arXiv:2602.07402v1 [quant-ph] 7 Feb 2026

ABL规则与后选择的隐患

Jacob A. Barandes*

2026年2月10日

摘要

1964年，Aharonov、Bergmann和Lebowitz提出了著名的“ABL规则”，旨在提供一种时间对称的形式体系，用于计算量子理论中新类型的条件概率。后来的论文赋予ABL规则更多意义，其中包括声称它支持对不确定性原理的违背。本文对这些主张提出质疑，也质疑此后为挽救ABL规则原始诠释所做的尝试。从更广阔的视角来看，本文指出ABL规则的核心存在一种微妙的范畴错误：将属于单个系统的可观测量与仅在物理系综中才会出现的涌现可观测量混为一谈。与此同时，本文还指出了围绕ABL规则的研究文献中的其他问题和谬误推理，包括滥用后选择、依赖与经典公式的模式匹配，以及一种“测量主义”立场——认为实验数据能够为诠释性问题提供答案。

1 引言

1964年，Aharonov、Bergmann和Lebowitz（ABL）在《物理评论》上发表了一篇影响深远的论文，题为《测量量子过程中的时间对称性》（Aharonov、Bergmann、Lebowitz，1964）。据《物理评论》网站介绍，ABL论文如今已被引用逾700次，引用论文涉及多个领域：量子基础（Griffiths 1984年）、量子宇宙学（Gell-Mann、Hartle 1994年）、闭合类时曲线（Lloyd等人2011 年）和黑洞（ Horowitz 、 Maldacena ； Lloyd 2006 年；Harlow 2016 年；Akers 等人2024）。值得注意的是，所有这些引用论文不仅提到了ABL论文整体，而且明确指出该论文声称提出了量子理论的时间对称表述。

重要的是，ABL论文开启了后选择在量子理论中的广泛应用。它还启发了 Aharonov、Albert 和 Vaidman 于 1988 年在一篇论文中提出弱值

*哈佛大学哲学系与物理系，马萨诸塞州剑桥 02138；ja- cob_barandes@harvard.edu；ORCID：0000-0002-3740-4418

t该论文此后已获得超过 2,200 次引用（Aharonov、Albert、Vaidman 1988）。[1]

ABL论文的主要成果是推导出“ABL规则”，这是一条针对某类条件概率的公式，据称为量子理论提供了一种时间对称表述。本文将阐明ABL论文所引入的条件概率的确切含义，并论证ABL论文的表述实际上并非时间对称，而是具有另一种概念上不同的对称性：测量序列按时间顺序反向排列时的对称性。打个比方，可以考虑这样一种区别：一方面，将一副牌面朝下的扑克牌翻过来，使它们现在都正面朝上；另一方面，将所有扑克牌分开，再按相反顺序重新叠放，同时始终让牌面朝下。

本文还将批评后来的论文：这些论文试图挽救ABL规则原本的时间对称解释，或试图以某些方式扩展ABL规则，从而导致所谓对不确定性原理的违反。另有研究将论证，弱值并未为ABL论文中的论证提供支持性证据，而且自身也面临根本性的解释困难（Barandes 2026）。

更广泛地说，本文将论证：后选择无论是在ABL规则的语境中使用，还是出于量子物理研究中的其他目的使用，都不是一种无害或无关紧要的程序，而是经常导致统计伪象，而这些伪象又常常被错误地归因于量子理论的奇异性质。由此引出的一个推论是，应呼吁研究期刊坚持要求那些依赖后选择来获得令人惊讶结果的作者，解释为什么这些结果是量子力学本身的特征，而不仅仅是后选择造成的伪象。

话虽如此，本文并不主张所有受ABL论文启发的研究都是错误的，或无法奏效。恰恰相反，ABL论文启发了新的理论和实验框架；这些框架本身具有独立的价值，并不依赖缺乏依据的解释性主张。

第 2 节将介绍若干预备主题，这些内容对于本文批判性地探讨 ABL规则 至关重要，包括教科书量子理论中的相关基础概念、与系综和后选择相关的谬误，以及与模式匹配和“测量主义”相关的谬误。第 3 节将详细、审慎地探讨 ABL规则：先初步介绍 ABL规则本身，再讨论边界条件所发挥的作用，推导 ABL规则的技术细节，分析 ABL规则中的时间对称性，严谨分析最初的 ABL论文，评估历史上为 ABL规则相关关键主张辩护的尝试，并对“ABL规则为不确定性原理提供了漏洞”这一论点提出一种新颖的观点。第 4 节将以总结和对更广泛影响的讨论作结。

[1]使用谷歌学术搜索 {“量子” AND（“后选择” OR “后选择” OR “后选” OR “后选择” OR “后选”）}，在1964年以前没有得到任何有效结果。在1964年至2025年这段时间内，搜索得到近19,000条结果，其中绝大多数发表于2000年以后。搜索 {“量子” AND（“弱值” OR “弱值”）} 得到超过6,000条结果。

2 预备知识

2.1 教科书量子理论

要足够精确地剖析 ABL论文及后续研究所提出的主张，就必须探讨正统量子理论或教科书量子理论的公理基础。为使本文自成一体，并将所有依据一并摆明，下面将重述狄拉克（1930年）和冯·诺依曼（1932年）（DvN）所阐述的教科书理论标准公理：

1. 量子态：量子系统在任意时刻都由一个量子态表示，该量子态关联于某个有限维或无限维希尔伯特空间。一般而言，量子态是迹为 1 的自伴正半定密度矩阵或密度算符， ρ。如果密度矩阵的秩为 1，则也可以使用一个模整体相位任意的单位向量，称为态矢量或波函数， $|\Psi\rangle$。有时还会加入部分整体论公设，认为复合量子系统的希尔伯特空间是其各组成子系统相应希尔伯特空间的张量积，而子系统的量子态与其复合系统的量子态之间通过偏迹运算关联。

2. 幺正时间演化：如果量子系统是封闭系统，也就是说，它与任何其他系统都没有相互作用，那么该系统的量子态会按照一族以时间为索引的幺正算符演化，这些算符共同定义一个依赖时间的幺正算符，称为该系统的时间演化算符。在适当的光滑性假设下，可以将幺正时间演化表示为一个关于时间的一阶微分方程——密度矩阵的冯·诺依曼方程，或态矢量的薛定谔方程。

3. 可观测量：单个量子系统对应一组可观测量。每个可观测量都由作用于该系统希尔伯特空间上的一个自伴算符 $A = A^\dagger$ 表示，其中构成该可观测量之谱的可能数值测量结果，对应于该自伴算符的本征值。（更一般地，也可以使用正算子值测度，即 POVM。）

4. 玻恩规则：要计算对某个可观测量进行测量时，得到属于相关自伴算符的某组本征值的测量结果的概率，需要将量子态投影到与这组本征值相对应的子空间，然后计算所得算符的迹，或所得向量的范数平方。

5. 坍缩：在得到这一测量结果后，立即将系统的量子态投影或坍缩到相应的子空间，然后重新归一化，使其迹或范数再次等于 1。

不应将本文采用 DvN 公理视为对它们的认可。众所周知，DvN 公理并未明确界定何种情形才算测量，因此何时应用第二公理（幺正时间演化）、何时应用第五公理（坍缩）都存在歧义。仅凭幺正时间演化无法确定唯一的测量结果，即使引入开放系统动力学和退相干也是如此。这些困难构成了著名的测量问题。话虽如此，对于本文将要考察的实验方案，大多数其他公理化表述和量子理论诠释所作的预测，本质上都与之等效，因此 DvN 公理已足够。

2.2 系综与后选择

本文批判性分析的一个核心主题，将是区分单系统可观测量与系综可观测量：前者是单个系统中可通过经验获取的特征，后者则是作为整体的物理系综中不可约地涌现出的特征。正如 Hance、Rarity 和 Ladyman（2023年，第六节）所强调的，系综可观测量与单系统可观测量在类别上截然不同——即便在实践中，有时必须借助系综来研究单个系统的可观测量。也就是说，仅仅使用系综来探测单系统可观测量，并不会使该可观测量成为系综可观测量，因为系综可观测量是一个类别上截然不同的概念。例如，在量子理论中，可观测量的本征值谱是一个单系统概念，即使实验人员可能会借助物理系综来全面考察该谱。

由此可推得，试图将单系统可观测量等同于系综可观测量，或根据系综可观测量直接推断单系统可观测量，都是一种范畴错误。我们将这种范畴错误称为系综谬误：

$$\left.\begin{array}{l}\text{系综谬误：试图将单系统可观测量等同于系综可观测量，或在缺乏独立、严谨论证的情}\\ \text{况下，根据系综可观测量直接推断单系统可观测量的范畴错误。}\end{array}\right\} \tag{1}$$

人们很容易将涌现的系综可观测量与单系统可观测量混淆，同样是因为实践中有时会利用系综来获得对单系统可观测量的经验途径。因此，这里或许值得举一个简单的例子。

恒星具有各种可观测特征，例如质量、体积、电磁光谱、化学组成、年龄、位置等。当然，我们可以利用系综研究这些单星可观测量，例如观察许多质量相近的恒星在其生命周期不同阶段的情况。数千年来，人类社会也一直会从天空中挑选恒星组成各种受神话启发的形状，这些形状就是我们所知的星座。星座是一种系综可观测量，取决于人们任意作出的选择，并非单星可观测量。组成星座的恒星通常在三维空间中相距甚远，彼此之间基本没有相互作用。星座这一事实

猎户座指的是一位猎人，这一说法几乎不能告诉我们其中任何一颗单独恒星的可观测量。它当然也不意味着每颗恒星的可观测量中都含有少许“猎人属性”。[2]

