arXiv:2602.07420v1 [math.AG] 7 Feb 2026

¨具有 nef 反典范丛的紧致凯勒簇的基本群

XIN FU *，BIN GUO† ，JIAN SONG††，JUANYONG WANG **

Abstract. M. P˘aun（1997，2017）证明，若紧致凯勒流形的反典范丛 $-K_X$ 数值有效，则其基本群 X 几乎阿贝尔。本文应用 Guo-Phong-Song-Sturm 最新发展的凯勒空间几何分析理论，研究具有轻微奇点的紧致凯勒簇的基本群。我们首先将 P˘aun 的结果推广至对数典范对（X，Δ），其中 X 光滑且 $-$（$K_X+\Delta$）数值有效；还将其推广至满足关于奇点的适当假设的紧致凯勒流形¨，其中 $-K_X$ 伪有效，且c_1（$-K_X$）。我们进一步证明，对于三维对数典范对（X，Δ），若X 为 klt，则当 $-$（$K_X+\Delta$）数值有效时，π_1（X）几乎阿贝尔。此外，作为证明这些结果的主要工具之一，我们证明了 Fujiki 类 $\mathcal{C}$ 中紧正规复簇 X 的阿尔巴内塞映射满射；这些簇存在有效的 $\mathbb{R}$-除子 Δ，使得对（X，Δ）为对数典范对，且反对数典范除子 $-$（$K_X+\Delta$）数值有效。这推广了射影簇的相应定理（Zhang，2005）、klt 对的相应定理（Matsumura-Wang-Wu-Zhang，2025）以及对数光滑情形的相应定理（Fu-Han-Zou，2025）。

1. Introduction

本文中，我们始终在复数域 $\mathbb{C}$上工作。为简便起见，我们对线丛的张量积采用加法记号（例如，$L+M:=L\otimes M$表示线丛 L 和 M的张量积），并将其与除子的加法交替使用；此外，对于一对 $(X,\ \Delta)$，其中 X 是复代数簇，Δ 是一个 $\mathbb{R}$-除子，且 $K_X+\Delta$ 是一个 $\mathbb{R}$-线丛，依照惯例，我们称 $K_X+\Delta$ 为 $(X,\ \Delta)$的对数典范除子，尽管它未必是一个 $\mathbb{R}$-除子。纤维化 是指具有连通纤维的真满射态射。

1.1. **研究动机。** 具有轻度奇异性的紧致 K¨ahler 流形及其数值有效的反典范除子，是卡拉比-丘流形和 Fano 簇的自然推广，尤其是在 Birkar-Zhang 提出的广义对框架下[6], ，过去 30 年来一直受到广泛研究。尽管与这些簇相关的典范纤维化结构（即阿尔巴内塞映射和 MRC 纤维化）已通过一系列后续研究得到阐明 [35, 101, 102, 78,

Xin Fu 获得中国国家重点研发计划项目 2024YFA1014800 和国家自然科学基金项目 12401073 的资助。Bin Guo 和 Jian Song 部分获得美国国家科学基金会项目 DMS-2203607 和 DMS-2303508，以及 Simons 基金会合作资助 946730 的资助。Juanyong Wang 获得国家自然科学基金（项目编号：12301060 和 12288201）及中国国家重点研发计划（项目编号：2021YFA1003100）的资助。

79, 21, 22, 18, 97, 73, 74], 它们的基本群仍远未得到充分理解。事实上，我们有如下猜想:

猜想 1.1。 设 X 是一个紧致正规 *Kähler* 簇，假设 X 上存在一个有效除子 Δ，使得 (X, Δ) 构成一个对数典范（对数典范）对，并且反对数典范除子 $-(K_X + \Delta)$ 是数值有效的。那么基本群 $\pi_1(X_{\mathrm{reg}})$ 几乎阿贝尔。

如果 X 光滑且 $\Delta = 0$，则该猜想已经得到彻底解决，这基本上归功于 M. Păun [77]（结合关于阿尔巴内塞映射[79]的满射性结果）。Păun 的结果随后由 [72]推广到了轨形情形。当 X 奇异或 $\Delta \neq 0$ 时，除以下两个“极端”情形外，该猜想仍然在很大程度上尚未解决:

