arXiv:2602.07368v1 [math.RT] 7 Feb 2026

倾斜与倾转对象在阿贝尔范畴的裂扩张中

GUOQIANG ZHAO 和 JUXIANG SUN

Abstract. 我们建立了阿贝尔范畴 $\mathcal{B}$ 中的倾斜与倾转对象和 $\mathcal{A}$的裂扩张 $\mathcal{B}$中的相应对象之间的联系，从而提供了一种构造更多倾斜与倾转对象的方法。随后，我们将结果应用于模范畴的裂扩张，并刻画环的 θ-扩张上的倾斜模与倾转模。我们推广并强化了关于环的平凡扩张的一些已知结果。

关键词: （余）倾斜对象；倾转对象；裂分扩张； θ-扩张， τ-倾斜模

2020年数学主题分类： 16D90,16G10,18G10, 18G25

1. Introduction

对环的裂分扩张的研究相当重要，并且对经典环论有有趣的应用，因为这类环扩张涵盖了环的很大一部分，例如平凡扩张环，尤其是三角矩阵环、张量环和正分次环等。阿贝尔范畴的裂分扩张这一概念由 Beligiannis [7]提出，是对 Fossum-Griffith-Reiten [14]定义的环的裂分扩张和阿贝尔范畴的平凡扩张的自然推广。阿贝尔范畴的裂分扩张为研究环的裂分扩张提供了一个通用框架和统一处理方法。此外，裂分扩张框架还被用于约化环的一些同调性质，例如有限维数 [12, 16], 余挠对 [17], 内射生成 [19], Igusa-Todorov 距离和扩张维数 [23], Gorenstein 弱全局（平坦-余挠）维数和相对奇异范畴 [22], Gorenstein 投射模、奇异范畴和 Gorenstein 性 [13, 18]。

另一方面，silting 理论源于 Keller 和 Vossieck 的工作 [20], ，可视为导出范畴层面上的倾斜理论。倾斜复形 [20, 28] 和 cosilting 复形 [29], 可以理解为倾斜模与余倾转模在导出范畴中的对应物。在 [5], 中，Angeleri H¨ugel、Marks 和 Vit´oria 引入了 silting 模的概念，将任意环上的 1-倾斜模与 Adachi、Iyama 和 Reiten [1]提出的有限维代数上的 τ-倾斜模统一推广。研究表明，silting 模与二项倾斜复形以及导出模范畴中的某些 t-结构和余 t-结构一一对应。对偶地，Breaz、Pop [9], Zhang 和 Wei [29]引入了 cosilting 模的概念。过去几年中，人们提出了这些模的许多重要性质（见 [2, 4, 6, 10, 11, 25, 27]）。与 silting 模传递相关的课题也得到了研究。例如，

已有研究考察了形式三角矩阵环 [15], 、平凡环扩张 [24], 以及忠实平坦环扩张 [3,8]上的 silting 模。

本文的主要目的是研究阿贝尔范畴的裂扩张上的 silting 和 n-倾斜对象。本文的结构如下:

在第 2 节中，我们回顾一些基本概念和事实。

设阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 是阿贝尔范畴$\mathcal{B}$的裂扩张。在第 3 节中，我们分别研究如何由 $\mathcal{B}$中的对象构造$\mathcal{A}$ 的（部分）silting 对象和倾转对象（见定理 3.3 和 3.5）。我们还讨论了如何将 $\mathcal{A}$中的（部分）silting 对象传递至 $\mathcal{B}$ （见定理 3.8）。

第 4 节致力于讨论模范畴裂扩张中的应用。特别地，我们得到了θ-扩张和张量环上的（部分）silting 模与倾斜模的刻画。令人惊讶的是，当 θ-扩张由有限维代数和有限生成双模诱导时，我们可以得到丰硕的结果，尤其是关于 τ-刚性模和支撑 τ-倾斜模的结果。平凡环扩张上的一些已知结果，包括三角矩阵环和 Morita 背景环上的结果，也得到了推广。

2. Preliminaries and notations

本文中，我们始终假设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是具有足够多投射对象和内射对象的阿贝尔范畴。对于 $\mathcal{A}$中的对象 X ，分别用 $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(X)$ 和 $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(X)$ 表示 X的投射维数和内射维数。

设 $\mathcal{A}$中有一个态射 $X \xrightarrow{\sigma} Y$。记

$$\mathcal{D}_\sigma = \{L \in \mathcal{A} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, L) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\sigma, L)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, L) \text{ is an epimorphism}\};$$

$$\mathcal{C}_\sigma = \{L \in \mathcal{A} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L, \sigma)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L, Y) \text{ is an epimorphism}\};$$

我们注意到，若 σ 是 $\mathrm{Proj}(\mathcal{A})$ 中的映射，则不难验证 $\mathcal{D}_\sigma$ 在满态射像、扩张和积下封闭。

给定 $X \in \mathcal{A}$，用 $\mathrm{Gen}(X)$ 表示由 X 的若干副本的余积的商对象组成的类，用 $\mathrm{Cogen}(X)$ 表示由 X的若干副本的积的子对象组成的类。对所有 $1 \leqslant j \leqslant n\}$，记 $X^{\perp_n} = \{Y \in \mathcal{A} : \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(X,\ Y) = 0$；对所有 $j \geqslant 1\}$，记$X^{\perp} = \{Y \in \mathcal{A} : \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(X,\ Y) = 0$，

设 $P_1 \xrightarrow{\sigma} P_0 \to X \to 0$ 为 X 的投射表示。类似于 [5] 中（部分）silting 模的定义，若 $X \in \mathcal{D}_\sigma$ 且 $\mathcal{D}_\sigma$ 是一个挠类（等价地，由类似于 [5, 注记 3.11] 的论证， $\mathcal{D}_\sigma$ 在余积下封闭），则称 X 为关于 σ 的 部分倾斜对象 。若 生成类$(X) = \mathcal{D}_\sigma$，则称 X 为关于 σ 的倾斜对象。

