伦的（由步骤 2 得出）。根据引理 5.8，包含映射 $X \hookrightarrow Y$ 在 π_1 上诱导一个单射，因此该环路在 X 中是零伦的。取一个基点零伦 $z\colon [0,1]^2 \to X$，并令 $C_n := z([0,1]^2)$。那么 C_n 是紧致的，且与 K_R 以及 $\{1, \dots, n-1\}$ 不相交。

取

$$0 < r < \min\Big\{ \tfrac{1}{4}\ \operatorname{dist}\big(C_n, \{1, \dots, n-1\}\big),\ \operatorname{dist}(C_n, K_R) \Big\}.$$

重复引理 5.6 中的凸起映射构造（使用 [23, 引理 4.1]），使得所得族 $H_{s\,t}^{(n)}$,支撑于

$$S_n := \overline{B}(C_n, 2r/3).$$

由于 $2r/3 < \operatorname{dist}(C_n, K_R)$，我们有 $S_n \cap K_R = \varnothing$，从而证明了 (6)。这就完成了归纳，并得到所需的 $n_0(j)$。

步骤 4：无限拼接及在 $s = 1$ 处的连续性。 令 $s_0 := 0$ 且 $s_n := 1 - 2^{-n}$。将条带 $[s_{n-1}, s_n] \times [0,1]$ 上的基点同伦 $\mathcal{H}^{(n)}$ 拼接起来，得到 $\Gamma\colon [0,1) \times [0,1] \to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$，并令 $\Gamma(1,t) := \widetilde{\mathbb{N}}$。于是 Γ 在 $[0,1) \times [0,1]$上连续，且 $\Gamma(0,t) = \gamma(t)$。

固定 $\varepsilon > 0$ 并选择满足 $\sum_{k>J} 2^{-k} < \varepsilon/2$的 J。根据 $j = J$的步骤 3，选取 N_0，使得所有阶段 $n \geq N_0$ 都逐点固定 K_{J+1}。现在将引理 2.8 应用于环路 $t \mapsto \Gamma(s_{N_0}, t)$ 和紧致K_{J+1}，从而得到满足下式的 M_0

$$\Gamma(s_{N_0}, t)_m \notin K_{J+1} \qquad (\forall t,\ \forall m > M_0).$$

固定 $m > M_0$和 $t \in [0,1]$。根据假设，在 $s = s_{N_0}$处有 $\Gamma(s_{N_0},\ t)_m \in \mathbb{C} \setminus K_{J+1}$。对于$s \geq s_{N_0}$, $\Gamma(s,\ t)$的演化只经过指标为 $n \geq N_0$的阶段。在每个这样的阶段，底层平面同胚在 K_{J+1}上限制为 id，因此逐点地保持 $\mathbb{C} \setminus K_{J+1}$集合不变。因此，一旦第 m个点在 $s = s_{N_0}$处落入 $\mathbb{C} \setminus K_{J+1}$，它在之后所有的 s中都会留在 $\mathbb{C} \setminus K_{J+1}$ 内。由于 $m > M_0$ 和 t 任意，所述一致性结论便得证。

因此

$$\Gamma(s,t)_m \notin K_{J+1} \qquad \text{for all } (s,t) \in [s_{N_0}, 1) \times [0,1] \text{ and all } m > M_0.$$

取 $N \geq \max\{N_0,\ M_0\}$。那么对于每个 $(s,\ t) \in [s_N, 1] \times [0,1]$:

- 阶段 $> N$逐点地固定 $\{1,\ \dots,\ N\}$，因此 $\Gamma(s,\ t)_m \equiv m$对 $1 \leq m \leq N$成立；
- 对于 $m > N \geq M_0$，我们有 $\Gamma(s,\ t)_m \notin K_{J+1}$。

因此，对于每个 $1 \leq k \leq J$，由于 φ_k 的支集 $\subset K_k \subset K_{J+1}$,

$$\sum_{a \in P(\Gamma(s,t))} \varphi_k(a) = \sum_{m=1}^{N} \varphi_k(m) = \sum_{a \in P(\widetilde{\mathbb{N}})} \varphi_k(a),$$

~因此， $d_{\mathcal{V}}(P(\Gamma(s,\ t))\ P(\mathbb{N})\}$ 中的前 J 个加项为零。因此

$$d_{\mathcal{V}}\big(P(\Gamma(s,t)), P(\widetilde{\mathbb{N}})\big) \leq \sum_{k>J} 2^{-k} < \varepsilon/2.$$

此外,

$$d_{\text{prod}}\big(\Gamma(s,t), \widetilde{\mathbb{N}}\big) \leq \sum_{m>N} 2^{-m} < 2^{-N},$$

如有必要，增大 N，我们可以假设 $2^{-N} < \varepsilon/2$。因此

$$d_{\sum}(\Gamma(s,t), \widetilde{\mathbb{N}}) = d_{\mathrm{prod}}(\Gamma(s,t), \widetilde{\mathbb{N}}) + d_{\mathcal{V}}(P(\Gamma(s,t)), P(\widetilde{\mathbb{N}})) < \varepsilon$$

对所有 $(s,t) \in [s_N, 1] \times [0,1]$，证明了在 $(1, t_0)$ 处的连续性。

因此，Γ 延拓为一个基点同伦，将 γ 同伦到以 $\mathbb{N}$为基点的常值环路，因此 $[\gamma] = 1$，进而$g = 1$。因此 $\ker \Theta = \{1\}$，且 Θ 是单射。 □

6 $H^{lf}(\infty)$上的相容的完备左不变度量

6.1 移动股线

记号 6.1。对于 $n \geq 1$，我们记

$$V_n := \ker(p_n : H^{lf}(\infty) \to P_n).$$

引理 6.2。对于每个 $n \geq 1$，V_n 是 $H^{lf}(\infty)$的一个开正规子群，$V_{n+1} \subset V_n$ 且$\bigcap_{n\geq 1} V_n = \{1\}$。

证明。正规性是显然的。包含映射 $V_{n+1} \subset V_n$ 由$p_n = p_{n+1,\, n} \circ p_{n+1}$ 及函子性得出。关于开性，$Conf_n(\mathbb{C})$是连通流形，因而局部道路连通且半局部单连通。因此由命题 2.9，$P_n = \pi_1^{\mathrm{top}}(Conf_n(\mathbb{C}), (1, \ldots, n))$是离散的。由于 p_n 连续且$\{1\} \subset P_n$ 是开的，其原像 V_n 是开的。由命题 5.9，$\Theta : H^{lf}(\infty) \to (\varprojlim_n P_n)_{\mathrm{f}}$是单射，我们有 $\bigcap_{n\geq 1} V_n = \{1\}$。 □

以下是我们所需的来自 [23]的若干结果。

定理 6.3（Katětov–Tong 插入定理）。设 K 为正规空间（特别地，紧致度量空间）。若 $a : K \to \mathbb{R}$ 是上半连续的，$b : K \to \mathbb{R}$ 是下半连续的，且对所有 x有$a(x) < b(x)$，则存在连续的 $c : K \to \mathbb{R}$，使得对所有 x有 $a(x) < c(x) < b(x)$。

以下结果引自 [23, 定理 5.8]。

定理 6.4（有限集的参数化同伦变形延拓（Edwards–Kirby 型））。设 K 是一个紧致度量空间，$L \subset K$ 是闭集，P是一个有限集。假设 $\eta : K \times [0,1] \times P \to \mathbb{C}$ 是连续的，使得对每个 $\eta_{x,\, s} : P \to \mathbb{C}$ 都是单射，并且 $\eta_{x,\, s}$ 与 s 无关，其中 $x \in L$。令$C := \eta(K \times [0,1] \times P)$，并设 $U \subset \mathbb{C}$是满足 $C \Subset U$的开集。那么存在连续同胚族 $\Phi_{x,\, s} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，满足：

(i) $\Phi_{x,0}$ =对所有 x均为恒等映射；(ii) $\Phi_{x,s}$ = 对所有 $x \in L$ 及所有 s均为恒等映射；
(iii) 对所有 (x, s)，$\mathrm{supp}(\Phi_{x,s}) \subset U$；(iv) 对所有 (x, s, p)，$\Phi_{x,s}(\eta(x, 0, p)) = \eta(x, s, p)$。

以下是 [23, 引理 5.3]。

引理 6.5。设 K 是一个紧致拓扑空间，且 $F : K \to C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 是连续的。若$Q \subset \mathbb{C}$ 是紧致的，且 $F(x_0) \cap Q = \varnothing$，则存在一个 x_0 在 K 中的开邻域 U，使得对所有 $x \in U$，均有 $F(x) \cap Q = \varnothing$。

6.2 将前 n 股拉直

引理 6.6。 若 $g \in V_n$，则 g 有一个基点环路代表 $\gamma\colon [0,1] \to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$，使得

$$\gamma_k(t) \equiv k \qquad (1 \le k \le n, \ \ for\ all\ t \in [0,1]).$$

证明。 取一个基点环路 $\gamma^{(0)}\colon [0,1] \to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$，其基点为 $\widetilde{\mathbb{N}}$，且满足 $[\gamma^{(0)}] = g$。令 $\beta(t) := \mathrm{pr}_n(\gamma^{(0)}(t)) \in Conf_n(\mathbb{C})$，这是以 $(1,\dots,n)$ 为基点的基点环路。

由于 $g \in V_n$，环路 β 在 $Conf_n(\mathbb{C})$ 中是零伦的。取一个基点零伦

$$H : [0,1] \times [0,1] \to Conf_n(\mathbb{C})$$

满足 $H(0,t) = \beta(t)$，$H(1,t) \equiv (1,\dots,n)$，且 $H(s,0) = H(s,1) = (1,\dots,n)$，对所有 s 均成立。

令 $K := [0,1]$（参数为 t），$L := \{0,1\} \subset K$，以及 $P := \{1,\dots,n\}$。定义

$$\eta : K \times [0,1] \times P \to \mathbb{C}, \qquad \eta(t,s,i) := \big(H(s,t)\big)_i.$$

于是，每个 $\eta_{t,\,s}$ 都是单射，并且 $\eta_{t,\,s}$ 与 s 无关，其中 $t \in L$。令 $C := \eta(K \times [0,1] \times P)$ 紧致，并选取一个满足 $C \Subset U$ 的开圆盘 $U \subset \mathbb{C}$。应用定理 6.4，得到 $\Phi_{t,\,s}$ 支撑于 U，且满足 $\Phi_{t,\,0} =$ 为恒等映射，$\Phi_{t,\,s} =$ 对 $t \in L$ 为恒等映射，以及 $\Phi_{t,\,s}(\eta(t,\,0,\,i)) = \eta(t,\,s,\,i)$。