- 如果 (X, Δ) 是弱法诺（即 $-(K_X + \Delta)$ 是大且数值有效的），则该猜想可归约到 klt 情形，并被称为 Gurjar-Zhang 猜想（见 [59, 60]）。在这种情形下，该猜想的一个弱形式（针对 étale 基本群）由 [98, 51], 证明；随后，L. Braun [10] 基于 Tian-Xu[93]的思想，在此情形下完全解决了该猜想。

- 若 $\Delta = 0$, X 是卡拉比-丘簇（即 $K_X \equiv 0$），则 Greb-Guenancia-Kebekus [50, 推论 13.10] 证明，$\pi_1(X_{\text{正则轨迹}})$ 的任何有限维表示都具有几乎阿贝尔的像。相关结果见 [50, 定理 13.1]和 [52,命题 8.23] 。

由于缺乏代数几何和复微分几何方面的工具，研究正则轨迹 X_{reg}的基本群相当困难，因此本文转而考察簇 $\pi_1(X)$ 本身的基本群。类似于猜想 1.1，我们也有关于 $\pi_1(X)$ 的几乎阿贝尔性猜想。

猜想 1.2. 设 X 是一个紧致正规 *Kähler* 簇，假设 X 上存在一个有效除子 Δ，使得(X, Δ) 是一个对数典范对，且反对数典范除子 $-(K_X + \Delta)$ 是数值有效的。那么基本群 $\pi_1(X)$ 是几乎阿贝尔的。

注意，根据 [47, §0.7(B), 第33] 页，我们有一个满射 $\pi_1(X_{\mathrm{reg}}) \twoheadrightarrow \pi_1(X)$，这意味着 $\pi_1(X_{\mathrm{reg}})$ 包含的信息比 $\pi_1(X)$ 更多，尽管前者通常比后者容易处理得多；事实上，对于奇异簇 X，要理解其拓扑，我们不仅需要了解它的 étale 覆盖（由 $\pi_1(X)$ 编码），还需要了解其准-étale 覆盖（由 $\pi_1(X_{\mathrm{reg}})$ 编码）。特别地，我们看到猜想1.2确实是猜想1.1的推论。

此外，在 klt 情形下， [51, 定理 1。5] 和 [13, 命题 1。3] 使我们能够将猜想 1.1 和1.2 缩减到极大准-étale 簇的情形（参见 [73,定义 2。11]）；鉴于 [73], 建立的结构定理，如果 X 是射影的，我们还可以进一步将猜想1.1（分别将猜想1.2）缩减到有理连通簇和 Calabi-Yau 簇的情形（分别缩减到

Calabi-Yau 簇的情形，因为根据[13, 定理 3。5]，有理连通簇是单连通的）。对于这两个猜想，对数典范情形都要困难得多。

最后，我们指出猜想1.1 和1.2与 Koll´ar([66]) 及 Campana([15]) 的著名猜想之间的关系。

首先，显然，在假设好极小模型存在的前提下，猜想 1.2 蕴含 Koll´ar 的下述猜想：

猜想 1.3 ([66, 4.16，第54]页）。设 X 是一个 n维射影流形，且 $\kappa(X)=0$，则 $\pi_1(X)$ 是几乎阿贝尔的。

Koll´ar 的猜想在复维数 3 [66] 和 4 [52] 的情形下已得到证明，在更高维数下则基本上仍未解决。

此外，猜想 1.2 和猜想 1.3 都是 Campana 关于特殊簇的阿贝尔性猜想 [15, 猜想 7.1] 的特例。应注意，阿贝尔性猜想的轨形版本 [15, 猜想 7.3] 对数典范对并不成立， [12, 例 10.2]对此作了说明。事实上，我们将在 §3.3 中证明，猜想 1.1 陈述中的簇 X （分别地，对 (X,Δ)）按照 [15, 定义 2.1(2)] 的意义是特殊的（分别地，若 Δ 是一个 $\mathbb{Q}$-除子，则按照 [15,定义 2.41] 的意义是一个特殊轨形）。若 X 是射影的，这些特殊性结果已由 F. Campana 在 [17, 定理 10.3] 中证明。此外，阿贝尔性猜想的线性版本 [15, 猜想 7.1] 已由 [15, 定理 7.8] 证明（另见 [71,命题 3.9]）。

1.2. **主要结果**。 K¨ahler度量测度空间 [25, 83, 84, 85, 87, 88, 55, 56, 57, 58, 44, 29] 的最新进展，通过非线性偏微分方程，为复几何与微分几何搭建了关键的桥梁。具体而言，本文中，这类K¨ahler空间 [87, 44]上的RCD结构使得黎曼几何能够应用于具有奇点的局部和整体K¨ahler空间的几何与拓扑结构。这个令人振奋的新研究领域中的一个主要问题是以下猜想。