人们也可以通过后选择来定义系综，而后选择是ABL规则的一个关键组成部分。后选择是指在事后——即实验程序之后——对系综成员进行筛选，或者不那么客气地说，进行挑选，其效果是改变该系综的统计属性。后选择在统计学中是一个微妙的问题，很容易使人就一组数据得出错误的结论，这种效应是选择偏差的一种形式（Hernán、Hernández- ́Dıaz、Robins 2004年）。事实上，许多统计学家的一个目标是避免 后选择或对其加以校正 ，以此逃避或减轻其潜在后果，而对于ABL规则，人们则应当相当刻意地实施 后选择。此外，就其构造而言，后选择产生的是系综可观测量，而非单系统可观测量，因为后选择标准完全取决于进行筛选或挑选的人，并且本质上是关于整个系综的陈述。给这一大类误差起个名字将会有所帮助：

$$\left.\begin{array}{l}\text{后选择谬误：因隐式或显式地使用后选择，而对系统或系综得出错误结论。}\end{array}\right\} \tag{2}$$

不难举出同时说明系综谬误和后选择谬误的例子：

- 设想一个由实验试验构成的经典系综，其中使用的是相同的硬币，而这些硬币具有一种不寻常的可观测特征：每当硬币落在反面时，外观就会变暗 1%。每次试验中，都会连续抛掷一枚硬币 100 次，以此估计这些硬币是否公平。如果根据硬币最终至少有 70% 变暗这一条件，对试验集合进行后选择，那么后选系综中，频繁落在正面的硬币所占比例就会偏低。由于这一后选择决定而导致最终频率分布出现的任何偏斜，显然都不是单枚硬币的内在特征，而是任意选择后选择条件所造成的集合层面的统计伪象。尤其是，如果正面和反面的最终频率分布不是 50/50，那么由此断定这些硬币不公平就是错误的。

- 考虑一种健康症状 S ：当且仅当患者患有疾病 A、疾病 B或两者兼有时，该症状才会出现。假设在一般人群中，疾病 A和 B 在统计上相互独立，且每种疾病的发生概率均为 10%。用概率 p_A 表示 A，用 p_B 表示 B，并用 p_{AB} 表示 A 和 B的逻辑合取，则有

$$p_A = \frac{1}{10}, \quad p_B = \frac{1}{10}, \quad p_{AB} = p_A p_B = \frac{1}{100}.$$

[2]这个例子并不体现合作式涌现，因为恒星之间基本上没有相互作用。相比之下，在超辐射中，多个系统组成的系综彼此相互作用，从而产生一种不可还原的涌现辐射模式。然而，超辐射和星座一样，并非单系统可观测量；若将其误认为单系统可观测量，就犯了系综谬误。

由此可见，假设一般人群中有一个由 $N = 10{,}000$ 人组成的系综，那么预计其中 $N_A \approx p_A N = 1{,}000$ 人患有疾病 A，$N_B \approx p_B N = 1{,}000$ 人患有疾病 B，而 $N_{AB} \approx p_{AB} N = 100$ 人两种疾病兼有。然而，假设我们对出现健康症状 S的患者进行后选择。根据假设，此类患者有 $N_S = N_A + N_B - N_{AB} \approx 1{,}900$ 人；减去 N_{AB} 是为了避免将同时患有疾病 A 和 B的患者重复计数。在这个后选系综中，我们看到 $N_A/N_S \approx 10/19$ 人患有 A，$N_B/N_S \approx 10/19$ 人患有 B，而$N_{AB}/N_S \approx 1/19$ 人同时患有 A 和 B。然而，$1/19 \neq 10/19 \times 10/19$，因此后选样本显示出 A与 B之间存在（负）统计相关性。不过，这种相关性是由后选择造成的集合层面的统计伪象，并不反映 A 与 B之间存在真正的相互依赖。这个例子是伯克森悖论（Berkson 1946），也称为碰撞偏差（Cole 等，2009）。

- 考虑一个涉及石块和孔洞的试验集合。在每次试验中，人们朝一组孔洞的大致随机方向抛出一块小石块。此外，假设每次试验中，都会随机选出一个孔洞，用金属盖或快门将其完全盖住。如果后选的系综只包含记录到金属撞击声的试验，那么会发现，后选试验集合中的每块石块都被挡在了孔洞之外。显然，从这项统计分析得出快门本身具有一种神秘能力、可以同时盖住所有孔洞的结论，是不正确的。堵孔是后选系综的涌现属性，而非快门的单系统属性，因此根据后选系综对快门作出推断，就犯了系综谬误（1）。选择这个特定例子并非偶然——它与几篇探讨在量子系统中使用ABL规则的论文密切相关（Aharanov、Vaidman 2003；Kastner 2004年）。

- 设想一个试验集合，其中一个物体可以被放在三个盒子中的任意一个里。每次试验中，只有一个物体。此外，假设探测机器以各半的概率检查第一个盒子或第二个盒子中的物体，但不会同时检查两者。如果机器成功找到物体，就会亮起明亮的绿灯；而在任何一次试验中，机器都不会检查第三个盒子。如果按照“机器检查了第一个盒子并最终亮起绿灯”这一逻辑合取命题对试验进行后选择，那么在由此得到的系综中，物体位于第一个盒子的概率为100%。如果改为按照“机器检查了第二个盒子并亮起绿灯”这一逻辑合取命题对试验进行后选择，那么在该系综中，物体位于第二个盒子的概率同样为100%。然而，尽管这两种情况下的概率都是100%，但据此得出物体不知何故同时位于第一个和第二个盒子的结论，是不正确的。再说一次，选择这个例子是有原因的——一个非常相似的例子曾成为ABL规则相关研究文献中的重要关注点（Aharonov、Albert、D’Amato 1985年；Aharonov、Vaidman 1991；Cohen 1995；Vaidman 1996a；Vaidman 1998；Kastner 1999年）。

本文将说明，ABL规则同样指的是物理系综的涌现可观测量；这些涌现可观测量无法被认定为单系统可观测量，也不能用于直接推断单系统可观测量。进行此类认定或推断，再一次恰恰就是犯了系综谬误（1）。本文还将论证，ABL规则的一些所谓推论陷入了后选择谬误（2）。其他研究将论证，弱值也存在类似问题（Barandes 2026年）。

同样，这些批评并不意味着 ABL规则的所有衍生观点都应被摒弃。毕竟，系综可观测量仍然是可观测量，自有其用途。事实上，星座几代以来一直帮助人们在世界各地辨认方向（Huth, 2013年）。然而，星座的这些成功应用并没有揭示多少关于单颗恒星内在本质的信息。

2.3 模式匹配与测量主义

除了第 2.2 小节提出的系综谬误和后选择谬误之外，本文还将指出 ABL论文及相关研究文献中另外两个更大的问题。第一个问题是在量子物理研究中过度将模式匹配用于经典公式或经典诠释。第二个问题是“测量主义”，本文用这个词指一种哲学立场：如果某项实验最终测得了某个特定量，那么仅凭这项实验就足以证实对该量先前偏好的诠释。（“我们已经在实验室里测量过很多次了，怎么可能是错的？”或者“我们的理论能够导出一项可实施的实验，这一点就足以证明该理论是正确的。”）

在本文中，模式匹配指的是一种常见做法：通过规定，强行确立经典概念与量子概念之间的关系。当相关概念在经典物理和量子物理中发挥相似或类似的功能作用时，尽管它们由根本不同的数学结构构成，这种做法尤其常见。

模式匹配的一种具体形式，是先考察那些概念或物理意义相当明晰的经典公式，再通过形式类比猜测量子情形中的对应公式——例如，用自伴算子替换随机变量，用对易子替换泊松括号，用密度矩阵替换经典概率分布，用偏迹替换边缘化，或用量子信道替换随机过程。狄拉克正则量子化明确属于这种模式匹配，而量子因果建模领域当前的大量研究，也涉及对经典因果模型各组成要素进行明确的模式匹配。

请注意，在上一段中提到的每一对数学对象中——例如随机变量和自伴算子——后者在量子物理中发挥的功能作用，与前者在经典物理中发挥的功能作用相似或类似。然而，每一对中的两个对象都建立在根本不同的数学结构之上。[3]

[3]相比之下，如果两种物理理论各自都包含某种特征，尽管该特征在两种理论中可能发挥不同的功能作用，但最终发现它们在两种理论中由足够相似的数学结构构成，那么人们

另一种模式匹配方式，是先得到量子情形下的公式，再借助一个外观相似的经典公式，为其赋予一种解释或含义。一个与ABL论文尤为相关的例子是，假定拉格朗日力学中使用的初始和最终边界条件，类似于量子理论中的预选和后选，这将在第3.2小节中讨论。

然而，这些模式匹配形式本身从未得到正当性证明。尽管模式匹配可以是一种有用的启发式方法，或是暂时性的第一步，但最终必须能够将量子理论中任何声称成立的公式，要么从第2.1小节所回顾的DvN公理中推导出来，要么从对DvN公理进行严格自洽的修改或替代中推导出来。除此之外的任何做法都将严格处于公理框架之外，因此要么需要直接诉诸科学归纳或溯因推理，要么实质上就必须采取某种含糊其辞的做法。

为方便起见，我们给这些不正当的模式匹配形式命名如下：

$$\left\{\begin{array}{l}\text{模式匹配谬误：通过类比已知的经典数学构造，宣称量子理论中的某个新数学构造有效；}\\ \text{或者通过类比已知经典数学构造的解释，为量子理论中现有的数学构造赋予一种解释。}\end{array}\right. \tag{3}$$