对偶地，设 $0 \to X \to E^0 \xrightarrow{\xi} E^1$ 为 X 的内射余表示。若 $X \in \mathcal{C}_\xi$ 且 $\mathcal{C}_\xi$ 是一个无挠类，则称 X 关于 ξ 为部分余倾斜。若 $\mathrm{Cogen}(X) = \mathcal{C}_\xi$，则称 X 关于 ξ 为余倾斜。

我们首先给出伴随对的一些性质。

引理 2.1. 设函子 $\mathbb{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 有左伴随函子 $\mathbb{F}$。

(1) 给定 $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B_1, B_2)$，那么，对于每个 $A \in \mathcal{A}$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}(\sigma)\ A)$ 是满射（分别为单射），当且仅当 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\sigma, \mathbb{G}(A))$是满射（分别为单射）。

(2) 令 $\nu\colon \mathsf{Id}_{\mathcal{B}} \to \mathbb{G}\mathbb{F}$ 为单位，$\mu\colon \mathbb{F}\mathbb{G} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ 为伴随对 $(\mathbb{F},\mathbb{G})$的余单位。若 $\mathbb{G}$ 是忠实正合的，则对于每个 $A \in \mathcal{A}$，$\mu_A\colon \mathbb{F}\mathbb{G}(A) \to A$是满态射。

证明。 (1) 由于 $(\mathbb{F},\mathbb{G})$ 是一个伴随对，我们得到如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}(B_2),A) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}(\sigma),A)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}(B_1),A) \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B_2,\mathbb{G}(A)) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\sigma,\mathbb{G}(A))} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B_1,\mathbb{G}(A)) \end{array}$$

因此我们得到了所要证明的结论。

(2) 对每个 $A \in \mathcal{A}$ 和 $B \in \mathcal{B}$，以下关系均成立:

$$\mathsf{Id}_{\mathbb{F}(B)} = \mu_{\mathbb{F}(B)}\mathbb{F}(\nu_B) \quad \text{and} \quad \mathsf{Id}_{\mathbb{G}(A)} = \mathbb{G}(\mu_A)\nu_{\mathbb{G}(A)}.$$

这意味着 $\mathbb{G}(\mu_A)$ 是一个分裂满态射。由于 $\mathbb{G}$ 忠实正合，因此对于每个 $A \in \mathcal{A}$，μ_A: $\mathbb{F}\mathbb{G}(A) \to A$ 是一个满态射。□

定义 2.2. ([7]) 阿贝尔范畴 $\mathcal{B}$ 的一个裂分扩张 是一个阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$，并配有函子

$$\mathcal{B} \xrightarrow{\quad i \quad} \mathcal{A} \underset{\longleftarrow l \longleftarrow}{\xrightarrow{\quad e \quad}} \mathcal{B}$$

使得函子 e 是忠实正合的，且存在一个左伴随 l，并且有一个自然同构 $ei \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$。

从现在起，我们将用 $(\mathcal{B},\mathcal{A},i,e,l)$ 表示一个裂分扩张，它还具有其他性质。例如，由此可知函子 i 是全忠实且正合的（见 [7, 引理 2.2], [16, 引理 2.2(ii)]）。此外，存在一个函子q : $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$，它是 i的左伴随（见 [7, 命题 2.3]和 [16,引理 2.2(iv)]）。于是，(ql, ei) 是一个伴随对，并且由于 $ei \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$，可得 $ql \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$。我们指出，函子 l 和 q 均为右正合函子，且保持余积。

记 $\nu\colon \mathsf{Id}_{\mathcal{B}} \to \mathsf{el}$ 为单位，记 $\mu\colon \mathsf{le} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ 为伴随对 (l,e) 的余单位。由引理 2.1(2) 可知，存在一个函子正合列

$$0 \to G \to le \xrightarrow{\mu} \mathrm{Id}_{\mathcal{A}} \to 0 \qquad (2.1)$$

其中，G 是由 $G(A) = \ker \mu_A$定义的 $\mathcal{A}$ 的自函子。

由于对于每个 $B \in \mathcal{B}$ 和$ei \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$，$e(\mu_{i(B)})$都是分裂满态射，因此有一个分裂正合列

$$0 \to F \to el \to \mathrm{Id}_{\mathcal{B}} \to 0, \qquad (2.2)$$

其中，$F = eGi$ 是 $\mathcal{B}$ 的自函子（详情请参见 [16, 第 2]节）。

在阿贝尔范畴的平凡扩张理论中，存在平凡余扩张（或“左”平凡扩张）这一对偶概念。同样地，裂分扩张也有一个对偶概念，下面我们将对此进行回顾。

定义 2.3. ([7]) 阿贝尔范畴 $\mathcal{B}$ 的裂余扩张是一个阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 以及函子

$$\mathcal{B} \xrightarrow{\quad i \quad} \mathcal{A} \underset{\longleftarrow r \longleftarrow}{\xrightarrow{\quad e \quad}} \mathcal{B}$$

使得函子 e 是忠实正合的，并且具有右伴随 r，且存在自然同构 $ei \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$。

从现在起，我们用 $(\mathcal{B}, \mathcal{A}, i, e, r)$ 表示一个裂余扩张。与裂分扩张类似，上述信息还蕴含着更多结构。例如，事实证明 i 是全忠实正合的，并且存在一个函子 p: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$，使得 (i, p) 是一个伴随对。必然有 $pr \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$。有自函子 G': $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 和 F': $\mathcal{B} \to \mathcal{B}$，它们出现在以下短正合列中:

$$0 \to \mathsf{Id}_{\mathcal{A}} \to \mathsf{re} \to \mathsf{G}' \to 0 \quad \text{and} \quad 0 \to \mathsf{Id}_{\mathcal{B}} \to \mathsf{er} \to \mathsf{F}' \to 0.$$