由于 $\eta(t,0,i) = \beta_i(t) = \gamma_i^{(0)}(t)$，因此对于 $1 \le i \le n$，我们有 $\Phi_{t,1}(\gamma_i^{(0)}(t)) = i$。定义 $\gamma^{(s)}(t) := \Phi_t^{\infty,s}(\gamma^{(0)}(t))$，并令 $\gamma := \gamma^{(1)}$。根据 [23, 引理 6.3], $(s,t) \mapsto \gamma^{(s)}(t)$ 关于 $d_{\sum}$ 连续且保基点（因为对于 $t = 0$，$\Phi_{t,s} =$ 为恒等映射，1）。于是对于 $k \le n$，有 $[\gamma] = [\gamma^{(0)}] = g$ 和 $\gamma_k \equiv k$。 □

6.3 稳健的单圆归一化

引理 6.7. 设 K 为紧致度量空间，且 $F : K \to C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 是连续的（模糊拓扑）。固定 $R > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，并设

$$I := \{z \in \mathbb{C} : \ R - \varepsilon \le |z| < R\}.$$

定义

$$u(x) := \sup\{|z| : \ z \in F(x) \cap I\} \qquad (\sup \emptyset := R - \varepsilon).$$

则 u 是上半连续的，并且对所有 x，都有 $u(x) < R$。

设 $L \subset K$ 为闭集，并假设

$$F(x) \cap \{z : \ R - \varepsilon \le |z| \le R + \varepsilon\} = \varnothing \qquad (\ for\ all\ x \in L). \tag{7}$$

则存在：

(1) 一个连续函数 $r : \ K \to (R - \varepsilon, R]$ 使得

$$u(x) < r(x) < R \ for\ x \in K \setminus L, \qquad r(x) = R \ for\ x \in L, \tag{8}$$

因此

$$F(x) \cap \{|z| = r(x)\} = \varnothing \qquad (\ for\ all\ x \in K); \tag{9}$$

(2) 一个径向同胚的连续族 $\Psi_{x,\,t} : \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $(x \in K,\ t \in [0,1])$，使得：

(a) $\Psi_{x,0} =$恒等对所有 x；*(b)* $\Psi_{x,t} =$ 恒等在 $\{|z| \le R - \varepsilon\} \cup \{|z| \ge R + \varepsilon\}$ 上，对所有 (x,t)；*(c)* $\Psi_{x,t} =$ 恒等对所有 $x \in L$ 及所有 t；

(d) $\Psi_{x\,1,}^{-1}(\{|z|=R\}) = \{|z|=r(x)\}$ 因而

$$(\Psi_{x,1})_*(F(x)) \cap \{|z|=R\} = \varnothing \qquad (\textit{ for all } x \in K).$$

证明。**步骤 1：的上半连续性**。设 $c < R$。若 $c \le R-\varepsilon$，则 $\{x\colon\ u(x) < c\} = \varnothing$，因此是开集。假设 $R-\varepsilon < c < R$。对于 $m \ge 1$，取

$$Q_{c,m} := \{z\colon\ c \le |z| \le R - 1/m\},$$

当 m 充分大时，I 的一个紧子集（否则 $Q_{c,\ m} = \varnothing$）。我们断言

$$\{x\colon\ u(x) < c\} = \bigcap_{m\ge 1} \{x\colon\ F(x) \cap Q_{c,m} = \varnothing\}.$$

事实上，若 $u(x) < c$，则 $F(x) \cap I$ 不含满足 $|z| \ge c$ 的点，因此对于所有m，$F(x) \cap Q_{c,m} = \varnothing$。反过来，若对于所有 m，$F(x) \cap Q_{c,m} = \varnothing$，则 $F(x) \cap I$ 中没有点满足 $|z| \ge c$（否则它会属于某个充分大的 m 所对应的 $Q_{c,m}$），因此 $u(x) < c$。根据引理 6.5，每个集合 $\{x\colon\ F(x) \cap Q_{c,m} = \varnothing\}$ 都是开集，因此 $\{u < c\}$ 是开集。所以 u 是上半连续的。此外，$u(x) < R$，因为 I 中的所有半径都是 $< R$。

步骤 2：选择 r 满足相对约束的。由定理 6.3 应用于 $a = u$ 和$b \equiv R$，存在连续的 $r_0\colon K \to \mathbb{R}$，满足

$$u(x) < r_0(x) < R \qquad (\text{ for all } x \in K).$$

由于 $u(x) \ge R-\varepsilon$，我们有 $r_0(x) > R-\varepsilon$，对所有 x 均成立。

选择连续的 $\lambda\colon K \to [0,1]$，满足 $\lambda|_L \equiv 0$，并且 $\lambda > 0$ 在 $K \setminus L$ 上。定义

$$r(x) := (1-\lambda(x))\, R + \lambda(x)\, r_0(x).$$

于是 $r|_L \equiv R$。对于 $x \notin L$，$r(x) < R$，且 $r(x) \ge r_0(x) > u(x)$，并且 $r(x) > R-\varepsilon$。因此$r\colon K \to (R-\varepsilon, R]$ 和 (8) 成立。

步骤 3：圆盘空性。如果 $x \notin L$ 且 $z \in F(x)$ 满足 $|z| = r(x)$，那么 $z \in I$，从而$|z| \le u(x)$，这与 $u(x) < r(x)$ 矛盾。如果 $x \in L$，那么 $r(x) = R$，由 (7) 得 $F(x) \cap \{|z| = R\} = \varnothing$。因此 (9) 成立。

步骤 4：定义一个单调的径向同胚 σ_x。对于每个 $x \in K$，定义$\sigma_x\colon\ [0,\infty) \to [0,\infty)$ 通过

$$\sigma_x(s) := \begin{cases} s, & 0 \le s \le R-\varepsilon, \\ (R-\varepsilon) + \dfrac{\varepsilon}{r(x)-(R-\varepsilon)}\,(s-(R-\varepsilon)), & R-\varepsilon \le s \le r(x), \\ R + \dfrac{\varepsilon}{(R+\varepsilon)-r(x)}\,(s-r(x)), & r(x) \le s \le R+\varepsilon, \\ s, & s \ge R+\varepsilon. \end{cases}$$

如果 $x \in L$，那么 $r(x) = R$，且仿射部分化简为单位元，因此 $\sigma_x = \mathrm{id}$。对于所有 x，斜率均为正，所以 σ_x 连续且严格递增，并且 $\sigma_x(0) = 0$，当 $s \to \infty$ 时 $\sigma_x(s) \to \infty$。因此 σ_x 是一个同胚，并且

$$\sigma_x(r(x)) = R, \qquad \sigma_x(s) = s \text{ for } s \le R-\varepsilon \text{ and } s \ge R+\varepsilon.$$

步骤 5：同伦变形与 $\Psi_{x,t}$ 的定义。定义 $\sigma_{x,t}(s) := (1-t)s + t\sigma_x(s)$，其中 $(x,t) \in K \times [0,1]$。那么每个 $\sigma_{x,t}$ 都严格递增且连续，因此是一个同胚，满足

$\sigma_{x,0}=\mathrm{id}$，以及 $\sigma_{x,t}(s)=s$ 适用于 $s\le R-\varepsilon$ 或 $s\ge R+\varepsilon$。如果 $x\in L$，那么对于所有 t，$\sigma_{x,t}=\mathrm{id}$。定义 $\Psi_{x,t}(0)=0$ 并

$$\Psi_{x,t}(re^{i\theta})=\sigma_{x,t}(r)e^{i\theta}\qquad (r>0).$$

那么，每个 $\Psi_{x,t}$ 都是 $\mathbb{C}$ 的同胚，其支集包含于 $\{R-\varepsilon\le|z|\le R+\varepsilon\}$。

步骤 6：联合连续性。只需证明 $(x,t,r)\mapsto\sigma_{x,t}(r)$ 在 $K\times[0,1]\times[0,\infty)$ 上连续。由于 $\sigma_{x,t}(r)=(1-t)r+t\sigma_x(r)$，只需证明 $(x,r)\mapsto\sigma_x(r)$ 连续。

固定 (x_0,r_0)。若 $r_0\notin[R-\varepsilon,R+\varepsilon]$，则 $\sigma_x(r)$ 在局部成立，因此连续性显然成立。假设 $r_0\in[R-\varepsilon,R+\varepsilon]$。由于 $r\colon K\to(R-\varepsilon,R]$ 连续且 K 紧致，$r(K)$ 在 $(R-\varepsilon,R]$ 中是紧致的，因此

$$\delta_-:=\min_{x\in K}\bigl(r(x)-(R-\varepsilon)\bigr)>0,\qquad \delta_+:=\min_{x\in K}\bigl((R+\varepsilon)-r(x)\bigr)\ge\varepsilon>0.$$

因此，下面仿射公式中的系数一致有界，且关于 x 连续。在 $[R-\varepsilon,R+\varepsilon]$ 上将 σ_x 写为

$$\sigma_x(r)=A_-(r(x))\,r+B_-(r(x))\quad (r\le r(x)),\qquad \sigma_x(r)=A_+(r(x))\,r+B_+(r(x))\quad (r\ge r(x)),$$

其中，对于 $u\in(R-\varepsilon,R]$，

$$A_-(u)=\frac{\varepsilon}{u-(R-\varepsilon)},\quad B_-(u)=(R-\varepsilon)-A_-(u)(R-\varepsilon),$$

$$A_+(u)=\frac{\varepsilon}{(R+\varepsilon)-u},\quad B_+(u)=R-A_+(u)u.$$

这些都是关于 u 的连续函数，而 $u=r(x)$ 关于 x 连续，因此系数关于 x 连续。标准的双子列论证（根据 $r_n\le r(x_n)$ 是否成立，或者 $r_n\ge r(x_n)$ 是否成立）表明，若 $(x_n,r_n)\to(x_0,r_0)$，则 $\sigma_{x_n}(r_n)\to\sigma_{x_0}(r_0)$（这两个仿射部分在 $r=r(x)$ 处相等）。因此，$(x,r)\mapsto\sigma_x(r)$ 连续，故 $(x,t,r)\mapsto\sigma_{x,t}(r)$ 也连续，进而 $(x,t,z)\mapsto\Psi_{x,t}(z)$ 连续。

步骤 7：逆圆周结论。由于 $\sigma_{x,1}(r(x))=\sigma_x(r(x))=R$ 且 σ_x 严格递增，$\sigma_{x,1}^{-1}(R)=r(x)$，即 $\Psi_{x,1}^{-1}(\{|z|=R\})=\{|z|=r(x)\}$。结合 (9)，可得 $(\Psi_{x,1})_*(F(x))\cap\{|z|=R\}=\varnothing$ 对所有 x 均成立。□

6.4 避免 Vn 的元素遇到指定的紧致集

引理 6.8. 固定 $n\ge1$，$g\in V_n$。那么存在一个基点环路 $\widehat{\gamma}\colon[0,1]\to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 表示 g，使得

$$\widehat{\gamma}_k(t)\equiv k\quad (1\le k\le n),\qquad \widehat{\gamma}_m(t)\notin K_{n-1}$$

对所有 $m>n$ 和 $t\in[0,1]$ 均成立。

证明。首先，选取一个表示 g 的基点环路 γ，使得对 $k\le n$ 有 $\gamma_k\equiv k$，这由引理 6.6 得出。$n=1$ 的情形显然。假设 $n\ge2$，并令 $R:=n-\frac12,\varepsilon:=\frac14$，于是 $K_{n-1}\subset B(\overline{0},R-\varepsilon)$。