猜想 **猜想 1.4.** 设 X 是一个具有*klt*奇点的正规*K¨ahler*簇。假设 *(1)* ω 是一个*Kähler*流，其体积测度为 L^p，其中 $p>1$；*(2)* ω 的*Ricci*流有下界 $-\omega$。*(3)* ω 在 X的*Zariski*开子集 X° 上光滑。

于是，度量测度空间 （X°、 ω、 ω^n）的度量完备化是一个与 X同胚的非塌缩*RCD*空间。

猜想1.4 在三维射影簇的情形下 [44]以及在其奇点可以通过相对数值有效反典范丛¨或相对有效反典范丛 [87] 得到消解的Kähler空间的情形下 [44]得到证实。

我们的第一个主要结果将 P˘aun 定理推广到 lc对（X,Δ），其中 Δ 始终表示一个有效 $\mathbb{R}$-除子（除非另有说明，不必具有简单正交支撑）。更精确地说，我们证明如下定理：

定理 1.1. 设 X 是一个紧致 *klt K¨ahler* 簇，并配以一个有效 $\mathbb{R}$-除子 Δ，使得 (X, Δ) 是对数典范的，且 $-(K_X + \Delta)$ 是数值有效的。则基本群 $\pi_1(X)$ 是几乎阿贝尔的，如果猜想*1.4* 成立。

定理 1.1 展示了复偏微分方程、黎曼几何、代数几何与拓扑之间的联系。我们将证明，只要 1.4 中的猜想总是成立，如果 X 是光滑的，或者维数为$_{\mathbb{C}}\, X = 3$，这便立即导出以下推论1.1。

推论 1.1. 设 X 是一个紧致 *klt K¨ahler* 簇，配有一个有效的 $\mathbb{R}$-除子 Δ，使得(X, Δ) 是对数典范的，且 $-(K_X + \Delta)$ 是数值有效的。那么，在以下两种情形中的任意一种下，基本群 $\pi_1(X)$ 都是几乎阿贝尔群：

(1) X 是光滑的；

(2) 维数维数$_{\mathbb{C}}\, X = 3$。

我们指出，对于高维奇异簇，在某些特殊情形下，若假设 X存在某种特殊的奇点消解，则猜想 1.2 3.6也可以得到证明，见定理。

在推论 1.1的陈述中，若假设对偶（X， Δ）是 klt 的，则情形（1）可由结构定理 [74, 定理 1。2] 以及经典的 Beauville-Bogomolov分解 [2]得到；若进一步假设 X 是射影的，则情形（2）可由 [73, 定理 1。2]和 [11, 定理 6] 得到。然而，要建立对数典范情形，还需要付出大量额外努力，因为形如[74] 的结构定理不成立（见 [3]）。事实上，即使是对数 Calabi-Yau 情形，作为上述推论 1.1的特殊情形，也完全尚无定论。我们的方法不依赖结构定理，并为此类问题提供了统一的处理方式。事实上，在对奇点作出自然假设的条件下，我们可以证明紧致 K¨ahler 流形 X 具有伪有效反典范丛$-K_X$ 的如下稍广义结果： $c_1(-K_X)$ 。

定理 1.2。设 X 为紧致*K¨ahler*流形。假设 $-K_X$ 是伪有效且渐近 *klt* 的。则基本群 $\pi_1(X)$ 是几乎阿贝尔的。

容易看出，推论1.1 的情形（2）确实是定理1.2的一个特例（见引理2.1）。这里，渐近 *klt*类可视为有效 $\mathbb{Q}$-除子（具有对数典范奇点）的解析对应物（或在某种意义上是其推广）；这类除子最初在双有理几何中被考虑，我们将其精确定义推迟至定义2.1。

本文的第三个主要结果将Qi Zhang关于具有nef反对数典范除子的对数典范对之Albanese映射的满射定理推广至Fujiki类 $\mathcal{C}$中可能奇异的复簇。它是定理1.1之证明的主要组成部分之一，并且也具有独立的意义。

定理1.3。 设 X 是 *Fujiki* 类 $\mathcal{C}$中的紧正规复簇。假设在 X 上存在一个有效的 $\mathbb{R}$-除子 Δ ，使得 (X, Δ) 是对数典范的，并且