第二个正合列分裂。

关于裂分扩张的所有结果都有其对偶翻译，可得到关于裂余扩张的相应结果。我们只研究裂分扩张。

3. Silting objects in cleft extensions of abelian categories

3.1. 将 $\mathcal{B}$ 的 silting 和倾转对象提升到 $\mathcal{A}$。

引理 3.1. ([18, 引理 2.3]) 设 $(\mathcal{B}, \mathcal{A}, i, e, l)$ 是一个裂分扩张。 $A \in \mathcal{A}$ 是投射的，当且仅当对于某个 $P \in \mathrm{Proj}(\mathcal{B})$， A 是 $l(P)$ 的直和项。

引理 3.2. 设 $(\mathcal{B}, \mathcal{A}, i, e, l)$ 是一个裂分扩张，且 $B_1 \xrightarrow{\sigma} B_2$ 是 $\mathcal{B}$ 中的一个态射。对于 $A \in \mathcal{A}$，以下结论成立:

(1) $A \in \mathcal{D}_{l(\sigma)}$ 当且仅当 $e(A) \in \mathcal{D}_{\sigma}$。*(2)* 若 i 保持余积且 $\mathcal{D}_{l(\sigma)}$ 对余积封闭，则 $\mathcal{D}_{\sigma}$ 也如此；若 e 保持余积且 $\mathcal{D}_{\sigma}$ 对余积封闭，则 $\mathcal{D}_{l(\sigma)}$ 也如此。

证明。 (1) 由于 (l, e) 是一个伴随对，由引理2.1(1)可知，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(l(\sigma), A)$ 是满射，当且仅当 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\sigma, e(A))$ 是满射。因此， $A \in \mathcal{D}_{l(\sigma)}$ 当且仅当 $e(A) \in \mathcal{D}_{\sigma}$。

(2) "$\Rightarrow$" 设 $(B_j)_{j\in J}$ 是 $\mathcal{B}$ 中满足 $B_j \in \mathcal{D}_{\sigma}$的一个对象族。由于 $ei(B_j) \cong B_j$，由 (1) 可得 $i(B_j) \in \mathcal{D}_{l(\sigma)}$。由于 i 保余积，因此根据假设， $i(\coprod_{j\in J} B_j) \cong \coprod_{j\in J} i(B_j) \in \mathcal{D}_{l(\sigma)}$。故由 (1) 可得 $\coprod_{j\in J} B_i \in \mathcal{D}_{\sigma}$。

"$\Leftarrow$" 设 $(A_j)_{j\in J}$ 是 $\mathcal{A}$ 中满足 $A_j \in \mathcal{D}_{l(\sigma)}$的一个对象族。由 (1) 可得 $e(A_j) \in \mathcal{D}_{\sigma}$。因此 $e(\coprod_{j\in J} A_j) \cong \coprod_{j\in J} e(A_j) \in \mathcal{D}_{\sigma}$。再由 (1) 可得 $\coprod_{j\in J} A_j \in \mathcal{D}_{l(\sigma)}$。□

设 $P_1 \xrightarrow{\sigma} P_0 \to B \to 0(*)$ 是 $\mathcal{B}$ 中 B 的一个投射表示。注意到 l 是右正合的，由引理 2.2(i)] 可得一个投射表示 $l(P_1) \xrightarrow{l(\sigma)} l(P_0) \to l(B) \to 0$。现在我们可以表述以下结果。

定理 3.3。 设 $(\mathcal{B}, \mathcal{A}, i, e, l)$ 是一个裂分扩张，且 i 和 e 保持余积，并且 $P_1 \xrightarrow{\sigma} P_0 \to B \to 0$ 是 $\mathcal{B}$ 中 B 的一个投射表示。

(1) $l(B)$ 是 $\mathcal{A}$ 中关于 $l(\sigma)$ 的部分倾斜对象，当且仅当 B 是 $\mathcal{B}$ 中关于 σ 的部分倾斜对象，且 $F(B) \in \mathcal{D}_{\sigma}$。*(2)* $l(B)$ 是 $\mathcal{A}$ 中关于 $l(\sigma)$ 的倾斜对象，当且仅当 B 是 $\mathcal{B}$ 中关于 σ 的倾斜对象，且 $F(B) \in$ 生成类(B)。

证明。 (1) 若 $l(B) \in \mathcal{D}_{l(\sigma)}$，则由引理 3.2(1)可知 $el(B) \in \mathcal{D}_{\sigma}$。注意到$el \simeq F \oplus \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$，由此可得 B和 $F(B)$ 属于 $\mathcal{D}_{\sigma}$，因为 $\mathcal{D}_{\sigma}$ 在满态射像下封闭。

若 B 和 $F(B)$ 属于 $\mathcal{D}_\sigma$，则 $el(B) \in \mathcal{D}_\sigma$，因为 $\mathcal{D}_\sigma$ 在扩张下封闭。引理 3.2(1)可推出 $l(B) \in \mathcal{D}_{l(\sigma)}$。

根据假设，e 和 i 保持余积，结论由引理 3.2(2)得出。

(2) “⇒” 根据 (1)，B 是 $\mathcal{B}$ 中的一个部分倾斜对象，相对于 σ 和 $F(B) \in \mathcal{D}_\sigma$。因此，$\mathrm{Gen}(B) \subseteq \mathcal{D}_\sigma$，这是因为 $\mathcal{D}_\sigma$ 在余积和满态射像下封闭。