定义 $F\colon[0,1]\to C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$，令 $F(t):=P(\gamma(t))$，它关于模糊拓扑连续。由于 $\sim F(0)=F(1)=P(\mathbb{N})=\mathbb{N}$，且 $\mathbb{N}$ 避开 $\{z\colon\ R-\varepsilon\le|z|\le R+\varepsilon\}$，引理 6.5 给出 $\delta>0$，满足

$$F(t)\cap\{z:\ R-\varepsilon\le|z|\le R+\varepsilon\}=\varnothing$$

对所有 $t\in[0,\delta]\cup[1-\delta,1]$ 均成立。令 $L:=[0,\delta]\cup[1-\delta,1]\subset[0,1]$。

将引理 6.7 应用于此 F 和 L，得到 $\Psi_{t,\,s}$ 支撑于圆环内，在 $t\in L$ 时等于 id，并且满足

$$(\Psi_{t,1})_*(F(t))\cap\{|z|=R\}=\varnothing\qquad (\text{ for all } t\in[0,1]).\tag{10}$$

定义

$$\widehat{\gamma}(t) := \Psi^{\infty}_{t,1}(\gamma(t)).$$

根据 [23, 引理 6.3], $\widehat{\gamma}$ 是一个连续的基点环路，而 $H(s,t) := \Psi^{\infty}_{t,s}(\gamma(t))$ 是一个相对于端点、从 γ 到 $\widehat{\gamma}$ 的基点同伦，因此 $[\widehat{\gamma}] = [\gamma] = g$。

对于 $k \le n$, $\widehat{\gamma}_k(t) = k$，因为圆环 $\{R-\varepsilon \le |z| \le R+\varepsilon\}$ 是 $\{n-\frac{3}{4} \le |z| \le n-\frac{1}{4}\}$，其中不包含整数半径。对于 $m > n$，我们有 $|\widehat{\gamma}_m(0)| = m > R$，并且根据 (10)，连续函数 $t \mapsto |\widehat{\gamma}_m(t)|$ 永远不会等于 R，因此不可能低于 R。所以对于所有 t, $|\widehat{\gamma}_m(t)| > R$，因此 $\widehat{\gamma}_m(t) \notin B(0,R) \supset K_{n-1}$。 □

6.5 前有限基

引理 6.9. 令 $\varepsilon > 0$。选取 J 使得 $\sum_{j>J} 2^{-j} < \varepsilon/4$ 且 $n > J+1$。那么每个 $g \in V_n$都存在一个基点环路代表元 $\widehat{\gamma}$，满足

$$D(\widehat{\gamma}, c) < \varepsilon,$$

~ ~其中 c是以 $\mathbb{N}$为基点的常值环路，且 $D(\widehat{\gamma}, c) =$支集 $_{t\in[0,1]} d_{\sum}(\widehat{\gamma}(t)\ \mathbb{N})$。

证明。令 $g \in V_n$。由引理 6.8，选取 $\widehat{\gamma}$，使其代表 g，且对 $k \le n$ 有 $\widehat{\gamma}_k \equiv k$，并且对所有 $m > n$ 和 t, 都有 $\widehat{\gamma}_m(t) \notin K_J$。

固定 $t \in [0,1]$。对于乘积项,

$$d_{\mathrm{prod}}(\widehat{\gamma}(t), \widetilde{\mathbb{N}}) = \sum_{m>n} 2^{-m} \min\{1, |\widehat{\gamma}_m(t) - m|\} \le \sum_{m>n} 2^{-m} < \varepsilon/4.$$

对于模糊项，固定 $j \le J$。由于 $\mathrm{supp}(\varphi_j) \subset K_J$且所有线段 $m > n$都避开 K_J，因此对所有 $m > n$, 都有 $\varphi_j(\widehat{\gamma}_m(t)) = 0$。此外，$\mathrm{supp}(\varphi_j) \subset K_J \subset B(0, n-1)$ 意味着对所有整数 $m \ge n$，都有 $\varphi_j(m) = 0$，尤其对所有 $m > n$也成立。因此

$$\langle P(\widehat{\gamma}(t)), \varphi_j \rangle = \sum_{m=1}^{n} \varphi_j(m) = \sum_{m\ge 1} \varphi_j(m) = \langle P(\widetilde{\mathbb{N}}), \varphi_j \rangle.$$

因此，前面的 J 个加项在 $d_{\mathcal{V}}$ 中消失，并且

$$d_{\mathcal{V}}(P(\widehat{\gamma}(t)), P(\widetilde{\mathbb{N}})) \le \sum_{j>J} 2^{-j} < \varepsilon/4.$$

~因此，对于所有 t，都有 $d_{\sum}(\widehat{\gamma}(t)\ \mathbb{N}) < \varepsilon/2$，所以 $D(\widehat{\gamma},\ c) < \varepsilon/2 < \varepsilon$。 □

定理 6.10 (PB)。对于 $H^{lf}(\infty)$ 中的每个开邻域 $W \ni 1$，存在 n 使得$V_n \subset W$。

证明。由于 $q^{-1}(W)$ 是 $(\Omega\ D)$ 中常值环路 c 的一个开邻域，因此存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B_{\varepsilon}(c) \subset q^{-1}(W)$。取引理 6.9 中的 n（其中取此 ε）。于是，对于每个 $g \in V_n$，存在一个代表元 $\widehat{\gamma} \in B_{\varepsilon}(c)$，因此 $g = q(\widehat{\gamma}) \in W$。因此 $V_n \subset W$。 ∞ ∞ = □

推论 6.11 ($H^{lf}(\pi_1^{\mathrm{top}}\ Conf^{lf}_{\infty}\ \mathbb{C}\ \widetilde{\mathbb{N}}$)

的拓扑群结构)。拟拓扑群 $H^{lf}()(())$ 是一个拓扑群；也就是说，乘法映射

$$m : H^{lf}(\infty) \times H^{lf}(\infty) \longrightarrow H^{lf}(\infty), \qquad (g,h) \longmapsto gh$$

是联合连续的。

证明。 根据定理 6.10，开子群族$\{V_n\}^{n\geq 1}$ 构成 1 处的邻域基。因此， m 在 (1，1) 处连续：若 $W \ni 1$ 是开集，则选取 n 使得 $V_n \subset W$，于是

$$m(V_n \times V_n) \subset V_n \subset W$$

因为 V_n 是一个子群。对于任意的 (g_0， h_0)，利用左平移和右平移是同胚（引理 2.3），将连续性从 (1，1) 推至 (g_0， h_0)。因此， m 在 $H^{lf}(\infty) \times H^{lf}(\infty)$ 上联合连续。

□

6.6 Θ 是一个拓扑群同构

推论 6.12. 典范同态

$$\Theta : \ H^{lf}(\infty) \longrightarrow \left(\varprojlim_n P_n\right)_{\mathrm{lf}}$$

是一个拓扑群同构。

证明。 **步骤 1：** Θ **是一个抽象群同构**。 由定理 5.4， Θ 连续且满射。由命题 5.9， Θ 是单射。因此， Θ 是一个双射同态。

步骤 2：目标中 1 **处的一个邻域基**。对于 $N \geq 1$ ，定义柱集

$$U_N := \left\{(g_n) \in \left(\varprojlim_n P_n\right)_{\mathrm{lf}} : \ g_1 = \cdots = g_N = 1\right\}.$$

由于每个 P_n 都是离散的（推论 2.10），子集

$$\widetilde{U}_N := \{(g_n) \in \prod_{n\geq 1} P_n : \ g_1 = \cdots = g_N = 1\}$$

~在 $\prod_{n\geq 1} P_n$中是开集，因此 $U_N = U_N \cap (\varprojlim_n P_n)_{\mathrm{lf}}$在 $(\varprojlim_n P_n)_{\mathrm{lf}}$中是开集。此外，$\{U_N\}^{N\geq 1}$ 是 $(\varprojlim_n P_n)_{\mathrm{lf}}$中 1 的邻域基：若 $O \subset (\varprojlim_n P_n)_{\mathrm{lf}}$是开集且 $1 \in O$，则写作 ~ ~ ~$O = O \cap (\varprojlim_n P_n)_{\mathrm{lf}}$，其中 O 在 $\prod_{n\geq 1} P_n$ 中是开集，且 $1 \in O$。取 1 的一个基本乘积邻域~$\prod_{n\geq 1} O_n \subset O$ ，其中每个 $O_n \subset P_n$ 都是开集， $1 \in O_n$，且除有限多个 n外，对所有 $O_n = P_n$ 都成立。令 $F := \{n : \ O_n \neq P_n\}$，其为有限集，并设 $N := \max F$（若 $F = \varnothing$，则取任意 N ）。于是~ ~$U_N \subset \prod_{n\geq 1} O_n \subset O$，故 $U_N \subset O$。

步骤 3：利用 PB 证明 Θ^{-1} **在** 1 **处的连续性**。 设 $W \subset H^{lf}(\infty)$ 是 1 的一个开邻域。根据定理 6.10，存在 N 使得

$$V_N := \ker(p_N : H^{lf}(\infty) \to P_N) \subset W.$$

我们断言

$$\Theta^{-1}(U_N) = V_N. \tag{11}$$

事实上，对于 $g \in H^{lf}(\infty)$,

$$\Theta(g) \in U_N \iff p_k(g) = 1 \text{ for all } k \leq N \iff p_N(g) = 1 \iff g \in V_N.$$

因此 (11) 成立，从而

$$\Theta^{-1}(U_N) = V_N \subset W,$$

所以 Θ^{-1} 在 1 处连续。

由于左平移都是同胚，我们看到 Θ^{-1} 处处连续。因此， Θ 是一个拓扑群同构。

□

6.7 无限拼接的截断引理

引理 6.13. 设 $\alpha^{(n)})_{n\geq 1}$ 是空间 X 中的基点环路，并令 $t_n := 1 - 2^{-n}$。通过仿射重参数化，将 $\alpha^{(n)}$ 拼接到 $[t_{n-1}, t_n]$ 上，定义$\Gamma\colon [0,1) \to X$，并假设 Γ可连续延拓为 $[0,1]$上的一个基点环路。固定 $N \geq 1$，令 $\Gamma_{\geq N+1}$ 为将限制映射 $\Gamma|_{[t_N,1]}$ 线性重参数化到 $[0,1]$上所得到的尾环。则 Γ 与以下有限拼接基同伦（端点保持不变）：

$$\alpha^{(1)} * \alpha^{(2)} * \cdots * \alpha^{(N)} * \Gamma_{\geq N+1}.$$

证明。在 $[0, t_N]$ 上，环路 Γ 恰好是有限拼接 $\alpha^{(1)} * \cdots * \alpha^{(N)}$，但每个区间上采用固定的仿射参数化。在 $[t_N, 1]$ 上，它是尾部。原参数化与显式实现

$$[0,1] = [0, t_N] \cup [t_N, 1]$$

将其表示为前缀与重新参数化后的尾部的拼接之间的基点同伦，可由一族标准的分段线性同胚给出。这些同胚作用于 $[0,1]$，固定 0 和 1，并连续移动断点，使得 $[t_N, 1]$ 上的限制线性缩放到 $[0,1]$。将 Γ 与这一族复合，即得到所需的相对于端点的基点同伦。