当模式匹配也不足以证实或论证对某个物理量所提出的某种解释时，另一种颇具诱惑力的选择可能是“测量主义”——一种普遍存在的哲学态度，本文将其定义为以下谬误：

$$\left\{\begin{array}{l}\text{测量主义谬误（或测量主义）：如果一种解释含糊不明的物理量可以通过实验测量，那}\\ \text{么仅凭实验就能为该物理量的一种倾向性解释提供支持性证据，或为促成该物理量得到}\\ \text{考察的理论工作提供论证。}\end{array}\right. \tag{4}$$

作为一项直接应用，仅仅因为 ABL规则中出现的某个特定频率比可以通过实验测量——事实上，在某些具体情况下也已在实验室中测得——并不能证明围绕该频率比或 ABL规则提出的许多强烈诠释性主张是成立的。

人们或许可以根据另一理论中与之对应的特征，来了解第一种理论中的该特征。重要的是，这种情况会出现在使用“类比模型”时：研究者通过考察或进行测量，探查一种在数学上相似、但经验上可接近的高层理论的特征，从而间接研究一种经验上无法接近的低层理论（如量子理论或广义相对论）中的特征。

3 ABL规则

3.1 初识ABL规则

从核心来看，ABL论文关注的是量子理论在某一特定类型实验方案中的应用。

考虑一个由 $N \gg 1$ 个内部时间演化可忽略不计的相同量子系统组成的大型系综。假设对于系综中的每个系统，外部主体或观察者依次测量$n+2$可能彼此不同的可观测量 A，C_1、……、C_n，B同时依次记录相应的测量结果。对于这一实验方案，假设每个可观测量都是完备的，也就是说，根据其测量结果以及第2.1小节回顾的冯·诺依曼坍缩公理，可以得到一个唯一且确定的态矢量。观察者统计系综中具有特定预选测量结果 a（对应第一个可观测量 A）和特定后选测量结果 b（对应最后一个可观测量B）的成员数量 N_{ab}。然后，在由这一对结果 a 和 b标记的子系综中，观察者统计具有特定测量结果序列 c_1、……、c_n 的成员数量$N_{ac_1\cdots c_nb} \leq N_{ab}$，这些结果分别对应于$n$ 中间可观测量 C_1、……、C_n。数值比例

$$0 \leq \frac{N_{ac_1\cdots c_nb}}{N_{ab}} \leq 1 \tag{5}$$

定义了一个具体的、实验上可及的概率——即如下统计概率：若按照均匀概率测度，从由 a与 b这一对所标记的子系综中随机选取一个成员，则该被选成员将呈现特定的中间测量结果序列 $c_1, \ldots, c_n$。

作为一个具体例子，考虑一个由 $N = 10{,}000$次实验试验组成的系综，其中涉及单个自旋1/2自由度，并且在整个过程期间不存在任何非平凡的内部动力学。在每次试验中，系统被制备在自旋-z 本征态 $|z+\rangle$，随后接受一次自旋-x 测量，接着是一次自旋-y 测量，最后再进行一次自旋-z 测量。如果只关注最终自旋-z 测量得到 $|z-\rangle$的那些试验，那么根据自旋-x 本征基、自旋-y 本征基与自旋-z 本征基之间通常的代数关系，再加上简单的算术运算，试验次数会减少到大约$N_{z+,z-} \approx 5{,}000$。同样可以得出，中间自旋-$x$与自旋-$y$测量的四种可能构型（$x+, y+$）、（$x+, y-$）、（$x-, y+$）和（$x-, y-$）各自大约出现在这5,000次试验中的1,250次里。因此，人们可以针对例如中间结果对（$x+, y-$）显式计算比值(5)，从而得到答案

$$\frac{N_{z+,x+,y-,z-}}{N_{z+,z-}} \approx \frac{1{,}250}{5{,}000} = \frac{1}{4} = 25\%. \tag{6}$$

基于第2.1小节回顾的DvN公理，教科书量子理论给出了预测经验概率（5）的一般理论表达式，称为“ABL规则”。其推导最初发表于ABL论文中，并将在第3.3小节以另一种方式推导。

3.2 边界条件

牛顿力学描述了物理空间中的经典物体，其轨迹满足由关于时间的二阶微分方程构成的动力学定律。由于这些动力学定律是关于时间的二阶方程，要确定一条轨迹，必须指定系统中所有物体的初始位置和初始速度。一旦得到一条满足动力学定律的确定轨迹，就可以询问并回答关于系统在该轨迹上任意时刻属性的许多问题。

同样，由于牛顿动力学定律是时间上的二阶定律，因此也可以通过在初始位置的基础上补充最终位置，而非初始速度，再运用适当的变分方法来求得轨迹。这些变分方法包括拉格朗日力学中的最小作用量原理。

在许多情况下，将这种变分方法与系统过去和未来状态的边界条件结合起来，就能得到唯一的轨迹。在这种情况下，如果已知一个物体系统的初始和最终状态——也就是过去和未来的边界条件——便有理由对系统在中间时刻的情况作出精确推断，包括推断系统各组成物体的位置、速度、动能等等。

正如第3.1小节所述，ABL规则的实验方案包含初始时刻的预选择和最终时刻的后选择。这两种操作看起来或许类似于拉格朗日力学中用于指定物体初始和最终状态的边界条件，但若要作出这种解释，恰恰就是在经典与量子概念之间进行一种毫无根据的模式匹配——也就是说，作出这种解释就意味着犯下模式匹配谬误（3）。

诚然，预选一个量子态与指定牛顿系统的初始构型非常相似。然而，第 2.1 小节中由 DvN公理给出的时间演化规则是一阶时间方程。若已知某个系统在初始时刻的量子态，那么幺正时间演化、玻恩规则以及坍缩公理便会给出该系统后续的量子态。这些时间演化规则并非二阶时间方程，因此无法将指定最终量子态作为额外边界条件纳入其中，除非愿意违反这些时间演化规则。

按照 ABL规则所采用的方式，对量子系统系综施加后选择，是由外部主体所为，意味着每个系统的时间演化发生了突变，而系统本身无法预知这一变化。后选择并非任何特定量子系统内部的边界条件，也不是量子系统系综内部的边界条件。尤其是，后选择并非经典拉格朗日力学意义上的边界条件，即仅仅表明系统自身的轨迹最终将系统带到了何处。因此，尽管后选择或许确实能揭示某个特定系统或系统系综过去的事实，但后选择之前任何时刻每个系统的量子态都不可能在物理上取决于

之后对后选择量子态的选择，因为任何此类物理依赖都要求系统具备某种形式的预知。也就是说，后选择本身不可能造成系统过去的任何特征；若作此假设，便是犯了后选择谬误（2）。[4]

3.3 ABL规则的推导

推导ABL规则是应用教科书量子理论的一项直接练习。下文给出的推导也与弱值的推导密切相关，后者将在其他工作中讨论（Barandes 2026）。

考虑三个量子系统：待研究的主体系统、测量装置，以及外部主体或观察者。总系统的适当希尔伯特空间具有张量积形式

$$\mathcal{H}_{\text{tot}} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{\text{dev}} \otimes \mathcal{H}_{\text{obs}}, \tag{7}$$

其中 $\mathcal{H}$、 $\mathcal{H}_{\text{dev}}$和 $\mathcal{H}_{\text{obs}}$ 分别是主体系统、测量装置和观察者的希尔伯特空间。

接下来，假设总系统的初始量子态 $|\Psi_{\text{tot}}\rangle$ 为主体系统指定一个一般态矢量 $|\Psi\rangle$ ，为测量装置指定一个“就绪”态矢量 $|\text{dev}(\emptyset)\rangle$ ，并为观察者指定一个“就绪”态矢量 $|\text{obs}(\emptyset)\rangle$ ：

$$|\Psi_{\text{tot}}\rangle = |\Psi\rangle \otimes |\text{dev}(\emptyset)\rangle \otimes |\text{obs}(\emptyset)\rangle. \tag{8}$$

设 $A, C_1, \ldots, C_n, B$ 为主体系统的一组可观测量，其各自的本征值由变量 $a, c_1, \ldots, c_n, b$表示。假设这些可观测量中的每一个都是完备的，即对其中任何一个的测量都能完全确定主体系统的量子态。

此外，假设测量装置和观察者已预先安排好，使得观察者测量 A，随后测量装置按照时间顺序测量 C_1， $\ldots C_n$，然后观察者测量 B。对总系统应用幺正时间演化，可以看出第一次测量的形式为

$$\left.\begin{aligned} |\Psi_{\text{tot}}\rangle &= |\Psi\rangle \otimes |\text{dev}(\emptyset)\rangle \otimes |\text{obs}(\emptyset)\rangle \\ &= \sum_a \langle a|\Psi\rangle |a\rangle \otimes |\text{dev}(\emptyset)\rangle \otimes |\text{obs}(\emptyset)\rangle \\ [\text{observer measurement of } A] \mapsto &\sum_a \langle a|\Psi\rangle |a\rangle \otimes |\text{dev}(\emptyset)\rangle \otimes |\text{obs}(a)\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

[4]原则上，这里所描述的预知，在某些量子理论的逆因果诠释中或许是允许的。另一种看法是，在埃弗雷特诠释（Everett 1956, 1957）中，可以认为后选择将观察者置于宇宙波函数的某个特定分支上，该分支有其自身特定的分支历史。因此，在埃弗雷特诠释中，后选择并未改变过去，只是从众多同样存在的过去中选出一个。不过，这两种替代观点显然都取决于诠释。