设 $B' \in \mathcal{D}_\sigma$。那么 $ei(B') \cong B' \in \mathcal{D}_\sigma$。由假设，根据引理 3.2(1)，可推出 $i(B') \in \mathcal{D}_{l(\sigma)} = \mathrm{Gen}(l(B))$。因此，存在一个基数 I 和一个满态射 $f : l(B^{(I)}) \to i(B')$，因为 l 保持余积；同理，由于 q 右正合，$q(f) : B^{(I)} \cong ql(B^{(I)}) \to qi(B')$。

记 $\xi : \mathrm{Id}_{\mathcal{A}} \to iq$ 为伴随对 (q, i) 的单位，记 $\eta : qi \to \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$ 为其余单位。注意到 i 是忠实正合的，由引理 2.1(2) 可知，对所有 $B \in \mathcal{B}$，$qi(B) \xrightarrow{\eta_B} B \to 0$ 都是正合的。因此我们得到一个满态射

$$\eta_{B'} q(f) : B^{(I)} \to B'.$$

因此 $B' \in \mathrm{Gen}(B)$，从而 $\mathcal{D}_\sigma = \mathrm{Gen}(B)$。于是，$B$ 是关于 σ 的倾斜对象，且 $F(B) \in \mathrm{Gen}(B)$。

“⇐” 由于 B 是关于 σ 的倾斜对象，故 $\mathrm{Gen}(B) = \mathcal{D}_\sigma$，由此得到 $F(B) \in \mathcal{D}_\sigma$。由 (1) 可知，$l(B)$ 是关于 $l(\sigma)$ 的部分倾斜。因此 $\mathrm{Gen}(l(B)) \subseteq \mathcal{D}_{l(\sigma)}$。

设 A 属于 $\mathcal{D}_{l(\sigma)}$。则 $e(A) \in \mathcal{D}_\sigma = \mathrm{Gen}(B)$，因此存在一个基数 J 以及一个满态射 $g : B^{(J)} \to e(A)$。于是，$l(g) : l(B^{(J)}) \cong (l(B))^{(J)} \to le(A)$ 是满射，因为 l 是右正合的。由 (2.1) 可知，$\mu_A \circ l(g) : (l(B))^{(J)} \to A$ 是满射，这意味着 $A \in \mathrm{Gen}(l(B))$。因此 $\mathrm{Gen}(l(B)) = \mathcal{D}_{l(\sigma)}$，证明完毕。□

我们称对象 $X \in \mathcal{B}$ 部分 n-倾斜，若满足 (T1) $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}} X \leq n$，且 (T2) 对任意 $j \geq 1$，均有 $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{B}}(X, X) = 0$，即 $X \in X^{\perp}$。此外，若还满足 (T3)：对任意 $P \in \mathrm{Proj}(\mathcal{B})$，存在正合列，则称 X 为 n-倾斜

$$0 \to P \to X_0 \to \cdots \to X_n \to 0$$

其中每个 $X_j \in$ 均属于加性闭包 $\mathrm{Add}X$。

由 [5,命题 3.13(1)]，X 是 1-倾斜对象，当且仅当 X 关于单态射 σ 是 silting，其中 $P_1 \xrightarrow{\sigma} P_0 \to X \to 0$ 是 X 的投射表示。接下来我们将讨论一般的 n-倾斜对象是否可以提升 l。

引理 3.4。 ([18, 引理 2。2]) 设 $(\mathcal{B}, \mathcal{A}, i, e, l)$ 是一个裂分扩张，且 $X \in \mathcal{B}$。以下结论成立：

(1) $\mathbb{L}_j F(X) \cong \mathrm{e}\mathbb{L}_j l(X)$ 对所有 $j \geq 1$ 都成立，其中 $\mathbb{L}_j$ 是第 j 个左导出函子。*(2)* 若对所有 $j \geq 1$，$\mathbb{L}_j F(X) = 0$ 都成立，则对所有 $j \geq 1$ 以及 $\mathcal{A}$ 中的每个对象 Y，都有 $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(l(X)\ Y) \cong \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{B}}(X, e(Y))$。

定理 3.5. 设 $(\mathcal{B}, \mathcal{A}, i, e, l)$ 是一个裂分扩张，并且 $X \in \mathcal{B}$ 满足对所有 $1 \leq t \leq n+1$ 都有 $\mathbb{L}_t F(X) = 0$。以下结论成立：

(1) $l(X)$ 是部分 n-倾斜当且仅当 X 是部分 n-倾斜，且 $F(X) \in X^{\perp_n}$。*(2)* 若 核 $q = 0$，则 $l(X)$ 是 n-倾斜当且仅当 X 是 n-倾斜，且 $F(X) \in X^{\perp_n}$。

证明。 (1) “⇒” 假设 $l(X)$ 是部分 n-倾斜。那么，$\mathrm{pd}_{\mathcal{A}} l(X) \leq n$，并且对任意 $B \in \mathcal{B}$，由引理 3.4(2) 可得

$$\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{B}}(X, B) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{B}}(X, ei(B)) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{A}}(\mathrm{l}(X), i(B)) = 0,$$

由此得到 $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}} X \leq n$。由引理 3.4(2) 和 (2.2) 可知，对于任意$1 \leq j \leq n$, $0 = \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(l(X)\ l(X)) \cong \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{B}}(X,\ el(X)) \cong \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{B}}(X,\ X \oplus F(X))$。因此$F(X) \in X^{\perp_n}$ 且 $X \in X^{\perp}$，得证。

“⇐”设 X 为部分 n-倾斜对象，则 $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}} X \leq n$。对于任意 $Y \in \mathcal{A}$，由引理 3.4(2)可得 $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{A}}(l(X)\ Y) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{B}}(X,\ e(Y)) = 0$，由此得到 $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}} l(X) \leq n$。由引理 3.4(2) 和 (2.2) 可知，对于任意 $1 \leq j \leq n$，$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(l(X)\ l(X)) \cong \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{B}}(X,\ el(X)) \cong \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{B}}(X,\ X \oplus F(X)) = 0$根据假设。