$-(K_X+\Delta)$ 是数值有效的。那么， X 的阿尔巴内塞映射 $\mathrm{alb}_X\colon X \dashrightarrow \mathrm{Alb}_X$的任意光滑模型都是一个纤维化，也就是说，是一个具有连通纤维的真满射态射。

这里，若一个紧致复代数簇与某个紧致 ℭ 凯勒流形双有理等价，则称其属于 Fujiki 类¨；或者等价地，根据 [94, 定´理`， 3], 若它是某个紧致凯勒流形的像¨，则也属于 Fujiki 类。定理1.3 可视为以下结果的推广：

- 若 X 光滑且 $\Delta = 0$，则 alb 的满射性$_X$ 已在 [79,定理 14]中得到证明。
- 若 X 是射影的（但不一定光滑），则定理 1.3已在 [102]中确立（另见 [101]）。其他结果（例如平坦性和半稳定性）已在 [97, 引理 41] （X 假设为 Cohen-Macaulay）、 [42,命题 41] （X 假设光滑）以及 [3, 定理 13]中得到证明。
- 若（X， Δ）是一个 klt对，则定理 1.3 由 [74, 推论 313]证明。
- 若（X， Δ）是对数光滑的，则通过建立纤维上 Kähler–Einstein 度量变分的正性定理，在 [45, 定理 1.3] 中证明了 alb_X 的满射性。

我们指出，只要证明了 alb_X 的满射性，就可以由 [96, 定理C]轻易推出纤维的连通性。

此外，通过应用相同的论证，我们推广了 [27,主定理] 中的 Chen-Zhang 定理和 [39, 定理 B], 中的 Deng 定理，从而回答了 Demailly-Peternell-Schneider 提出的一个经典问题 [36, 问题 4.13.a], ，见定理 3.2。

1.3. **证明策略与主要思路。** 首先，我们简要说明 P˘aun 在 1.1 （或 1.2）中关于情形 X 光滑且 $\Delta = 0$的猜想证明。该证明基于以下三个主要要素：

(a) Margulis 引理（见 [77, 定理，第1250] 页，或定理2.2），由 Cheeger-Colding 建立 [26] ，并由 [63]推广。(b) 构造一族 K¨ahler 度量 ω_ϵ ，使其属于固定的 K¨ahler 类，并满足 Ric(ω_ϵ) $\geq -\epsilon\omega_\epsilon$；这可由 Aubin-Yau定理 [1, 99]实现。(c) 阿尔巴内塞映射的满射性：在射影情形下由 [101] 建立，并由¨推广到 Kähler 情形。(c) 与[14, Corollaire 3.1] 结合可得， $\pi_1(X)$ 几乎阿贝尔当且仅当它虚幂零。

(b) 与 (a) 结合可知，存在一个一致常数 r，它仅取决于 X 的维数，使得在 $\pi_1(X)$ 中，半径为 r 的测地球的基本群的像是虚幂零的。 [77] 的关键观察如下

(d) 对于适当选取的点 $x \in X$ ，且 ϵ 充分小时，半径为 r 的测地球（相对于某个 ω_ϵ ）的包含映射诱导基本群的满射。

本文沿用 [77] 的思路来证明定理 1.1、推论1.1 1.2 和 3.6。为此，只需将 (a)(b)(c)(d) 推广到对数典范

对的情形。(d) 的推广较为直接，关键的观察是，奇点并不会给推广关键引理 [35, 引理 1.3]带来实质性困难。(c) 已基于 Claudon-H¨oring [30] 和 Ou [76], 的近期工作，在 klt 情形下于 [74, 推论 3.13] 中得到证明；本文将通过类似论证建立对数典范情形，关于 $(X, \mathrm{Supp}(\Delta))$ 为对数光滑的情形，参见 [45] 。至于 (a) 和 (b), 情况则相当微妙：至少在（完备）黎曼流形范畴内，似乎无法直接推广。事实上，人们早已意识到，这类困难在从微分几何观点研究奇异簇时普遍存在，不仅限于基本群的研究；这正是引入 RCD 空间概念的原因（见 [48]），它是下界 Ricci 曲率受限的完备黎曼流形在度量意义下的自然推广。对于紧致 RCD 空间， [37] 已证明了 Margulis 引理 (a)；剩下的困难在于证明满足猜想 1.1 条件的紧致 K¨ahler 空间 X 是 K¨ahler RCD 空间。根据 [43] 的工作，我们可以在较弱意义下为对数典范对证明 (b)，即构造一列 K¨ahler 流 ω_ϵ ，使得 $\mathrm{Ric}(\omega_\epsilon) \geq -\epsilon\omega_\epsilon$ 在流的意义下成立；然而，要由此推导出 X 是 K¨ahler RCD 空间却相当困难（见 [44, 猜想 1.1]），目前仅在推论 1.1、定理 1.2 和定理 3.6 的情形下已知这一推导成立。