其中，obs(a) 表示观察者已获得可观测量A的测量结果 a。第二次测量的形式为

$$\left.\begin{aligned} &\sum_a \langle a|\Psi\rangle|a\rangle \otimes |\mathrm{dev}(\emptyset)\rangle \otimes |\mathrm{obs}(a)\rangle \\ &= \sum_a \sum_{c_1} \langle a|\Psi\rangle\langle c_1|a\rangle|c_1\rangle \otimes |\mathrm{dev}(\emptyset)\rangle \otimes |\mathrm{obs}(a)\rangle \\ [\text{device measurement of } C_1] \mapsto &\sum_a \sum_{c_1} \langle a|\Psi\rangle\langle c_1|a\rangle|c_1\rangle \otimes |\mathrm{dev}(c_1)\rangle \otimes |\mathrm{obs}(a)\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

其中，dev(c_1) 表示测量装置已获得可观测量 C_1 的测量结果 c_1。类似地，在测量装置进行下一次测量后，有

$$\sum_a \sum_{c_1,c_2} \langle a|\Psi\rangle\langle c_1|a\rangle\langle c_2|c_1\rangle|c_2\rangle \otimes |\mathrm{dev}(c_1,c_2)\rangle \otimes |\mathrm{obs}(a)\rangle, \tag{11}$$

其中，dev(c_1, c_2) 表示测量装置先获得可观测量 C_1 的测量结果 c_1，随后按时间顺序获得可观测量 C_2的测量结果 c_2。继续下去，最终可得总系统的最终态矢量 $|\Psi'_{\mathrm{tot}}\rangle$ 为

$$|\Psi'_{\mathrm{tot}}\rangle = \sum_{a,b} |b\rangle \otimes \left[\sum_{c_1,\ldots,c_n} \langle b|c_n\rangle\langle c_n|c_{n-1}\rangle \cdots \langle c_1|a\rangle\langle a|\Psi\rangle|\mathrm{dev}(c_1,\ldots,c_n)\rangle \right] \otimes |\mathrm{obs}(a,b)\rangle. \tag{12}$$

这里，obs(a, b) 表示观察者已获得可观测量 A 的测量结果 a，以及可观测量 B 的测量结果 b；而 dev($c_1, \ldots, c_n$) 表示测量装置按时间顺序获得的一系列测量结果 $c_1, \ldots, c_n$，分别对应于可观测量 $C_1, \ldots, C_n$。

引入投影算符

$$P_a \equiv |a\rangle\langle a|, \quad P_b \equiv |b\rangle\langle b|, \quad P_{c_i} \equiv |c_i\rangle\langle c_i|. \tag{13}$$

这三组投影算符各自构成完备且两两互斥的集合，因此每组都构成一个投影值测度（PVM），其含义是

$$\left.\begin{aligned} P_a P_{a'} &= \delta_{aa'} P_a, \quad \sum_a P_a = \mathbb{1}, \\ P_b P_{b'} &= \delta_{bb'} P_b, \quad \sum_b P_b = \mathbb{1}, \\ P_{c_i} P_{c'_i} &= \delta_{c_i c'_i} P_{c_i}, \quad \sum_{c_i} P_{c_i} = \mathbb{1}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

其中，$\mathbb{1}$ 是主体系统希尔伯特空间上的单位算符。（请注意，对于这里的第三个投影值测度，求和不是对区分不同可观测量 $C_1, \ldots, C_n$ 的 i 各取值进行，

而是对单个可观测量 C_i 的本征值的完整谱 c_i 进行求和。）于是，式（12）可以更简洁地写为

$$|\Psi'_{\rm tot}\rangle = \sum_{a,b} \sum_{c_1,\ldots,c_n} [P_b P_{c_n} \cdots P_{c_1} P_a |\Psi\rangle] \otimes |{\rm dev}(c_1,\ldots,c_n)\rangle \otimes |{\rm obs}(a,b)\rangle. \tag{15}$$

引入另一个投影算符

$$P_{{\rm obs}(a,b)} \equiv |{\rm obs}(a,b)\rangle\langle{\rm obs}(a,b)|, \tag{16}$$

观察者在主体系统的初始态矢量 $|\Psi\rangle$ 条件下，获得特定测量结果对 $(a,\ b)$ 的总概率 $p[{\rm obs}(a,\ b)|\Psi]$ ，由玻恩规则得出：

$$p[{\rm obs}(a,b)|\Psi,(A,C_1,\ldots,C_n,B)] = {\rm tr}\big(\big[\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}_{\rm dev}\otimes P_{{\rm obs}(a,b)}\big]\big[|\Psi'_{\rm tot}\rangle\langle\Psi'_{\rm tot}|\big]\big). \tag{17}$$

这里， $\mathbb{1}_{\rm dev}$ 是测量装置希尔伯特空间上的单位算符。额外以有序列表 $(A,\ C_1,\ \ldots,\ C_n,\ B)$ 为条件，是为了提醒我们：总系统的态矢量从 $|\Psi_{\rm tot}\rangle$ 演化到 $|\Psi'_{\rm tot}\rangle$ 的过程中，曾对这一特定的有序可观测量序列进行测量。通过直接计算可得

$$p[{\rm obs}(a,b)|\Psi,(A,C_1,\ldots,C_n,B)] = \sum_{c_1,\ldots,c_n} {\rm tr}[P_b P_{c_n}\cdots P_{c_1} P_a P_\Psi P_a P_{c_1}\cdots P_{c_n}], \tag{18}$$

其中， P_Ψ 是由下式定义的秩一密度矩阵

$$P_\Psi \equiv |\Psi\rangle\langle\Psi|. \tag{19}$$

定义投影算符

$$P_{{\rm dev}(c_1,\ldots,c_n)} \equiv |{\rm dev}(c_1,\ldots,c_n)\rangle\langle{\rm dev}(c_1,\ldots,c_n)|, \tag{20}$$

观察者获得 $(a,\ b)$，且测量装置获得有序序列 $(c_1,\ \ldots,\ c_n)$ 的联合概率，同样由玻恩规则得出：

$$p[{\rm obs}(a,b),{\rm dev}(c_1,\ldots,c_n)|\Psi,(A,C_1,\ldots,C_n,B)] = {\rm tr}\big(\big[\mathbb{1}\otimes P_{{\rm dev}(c_1,\ldots,c_n)}\otimes P_{{\rm obs}(a,b)}\big]\big[|\Psi'_{\rm tot}\rangle\langle\Psi'_{\rm tot}|\big]\big). \tag{21}$$

结果是

$$p[{\rm obs}(a,b),{\rm dev}(c_1,\ldots,c_n)|\Psi,(A,C_1,\ldots,C_n,B)] = {\rm tr}[P_b P_{c_n}\cdots P_{c_1} P_a P_\Psi P_a P_{c_1}\cdots P_{c_n}]. \tag{22}$$

请注意，正如预期 d，这些整体概率与联合概率显然通过边缘概率相关联 -

对完整有序序列集合（c_1，……， c_n）进行求和：

$$p[\mathrm{obs}(a,b)|\Psi,(A,C_1,\ldots,C_n,B)]=\sum_{c_1,\ldots,c_n}p[\mathrm{obs}(a,b),\mathrm{dev}(c_1,\ldots,c_n)|\Psi,(A,C_1,\ldots,C_n,B)]. \quad (23)$$

如果将冯·诺依曼坍缩公理应用于叠加态 $|\Psi'_{\mathrm{tot}}\rangle$ 中与观察者的测量结果（a， b）相对应的项，那么，仅针对测量装置的约化密度矩阵便可通过对主体系统和观察者的希尔伯特空间取偏迹得到，依据

$$\rho_{\mathrm{dev}|\mathrm{obs}(a,b),\Psi}=\mathrm{tr}_{\mathcal{H},\mathcal{H}_{\mathrm{obs}}}\left(\frac{\big[\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}_{\mathrm{dev}}\otimes P_{\mathrm{obs}(a,b)}\big]|\Psi'_{\mathrm{tot}}\rangle\langle\Psi'_{\mathrm{tot}}|\big[\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}_{\mathrm{dev}}\otimes P_{\mathrm{obs}(a,b)}\big]}{\mathrm{tr}\big(\big[\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}_{\mathrm{dev}}\otimes P_{\mathrm{obs}(a,b)}\big]|\Psi'_{\mathrm{tot}}\rangle\langle\Psi'_{\mathrm{tot}}|\big)}\right). \quad (24)$$

结果是一个秩为一的 密度矩阵，可以用态矢量表示为 y

$$|\Psi_{\mathrm{dev}|\mathrm{obs}(a,b),\Psi}\rangle=\frac{\sum_{c_1,\ldots,c_n}\langle b|P_{c_n}\cdots P_{c_1}P_a|\Psi\rangle|\mathrm{dev}(c_1,\ldots,c_n)\rangle}{\sqrt{\sum_{c'_1,\ldots,c'_n}\mathrm{tr}\Big(P_bP_{c'_n}\cdots P_{c'_1}P_aP_\Psi P_aP_{c'_1}\cdots P_{c'_n}\Big)}}. \quad (25)$$

如果对测量装置本身的指针变量进行测量，那么玻恩规则将意味着，相应的概率为

$$p[\mathrm{dev}(c_1,\ldots c_n)|\Psi,\mathrm{obs}(a,b),(A,C_1,\ldots,C_n,B)]=\frac{\mathrm{tr}(P_bP_{c_n}\cdots P_{c_1}P_aP_\Psi P_aP_{c_1}\cdots P_{c_n})}{\sum_{c'_1,\ldots,c'_n}\mathrm{tr}\Big(P_bP_{c'_n}\cdots P_{c'_1}P_aP_\Psi P_aP_{c'_1}\cdots P_{c'_n}\Big)}. \quad (26)$$