□

6.8 柯西实现

定理 6.14 (CR)。设 V_n 是 $p_n\colon H^{lf}(\infty) \to P_n$ 对于 $n \geq 1$ 的核。若 $(g_n)_{n\geq 1}$ 对所有 n 都满足 $g_{n+1} \in g_n V_n$，则存在 $g \in H^{lf}(\infty)$ 使得

$$g \in g_n V_n \qquad \textit{for all } n.$$

证明。定义 $h_n := g_n^{-1} g_{n+1} \in V_n$。对每个 $n \geq 1$，应用引理 6.8 于 $h_n \in V_n$，得到一个基点环路 $\alpha^{(n)}\colon [0,1] \to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$，它代表 h_n，使得

$$\alpha_k^{(n)}(t) \equiv k \ (1 \leq k \leq n), \qquad \alpha_m^{(n)}(t) \notin K_{n-1} \ (\text{ for all } m > n, \ \text{ for all } t). \tag{12}$$

令 $t_n := 1 - 2^{-n}$，并将环路 $\alpha^{(n)}$在 $[t_{n-1}, t_n]$上拼接起来，得到 $\Gamma\colon [0,1) \to \widetilde{Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})}$，其中 $\Gamma(0) = \mathbb{N}$。

断言 6.15。 Γ 通过 $\Gamma(1) = \mathbb{N}$连续延拓至 $t = 1$。

断言 *6.15* 的证明。固定 $\eta > 0$。我们证明，当 t 充分接近 1 时，$d_{\prod}(\Gamma(t), \mathbb{N}) < \eta$。

乘积项。选取 M 使得 $\sum_{m>M} 2^{-m} < \eta/2$。对每个 $m \leq M$，完成阶段 $n = m$ 后，Γ 的第 m 个坐标恒等于 m，因为 $\alpha^{(n)}$ 固定了前 n 股。因此存在 $T < 1$ 使得对所有 $t \in [T, 1)$ 和所有 $m \leq M$，$\Gamma_m(t) = m$。于是对于 $t \in [T, 1)$,

$$d_{\mathrm{prod}}(\Gamma(t), \widetilde{\mathbb{N}}) = \sum_{m>M} 2^{-m} \min\{1, |\Gamma_m(t) - m|\} \leq \sum_{m>M} 2^{-m} < \eta/2.$$

模糊项。选择 J使得 $\sum_{j>J} 2^{-j} < \eta/2$。定义 $n_* := \max\{J, M\}$。我们断言，对于所有 $t \in [t_{n_*}, 1)$ 以及所有 $1 \leq j \leq J$,

$$\langle P(\Gamma(t)), \varphi_j \rangle = \langle P(\widetilde{\mathbb{N}}), \varphi_j \rangle = \langle \mathbb{N}, \varphi_j \rangle. \tag{13}$$

事实上，对于这样的 t，点 $\Gamma(t)$位于某个阶段 $n \geq n_* + 1$。于是股1，……，n 恰好是整数1，……，n。此外，由(12)，每一线股 $m > n$ 都位于 K_{n-1}之外，因此$\varphi_j(\Gamma_m(t)) = 0$

对所有 $m > n$成立。此外，支集$(\varphi_j) \subset K_j \subset K_J \subset B(\overline{0,\ n-1})$蕴含$\varphi_j(m) = 0$ 对所有整数$m > n$成立。因此

$$\langle P(\Gamma(t)), \varphi_j\rangle = \sum_{m=1}^{n} \varphi_j(m) = \sum_{m\geq 1} \varphi_j(m) = \langle P(\widetilde{\mathbb{N}}), \varphi_j\rangle,$$

证明 (13)。因此，对于 $t \in [t_{n_*}, 1)$， $d_{\mathcal{V}}$ 中前 J summands 个加项为零，并且

$$d_{\mathcal{V}}\big(P(\Gamma(t)), P(\widetilde{\mathbb{N}})\big) \leq \sum_{j>J} 2^{-j} < \eta/2.$$

~ ~结合这些界可得，对于所有充分接近 1 的 t， $d_{\sum}(\Gamma(t)\ \mathbb{N}) < \eta$。因此，当 $t \to 1^-$时， $\Gamma(t) \to \mathbb{N}^{\sim}$，所以 Γ 可连续延拓，且 $\Gamma(1) = \mathbb{N}$。 □

令 $h := [\Gamma] \in H^{lf}(\infty)$。

断言 6.16。 对于每个 $n \geq 1$，都有 $h \in (h_1 \cdots h_{n-1})\ V_n$。

断言 6.16 的证明。 令 $\Gamma_{\geq n}\colon [0,1] \to Conf^{lf}_{\infty}(\mathbb{C})$ 为将$\Gamma|_{[t_{n-1},1]}$ 线性重新参数化到 $[0,1]$ 上得到的尾环。对于每个阶段 $k \geq n$，环路 $\alpha^{(k)}$ 固定前 k 股，因此也固定前 n 股；于是 $p_n \circ \Gamma_{\geq n} \equiv (1,\ldots,n)$，所以 $[\Gamma_{\geq n}] \in V_n$。

由引理 6.13（取 $N = n-1$）， Γ 与 $\alpha^{(1)} * \cdots * \alpha^{(n-1)} * \Gamma_{\geq n}$ 基同伦。因此

$$h = [\Gamma] = [\alpha^{(1)}] \cdots [\alpha^{(n-1)}] \cdot [\Gamma_{\geq n}] = (h_1 \cdots h_{n-1}) \cdot v_n$$

对某个 $v_n \in V_n$，从而证明该断言。 □

最后令 $g := g_1 h$。由于 $g_n = g_1(h_1 \cdots h_{n-1})$，断言 6.16 给出

$$g = g_1 h \in g_1(h_1 \cdots h_{n-1})V_n = g_n V_n$$

对每个 n。 □

6.9 一个相容的完备左不变超度量

定义 6.17。 对于 $g,\ h \in H^{lf}(\infty)$ 定义

$$N(g,h) := \sup\{n \geq 1 :\ g^{-1}h \in V_n\} \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}, \qquad (\sup \emptyset := 0),$$

并设

$$d(g,h) := \begin{cases} 0, & g = h, \\ 2^{-(N(g,h)+1)}, & g \neq h. \end{cases}$$

以下是本文的主要结果。

定理 6.18。 函数 d 是 $H^{lf}(\infty)$上的相容的完备左不变超度量。此外，对每个 $n \geq 1$，都有

$$B_d(1, 2^{-n}) = V_n.$$

证明。 **(1) 左不变性和超度量不等式。** 左不变性由下式可得$N(ag,\ ah) = N(g,\ h)$。若 $g^{-1}h \in V_n$ 且 $h^{-1}\ell \in V_n$，则 $g^{-1}\ell \in V_n$，因此

$$N(g,\ell) \geq \min\{N(g,h), N(h,\ell)\},$$

等价于 $d(g,\ell)\ \leq \max\{d(g,h)\ d(h,\ell)\}$。

(2) 分离性。 如果 $g \neq h$，那么 $g^{-1}h \neq 1$ ，因此 $g^{-1}h \notin \bigcap_{n\geq 1} V_n = \{1\}$。于是$N(g, h) < \infty$且 $d(g,h) > 0$。

(3) 单位元处的球。对于 $n \geq 1$ 和 $g \neq 1$,

$$d(g,1) < 2^{-n} \iff 2^{-(N(g,1)+1)} < 2^{-n} \iff N(g,1) \geq n \iff g \in V_n,$$

使用 $V_{n+1} \subset V_n$。此外， $1 \in V_n$和 $d(1,\ 1) = 0$, 因此 $B_d(1,\ 2^{-n}) = V_n$。

(4) 相容性。 每个 V_n 都是开且正规的（引理 6.2），并且根据定理 6.10，族 (V_n) 是给定拓扑中 1 处的邻域基。由于以 1 为中心的 d–球恰好是这些 V_n，因此 d–拓扑与给定拓扑一致。

(5) 完备性。 设 (x_k) 是 d–柯西列。选取一个子列 (x_{k_n})，使得

$$d(x_{k_{n+1}}, x_{k_n}) < 2^{-(n+1)} \qquad (\text{ for all } n \geq 1).$$

那么 $N(x_{k_n},\ x_{k_{n+1}}) \geq n$，即 $x_{k_n}^{-1} x_{k_{n+1}} \in V_n$，因此

$$x_{k_{n+1}} \in x_{k_n} V_n \qquad (\text{ for all } n).$$

将定理 6.14(CR) 应用于 $g_n := x_{k_n}$ ，得到 $x \in H^{lf}(\infty)$，其中对所有 n 都有 $x \in x_{k_n} V_n$ ，因此$d(x,\ x_{k_n}) < 2^{-n}$ 且 $x_{k_n} \to x$。

最后，由于（x_k）是柯西序列，对每个 n 存在 K 使得 d（x_k，x_{k_n}）$< 2^{-n}$ 对所有$k \geq K$ （其中 $k_n \geq K$）。由超度量不等式,

$$d(x_k, x) \leq \max\{d(x_k, x_{k_n}), d(x_{k_n}, x)\} < 2^{-n}$$

对所有充分大的 k。因此 $x_k \to x$，并且（H^{lf}（∞） d）是完备的。 □

7 $B^{lf}(\infty)$ 是完备的

设 G :=Aut(ℕ)被视为一个离散 群。考虑Borel 构造

$$Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})//G := EG \times_G Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$$

并定义

$$B^{lf}(\infty) := \pi_1^{\text{top}}(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})//G,\ [e_0, \widetilde{\mathbb{N}}]),$$

其中 $e_0 \in EG$ 是一个选定的基点。

7.1 一个开且完全可度量化的子群

回忆一下，存在一个局部平凡纤维丛

$$Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}) \longrightarrow Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})//G \xrightarrow{\pi} BG,$$

由 [23], 中的非球性结果，我们得到一个抽象群的正合列

$$1 \longrightarrow \pi_1(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \widetilde{\mathbb{N}}) \xrightarrow{\iota_*} \pi_1(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})//G, [e_0, \widetilde{\mathbb{N}}]) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(BG, [e_0]) \cong G \longrightarrow 1.$$

约定。 对于一个带基点空间（X, x_0） ，我们用 $\Omega_1(X, x_0) \subset \Omega(X, x_0)$ 表示常值环路 c_{x_0} 的道路连通分支。

下面结果的证明是直接的。

引理 7.1. 设 G 是一个离散群， BG 是一个分类空间的 *CW*模型，而 $EG \to BG$ 是它的万有覆盖。那么，$\Omega(BG, [e_0])$ 的每个道路连通分支都是可缩的。特别地，$\Omega_1(BG)$ 是可缩的。此外，$\Omega_1(BG)$ 存在一个基于基点的收缩，且该收缩固定常值环路。