本文其余部分组织如下：在第2节中，我们证明$\pi_1(X)$在定理1.1、1.2及推论1.1的假设下几乎（或虚）幂零。在第3 节中，我们证明定理1.3，由此得以完成证明；基于这一论证，我们还确立了定理1.3中簇的特殊性。

致谢：我们感谢 Henri Guenancia 教授、Mihai P˘aun 与 Chenyang Xu 教授富有启发的讨论。我们感谢潘佳音教授使我们注意到 [37] ，也感谢 Fr´ed´eric Campana 教授向我们指出主定理与其阿贝尔性猜想之间的关系，并感谢 Masataka Iwai 教授提醒我们本文情形下切丛层的一般 nef 性定理，并向我们展示了由此推出特殊性的推导。

2. Proof of virtual nilpotency

在本节中，我们将证明定理1.2、定理 1.1和推论 1.1。特别地，我们证明，在这些定理的假设下，基本群 $\pi_1(X)$ 是虚幂零的，并将几乎阿贝尔性质的证明留到下一节。正如引言中所述，在每种情形下，思路都相同：我们能够构造一列与 X 同胚的 Ricci 几乎非负 RCD 空间，进而可以运用 RCD 版本的 Margulis 引理 2.2, 证明基本群是虚幂零的。

2.1. **渐近 klt 类。** 在本小节中，我们回顾紧致 K¨ahler 流形上的渐近 klt 类的如下定义，并对这一类作一些评述。直观而言，这些类可视为广义对数典范对的解析对应物（参见 [6, 定义 4。1]）。

定义 2.1。 设 X 是一个紧致 *K¨ahler* 流形，且设 $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 是一个伪有效类（即包含一个半正闭流）。取 ¨ 上的一个 *K* ω *ähler* 形式 X，并考虑由所有满足 $T \geq -\epsilon\omega$ 的几乎正闭 $(1,1)$-流 $T \in \alpha$ 构成的集合 $\alpha[-\epsilon\omega]$，令 $T_{\min,\epsilon} \in \alpha[-\epsilon\omega]$ 为其中具有最小奇异性的一个 (例如参见 [8, §2。8])。将 $T_{\min,\epsilon} = \theta_\epsilon + dd^c\varphi_\epsilon$ 写成其中 $\theta_\epsilon \in \alpha$ 是一个光滑 $(1,1)$-形式，而 φ_ϵ 是一个准拟次调和函数，我们将 α 的 ϵ-渐近乘子理想（关于 ω）定义为

$$\mathcal{J}_{\epsilon,\omega}(\alpha) := \mathcal{J}(\varphi_\epsilon).$$

该定义不依赖于 $T_{\min,\epsilon}$ 的选择，因为任意两个具有最小奇异性的流都具有等价的奇异性，因而具有相同的乘子理想层。我们简单地将 $\mathcal{J}_{0,\omega}(\alpha)$ 记为 $\mathcal{J}(\alpha)$，因为显然它不依赖于 ω。

我们称类 α 是渐近 *klt* 的，如果

$$\mathcal{J}_{\epsilon,\omega}(\alpha) = \mathcal{O}_X$$

对每个 $\epsilon > 0$均如此。显然，这一定义与所选 *K¨ahler* 形式 ω无关。类似地，若一个 $\mathbb{R}$-线丛 L的陈类 $c_1(L)$ 具有此性质，则称其为渐近 *klt*。

注 2.1. (*a*) 我们可以将渐近 *klt* 类的定义改述如下。对于任意 *K¨ahler* 类 ω，有 $\mathcal{J}_{\epsilon_1,\omega}(\alpha) \supseteq \mathcal{J}_{\epsilon_2,\omega}(\alpha)$ $\epsilon_1 \geq \epsilon_2$，因此我们可以将 α 的渐近乘子理想定义为

$$\mathcal{J}_+(\alpha) := \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{J}_{\epsilon,\omega}(\alpha),$$