注意，这个条件概率与式（22）中的联合概率以及式（18）中的总体概率之间的关系为

$$p[\mathrm{dev}(c_1,\ldots c_n)|\Psi,\mathrm{obs}(a,b),(A,C_1,\ldots,C_n,B)]=\frac{p[\mathrm{obs}(a,b),\mathrm{dev}(c_1,\ldots,c_n)|\Psi,(A,C_1,\ldots,C_n,B)]}{p[\mathrm{obs}(a,b)|\Psi,(A,C_1,\ldots,C_n,B)]}, \quad (27)$$

这正是贝叶斯定理的一种形式：

$$p(x|y,z)=\frac{p(x,y|z)}{p(y|z)}. \quad (28)$$

利用以下恒等式，可以简化条件概率（26）

$$P_aP_\Psi P_a=|a\rangle\langle a|\Psi\rangle\langle\Psi|a\rangle\langle a|=|\langle a|\Psi\rangle|^2P_a \quad (29)$$

在分子和分母中均出现，从而导致公因子 $|\langle a|\Psi\rangle|^2$ 被约去，假定该因子不为零。因此，条件概率 (26) 简化

为公式

$$p[\mathrm{dev}(c_1,\dots c_n)|\mathrm{obs}(a,b),(A,C_1,\dots,C_n,B)]=\frac{\mathrm{tr}(P_bP_{c_n}\cdots P_{c_1}P_aP_{c_1}\cdots P_{c_n})}{\sum_{c'_1,\dots,c'_n}\mathrm{tr}\Big(P_bP_{c'_n}\cdots P_{c'_1}P_aP_{c'_1}\cdots P_{c'_n}\Big)},\qquad(30)$$

它不再依赖于 $|\Psi\rangle$。公式 (30) 被称为 ABL规则 .

3.4 时间对称性

由于迹的循环性质，ABL规则 (30) 满足以下逆序对称性:

$$p[\mathrm{dev}(c_1,\dots c_n)|\mathrm{obs}(a,b),(A,C_1,\dots,C_n,B)]=p[\mathrm{dev}(c_n,\dots c_1)|\mathrm{obs}(b,a),(B,C_n,\dots,C_1,A)].\quad(31)$$

也就是说，如果测量序列A，C_1，.....，C_n，B按相反的时间顺序进行，条件概率的数值保持不变。用第3.1小节的记号来说，ABL规则的逆序对称性 (31) 意味着，(5) 中出现的概率 $N_{ac_1\cdots c_nb}/N_{ab}$ 等于概率 $N_{bc_n\cdots c_1a}/N_{ba}$，其中 $n+2$测量序列按相反的时间顺序进行。

ABL论文将这一性质称为“时间对称性”。同样，ABL论文的标题 是《测量量子过程中的时间对称性》。

这种时间对称性的概念并不正确。按相反的时间顺序进行 $n+2$ 测量，并不是真正对实验方案进行时间反演。正如 Shimony（1996）指出并得到 Vaidman（1996b，1998）认可的那样，测量过程本质上具有时间方向性。由此在逻辑上可知，对实验方案进行真正的时间反演，不仅要颠倒 $n+2$ 测量的顺序，还要在内部反转每个测量过程本身。

这里或许可以用一个类比来说明。如果一个人先从商店买面包，之后又从商店买了水果，那么整个过程的时间反演并不是先买水果、再买面包。时间反演应当意味着类似于先卖出水果，之后再卖出面包，因为将钱换成食物这一行为进行时间反演，显然就是将食物换成钱。（想必，时间反演还会涉及倒着走路、倒着说话、倒着思考，等等。）同理，一次测量之后接着进行另一次不同的测量，其时间反演并不是仅仅让同一对测量以相反的时间顺序发生，而是意味着相应的时间反演测量以相反的时间顺序发生。

因此，正如一个真正时间对称的购物计划会包括第一次出行时购买食物、第二次出行时出售食物一样，量子系统真正时间对称的实验方案，也会包括在开始时进行正向时间测量，并在结束时进行反向时间测量。

1964年 ABL论文发表后，后续论文仍继续提倡 ABL论文中错误的时间对称性概念。例如，Aharonov 和 Vaidman 在1990年的一篇论文中就提出了这一说法，甚至将预选和后选择称为“边界条件”，却忽略了第3.2小节所列举的各种模式匹配问题：

> 然而，如果我们的任务是描述两次连续测量之间的量子系统，那么我们就知道过去和未来的边界条件。（我们假设两次测量都是完备的。）因此，对于中间的时间区间，我们拥有完全的时间反演对称性。初始测量结果对量子系统描述的贡献，是通常的波函数从过去向未来演化，即从初始测量演化到最终测量。由于时间反演对称性，最终测量的贡献应当类似：波函数从最终测量出发，沿时间反向演化至初始测量。 [Aharonov、Vaidman 1990，第 12] 页

Aharonov和Vaidman在1991年的一篇论文结论部分写道：“我们在此提出的是一种标准量子理论的新颖方法……它的一个优点是具有时间反演对称性。”（Aharonov、Vaidman 1991，第2327页）其他作者的论文也有类似表述，例如Lloyd等人在2011年发表的一篇论文，其中写道：“这是一种时间对称的量子力学表述，其中不仅指定了初始态，也指定了最终态。”（Lloyd等人 2011年，第025007-5页）

3.5 ABL论文

ABL论文的摘要以一个强有力的论断开篇：

> 我们考察这样一种主张：量子测量理论中隐含的“波包约化”[,] 在量子物理的基础中引入了一个时间不对称因素，而这又导致了不可逆性。我们认为，这种时间不对称实际上与统计系综的构建方式有关。如果我们通过使用系统的初态和末态来界定样本，以时间对称的方式构建系综，那么由此得到的概率分布也会呈现时间对称性。 [Aharonov、Bergmann、Lebowitz 1964；第 B1410 页。]

乍看之下，这些主张似乎站不住脚。正如第3.4小节已经解释的那样，很难相信仅仅通过以不同方式构建系综，就能得到时间对称的量子理论表述。ABL论文的作者并未表示他们是在DvN公理框架之外开展工作的；正如第2.1小节所述，在这一框架中，量子态的约化或坍缩源于测量过程。再者，通常的测量过程具有一定结构，持续时间非零，并且正如Shimony（1996）所强调的那样，

具有时间方向性。也就是说，测量过程具有内在的时间顺序：从准备、启动，到探测，再到记录。因此，无论人们如何尝试构建系综，只要诉诸测量过程，整个系统中就会存在某种实际的时间不对称性来源。

即使试图将测量视为公理上瞬时发生的事件，仍不得不面对这样一个事实：根据 DvN公理，量子态的时间演化在测量发生前的紧邻时刻不连续，而在测量发生后的紧邻时刻连续，且只有沿未来方向才会导出测量结果概率。测量所导致的系统时间不对称性，再一次成为无法避免的问题。

鉴于在热力学层面上，难以让宏观测量设备反向运行来实现真实的测量过程，我们很难想象如何在一段时间的两个端点都对量子态施加约化或坍缩，从而得到一种适用于任何实际实验方案的时间对称表述。我们需要在起始时刻施加正向时间测量，并在结束时刻施加不可行的反向时间测量，以此构造物理系综；但没有明确的方法能将这两个时间方向相反的测量合并为单一的概率公式。仅这些基本事实，就足以对 ABL论文试图构建的那类时间对称理论构成根本障碍。另一个后果是，“预选”和“后选择”在非常实在的物理意义上存在本质差异；这种差异并不只是前者在时间上先于后者，正如 Vaidman（1996b，1998）所承认的那样。

由此推理可知，ABL论文所考察的时间不对称性，其根源似乎并不在于系综的构造。由此推论，我们不应指望仅仅改变系综的设定方式，就能消除这种时间不对称性。

在ABL论文中再往后几段，可以看到以下论述：

> 在本文中，我们拟考察量子测量理论中时间对称性的性质。我们不打算深入探讨测量过程本身——该过程涉及原子系统与宏观设备之间的一种特殊相互作用——而是简单地接受常规理论给出的数值概率标准表达式。 [Aharonov、Bergmann、Lebowitz 1964，第 B 页1411]

人们不愿陷入测量过程的细枝末节，是可以理解的，尤其是考虑到测量问题。然而，我们仍必须考虑到这样一个事实：测量并非瞬时、不可约且毫无结构的事件；或者，如果选择将测量视为瞬时的，那么就应当注意，测量将系统量子态向过去的非连续演化与系统量子态向未来的连续演化区分开来。无论如何，测量都是一个具有时间方向的过程。

该段其余部分继续说道：

常规理论处理的是基于某些初始观测而被“预选”的量子系统系综；而我们将从中推导出这样的概率表达式：它们涉及根据既不偏向过去、也不偏向未来的数据组合所选出的系综。一种只关注此类对称选取的系综（即“时间对称理论”）的理论，将只包含关于观测概率的时间对称表达式。从逻辑上说，这一时间对称理论包含于常规理论之中，但缺少后者的一个公设。 [同上，B1411]

请注意，这里的ABL论文将从“既不支持过去也不支持未来的数据”中选出的系综视为“对称选取”的系综，并提出，一种仅限于此类系综的量子理论替代表述将“只包含观测概率的时间对称表达式”。然而，只要依赖DvN公理，或依赖任何在本质上以测量为基础的量子理论公理框架，就无法绕开预选和后选中对测量的需求。再者，ABL论文的诠释忽略了此类预选或后选中测量固有的时间方向性。正是这种忽略，令ABL论文采用了一种“时间对称性”概念，该概念所指的只是改变测量的先后顺序，而非真正将整个实验方案（包括每一次具有时间方向性的测量本身）进行时间反演。