(2) “⇒” 由 (1) 可知，只需证明 X 满足 (T3)。设 $P \in \in \mathrm{Proj}(\mathcal{B})$，则 $l(P) \in \mathrm{Proj}(\mathcal{A})$。又由于 $l(X)$ 是 n-倾斜的，因此存在一个正合列

$$0 \to l(P) \to T_0 \to \cdots \to T_n \to 0 \qquad (*)$$

其中每个 $T_t \in$ 都属于 $l(X)$ 的加性闭包。注意到 $ql \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$，因此 $\mathbb{L}_j ql = 0$，从而对任意 $j \geq 1$，都有 $\mathbb{L}_j q(T_j) = 0$。将函子 q 应用于 (∗)，得到正合列 $0 \to P \to q(T_0) \to \cdots \to q(T_n) \to 0$，其中每个 $q(T_j) \in$ 都属于 X 的加性闭包。因此，X 是 n-倾斜的。

“⇐” 设 $A \in \in \mathrm{Proj}(\mathcal{A})$。引理 3.1 推出，对于某个 $P \in \in \mathrm{Proj}(\mathcal{B})$，$A$ 是 $l(P)$ 的一个直和项，因此 $q(A)$ 是 P 的一个直和项。由于 X 是 n-倾斜的，存在一个正合列

$$0 \to q(A) \to X_0 \to \cdots \to X_n \to 0 \qquad (**)$$

对每个 $X_t \in$加性闭包X。对于每个 $1 \leq j \leq n$，由于 e 是忠实的且 $\mathbb{L}_j \mathrm{F}(X) = 0$，由引理 3.4(1)可知 $\mathbb{L}_j l(X) = 0$。因此，对 (∗∗) 应用函子 l 可得到一个正合列

$$0 \to lq(A) \to l(X_0) \to \cdots \to l(X_n) \to 0$$

对每个 $l(X_t) \in$ 加性闭包$l(X)$。注意，若 $q(A - lq(A)) = q(A) - qlq(A) = 0$，则 $A - lq(A) \in \mathrm{Ker}\, q$，从而根据假设有 $A = lq(A)$。因此，$l(X)$ 满足 (T3)，如所要求。□

3.2. 从 $\mathcal{A}$的 silting对象到 $\mathcal{B}$的传递。

引理 3.6。 设 $(\mathcal{B}, \mathcal{A}, i, e, l)$ 是一个裂分扩张。假设 $A_1 \xrightarrow{\delta} A_2$ 是 $\mathcal{A}$中的一个态射。那么 $i(B) \in \mathcal{D}_{\delta}$ 当且仅当 $B \in \mathcal{D}_{\mathbf{q}(\delta)}$。

证明 由于（q，i）是一个伴随对，引理2.1(1)推出 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(q(\delta)\ B)$ 是满态射当且仅当 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\delta,\ i(B))$ 是满态射。因此 $i(B) \in \mathcal{D}_{\delta}$ 当且仅当 $B \in \mathcal{D}_{q(\delta)}$。□

引理3.7 对每个 $A \in \mathcal{A}$，它都有如下形式的投射分解 $\cdots \to l(P_1) \to l(P_0) \to A \to 0$，其中每个 $P_j \in$ 投射对象类$(\mathcal{B})$。

证明 由 [18, 引理 2.3] 可知，$Q \in \mathcal{A}$ 是投射的当且仅当对某个 $P \in$投射对象类$(\mathcal{B})$，它是 $l(P)$ 的直和项。设 $\cdots \to Q_2 \to Q_1 \to Q_0 \to A \to 0$ 是 $A \in \mathcal{A}$ 的一个投射分解。则存在 $P_0 \in$ 投射对象类$(\mathcal{B})$ 使得$Q_0 \oplus Q'_0 = l(P_0)$，从而 $\cdots \to Q_2 \to Q_1 \oplus Q'_0 \to l(P_0) \to A \to 0$ 是正合的。继续这一过程即可得到所述断言。□

现在我们可以陈述本小节的主要结果。

定理 3.8. 设$(\mathcal{B}, \mathcal{A}, i, e, l)$是一个保持余积的裂分扩张，且 $l(P_1) \xrightarrow{\delta} l(P_0) \to A \to 0$ 是 $A \in \mathcal{A}$的一个投射表示。若 A 关于 δ是（分别为部分）*silting*，则 $q(A)$ 关于 $\mathbf{q}(\delta)$是（分别为部分）*silting*。

证明。正合列 $l(P_1) \xrightarrow{\delta} l(P_0) \to A \to 0$ 诱导出正合列$P_1 \xrightarrow{q_{(\delta)}} P_0 \to q(A) \to 0$。

假设 A 关于 δ是部分倾斜。设 $(Y_j)_{j\in J}$ 是 $\mathcal{B}$ 中的一个对象族，满足 $Y_j \in \mathcal{D}_{q(\delta)}$。那么根据引理 3.6，$i(Y_j) \in \mathcal{D}_\delta$，因此 $i(\coprod_{j\in J} Y_j) \cong \coprod_{j\in J} i(Y_j) \in \mathcal{D}_\delta$。于是再次由引理 3.6 得到 $\coprod_{j\in J} Y_j \in \mathcal{D}_{q(\delta)}$。因此 $\mathcal{D}_{q(\delta)}$ 是一个挠类。