引理 7.2. 若 G 是离散的，且 BG 是分类空间的 *CW*模型，则 $\pi_1^{\mathrm{top}}(BG, [e_0]) \cong G$ 是离散的。等价地，$\Omega_1(BG)$ 在 $\Omega(BG)$中是开集。

证明。 CW复形是局部道路连通且半局部单连通的。因此，该断言由命题 2.9 得出。

□

引理 7.3. 设 $p : (E, x_0) \to (B, b_0)$ 是紧生成弱*Hausdorff*空间之间的基于基点的Hurewicz纤维化，并设 $F := p^{-1}(b_0)$ 带有基点 $x_0 \in F$。假设$\Omega_1(B, b_0) \subset \Omega(B, b_0)$ 是开集，并且存在一个基于基点的收缩，使常值环路保持不变；也就是说，存在连续映射

$$C : \Omega_1(B, b_0) \times [0, 1] \longrightarrow \Omega_1(B, b_0)$$

对所有 β，均有 $C(\beta, 0) = \beta$, $C(\beta, 1) = c_{b_0}$，且对所有 s，均有 $C(c_{b_0}, s) = c_{b_0}$。那么诱导同态

$$\iota_* : \pi_1^{\mathrm{top}}(F, x_0) \longrightarrow \pi_1^{\mathrm{top}}(E, x_0)$$

是到开子群 $\ker(p_* : \pi_1^{\mathrm{top}}(E, x_0) \to \pi_1^{\mathrm{top}}(B, b_0))$ 上的同胚。

证明。 令 $q_E : \Omega(E, x_0) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{top}}(E, x_0)$ 和 $q_B : \Omega(B, b_0) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{top}}(B, b_0)$ 为商映射，并记 $\Omega p : \Omega(E, x_0) \to \Omega(B, b_0)$ 表示 $\alpha \mapsto p \circ \alpha$。

步骤 1：开饱和原像及核的开性。令

$$A := (\Omega p)^{-1}(\Omega_1(B, b_0)) \subset \Omega(E, x_0).$$

由于 $\Omega_1(B, b_0)$ 是开集， A 是开集。此外，$\Omega_1(B, b_0) = q_B^{-1}(\{1\})$，因此

$$A = q_E^{-1}\Big(\ker(p_* : \pi_1^{\mathrm{top}}(E, x_0) \to \pi_1^{\mathrm{top}}(B, b_0))\Big).$$

由于 $\Omega_1(B, b_0)$ 是开集，$\{1\}$ 在 $\pi_1^{\mathrm{top}}(B, b_0)$ 中是开集，因此核子群在 $\pi_1^{\mathrm{top}}(E, x_0)$ 中是开子群。

我们还注意到， A 对于 q_E 是饱和的：若 $\alpha \in A$ 和 $\alpha \simeq \alpha'$ 是 E中的基点环路，那么将基点同伦与 p 复合，就得到 $\Omega(B, b_0)$ 中一条从 $p \circ \alpha$ 到 $p \circ \alpha'$的路径。由于 $\Omega_1(B, b_0)$ 是 c_{b_0} 的道路连通分支 且包含 $p \circ \alpha$，它就包含该路径的整个像；因此 $p \circ \alpha' \in \Omega_1(B, b_0)$ 和 $\alpha' \in A$。

步骤 2：构造 $r : A \to \Omega(F, x_0)$。 由于 p是 Hurewicz纤维化，且 $[0, 1]$ 是紧Hausdorff，诱导映射 $\Omega p : \Omega(E, x_0) \to \Omega(B, b_0)$ 也仍是 Hurewicz纤维化（CGWH 中映射空间的保留性质）。定义

$$H : A \times [0, 1] \longrightarrow \Omega_1(B, b_0), \qquad H(\alpha, s) := C((\Omega p)(\alpha), s).$$

于是 $H(\alpha, 0) = (\Omega p)(\alpha)$。根据 Ωp的同伦提升性质，存在一个连续的 l ift

$$\widetilde{H} : A \times [0, 1] \longrightarrow \Omega(E, x_0)$$

~ ~其中 $H(\alpha, 0) = \alpha$ 且 $(\Omega p)(H(\alpha, s)) = H(\alpha, s)$。定义

$$r : A \longrightarrow \Omega(F, x_0), \qquad r(\alpha) := \widetilde{H}(\alpha, 1).$$

事实上，$(\Omega p)(r(\alpha)) = H(\alpha, 1) = c_{b_0}$，因此 $r(\alpha)$ 是纤维 F 中的一个环路。

~令 $j\colon \Omega(F,x_0) \to A$ 为包含映射。该同伦 H 给出了 $\Omega(E,x_0)$ 中从 id_A 到 $j\circ r$ 的基点同伦。若 $\alpha\in\Omega(F,x_0)$，则对于所有 s，$(\Omega p)(\alpha)=c_{b_0}$ 且 $H(\alpha,s)=C(c_{b_0},s)=c_{b_0}$，因此 ~ ~ ~$(\Omega p)(H(\alpha,s))=c_{b_0}$，从而 $H(\alpha,s)\in\Omega(F,x_0)$。所以 $H|_{\Omega(F,x_0)\times[0,1]}$ 是 $\Omega(F,x_0)$ 中从 $\mathrm{id}_{\Omega(F,x_0)}$ 到 $r\circ j$ 的基点同伦。

步骤 3：下降到 π_1^{top} 并得到互逆的同胚。由于 A 是开且饱和的，限制映射 $q_E|_A\colon A\twoheadrightarrow \ker(p_*)$ 是一个商映射。此外，若 $\alpha\simeq\alpha'$ 属于 $\Omega(E,x_0)$，且 $\alpha,\alpha'\in A$，那么由饱和性可知，整个基点同伦都位于 A中；将该同伦与 r 复合，便得到 $\Omega(F,x_0)$ 中从 $r(\alpha)$ 到 $r(\alpha')$ 的基点同伦。因此，r 在定义 $q_E|_A$ 的等价类上为常值，故诱导出一个良定义的连续映射

$$r_*:\ker(p_*)\longrightarrow \pi_1^{\mathrm{top}}(F,x_0),\qquad r_*(q_E(\alpha)):=q_F(r(\alpha)),$$

其中 $q_F\colon \Omega(F,x_0)\twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{top}}(F,x_0)$ 是商映射。

类似地，包含映射 j 诱导出连续同态

$$j_*=\iota_*:\pi_1^{\mathrm{top}}(F,x_0)\longrightarrow\ker(p_*),$$

其中 $\ker(p_*)$ 具有 $\pi_1^{\mathrm{top}}(E,x_0)$ 的子空间拓扑。

$\Omega(E,x_0)$ 中 id_A 与 $j\circ r$ 之间的基点同伦表明，对每个 $\alpha\in A$，$q_E(\alpha)=q_E(j(r(\alpha)))$，因此 $\iota_*\circ r_*=\mathrm{id}_{\ker(p_*)}$。$\Omega(F,x_0)$ 中 $\mathrm{id}_{\Omega(F,x_0)}$ 与 $r\circ j$ 之间的基点同伦表明 $r_*\circ\iota_*=\mathrm{id}_{\pi_1^{\mathrm{top}}(F,x_0)}$。因此，$\iota_*$ 是一个双射，其逆映射 r_*连续，即它是到 $\ker(p_*)$ 上的一个同胚。 □

Cor推论 7.4. 对于 $E=Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})//G$ 和 $B=BG$，其中 $G=\mathrm{Aut}(\mathbb{N})$，子群

$$K:=\ker\bigl(\pi_*:B^{lf}(\infty)\to G\bigr)$$

是 $B^{lf}(\infty)$中的开子群。此外，映射 $\iota_*\colon H^{lf}(\infty)\longrightarrow B^{lf}(\infty)$ 是到 K上的拓扑群同构。特别地，K 是完全可度量化的。

证明。 将引理 7.3 应用于纤维化 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})\to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})//G\xrightarrow{\pi}BG$。由引理 7.2，$\Omega_1(BG)$ 是 $\Omega(BG)$ 中的开集。由引理 7.1，$\Omega_1(BG)$ 存在一个固定常值环路的基于基点的收缩。因此，引理 7.3 的假设成立，由此可得

$$\iota_*:\pi_1^{\mathrm{top}}(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}),\widetilde{\mathbb{N}})\longrightarrow\pi_1^{\mathrm{top}}(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})//G,[e_0,\widetilde{\mathbb{N}}])$$

是到 $K=\ker(\pi_*)$上的同胚，并且 K 是开集。最后，由定理 6.18，$H^{lf}(\infty)$ 是完全可度量化的，因此 K 也是。 □

7.2 一般可度量化引理

定理 7.5. 设 G 是一个带有拓扑的群，使得左平移都是同胚。设 $H\le G$ 是一个开 子群，并假设 H 在完备左不变度量 d_H 下是完全可度量化的，且该度量在 H上诱导子空间拓扑。定义 d_G：$G\times G\to\mathbb{R}$ 如下：

$$d_G(g,h)=\begin{cases}\min\{1,\,d_H(g^{-1}h,1)\}, & g^{-1}h\in H,\\ 1, & g^{-1}h\notin H.\end{cases}$$

那么：

(a) d_G 是 G上的左不变完备度量；

(b) d_G 诱导的拓扑与 G上的给定拓扑一致。

特别地， G 是完全可度量化的。

证明。 **步骤 1：** d_G **是一个度量，且是左不变的。** 对称性和正定性显然成立。左不变性由此可得，因为 $(kg)^{-1}(kh) = g^{-1}h$。

为证明三角不等式，取定 $g, h, k \in G$，并令 $u = g^{-1}h$, $v = h^{-1}k$，于是 $g^{-1}k = uv$。若$u \notin H$或 $v \notin H$，则 $d_G(g,h) = 1$或 $d_G(h,k) = 1$，因此 $d_G(g,k) \le 1 \le d_G(g,h) + d_G(h,k)$。若$u, v \in H$，则 $uv \in H$，并由 d_H 的左不变性，

$$d_H(uv, 1) \le d_H(u, 1) + d_H(v, 1),$$

so

$$d_G(g,k) = \min\{1, d_H(uv,1)\} \le \min\{1, d_H(u,1)\} + \min\{1, d_H(v,1)\} = d_G(g,h) + d_G(h,k),$$

对 $a, b \ge 0$，有 using $\min\{1, a+b\} \le \min\{1, a\} + \min\{1, b\}$。

步骤 2：C ompatibility with the given topology. 只需比较邻域 ba 在 1 处成立。如果 $0 < \varepsilon < 1$，那么

$$B_{d_G}(1, \varepsilon) = \{h \in H : \ d_H(h, 1) < \varepsilon\},$$

它在 H 中是开集，因此由于 H 是开集，它在 G 中也是开集。反过来，若 $U \subset G$ 是 1 的一个开邻域，则 $U \cap H$ 在 H 中是开集，因此选取 $\varepsilon \in (0, 1)$，使得 $\{h \in H : \ d_H(h, 1) < \varepsilon\} \subset U \cap H$。于是 $B_{d_G}(1, \varepsilon) \subset U$。