ABL论文假定，主体系统的初始态矢量 $|\Psi\rangle$ 是给定预选可观测量的一个精确特征向量 $|a\rangle$ 。ABL论文的记号用标签d_j，…， d_n 表示中间结果，而非用 c_1，…， c_n；用 A 代替 P_a，用 B 代替 P_b，用 D_i 代替 P_{c_i}；并用斜线 / 而非竖线 | 表示“给定”分隔符。将ABL论文的记号调整为与本文的记号一致后，ABL论文版的ABL规则(30)可写为

$$\left.\begin{aligned} p(c_1,\ldots,c_n|a,b) &= \frac{p(c_1,\ldots,c_n,b|a)}{p(b|a)} \\ &= \frac{1}{H(a,b)}\mathrm{tr}(P_aP_{c_1}\cdots P_{c_n}P_bP_{c_n}\cdots P_{c_1}) \qquad \text{[ABL's eq. (2.4)]}, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

with $H(a,\ b)$ 扮演 $p(b|a)$ 的角色，并由整体归一化确定为

$$H(a,b) = \sum_{c'_1,\ldots,c'_n} \mathrm{tr}\Big(P_aP_{c'_1}\cdots P_{c'_n}P_bP_{c'_n}\cdots P_{c'_1}\Big) \qquad \text{[ABL's eq. (2.5)]}. \tag{33}$$

紧接在这些公式下方，ABL论文包含了这些陈述 :

这个表达式显然是时间对称的。如果我们将测量顺序改为 $[B, C_n, \ldots, C_1, A]$，式（2.4）、（2.5）仍保持不变。 [同上，第 B1412] 页

（32）的第一行包含了一个看起来容易引起歧义的记号

$$p(c_1,\ldots,c_n|a,b) = \frac{p(c_1,\ldots,c_n,b|a)}{p(b|a)}. \tag{34}$$

这个公式使 ABL论文左侧（34）中的条件概率看起来像是指若干独立命题 $c_1, \ldots, c_n$ 的逻辑合取，可读作“c_1 和 c_2 和 ...和 c_n”，并以若干独立命题 a, b 的逻辑合取为条件，可读作“a 和 b”。然而，若将这种含义或解释赋予 ABL论文中的条件概率，就会犯下模式匹配谬误（3）。具体而言，不能对诸如 c_2 这样的变量求和，以边缘化得到一个更短的测量序列，并跳过对中间可观测量 C_2 所做的测量。ABL论文的记号还掩盖了具有时间方向的测量在整个物理过程中的重要作用。

应当将ABL论文的公式（34）与本文中更精确的（尽管不得不承认也更繁琐的）记号（27）进行比较，该记号适用于 $|\Psi\rangle = |a\rangle$的情形：

$$p[\mathrm{dev}(c_1, \ldots c_n)|a, \mathrm{obs}(a,b), (A, C_1, \ldots, C_n, B)] = \frac{p[\mathrm{obs}(a,b), \mathrm{dev}(c_1, \ldots, c_n)|a, (A, C_1, \ldots, C_n, B)]}{p[\mathrm{obs}(a,b)|a, (A, C_1, \ldots, C_n, B)]}. \tag{35}$$

后一版本清楚地表明，dev(c_1， $\ldots c_n$)是一个原子命题，而不是若干独立命题 c_1，.....， c_n的逻辑合取。同样，obs(a， b)是一个原子命题，而不是独立命题 a 和 b的逻辑合取。后一版本还明确体现了实验方案中测量的时间指向性。

3.6 Vaidman的解释

Vaidman在1996年发表的一篇论文明确承认了预选和后选择在ABL规则中所发挥的根本不同的作用：

> 请注意 [预选] 测量与 t_1 处的测量，以及 [后选择]测量与 t_2处的测量之间的不对称性。给定一个量子系统系综，我们总是可以将它们全部制备为特定状态 $|\Psi_1\rangle$，但无法确保在 $|\Psi_2\rangle$这一特定状态中找到该系统。事实上，如果预选测量所得结果不同于投影到 $|\Psi_1\rangle$ ，我们总是可以将状态改为 $|\Psi_1\rangle$；但如果 t_2 处的测量没有显示出 $|\Psi_2\rangle$，我们唯一的选择就是将这样的系统从系综中丢弃。还请注意测量程序的不对称性。测量装置必须在测量相互作用之前被准备为“就绪”状态，而我们无法确保相互作用之后仍能找到“就绪”状态。 [Vaidman 1996b，第 3]页

然而，不久之后，该论文便搁置了这一顾虑，声称唯一相关的时间对称性概念应仅指中间测量：

> 然而，这些不对称性与我们在此考察的问题无关。对于给定的预选和后选系统，我们研究的是相对于 [中间] 时刻的 t 测量而言的对称性，而不探究如何获得这样一个系统的时间对称性。 [同上，第 4]页

The paper在题为“时间不对称偏见”的一节中重申了这一主张：

> 在我的方法中，预选态和后选态是给定的。只需讨论中间测量。因此，人们经常提出的关于后选测量结果之概率的问题是无关紧要的。在我看来，时间对称量子理论的批评者在其论证中使用了不对称性的先入之见。 [同上，第 12]页

这些表述背离了仅按字面解读 ABL论文所得出的时间对称解释，并含蓄地承认时间对称解释无法维持。

3.7 AAD 论文与不确定性原理

回顾第3.1小节中给出的自旋1/2示例，再考虑一个由 N =10,000次实验试验组成的系综，每次试验均涉及一个自旋1/2自由度；在每次试验中，系统都被制备于自旋-z 本征态 $|z+\rangle$。然而，假设随后对系统进行一次自旋-x 测量，接着进行第二次自旋-x测量，此后不再进行其他测量。如果只收集最终自旋-x测量结果为 $|x+\rangle$ 的试验，那么试验次数将减少至约 $N_{z+,x+} \approx 5{,}000$。在所有这些试验中，冯·诺依曼坍缩公理都直接意味着，第二次自旋-x测量必定给出与第一次自旋-x测量相同的结果。因此，对于这个系综，ABL比值（30）直接得到

$$\frac{N_{z+,x+,x+}}{N_{z+,x+}} \approx \frac{5{,}000}{5{,}000} = 1 = 100\% \qquad [p(x_+|z_+, x_+) \text{ in the original ABL notation}]. \tag{36}$$

请注意，此处在这一方案中出现的中间 测量值，作为分子 N_{z+}的第二个下标出现，$_{x+,\ x+}$，对应一次自旋-x 测量，介于预选的自旋-z 值与后选的自旋-x 值之间。

如果改为考虑一个由 $N = 10,\ 000$ 次试验构成的系综，其中自旋1/2自由度制备在自旋-z 本征态 $|z+\rangle$，随后进行第二次 自旋-z 测量，再进行一次自旋-x 测量，并且只保留最终结果为 $|x+\rangle$ 的试验，那么试验次数仍约为 $N_{z+,\ x+} \approx 5,\ 000$；冯·诺依曼坍缩公理保证，每次第二次自旋-$z$ 测量的结果都是 $|z+\rangle$。因此，对于这个系综，ABL比值 (30) 显然给出

$$\frac{N_{z+,z+,x+}}{N_{z+,x+}} \approx \frac{5{,}000}{5{,}000} = 1 = 100\% \qquad [p(z_+|z_+, x_+) \text{ in the original ABL notation}]. \tag{37}$$

这里的中间测量值作为分子 $N_{z+,\ z+,\ x+}$ 的第二个下标出现，现在对应一次自旋-z 测量，介于预选的自旋-z 值与后选的自旋-x 值之间。

我们是否有理由根据 (36) 和 (37) 得出结论：在这些方案各自的中间步骤中测量的自旋-x和自旋-z 可观测量，尽管由不对易自伴算符表示，却都以 100% 的概率出现，因而违反了不确定性原理？答案似乎是否定的，因为 (36) 和 (37) 是系综性质，所指的是

根本不同的系综；因此，若得出肯定结论，恰恰就是犯了系综谬误 (1)。

也不能仅仅因为比值（36）和（37）都可以在实验室中通过实验测量，就据此断言它们意味着违反了不确定性原理。若作出相反断言，便是犯了测量主义谬误（4）。

此外，请注意，对 $|x+\rangle$进行后选择发挥了至关重要的作用。若没有这次后选择，频率比（36）和（37）就都会是 $5{,}000/10{,}000 = 50\%$，完全符合不确定性原理。前面的例子清楚地表明，涉及后选择时——事实上，刻意采用后选择时——试图进行统计推断会带来怎样的危险。这种不当采用后选择的做法就是后选择谬误（2），也进一步说明了为什么应当怀疑前面的例子是否真的构成了不确定性原理的例外。

然而，Albert、Aharonov 和 D'Amato（AAD）于1985年发表的一篇论文，题为《量子力学的奇特新统计预测》，刊载于期刊《物理评论快报》（Albert、Aharonov、D'Amato1985），主张 ABL规则提供了一种以这种方式违反不确定性原理的方法：[5]