令 $f \in \mathrm{Hom}_R(P_1, q(A))$。由 (2.1) 可知，$le(A) \xrightarrow{\mu_A} A \to 0$ 是正合的，因此由于 q 是右正合的，$e(A) \xrightarrow{q_{(\mu_A)}} q(A) \to 0$ 也是正合的。于是存在 $g : P_1 \to e(A)$，使得 $f = q(\mu_A)g$。由于 (l, e) 是一个伴随对，我们得到如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(l(P_0), A) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\delta, A)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(l(P_1), A) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(P_0, e(A)) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(q(\delta), e(A))} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(P_1, e(A)) \end{array}$$

由于 $A \in \mathcal{D}_\delta$，因此 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\delta, A)$ 是满的，故存在 $h : P_0 \to e(A)$ 使得 $g = hq(\delta)$。于是 $f = q(\mu_A)hq(\delta)$。因此 $q(A) \in \mathcal{D}_{q(\delta)}$。所以 $q(A)$ 关于 $q(\delta)$是部分倾斜的。

现在假设 A 关于 δ 是 silting。则 $q(A)$ 关于 $q(\delta)$ 是部分倾斜的。因此 $\mathrm{Gen}(q(A)) \subseteq \mathcal{D}_{q(\delta)}$。

设 $Y \in \mathcal{D}_{q(\delta)}$。由引理 3.6 可得 $i(Y) \in \mathcal{D}_\delta = \mathrm{Gen}\, A$。因此存在一个基数$J$ 以及一个满态射 $f : A^{(J)} \to i(Y)$，这意味着 $q(f) : q(A)^{(J)} \to qi(Y)$ 是一个满态射。注意，根据引理 2.1(2)，对所有 $Y \in \mathcal{B}$，$qi(Y) \xrightarrow{\eta_Y} Y \to 0$ 是正合的，其中 $\eta : qi \to \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$ 是伴随对 (q, i) 的余单位。因此 $\eta_Y q(f) : q(A)^{(J)} \to Y$ 是满的，所以 $Y \in \mathrm{Gen}(q(A))$。因此 $\mathcal{D}_{q(\delta)} \subseteq \mathrm{Gen}(q(A))$。故 $q(A)$ 关于 $q(\delta)$ 是 silting 的。□

下面的结果是上述定理的一个特例。

推论 3.9. 设 B 是 $\mathcal{B}$ 中的一个对象。若 i 保持余积，且 $l(B)$ 相对于 δ 是（分别为部分）*silting*，则 B 相对于$\mathbf{q}(\delta)$也是（分别为部分）*silting*。

注 3.10. 设 $(\mathcal{B}, \mathcal{A}, i, e, l)$ 是一个裂分扩张。若 e 有右伴随 r，则它也是一个裂余扩张，因此 i 和 e 都保持余积。裂分扩张同时也是裂余扩张是一种理想情况。例如，有如下结果：

推论 3.11. 设 $(\mathcal{B}, \mathcal{A}, i, e, l, r)$ 是一个裂分扩张，且 e 有右伴随函子 r。那么

(1) 设 $P_1 \xrightarrow{\sigma} P_0 \to B \to 0$ 是 $\mathcal{B}$ 中 B 的一个投射表示。$l(B) \in \mathcal{A}$ 关于 $l(\sigma)$ 是 *silting*，当且仅当 B 关于 σ 也是如此，并且 $F(B) \in \mathrm{Gen}(B)$。

(2) 设 $0 \to B \to E^0 \xrightarrow{\xi} E^1$ 是 B 的一个内射余表示。 $r(B) \in \mathcal{A}$ 关于 $r(\xi)$ 是余倾斜，当且仅当 B 关于 ξ 也是如此，并且 $F'(B) \in \mathrm{Cogen}(B)$。

证明。 这些结论由定理 3.3 及其对偶推出。 □

4. Applications

本节将介绍一些关于 θ-扩张和张量环的应用，从而得到有关平凡环扩张和三角矩阵环的一些已知结果。下文中，所有环均为非零含幺结合环，所有模均为幺模。对于环 R，我们用 $\mathrm{Mod}\, R$ 表示左R-模范畴。

定义 4.1。 ([26]) 设 R为一个环， M为一个 R-R-双模，且 $\theta\colon M\otimes_R M \to M$为一个结合的 R-双模同态。由 M扩张 R 得到的 θ-扩张 记作$R \ltimes_\theta M$，定义为底层群为 $R \oplus M$、乘法如下所示的环:

$$(r, m) \cdot (r', m') := (rr', rm' + mr' + \theta(m \otimes m')),$$

对于任意 r， $r' \in R$和 m， $m' \in M$。

设 $T{:=}\, R \ltimes_\theta M$。则左 T-模可视为一对 $(X$， $\alpha)$，其中$X \in \mathrm{Mod}\ R$且 $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R X$， $X)$，满足 $\alpha \circ (1_M \otimes \alpha) = \alpha \circ (\theta \otimes 1_X)$。此外，我们有以下环同态： $R \to T$ 由 $r \mapsto (r$， $0)$ 给出， $T \to R$ 由 $(r$， $m) \mapsto r$ 给出。根据 [19, 第 6.3], 节，我们有以下模范畴的裂扩张

$$\mathrm{Mod}\, R \xrightarrow{i=_T R\otimes_R -} \mathrm{Mod}\, T \xrightarrow{e=_R T\otimes_T -} \mathrm{Mod}\, R,$$

其中 $q(X, \alpha)$ = 余核 α, $i(Y) = (Y, 0)$, $l(Y) = (Y \oplus M \otimes_R Y, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \theta\otimes 1_Y \end{pmatrix})$,$e$ $(X, \alpha) = X$ 且 $F(Y) = M \otimes_R Y$。此外，每个模范畴的裂扩张都同构于由一个 θ-扩张诱导的裂扩张，见 [19,命题 6.9]。容易看出， e 有一个右伴随函子 $r = \mathrm{Hom}_R(T, -)$，因此 (Mod R, Mod T, i, e, l) 也是一个裂余扩张。