步骤 3：完备性。 设 (g_n) 是 d_G-柯西序列。选取 $\varepsilon \in (0, 1)$ 和 N，使得对于所有 $m, n \ge N$，都有 $d_G(g_m, g_n) < \varepsilon$。于是对于所有 $m, n \ge N$，都有 $g_m^{-1} g_n \in H$，进而对于所有 $n \ge N$，都有 $g_n \in g_N H$。写作$g_n = g_N h_n$，其中 $h_n \in H$。由左不变性，

$$d_G(g_m, g_n) = d_G(h_m, h_n) = \min\{1, d_H(h_m^{-1} h_n, 1)\},$$

因此，(h_n) 是 H 中的 d_H-柯西列，故收敛到某个 $h \in H$，因为 d_H 是完备的。因此，$g_n = g_N h_n \to g_N h$ 属于 (G, d_G)。 □

7.3 $B^{lf}(\infty)$ 的完备性与群拓扑

引理 7.6。 设 G 是一个拟拓扑群，且 $H \trianglelefteq G$ 是一个开正规子群，使得 H 在子空间拓扑下是一个拓扑群。那么 G 是一个拓扑群。

证明。 固定 $(a, b) \in G \times G$。由于 H 是开集， aH 和 bH 均为开集，因此 $(aH) \times (bH)$ 是 $G \times G$ 中 (a, b) 的一个开邻域。只需证明乘法 $m : G \times G \to G$ 限制在 $(aH) \times (bH)$ 上时，在 (a, b) 处连续。

令 $L_a : H \to aH$ 和 $L_b : H \to bH$ 表示左平移；它们在任意拟拓扑群中都是同胚。考虑

$$\mu_{a,b} : H \times H \longrightarrow G, \qquad (x, y) \longmapsto (ax)(by).$$

于是 $m|_{(aH)\times(bH)} = \mu_{a,b} \circ (L_a^{-1} \times L_b^{-1})$。因此，只需证明 $\mu_{a,b}$ 是连续的。

利用 H 的正规性，对于 $x, y \in H$，我们可改写为：

$$(ax)(by) = ab\,(b^{-1} x b)\, y.$$

共轭映射 $c_b : H \to H$, $c_b(x) = b^{-1} x b$，是连续的，因为 $c_b = L_{b^{-1}} \circ R_b$ 是平移的复合，而平移在拟拓扑群中是连续的。乘法 $H \times H \to H$ 根据假设是连续的，而由 ab 进行的左平移是一个同胚。因此$\mu_{a,\,b}$ 是连续的。

□

定理 7.7. 赋予定义 *2.1* 所给拓扑的局部有限辫群

$$B^{lf}(\infty) = \pi_1^{\mathrm{top}}(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}) /\!/ \operatorname{Aut}(\mathbb{N}),\, [e_0, \widetilde{\mathbb{N}}])$$

是一个拓扑群。此外，它容许一个相容的完备左不变度量；特别地，它是一个完备拓扑群。

证明。设 $K = \ker(\pi_*) \leq B^{lf}(\infty)$ 为推论 7.4 中的开正规子群。由引理 2.3， $B^{lf}(\infty)$ 是拟拓扑群。

由推论 7.4， $\iota_*\colon H^{lf}(\infty) \to K$ 是群同构且是同胚。因此，借助 ι_* 将 $H^{lf}(\infty)$ 的群结构与完备左不变度量传递过来， K是完全可度量化的拓扑群 。于是引理 7.6 适用于 $(B^{lf}(\infty)\ K)$，并推出 $B^{lf}(\infty)$ 是拓扑群。

选取 K 上由$H^{lf}(\infty)$传递而来的相容的完备左不变度量 d_K 。将定理 7.5 应用于开子群 $K \leq B^{lf}(\infty)$，便在 $B^{lf}(\infty)$ 上得到一个相容的完备左不变度量。

□

8 有限支撑辫子子群的稠密性

8.1 典范基点与 Bar 构造

约定 8.1。对于每个离散群 G ，我们固定如下 Bar 构造模型

$$BG := |B_\bullet G|, \qquad EG := |E_\bullet G|,$$

其中 $B_kG = G^k$ 和 $E_kG = G^{k+1}$ 配有通常的面映射/退化映射， $EG \to BG$ 是对自由左 G作用取商。我们用 $b_G \in BG$ 表示由空字代表的顶点，用 $e_G \in EG$ 表示由 $(1) \in E_0G$代表的顶点；因此 $p(e_G) = b_G$。若 $\varphi\colon G \to H$是同态，则诱导的单纯映射给出连续映射 $B\varphi : BG \to BH$ 和$E\varphi$: $EG \to EH$ ，满足

$$B\varphi(b_G) = b_H, \qquad E\varphi(e_G) = e_H.$$

下文所有同伦商 $EG \times_G X$ 均使用这些固定的 EG构造，并以$[e_G, x_0]$为基点。

定义 8.2。令 Sym$f(\mathbb{N}) \leq$ Aut($\mathbb{N}$)表示有限支撑置换子群，即那些$\sigma \in$Aut($\mathbb{N}$)，满足对于除有限多个 $j \in \mathbb{N}$之外的所有情况， $\sigma(j) = j$ 。

8.2 通过同伦商得到有限辫群

定义 8.3。对于 $n \geq 1$ ，令 Σ_n 通过置换坐标作用于 $Conf_n(\mathbb{C})$。根据约定 8.1，定义

$$B_n^{\mathrm{top}} := \pi_1^{\mathrm{top}}\big(E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} Conf_n(\mathbb{C}),\ [e_{\Sigma_n}, (1, \ldots, n)]\big).$$

注 8.4。空间 $E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} Conf_n(\mathbb{C}) \to B\Sigma_n$ 是一个纤维为 $Conf_n(\mathbb{C})$ 的纤维丛，并且$B\Sigma_n$ 是一个 CW复形。因此， $E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} Conf_n(\mathbb{C})$ 是局部道路连通且半局部单连通的。因此，根据命题 2.9， π_1^{top} 在此空间上是离散的。特别地， B_n^{top}是一个离散拓扑群。

引理 8.5。对于每个 $n \geq 1$ ，都存在一个抽象群的短正合列

$$1 \longrightarrow P_n \longrightarrow B_n^{\mathrm{top}} \longrightarrow \Sigma_n \longrightarrow 1,$$

其中 $P_n = \pi_1(Conf_n(\mathbb{C}),\ (1,\ \ldots,\ n))$，且映射 $B_n^{\mathrm{top}} \to \Sigma_n$ 由纤维化$Conf_n(\mathbb{C})$ $\to E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} Conf_n(\mathbb{C}) \to B\Sigma_n$诱导。

证明。Borel 构造给出了一个（可数化）纤维化

$$Conf_n(\mathbb{C}) \longrightarrow E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} Conf_n(\mathbb{C}) \longrightarrow B\Sigma_n.$$

由于 $B\Sigma_n$ 是一个 $K(\Sigma_n, 1)$，因此我们有 $\pi_2(B\Sigma_n) = 0$ 且 $\pi_1(B\Sigma_n, b_{\Sigma_n}) \cong \Sigma_n$。因此，同伦群的长正合序列包含如下正合段

$$1 = \pi_2(B\Sigma_n) \longrightarrow \pi_1(Conf_n(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_1(E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} Conf_n(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_1(B\Sigma_n) \longrightarrow 1,$$

这恰好就是所述的短正合列。 □

8.3 B_∞ 在 $B^{lf}(\infty)$ 中的直极限子群

下面的结果显然成立。

引理 8.6. 对于 $n \geq 1$，定义如下：对 $z = (z_1, \ldots, z_n)$，令 $\in Conf_n(\mathbb{C})$，

$$R_n(z) := \max\Big\{0, \max_{1\leq i\leq n} |z_i| - n\Big\} \in [0, \infty),$$

并令

$$\jmath_n(z_1, \ldots, z_n) := (z_1, \ldots, z_n, n+1+R_n(z), n+2+R_n(z), \ldots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

则：

(a) 对每个 $z \in Conf_n(\mathbb{C})$，$\jmath_n(z) \in Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})$，且 $\jmath_n(1, \ldots, n) = \widetilde{\mathbb{N}}$；

(b) $\jmath_n$ 是连续的、单射的，并且满足 $p_n \circ \jmath_n = \mathrm{id}_{Conf_n(\mathbb{C})}$；特别地，$\jmath_n$ 是拓扑嵌入；

(c) 若 Σ_n 通过置换前 n 个坐标并固定尾部来作用，则 $\jmath_n$ 是 Σ_n–等变的。

下述结果的证明是直接验证。

引理 8.7. 对 $1 \leq n \leq m$，定义 $s_{n,m}: Conf_n(\mathbb{C}) \to Conf_m(\mathbb{C})$ 如下

$$s_{n,m}(z_1, \ldots, z_n) := (z_1, \ldots, z_n, n+1+R_n(z), n+2+R_n(z), \ldots, m+R_n(z)).$$

于是：

(a) $s_{n,m}$ 是连续的、单射的，并且满足 $\mathrm{pr}_{m,n} \circ s_{n,m} = \mathrm{id}_{Conf_n(\mathbb{C})}$，因此 $s_{n,m}$ 是一个拓扑嵌入；

(b) $s_{n,m}(1, \ldots, n) = (1, \ldots, m)$，因此 $s_{n,m}$ 保持标准基点；

(c) $s_{n,m}$ 是 Σ_n–等变的，如果 Σ_n 置换前 n 个坐标并固定最后的 $m - n$；

(d) $\jmath_m \circ s_{n,m} = \jmath_n$ 作为映射 $Conf_n(\mathbb{C}) \to Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})$。

定义 8.8。 令 $\iota_{n,m}: \Sigma_n \hookrightarrow \Sigma_m$ 为标准包含（置换 $\{1, \ldots, n\}$ 并固定 $n+1, \ldots, m$），并令 $\iota_n: \Sigma_n \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{N})$ 为固定所有 $j > n$ 的包含映射。利用约定 8.1 以及引理 8.7(c) 和 8.6(c)，这两对 $(\iota_{n,m}, s_{n,m})$ 和 $(\iota_n, \jmath_n)$ 诱导出同伦商之间的基点保持 映射

$$S_{n,m}: E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} Conf_n(\mathbb{C}) \longrightarrow E\Sigma_m \times_{\Sigma_m} Conf_m(\mathbb{C}),$$
$$J_n: E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} Conf_n(\mathbb{C}) \longrightarrow E\,\mathrm{Aut}(\mathbb{N}) \times_{\mathrm{Aut}(\mathbb{N})} Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C}).$$

定义拓扑基本群上的诱导同态

$$(S_{n,m})_*: B_n^{\mathrm{top}} \to B_m^{\mathrm{top}}, \qquad (J_n)_*: B_n^{\mathrm{top}} \to B^{lf}(\infty) := \pi_1^{\mathrm{top}}(E\,\mathrm{Aut}(\mathbb{N}) \times_{\mathrm{Aut}(\mathbb{N})} Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}),\, [e_{\mathrm{Aut}(\mathbb{N})}, \widetilde{\mathbb{N}}]).$$