> 假设 [给定的量子] 系统在时刻 t_i 被测得处于态 $|A = a\rangle$（其中 A表示该系统某一组完备的对易可观测量，而a 表示这些可观测量的某一组特定本征值），并且在时刻 t_f（$t_f > t_i$）被测得处于态 $|B = b\rangle$。这些结果对于在它们之间的区间（$t_i < t < t_f$）内可能进行的其他实验的结果意味着什么？结果表明，在该区间内对某一组完备可观测量 C 进行测量，如果进行了该测量，就会发现 $C = c_j$的概率（该概率最早由Aharonov、Bergmann和Lebowitz写出）为
>
> $$P(c_j) = \frac{|\langle A = a|C = c_j\rangle|^2 |\langle C = c_j|B = b\rangle|^2}{\sum_i |\langle A = a|C = c_i\rangle|^2 |\langle C = c_i|B = b\rangle|^2} \qquad \text{[AAD's eq. (1)]}; \qquad (38)$$
>
> 而该公式还蕴含着其他结论，例如，$P(a) = P(b) = 1$。因此，这些作者认为，在这样的时间间隔内，这样一个系统必定同时具有 A 和 B的确定无色散值，无论 A 和 B 是否恰好对易。在他们看来，对过去和未来作出的恰当量子力学描述本质上有所不同：我们对过去的认识不像我们预测未来的能力那样受到不确定性关系的限制；事实上，就过去而言，量子形式体系本身要求 违反这些关系。[同上，第 5–6 页，原文着重强调]

[5]所引段落将这些主张归于最初ABL论文的作者。然而，正如Sharp和Shanks后来指出的，似乎没有证据表明这些观点出现在最初的1964 ABL论文中："实际上，Albert等人将这些结论归于Aharonov等人（1964），但我们在该著作中找不到任何一条结论的证据。"（Sharp和Shanks，1993年，第494页，脚注2）AAD 论文所指的可能是前一年发表的另一篇论文（Aharonov、Albert，1984年）。

AAD 论文承认，鉴于各种不可能性定理，关于不对易可观测量具有无色散值以及违反不确定性原理的说法，听起来或许令人惊讶。尽管如此，AAD 论文仍进一步坚持道：

> 那么，认为（1）为 A 和 B赋予确定值，是否有误或会造成误导？是（1）本身导致了某种矛盾吗？如何导致？矛盾在哪里？
>
> 并非如此。结果表明（这正是本文要探讨的主题），量子统计具有一种此前从未发现的显著性质：量子力学系统在两次测量之间的间隔内，不满足这一假设（即关于投影算符的假设），因而能够避开其后果。 [同上，第6页，原文着重]

这一错误结论可能再次源于记号选择过于简略。若采用（27）中更为完整、精确的记号，AAD 论文中的概率（38）本应写作

$$p[\mathrm{dev}(c_j)|a,\mathrm{obs}(a,b),(A,C,B)]=\frac{p[\mathrm{obs}(a,b),\mathrm{dev}(c_j)|a,(A,C,B)]}{p[\mathrm{obs}(a,b)|a,(A,C,B)]}. \tag{39}$$

如第3.1小节所述，概率（39）的操作意义涉及这样一个比例：在适当构造的系综中，其成员对由 C表示的整组可观测量进行中间测量后，显示中间测量结果 c_j 的比例。选择 C 进行中间测量，是界定相关物理系综的关键。

相反，若要询问对 A进行中间测量时得到 a 的概率，就意味着要构建一种不同的 实验方案，产生一个不同的 物理系综；对于该系综，这个比值为 1：

$$p[\mathrm{dev}(a)|a,\mathrm{obs}(a,b),(A,A,B)]=\frac{p[\mathrm{obs}(a,b),\mathrm{dev}(a)|a,(A,A,B)]}{p[\mathrm{obs}(a,b)|a,(A,A,B)]}=1. \tag{40}$$

同样，若要询问对 B 进行中间测量时得到 b 的概率，就意味着要构建另一种 实验方案，产生一个独立的物理系综；对于该系综，这个比值仍为 1：

$$p[\mathrm{dev}(b)|a,\mathrm{obs}(a,b),(A,B,B)]=\frac{p[\mathrm{obs}(a,b),\mathrm{dev}(b)|a,(A,B,B)]}{p[\mathrm{obs}(a,b)|a,(A,B,B)]}=1. \tag{41}$$

这里的三个概率 (39)、(40) 和 (41) 分别对应三个独立的物理系综，因此，试图根据其中一个或另外两个，对任何一个系综得出推断性结论，都是错误的。正如前文所述，当实验设置涉及后选择时，贸然对统计推断下结论也很危险，否则就可能犯下后选择谬误 (2)。

为了使其完整 全然清楚的是，为什么 AAD 作者没有在不确定性原理中发现漏洞 -

原理。为了说明如何通过实验验证不确定性原理，给出一个操作层面的论证会很有帮助。设想制备一个由相同量子系统组成的单一物理系综，其定义仅包括将系综中的每个成员制备或“预选”到相同的初始量子态 ρ。接着，对系综中一半成员测量某个可观测量 C，对另一半成员测量另一个可观测量 D ；其中，作为系统希尔伯特空间上的自伴算符， C 和 D可能不对易，即 $CD - DC \neq 0$。也就是说，在受控实验中，先固定 ρ 作为整个物理系综的定义，然后在该固定系综中独立改变 C 或 D 的选择，不进行任何后选择。由此可知， C 和 D 的测量结果分布的相应离散程度或标准差 ΔC 和 ΔD 的乘积为 $\Delta C\,\Delta D$ ，满足以下不等式

$$\Delta C\,\Delta D \geq \frac{1}{2}|\mathrm{tr}[(CD - DC)\rho]|, \tag{42}$$

这就是不确定性原理。在某些情况下，例如粒子位置 $C = x$ 和相应的动量 $D = p_x$，(42) 式右侧会简化为 $\hbar/2$，无论初始量子态 ρ如何， C 和 D 都不可能同时具有为零的离散度。

相比之下，对于 AAD论证，不仅明确地进行了一种后选择，而且还必须有两个 根据不同 实验方案产生的物理系综：第一个系综通过测量时间顺序 A， C， B产生，并只保留其中满足 $A = a$ 和 $B = b$的成员；第二个系综通过测量时间顺序 A， D， B产生，并同样只保留满足 $A = a$和 $B = b$的成员。至关重要的是，请注意，在产生这两个系综的实验方案中，若纳入 B ，就必然也要纳入 C 或 D；这与上一段中为不确定性原理构造的单一系综不同。对于这两个系综中的每一个，针对 B 的物理后选过程都隐含地依赖于此前对 C 的测量（对于第一个系综），或此前对 D 的测量（对于第二个系综）。因此，不能设想用 D 替换 C ，而同时 不改变针对 B的物理后选过程。诚然，用 D 替换 C 不会改变对 A的预选，但若对 B 的后选择也作同样假设，就恰恰是在假定一种错误的量子测量时间对称性；本文已在第3.4小节中对此进行了严格驳斥。

因此，对于 AAD论证，不可能通过固定在 A 上的预选和在 B 上的后选择来进行受控实验，以产生单一的物理系综，然后再独立改变对 C 或 D 的选择，从而得到对不确定性原理的违反。对中间可观测量 C 或 D 的选择与在 B 上的后选择之间缺乏独立性，这一点被 AAD 版本的 ABL规则（38）中使用的记号 $P(c_j)$所掩盖，也被原始 ABL规则（32）中使用的记号 $p(c_1, \ldots\ldots, c_n|a, b)$所掩盖；但在本文公式（30）中对 ABL规则采用的更精确记号，则清楚地揭示了这一点。

目前的论　　讨论凸显了教科书量子理论的另一个重要特征，即　　t

这一点从第2.1小节对DvN公理的回顾中可以清楚看出：至少在某些情况下，教科书量子理论能够对一个单个量子系统作出具体而可靠的预测，而无需诉诸系综。这一特征部分源于这样一个事实：DvN公理规定，可观测量是在单系统层面而非系综层面赋予的。因此，谈论测量单个系统的可观测量、将测量结果视为关于该单个系统的陈述，以及将测量概率和期望值视为针对该单个系统的可观测量，都是有意义的。（教科书量子理论的这一关键特征后来也被发现对弱值具有重要影响，相关内容将在其他工作中讨论。）

作为一个与不确定性原理密切相关的例子，考虑一个具有两个不对易可观测量 C 和 D的单一系统。如果反复测量 C，且测量之间不给系统留出足够时间进行内部演化，那么冯·诺依曼坍缩公理将确保每次都能可靠地获得相同结果，误差范围也相当小。然而，若在此期间测量可观测量 D，后续对 C的测量通常会发生显著变化，其变化程度部分取决于对易子 $CD - DC$。这种实验上的不对易性，存在于代数上不对易的可观测量 C 和 D 之间，或许是所有量子系统最普遍的特征，并在单系统层面赋予不确定性原理具体的操作意义。尤其是，不确定性原理的核心内容之一，恰恰在于它对单一系统具有这一含义。

相比之下，AAD论证始终需要（多个）系综，因此它所涉及的完全是系综中的行为模式。因此，AAD论证原则上对单一系统毫无意义，因而不可避免地遗漏了不确定性原理的一个核心部分。因此，更进一步，若不犯系综谬误（1），就不能将AAD论证解读为对单一系统的不确定性原理提供任何真正的洞见，更不用说认为它提供了一个漏洞。

自 AAD 论文发表以来，多篇论文从更具体的角度指出，AAD 论文未能证明 ABL规则支持反事实推理。例如，Bub 和 Brown 在一篇 1986年 的论文中写道：

> 注意到， [AAD] 论证存在谬误的一种方式是：对于预选 $[a]$ 系综，经由中间的 $[C]$ 测量后被后选为 $[b]$ 的子系综，与经由中间的 $[D]$测量后被后选为 $[b]$ 的子系综并不相同。 [Bub、Brown，1986年，第 2338]页