将上述结果应用于 θ-扩张，可得以下两个结论，它们分别推广了 [24, 定理 3.3 和推论 3.5] 以及 [24, 定理 4.3], ，因为平凡环扩张 $R \ltimes M$ 是满足$\theta = 0$的 θ-扩张。

命题 4.2. *(1)* 设 $P_1 \xrightarrow{\sigma} P_0 \to Y \to 0$ 是左 R-模 Y的一个投射表示。那么 $l(Y) \in$ 模T关于 $l(\sigma)$ 是（分别为部分） *silting*，当且仅当 Y 关于 σ 也是如此，且 $M \otimes_R Y \in$ （分别为 $\mathcal{D}_\sigma$生成类(Y)）。*(2)* 若对于某个 m， M是 m-幂零的，且对所有 $1 \le t \le n+1$, $\mathrm{Tor}_t^R($ $M, Y) = 0$，则 $l(Y)$ 是（分别为部分） n-倾斜，当且仅当 Y也是如此且 $M \otimes_R Y \in Y^{\perp_n}$。

证明。 由于裂分扩张 (Mod R， Mod$T$， i， e， l) 也是裂余扩张，结论 (1) 直接由定理 3.3 和注 3.10 得出。

(2) 由于 M是 m-幂零的， F也如此。这意味着自然变换$\eta\colon F^2 \to F$是 m-幂零的。由 [26, 引理 2.3] 可知， Ker $q = 0$。因此，结论由定理 3.5 得出。□

第二个结果可由定理 3.8 和注 3.10 立即得出。

命题 4.3. 设 $l(P_1) \xrightarrow{\delta} l(P_0) \to (X,\alpha) \to 0$ 是$(X,\alpha) \in \mathrm{Mod}\ T$的一个投射表示。若$(X,\alpha)$ 关于 δ 是 *silting*（分别地，部分 *silting*）的，则$\mathrm{Coker}(\alpha)$是关于 $q(\delta)$的一个 *silting*（分别地，部分 *silting*）左 R-模。

设 R 是一个环， N 是一个 R-R-双模。回顾一下，张量环 $T_R(N) = \oplus_{i=0}^{\infty} N^i$，其中 $N^0 = R$且 $N^{i+1} = N \otimes_R N^i$，对 $i \geq 0$成立。由 [19]可知，存在一个同构 $T_R(N) \cong R \ltimes_\theta M'$，其中 $M' = N \oplus N^{\otimes 2} \oplus \cdots$，而 θ由 $N^{\otimes k} \otimes_\Gamma N^{\otimes l} \to N^{\otimes(k+l)}$诱导。显然，如果 N具有幂零性，那么 M'也是幂零的。因此，张量环是一个特殊的 θ-扩张，且 $\theta \neq 0$。

将上述两个命题应用于张量环，我们可以建立张量环 $T_R(N)$ 上的 silting 模与倾斜模和环 R 上相应对象之间的联系。

推论 4.4. 假设 N 是 m-幂零的，且 $P_1 \xrightarrow{\sigma} P_0 \to Y \to 0$ 是左 R-模 Y的一个投射表示。

(1) $l(Y)$ 是关于 $l(\sigma)$ 的一个（分别为部分）*silting* 左 $T_R(N)$-模，当且仅当 Y关于 σ 也具有相同性质，并且 $N^{\otimes_R i} \otimes_R Y \in$（分别为 $\mathcal{D}_\sigma$) $\mathrm{Gen}(Y)$）对于 $1 \leqslant i \leqslant m$成立。*(2)* 对所有 $1 \leqslant i \leqslant m$，若对所有 $1 \leq t \leq n+1$ 都有 $\mathrm{Tor}_t^R(N^{\otimes_R i}, Y) = 0$，则 $l(Y)$ 是（分别为部分）n-倾斜，当且仅当 Y也具有相同性质，并且 $N^{\otimes_R i} \otimes_R Y \in Y^{\perp_n}$成立。

推论 4.5. </style}设 (P_1) $\xrightarrow{\delta} l(P_0) \to (X,\alpha) \to 0$ 是$(X,\alpha) \in$模 $T_R(N)$的一个投射表示。若(X,α) 关于 δ是（分别地，部分）*silting*，则余核(α) 是关于 $q(\delta)$的一个（分别地，部分）*silting* 左 R-模。

设 R 是代数闭域上的有限维代数。我们用 τ 表示有限生成左 R-模范畴 mod R 中的 Auslander-Reiten 平移，并用 $|Y|$ 表示 $Y \in$ mod R中两两不同构的不可分解直和项的个数。回顾 [1]， $Y \in$ mod R 称为 τ-刚性，如果 $\mathrm{Hom}_R(Y, \tau Y) = 0$；若其是 τ-刚性的且 $|Y| = |R|$，则称为 τ-倾斜。若存在 R的一个幂等元 a，使得 Y是一个 τ-倾斜R/RaR-模，则称 Y为支撑 τ-倾斜。

下面的结果给出了一种从 R-模构造支撑 τ-倾斜 $R \ltimes_\theta M$-模的方法，它推广了 [21] 和 [15]的主要结果。

推论 4.6。设 T 是由有限生成双模 M扩张 R 所得的 θ-扩张，且 $Y \in$*mod* R。那么， $l(Y)$ 是支撑 τ-倾斜左 T-模（分别是 τ-刚性的支撑 τ-倾斜左 T-模），当且仅当 Y如此，且 $\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R Y, \tau Y) = 0$。