我们记

$$B_n := (J_n)_*(B_n^{\mathrm{top}}) \;\le\; B^{lf}(\infty), \qquad B_\infty := \bigcup_{n\ge 1} B_n \;\le\; B^{lf}(\infty).$$

类似地，定义 $P_{\mathrm{img}^n} := (\jmath_n)_*(P_n) \le H^{lf}(\infty) := \pi_1^{\mathrm{top}}(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})\ \widetilde{\mathbb{N}})$ 以及

$$P_\infty := \bigcup_{n\ge 1} P_n^{\mathrm{img}} \;\le\; H^{lf}(\infty).$$

引理 8.9. 对于 $1 \le n \le m$，作为保基点映射，有 $J_n = J_m \circ S_{n,m}$。因此，

$$(J_n)_* = (J_m)_* \circ (S_{n,m})_*, \qquad B_n \subseteq B_m, \qquad P_n^{\mathrm{img}} \subseteq P_m^{\mathrm{img}}.$$

证明. 包含映射 $\iota_n = \iota_m \circ \iota_{n,m}$ 在 Aut(ℕ) 中成立，且引理 8.7(d) 给出 $\jmath_n = \jmath_m \circ s_{n,m}$。由 Bar 构造与 Borel 构造的函子性（典范基点按约定 8.1 固定），这些等式蕴含作为保基点映射的 $J_n = J_m \circ S_{n,m}$，从而得到 π_1^{top} 上的等式。包含映射 $B_n \subseteq B_m$ 与 $P_{\mathrm{img}_n} \subseteq P_m^{\mathrm{img}}$ 随之立即得出。 □

引理 8.10. 对每个 $n \ge 1$，同态 $(J_n)_*: B_n^{\mathrm{top}} \to B^{lf}(\infty)$ 是单射。此外，$\pi_*: B^{lf}(\infty) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{N})$ 到 B_n 的限制与通常映射 $B_n^{\mathrm{top}} \to \Sigma_n$ 的恒等延拓一致。

Hence the notation $B_n \le B^{lf}(\infty)$ and $B_\infty = \bigcup_n B_n$ is justified.

证明。考虑由 $(\iota_n,\ \jmath_n)$ 诱导的纤维化交换图：

$$\begin{array}{ccccc} Conf_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} Conf_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & B\Sigma_n \\ {\scriptstyle \jmath_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J_n} & & \downarrow{\scriptstyle B\iota_n} \\ Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & E\,\mathrm{Aut}(\mathbb{N}) \times_{\mathrm{Aut}(\mathbb{N})} Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & B\,\mathrm{Aut}(\mathbb{N}). \end{array}$$

相关长正合序列的自然性给出 π_1 上的交换性。

置换相容性。将中间的竖直映射与 $\pi_*: \pi_1^{\mathrm{top}}(E\,\mathrm{Aut}(\mathbb{N}) \times_{\mathrm{Aut}(\mathbb{N})} Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})) \to \pi_1(B\,\mathrm{Aut}(\mathbb{N})) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{N})$ 复合，所得映射与 ι_n 和 $B_n^{\mathrm{top}} \to \Sigma_n \cong \pi_1(B\Sigma_n)$ 的复合一致，因此限制在 B_n 上即为恒等延拓映射。

单射性。设 $\beta \in B_n^{\mathrm{top}}$，并假设 $(J_n)_*(\beta) = 1$ 属于 $B^{lf}(\infty)$。应用 π_* 得到 $\iota_n(\beta) = 1$ 属于 $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{N}})$，因此 $\beta = 1$ 属于 $\overline{\Sigma}_n$，所以 β 位于 $B_n^{\mathrm{top}} \to \Sigma_n$ 的核中。由引理 8.5，β 是某个 $\alpha \in P_n = \pi_1(Conf_n(\mathbb{C}), (1, \ldots\ldots, n))$ 在纤维包含映射下的像

$$(i_n)_*: P_n \longrightarrow B_n^{\mathrm{top}}.$$

设 $i: Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}) \to E\mathrm{Aut}(\mathbb{N}) \times_{\mathrm{Aut}(\mathbb{N})} Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 表示 $b_{\mathrm{Aut}(\mathbb{N})}$ 上的纤维包含映射。自然性给出

$$(J_n)_*((i_n)_*(\alpha)) = i_*((\jmath_n)_*(\alpha)).$$

因此 $1 = (J_n)_*(\beta) = i_*((\jmath_n)_*(\alpha))$。

由于 $B\,\mathrm{Aut}(\mathbb{N})$ 是 $K(\mathrm{Aut}(\mathbb{N}), 1)$，我们有 $\pi_2(B\,\mathrm{Aut}(\mathbb{N})) = 0$，因此纤维化 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}) \to E\mathrm{Aut}(\mathbb{N}) \times_{\mathrm{Aut}(\mathbb{N})} Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}) \to B\mathrm{Aut}(\mathbb{N})$ 的长正合序列表明

$$i_*: \pi_1(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \widetilde{\mathbb{N}}) \longrightarrow \pi_1(E\,\mathrm{Aut}(\mathbb{N}) \times_{\mathrm{Aut}(\mathbb{N})} Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), [e_{\mathrm{Aut}(\mathbb{N})}, \widetilde{\mathbb{N}}])$$

是单射。因此 $(\jmath_n)_*(\alpha) = 1$ 属于 $H^{lf}(\infty) = \pi_1^{\mathrm{top}}(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}) \widetilde{\mathbb{N}})$。

现在应用 p_n： $H^{lf}(\infty) \to P_n$。由于 $\mathrm{pr}_n \circ \jmath_n = \mathrm{id}_{Conf_n(\mathbb{C})}$，我们有

$$p_n \circ (\jmath_n)_* = \mathrm{id}_{P_n},$$

因此 $\alpha = p_n((\jmath_n)_*(\alpha)) = 1$。于是 $\beta = (i_n)_*(\alpha) = 1$，这证明了 $(J_n)_*$ 是单射。 □

引理 8.11. 在满同态 $\pi_*: B^{lf}(\infty) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{N})$ 下，有

$$\pi_*(B_\infty) = \mathrm{Sym}_f(\mathbb{N}).$$

证明。若 $\beta \in B_n$，则 $\pi_*(\beta)$ 作为 Σ_n 中的一个元素作用于 $\{1, \dots, n\}$，并固定所有 $j > n$，因此 $\pi_*(\beta) \in \mathrm{Sym}_f(\mathbb{N})$。于是 $\pi_*(B_\infty) \subseteq \mathrm{Sym}_f(\mathbb{N})$。

反过来，设 $\sigma \in \mathrm{Sym}_f(\mathbb{N})$。选取 n，使得对所有 $j > n$，$\sigma(j) = j$；则 σ 是某个唯一 $\sigma_n \in \Sigma_n$ 的恒等延拓。由引理 8.5，$B_n^{\mathrm{top}} \to \Sigma_n$ 是满射，因此取一个映射到 σ_n 的 $\beta \in B_n^{\mathrm{top}}$。于是 $(J_n)_*(\beta) \in B_n \subseteq B_\infty$，由引理 8.10 得 $\pi_*((J_n)_*(\beta)) = \sigma$。 □

8.4 P_∞ 在 $H^{lf}(\infty)$中的稠密性

定理 8.12. 设 $P_\infty \leq H^{lf}(\infty)$ 如定义 *8.8* 所述。则 P_∞ 在 $H^{lf}(\infty)$中稠密。

证明。对每个 $n \geq 1$，由定理 6.10，$\{V_n\}^{n\geq 1}$ 是 $H^{lf}(\infty)$ 中 1 的一个邻域基，其中$V_n := \ker(p_n : H^{lf}(\infty) \to P_n)$。

固定 $g \in H^{lf}(\infty)$。我们断言存在 $b \in P_\infty$，使得 $p_n(b) = p_n(g)$，这进而蕴含$p_n(gb^{-1}) = 1$，即 $b \in gV_n$。

令 $s_n: P_n \to H^{lf}(\infty)$ 表示包含映射 $P_n \xrightarrow{(\jmath_n)_*} P^{\mathrm{img}_n} \leq H^{lf}(\infty)$。于是 $p_n \circ s_n = \mathrm{id}_{P_n}$，因为 $p_n \circ (\jmath_n)_* = \mathrm{id}$。设

$$b := s_n(p_n(g)) \in P_n^{\mathrm{img}} \subseteq P_\infty.$$

于是，$p_n(b) = p_n(g)$，如所需。因此，g 的每个邻域都与 P_∞相交，证明了稠密性。 □

8.5 B∞的闭包

定理 8.13。 子群 B_∞ 并不在 $B^{lf}(\infty)$中稠密。更确切地说，

$$\overline{B_\infty} = \pi_*^{-1}(\mathrm{Sym}_f(\mathbb{N})),$$

并且 $\pi_*^{-1}(\mathrm{Sym}_f(\mathbb{N}))$ 是 $B^{lf}(\infty)$的一个开闭子群。

证明。由于 Aut(ℕ) 是离散的，且 π_* 连续，Aut(ℕ) 的任意子集的原像都是既开又闭的。特别地，$\pi_*^{-1}(\mathrm{Sym}_f(\mathbb{N}))$ 是既开又闭的。

步骤 *1*：$\overline{B_\infty} \subseteq \pi_*^{-1}(\mathrm{Sym}_f(\mathbb{N}))$。根据引理 8.11，$B_\infty \subseteq \pi_*^{-1}(\mathrm{Sym}_f(\mathbb{N}))$，且后者是闭集，因此包含 B_∞。

步骤 *2*：$\pi_*^{-1}(\mathrm{Sym}_f(\mathbb{N})) \subseteq \overline{B_\infty}$。令 $K := \ker(\pi_*) \leq B^{lf}(\infty)$。根据推论 7.4，$K$作为拓扑群同构于 $H^{lf}(\infty)$，在此同一对应下，子群 $P_\infty \leq H^{lf}(\infty)$ 对应于上文定义的子群 $P_\infty \leq K$。根据定理 8.12，P_∞ 在 K中稠密。

现在固定 $\sigma \in \mathrm{Sym}_f(\mathbb{N})$。选择满足 $\pi_*(b_\sigma) = \sigma$ 的 $b_\sigma \in B_\infty$（引理 8.11）。σ 上的纤维是陪集 $\pi_*^{-1}(\sigma) = b_\sigma K$。由 b_σ 作左平移是一个同胚（定理 7.7），因此 $b_\sigma P_\infty$ 在 $b_\sigma K$中稠密。

此外，$b_\sigma P_\infty \subseteq B_\infty$：取满足 $b_\sigma \in B_n$ 的 n，并取满足 $x \in P_m^{\mathrm{img}} \subseteq K$ 的 $m \geq n$；由引理 8.9 可得 $B_n \subseteq B_m$，且 $P_m^{\mathrm{img}} \leq B_m$，因此 $b_\sigma x \in B_m \subseteq B_\infty$。