Sharp 和 Shanks 在一篇 1993年 的论文中提出了类似的论证，并得出了与本文结论相差不大的结论：

> 正确解读后，ABL规则只对同时受到前选择与后选择的系统所进行的实际测量结果作出预测。如此解读，该规则并不与正统量子力学相冲突，但也不会为量子力学中的基本诠释问题带来新的见解。 [Sharp, Shanks 1993年，第 499]页

在探讨量子理论一致历史诠释的论文中，也能看到针对将ABL规则用于反事实的类似批评（Griffiths 1984年、Cohen 1995年、Kastner 1999年）。

4 结论

本文回顾了 ABL规则，并对研究文献中对它的若干解读方式提出了质疑。具体而言，本文论证了ABL规则并未提供量子理论的时间对称表述，也不会导致对不确定性原理的真正违背。在此过程中，本文指出了与这一批判性分析相关的若干谬误，包括系综谬误（1）、后选择谬误（2）、模式匹配谬误（3）和测量主义谬误（4）。

这些质疑值得讨论吗？ABL规则是否真正具有时间对称性，或者后选择是否会导致错误的统计推断，这些问题真的重要吗？答案是肯定的，不仅出于哲学严谨性的考虑，也因为自2000年以来，物理学研究大量运用了关于 ABL规则和后选择的这些解释性主张，而这类研究值得审视。具体而言，后续工作将探讨 ABL规则与弱值之间的联系（Barandes 2026）。

从更广泛的层面来看，本文应被视为一项论证：反对轻率地利用后选择来制造足以发表的结果；同时也呼吁研究期刊坚持要求作者作出更审慎的说明，阐明他们使用后选择时，所得结果确实是由量子理论本身产生的，而非仅仅是选择偏差的表现。令人欣慰的是，研究文献中已经出现了这种重要的自我纠正式反思（例如，参见 Wharton、Price 2025）。

致谢

作者特别感谢 David Albert、David Kagan、Logan McCarty、Xiao- Li Meng、John Norton、James Robins、Yossi Sirote、Kelly Werker Smith、Lev Vaidman、Larry Wasserman 和 KenWharton，感谢他们参与有益的讨论。

参考文献

[1] Y. Aharonov 和 D. Z. Albert。“通常的时间演化概念是否适用于量子力学系统？I”。《物理评论*D*》，29(2):223，1984年1月。doi:10.1103/PhysRevD.29.223。

[2] D. Z. Albert、Y. Aharonov 和 S. D’Amato。《量子力学的奇特新统计预测》。《物理评论快报》，54(1):5–7，1985年1月。doi:10.1103/ PhysRevLett.54.5。

[3] Y. Aharonov、D. Z. Albert 和 L. Vaidman。《自旋1/2粒子的自旋分量测量结果如何可能为100》。《物理评论快报》，60(14):1351，1988年4月。doi:10.1103/PhysRevLett.60.1351.[4] Y. Aharonov、P. G. Bergmann 和 J. L. Lebowitz。《测量量子过程中的时间对称性》。《物理评论》，134(6B):B1410，1964年6月。doi:10.1103/ PhysRev.134.B1410.[5] C. Akers、N. Engelhardt、D. Harlow、G. Penington 和 S. Vardhan。《非等距编码与复杂性揭示的黑洞内部》。《高能物理学杂志》，2024(6):155，2024年6月。arXiv:2207.06536, doi:10.1007/JHEP06(2024)155.[6] Y. Aharonov 和 L. Vaidman。《两次测量之间的时间区间内量子系统的性质》。《物理评论*A*》，41(1):11，1990年1月。doi:10.1103/PhysRevA.41.11.[7] Y. Aharonov 和 L. Vaidman。《给定时刻量子系统的完整描述》。《物理学杂志*A*：数学与一般》，24(10):2315，1991年1月。doi:10.1088/0305-4470/24/10/018.[8] Y. Aharonov 和 L. Vaidman。《一扇快门如何关闭 N 狭缝》。《物理评论*A*》，67(4):042107，2003年4月。arXiv:quant-ph/0206074v1，doi:10.1103/PhysRevA. 67.042107.[9] J. A. Barandes。《弱值的问题》。进行中的研究，2026年。[10] J. Bub 和 H. Brown。《同时经过预选和后选的量子系综的奇特性质》。《物理评论快报》，56(22):2337–2340，1986年6月。doi:10.1103/PhysRevLett.56.2337.[11] J. Berkson。《四格表分析在医院数据中的应用局限》。《生物统计学通报》，2(3):47–53，1946年6月。URL: http://www.jstor.org/stable/3002000.[12] O. Cohen。《预选和后选量子系统、反事实测量与一致历史》。《物理评论*A*》，51(6):4373–4380，1995年6月。doi: 10.1103/PhysRevA.51.4373.[13] S. R. Cole、R. W. Platt、E. F. Schisterman、H. Chu、D. Westreich、D. Richardson 和 C. Poole。《通过对碰撞变量进行条件化说明偏倚》。《国际流行病学杂志》，39(2):417–420，2009年11月。arXiv:https://academic.oup.com/ije/article-pdf/39/2/417/18480441/dyp334.pdf，doi:10.1093/ije/dyp334.[14] P. A. M. Dirac。《量子力学原理》。牛津大学出版社，第1版，1930年。

[15] H. Everett III。“宇宙波函数理论”。未发表的博士论文草稿（137页），普林斯顿大学，1956年。[16] H. Everett III。“量子力学的‘相对态’表述”。《现代物理评论》，29(3):454–462，1957年7月。doi:10.1103/RevModPhys.29.454。[17]M. Gell-Mann 和 J. B. Hartle。“量子力学与量子宇宙学中的时间对称性与非对称性”。载于 J. J. Halliwell、J. Pérez-Mercader 和 W. H. Zurek（编），时间非对称性的物理起源，第311–345页，1994年。arXiv:gr-qc/9304023，doi:10.48550/arXiv.gr-qc/9304023。[18] R. B. Griffiths。“一致历史与量子力学诠释”。《统计物理学杂志》，36(1/2):219–272，1984年。doi:10.1007/BF01015734。[19] D. Harlow。“耶路撒冷黑洞与量子信息讲座”。《现代物理评论》，88(1):015002，2016年2月。doi:10.1103/RevModPhys.88.015002。[20] M. A. Hernán、S. Hernández-Díaz 和 J. M. Robins。“选择偏倚的结构方法”。《流行病学》，15(5):615–625，2004年9月。doi:10.1097/01.ede. 0000135174.63482.43。[21] G. T. Horowitz 和 J. Maldacena。“黑洞最终态”。《高能物理学杂志》，2004(02):008，2004年。arXiv:hep-th/0310281，doi:10.1088/1126-6708/2004/02/008。[22] J. R. Hance、J. Rarity 和 J. Ladyman。“弱值与量子粒子的过去”。《物理评论研究》，5(2):023048，2023年4月。arXiv:2109.14060，doi:10.1103/PhysRevResearch.5.023048。[23] J. E. Huth。《寻路的失传技艺》。哈佛大学出版社，2013年。[24] R. E. Kastner。“三盒子‘悖论’及拒绝反事实使用ABL规则的其他理由”。《物理学基础》，29(6):851–863，1999年6月。arXiv:quant-ph/9807037，doi:10.1023/A:1018865010735。[25] R. E. Kastner。“挡板、盒子，但没有悖论：量子理论中的时间对称性谜题”。《科学哲学国际研究》，18(1):89–94，2004年。arXiv:quant-ph/0207070，doi:10.1080/02698590412331289233。[26] S. Lloyd。“最终态投影模型中几乎确定地逃离黑洞”。《物理评论快报》，96(6):061302，2006年2月。arXiv:quant-ph/0406205，doi:10.1103/PhysRevLett.96.061302。[27] S. Lloyd、L. Maccone、R. Garcia-Patron、V. Giovannetti 和 Y. Shikano。“通过后选择隐形传态实现时间旅行的量子力学”。《物理评论*D*》，84(2):025007，2011年7月。arXiv:1007.2615，doi:10.1103/PhysRevD.84.025007。

[28] A. Shimony。“对测量过程中时间对称性的贝叶斯考察”。*Erkenntnis*，45(2/3):337–348，1996年11月。URL：http://www.jstor.org/ stable/20012734。[29]W. D. Sharp 和 N. Shanks。“ 时间对称量子力学的兴衰 ”。科学哲学，60(3):488–499，1993 年 9 月。URL：https://www.jstor.org/stable/188088;https://doi.org/10.1086/289749，doi: 10.1086/289749。[30]L. Vaidman。“为时间对称量子理论辩护”。*arXiv*电子预印本，第quant–ph/9609007页，1996年9月。arXiv:quant-ph/9609007，doi:10.48550/ arXiv.quant-ph/9609007。[31]L. Vaidman。“弱测量实在性要素”。《物理学基础》，26(7):895–906，1996年7月。arXiv:quant-ph/9601005，doi:10.1007/BF02148832。[32] L. Vaidman。“时间对称量子理论”。*Fortschritte der Physik*，46(6- 8):729–739，1998。URL：https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-3978(199811)46:6/8<729:: AID-PROP729>3.0.CO;2-Q，arXiv:quant-ph/9710036，doi:10.1002/(SICI) 1521-3978(199811)46:6/8<729::AID-PROP729>3.0.CO;2-Q。[33] J. von Neumann。《量子力学的数学基础》。柏林：施普林格，1932年。[34] K. Wharton 和 H. Price。“没有纠缠的贝尔不等式违背？这只是后选择”。*arXiv*预印本，2025。arXiv:2508.13431，doi:10.48550/arXiv. 2508.13431。