证明。设 $P_1 \xrightarrow{\sigma} P_0 \to Y \to 0$ 是 Y的极小投射表示。那么，根据命题 2.4], $M \otimes_R Y \in \mathcal{D}_\sigma$ 当且仅当 $\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R Y, \tau Y) = 0$。由命题 3.15] 可知， Y 是支撑 τ-倾斜对象（分别是 τ-刚性的支撑 τ-倾斜对象），当且仅当它是 silting 对象（分别是部分 silting 对象）。结论由命题 4.2(1) 得出。□

下一个结果中的第一条陈述推广了 [21, 命题 3.3], ，第二条则是一个新结果。

推论 4.7. 设 T 是由有限生成双模 M扩张 R 得到的 θ-扩张，且 (X,α) 是一个左 $R \ltimes_\theta M$-模。

(1) 若(X,α) 是 τ-刚性的，则余核(α) 是一个 τ-刚性左 R-模。

(2) 若(X,α)是支撑 τ-倾斜的，则余核(α)是一个支撑 τ-倾斜左 R-模。

证明。 由命题 4.3 和 [5, 命题 3.15] 可得。 □

Acknowledgments

本研究部分得到中国国家自然科学基金（项目编号：12061026）和河南省高等学校重点科研项目计划（项目编号：26B110007）的资助。

References

[1] T. Adachi、O. Iyama 与 I. Reiten， τ-倾斜理论， *Compos. Math.* **150** (2014)，415–452。[2] L. Angeleri H¨ugel，silting对象， *Bull. London Math. Sci. China* ugel 与 *Math.* **65** 2022 1775 1794
W. Q. Cao，极小 silting 模与环扩张，( )，–。[4] L. Angeleri H *Int. Math. Res.* ugel 与 *Not.* **13** 2017 4131 4151
M. Hrbek，交换环上的 silting 模，( )，–。[5] L. Angeleri H¨ugel、F. Marks 与 J. Vit´oria，silting 模， *Int. Math. Res. Not.* **4** (2016)，1251–1284。[6] L. Angeleri H *Pacific J. Math.* ugel、F. **291** 2017 257 278
Marks 与 J. Vitoria，倾斜理论中的挠对，( )，–。[7] A. Beligiannis，阿贝尔范畴的裂扩张及其在环论中的应用， *Algebra* **28** 2000 4503 4546 *Comm.* ( )，–。[8] S. Breaz，二项倾斜复形的升降性质， *Publ. Mat.* **64** (2020)，543–562。[9] S. Breaz 与 F. Pop，cosilting 模， *Algebrras Represent. Theory* **20** (2017)，1305–1321。[10] S. Breaz 与 J. Zemlicka，由 silting 模生成的挠类， *Ark. Mat.* **56** (2018)，15–32。[11] R. Colpi、A. Tonolo 与 J. Trlifaj，部分余倾转模及其所诱导的格， *Comm. Algebra* **25** (1997)，3225–3237。[12] K. Erdmann、O. Giatagantzidis、C. Psaroudakis 与 Ø. Solberg，单项式箭向移除与有限维数猜想，arXiv:2506.23747。[13] K. Erdmann、C. Psaroudakis 与 Ø. Solberg，箭向移除运算的同调不变量， *Represent. Theory* **26** (2022)，370–387。[14] R. M. Fossum、P. A. Griffith 与 I. Reiten， *Trivial extensions of abelian categories*，《数学讲义》，第456卷，Springer-Verlag，柏林-纽约，1975。[15] H. P. Gao 与 Z. Y. Huang，三角矩阵环上的 silting 模， *Taiwanese J. Math.* **24** 2020 1417 1437 ( )，–。[16] E. L. Green、C. Psaroudakis 与 Ø. Solberg，有限维数的约化方法，*Trans. Amer. Math. Soc.* **374** (2021)，6839–6879。[17] D. D. Hu，阿贝尔范畴的扩张上的余挠对，arXiv:2506.17898。[18] P. Kostas，环的裂扩张与奇异范畴， *J. Algebra* **685** (2026)，160–224。[19] P. Kostas 与 C. Psaroudakis，分次环的内射生成，**229** 2025 107960, 40 *J. Pure Appl. Algebra* ( )，页 [20] B. Keller 与 D. Vossieck，导出范畴中的通道， *Bull. Belg. Math. Soc. Ser. A*，40 (1988)，239–253。[21] Z. W. Li 与 X. J. Zhang，平凡扩张上的 τ-倾斜模， *Int. J. Algebra Comput.* **32** 2022 617 628
( )，–。[22] L. Liang、Y. J. Ma 与 G. Yang，裂扩张下的同调不变性质，arXiv:2506.02691。[23] Y. J. Ma、J. L. Zheng 与 Y. Z. Liu，阿贝尔范畴的裂扩张下的 Igusa-Todorov 距离、扩张与 Rouquier 维数，arXiv:2411.07804v4。[24] L. X. Mao，平凡环扩张上的 silting 模与 cosilting 模， *Comm. Algebra*，51 (2023)，1532–1550。[25] F. Marks 与 J. Vit´oria，导出范畴中的 silting 类与余倾斜类， *J. Algebra* **501** (2018)，526–544。

[26] N. Marmaridis，论阿贝尔范畴的扩张及其在环论中的应用，
J. Algebra ( )，–。
156 1993 50 64
[27] F. Pop，关于 cosilting 模的一个注记， *J. Algebra Appl.* **16** (2017)，1750218。[28] J. Q. Wei，半 tilting 复形， *Israel J. Math.* **194** (2013)，871–893。[29] P. Y. Zhang 与 J. Q. Wei，cosilting 复形与 AIR-cotilting 模， *J. Algebra* **491** (2017)，1–31。

Department of Mathmatics, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China
Email address: gqzhao@hdu.edu.cnSchool of Mathematics and Statistics,
Shangqiu Normal University, Shangqiu 476000,China*Email address*: Sunjx8078@163.com