因此，对于每个 $\sigma \in \overline{\mathrm{Sym}f(\mathbb{N})}$，都有 $\pi_*^{-1}(\sigma) = b_\sigma K \subseteq B_\infty$；对 $\sigma \in \mathrm{Sym}f(\mathbb{N})$ 取并，得到 $\pi_*^{-1}(\mathrm{Sym}f(\mathbb{N})) \subseteq B_{\infty}$。

结合步骤 1 和 2 得到 $B_\infty = \overline{\pi_*^{-1}(\mathrm{Sym}f(\mathbb{N}))}$。由于 $\mathrm{Sym}f(\mathbb{N}) \neq \mathrm{Aut}(\mathbb{N})$，因此它不稠密。

□

9 Ra˘ikov 完备化与波兰性

9.1 Ra˘ikov 完备性与完备化判据

定义 9.1。设 G 是一个豪斯多夫拓扑群。G 上的双侧一致性是由邻近生成的一致性

$$E_U := \{(g,h) \in G \times G : \ g^{-1}h \in U \text{ and } gh^{-1} \in U\},$$

其中 U 遍历单位元的对称邻域。若群 G 关于双侧一致性是完备的，则称其为*Ra˘ikov* 完备$\widehat{\ }$。其*Ra˘ikov* 完备化 G是关于此一致性的完备化，并由通常的泛性质刻画。

Ra˘ikov 完备群具有一些良好的性质。下面列出其中一些。

- **完备化的存在性与普适性。 </style}每个拓扑群都存在一个 Raıkov完备化，且典范同态 : 是一个具有稠密像的拓扑嵌入。此外，对于任意连续同态 : 到 Raıkov 完备群，都存在唯一的连续同态: ，使得** $\circ\ i$。

- 闭子群继承完备性。 </style}若 G 是 Ra˘ıkov 完备的，且 $H \leq G$ 是一个闭子群，则 H 是 Ra˘ıkov 完备的。
- 积保持完备性。 </style}积 $\prod_{i\in I} G_i$ 是 Ra˘ıkov 完备的，当且仅当每个 G_i 都是 Ra˘ıkov 完备的。

- **通过完备化得到的内在刻画。 </style}是 Raıkov 完备的，当且仅当典范嵌入** $,\to G$ 将 G 识别为其 Ra˘ıkov 完备化$\widehat{\ }$中的一个闭子群（等价地，$G = G$）。

根据 [12, 定理 4.3.26], ，拓扑空间是完全可度量化的，当且仅当它是切赫完备可度量空间。根据 [1,定理 4.3.15],，羽状群是切赫完备的，当且仅当它是 Ra˘ikov 完备的。由于可度量拓扑群都是羽状群，我们得到以下结果。

定理 9.2。若 G 是一个可度量的 拓扑群，则 G 是 *Ra˘ıkov* 完备的，当且仅当G 是完全可度量化的。

9.2 纯情形： $H^{lf}(\infty)$ 作为 P_∞的完备化

定理 9.3。拓扑群 $H^{lf}(\infty)$ 是 *Ra˘ıkov* 完备的。特别地，$H^{lf}(\infty)$ 是 P_∞的 *Ra˘ıkov* 完备化。

证明。由定理 6.18，$H^{lf}(\infty)$是完全可度量化的，并且由定理 9.2，它是 Ra˘ıkov 完备的。P_∞ 的稠密性来自定理 8.12。由 [1, 推论 3.6.16]，$H^{lf}(\infty)$是 P_∞的 Ra˘ıkov 完备化。

□

9.3 有限全辫群情形： B_∞的完备化

定义 9.4. 令

$$B^{lf}_{\mathrm{fin}}(\infty) \;:=\; \pi_*^{-1}(\mathrm{Sym}_f(\mathbb{N})) \;\leq\; B^{lf}(\infty).$$

根据定理 8.13，这是既开又闭的。

定理 9.5. 包含映射 $B_\infty \hookrightarrow B^{lf}{}_{\mathrm{fin}}(\infty)$ 是一个具有稠密像的拓扑嵌入。此外， $B^{lf}{}_{\mathrm{fin}}(\infty)$ 是 *Ra˘ıkov* 完备的。因此， $B^{lf}{}_{\mathrm{fin}}(\infty)$ 是 B_∞的 *Ra˘ıkov* 完备化。

证明。 稠密性由定理 8.13 得出。根据定理 7.7， $B^{lf}(\infty)$ 是完全可度量化的；因此，它的开闭子群 $B^{lf}{}_{\mathrm{fin}}(\infty)$ 也完全可度量化。根据定理 9.2，它是 Ra˘ıkov 完备的。再根据 [1, 推论 3.6.16], $B^{lf}{}_{\mathrm{fin}}(\infty)$ 是 B_∞的 Ra˘ıkov 完备化。 □

命题 9.6. 局部有限辫群 $B^{lf}(\infty)$ 是 *Ra˘ıkov* 完备的。

证明。 根据定理 7.7， $B^{lf}(\infty)$ 是完全可度量化的，因此根据定理 9.2，它是 Ra˘ıkov 完备的。 □

9.4 波兰性

定义 **定义 9.7**。 如果一个拓扑空间是可分且完全可度量化的，则称其为波兰 空间 .

The定理 9.8。 纯局部有限辫群 $H^{lf}(\infty)$ 是一个波兰拓扑群 .

证明。 根据定理 6.18， $H^{lf}(\infty)$ 是完全可度量化的。根据定理 8.12，它有一个可数稠密子群 P_∞, 因此它是可分的。 □

定理 9.9。 局部有限辫群 $B^{lf}(\infty)$ 作为拓扑群是完全可度量化的，但不是波兰空间。其子群 $B^{lf}{}_{\mathrm{fin}}(\infty)$ 是波兰拓扑群。

证明。 的不可分性(∞)。 同态 π_*: $B^{lf}(\infty) \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{N})$ 是连续的，而 Aut(ℕ) 是离散的，因此每个纤维 $\pi_*^{-1}(\sigma)$ 都是既开又闭的。因此， $B^{lf}(\infty)$ 包含由两两不交的非空开子集构成的族$\{\pi_*^{-1}(\sigma)\}_{\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbb{N})}$。由于 Aut(ℕ) 不可数，这样的集合有不可数多个。

可分空间不可能包含不可数多个两两不交的非空开子集：若 D 是可数稠密集，那么每个非空开集都与 D相交，从而给出一个到 D 的单射。因此 $B^{lf}(\infty)$ 不可分，故不是波兰空间。

$B^{lf}\mathrm{fin}(\infty)$ 的波兰性。由定理 8.13， $B^{lf}\mathrm{fin}(\infty) = \pi_*^{-1}(\mathrm{Sym}_f(\mathbb{N}))$ 在 $B^{lf}(\infty)$ 中既开又闭，因此是完全可度量化的。此外，$\mathrm{Sym}_f(\mathbb{N})$ 是可数集，且每个纤维 $\pi_*^{-1}(\sigma)$ $(\sigma \in \mathrm{Sym}_f(\mathbb{N}))$ 都是既开又闭的，并且同胚于 $K = \ker(\pi_*) \cong H^{lf}(\infty)$；根据定理 9.8，后者是波兰空间。对于每个 $\sigma \in \mathrm{Sym}_f(\mathbb{N})$，选取一个可数稠密子集 $D_\sigma \subset \pi_*^{-1}(\sigma)$；那么 $\bigcup_{\sigma\in\mathrm{Sym}_f(\mathbb{N})} D_\sigma$ 在 $B^{lf}\,\mathrm{fin}(\infty)$ 中是可数且稠密的（因为每个纤维都是开集），所以 $B^{lf}\,\mathrm{fin}(\infty)$ 是可分的。因此， $B^{lf}\,\mathrm{fin}(\infty)$ 是波兰空间。

□

参考文献

[1] A. V. Arhangel'ski˘ı 和 M. G. Tkachenko，《拓扑群及相关结构：拓扑代数导论》，《亚特兰蒂斯数学研究》第 1 卷，Atlantis Press，巴黎，2008年。

[2] V. I. Arnol'd，彩色辫群的上同调环，《数学札记》 **5** （1969年），227–231；英译本《数学札记》**5** （1969年），138–140。

[3] J. S. Birman，《辫子、链环与映射类群》，《数学年刊研究》，第82卷，普林斯顿大学出版社，1974年。[4] D. K. Biss，基本群的一种推广方法，《美国数学月刊》107（2000年），第8期，711–720。[5] A. Borel（编），《变换群研讨班》，《数学年刊研究》，第46卷，普林斯顿大学出版社，1960年。[6] N. Bourbaki，《一般拓扑学》，第1–4章，《数学原本》，施普林格出版社，柏林—海德堡，1995年（1998年平装重印）。[7] J. Brazas，拓扑基本群与自由拓扑群，《拓扑学及其应用》158（2011年），第6期，779–802。[8] J. Brazas，作为拓扑群的基本群，《拓扑学及其应用》160（2013年），第1期，170–188。[9] J. Brazas与P. Fabel，论具有商拓扑的基本群，《同伦与相关结构》10（2015年），71–91。[10] J. S. Calcut与J. D. McCarthy，拓扑基本群的离散性与齐性，《拓扑学进展》34（2009年），339–349。[11] J. Dugundji，拓扑化的基本群，《美国国家科学院院刊》36（1950年），141–143。[12] R. Engelking，《一般拓扑学》，第二版，西格玛纯数学丛书，第6卷，赫尔德曼出版社，柏林，1989年。[13] P. Fabel，无穷多股上阿廷辫群的完备化，《结理论及其分支》14（2005年），第8期，979–991。[14] P. Fabel，具有无穷多个孔的圆盘的映射类群，《结理论及其分支》15（2006年），第1期，21–29。[15] E. Fadell与L. Neuwirth，构形空间，《斯堪的纳维亚数学学报》10（1962年），111–118。[16] R. H. Fox与L. Neuwirth，辫群，《斯堪的纳维亚数学学报》10（1962年），119–126。[17] A. Hatcher，《代数拓扑学》，剑桥大学出版社，2002年。[18] S. Kallel，《点的构形空间：用户指南》，arXiv:2407.11092（2024年）。应邀撰稿收入《数学物理百科全书》第二版，爱思唯尔（2024年）。[19] C. Kassel与V. Turaev，《辫群》，《数学研究生教材》，第247卷，施普林格，纽约，2008年。[20] J. Milnor，万有丛的构造，II，《数学年刊》（2）63（1956年），430–436。[21] D. McDuff，正粒子与负粒子的构形空间，《拓扑学》14（1975年），第1期，91–107。DOI: 10.1016/0040-9383(75)90038-5。[22] G. Segal，构形空间与迭代环路空间，《数学发明》21（1973年），213–221。DOI：10.1007/BF01390197。[23] Jyh-Haur Teh，局部有限无穷配置空间的非球性与魏尔斯特拉斯整覆盖，arXiv预印本 arXiv:2512。21498 [math.AT]。doi:10.48550/arXiv.2512.21498。