它与所选的 *K¨ahler* 形式 ω 无关。显然，我们有 $\mathcal{J}(\alpha) \subseteq \mathcal{J}_+(\alpha)$，且这种包含一般并非等式(正如对数典范奇点的情形)。而且容易看出，α 是渐近 *klt* 的，当且仅当 $\mathcal{J}_+(\alpha) = \mathcal{O}_X$。

(*b*)根据定义，数值有效类是渐近 *klt* 的。此外，渐近 *klt* 是针对伪有效类提出的一种正则性条件，可视为数值有效性的奇异版本。事实上，我们可以证明，伪有效类 $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 的非 *nef* 位（见 [8,定义 3。3]）满足

$$\mathrm{NNef}(\alpha) = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}_{>0}} V(\mathcal{J}_+(m\alpha))_{\mathrm{red}}, \tag{2.1}$$

这里，对于任意理想层 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$，$V(\mathcal{I})$ 表示由 $\mathcal{I}$定义的复子空间。关于非 *nef* 位的一般介绍，见附录 *D*。

(*c*) 设 L 是 X上的伪有效 $\mathbb{R}$-线丛，并固定一个 *K¨ahler* 形式 ω 。那么，L 渐近 *klt*，当且仅当对于每个 $\epsilon > 0$，L 都存在一个可能奇异的 *Hermitian* 度量 h_ϵ，使得$\sqrt{-1}\Theta_{h_\epsilon}(L) \geq -\epsilon\omega$ 且 $\mathcal{J}(h_\epsilon) = \mathcal{O}_X$。

下面的引理表明，渐近 klt 类可视为双有理意义下广义对数典范对的解析对应物。事实上，给定一个广义对数典范对（$X, B+\mathbb{M}$），我们可以找到一个光滑模型 $Y \to X$，使得条件 $B_Y^{\geq 0} + M_Y$ 满足该引理的条件。

引理 2.1。设 X 为紧致 *Kähler* 流形，且 Δ 为一个有效 $\mathbb{R}$-除子，使得对偶 (X, Δ) 是对数典范（*lc*）的。那么，对于任意数值有效类 $\eta \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$，$\eta + \{\Delta\}$ 均为伪有效且渐近 *klt*。

证明。设 θ 是 X上的 Kähler 形式，则对于任意 $\epsilon > 0$，类 $\eta + \epsilon \cdot \{\theta\}$ 是 Kähler 的，因此当 $\delta(\epsilon)$充分小时，$\eta + \epsilon \cdot \{\theta\} + \delta(\epsilon) \cdot \{\Delta\}$ 也是 Kähler 的，因为 Kähler 锥是开集。□

2.2. **Kähler 具有几乎非负里奇曲率的 Kähler RCD 空间**。在本小节中，对于定理 1.2、推论 1.1的每种设定，我们构造一列与 X 同胚的 Ricci 几乎非负 RCD 空间。

2.2.1. 渐近 *klt* 情形：首先，我们处理定理 1.2 的情形。更确切地说，我们证明如下结论：

定理 2.1. 设(X, θ) 是一个 n 维 *Kähler* 流形，配备光滑的 *Kähler* 形式 θ。假设 $-K_X$ 是伪有效且渐近 *klt* 的。那么对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个 *Kähler* 流 $\omega_\epsilon \in [\theta]$ 满足以下条件。

(1) ω_ϵ 具有有界局部势，且在 $X \setminus Z_\epsilon$ 上光滑，其中 Z_ϵ 是 X 的一个解析子簇。*(2)* 设$(X_\epsilon, d_\epsilon, \mu_\epsilon)$ 是$(X \setminus Z_\epsilon, \omega_\epsilon, \omega_\epsilon^n)$的度量完备化。那么$(X_\epsilon, d_\epsilon, \mu_\epsilon)$是一个与 X 同胚的紧致$\mathrm{RCD}(-\epsilon, 2n)$空间。

现在我们开始证明。不妨设$\theta + \mathrm{Ric}(\theta) > 0$ 经过固定的重新缩放后 θ。对于每个 $\epsilon > 0$，根据我们的假设，存在 $f_\epsilon \in$ 拟次调和函数$(X, \mathrm{Ric}(\theta) + \epsilon\theta)$，使得 $\mathcal{J}(f_\epsilon) = \mathcal{O}_X$。于是，由开性 [4, 54] 我们得到以下引理。

引理 2.2。对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $p > 1$ 和 $f_\epsilon \in$ 拟次调和函数$(X, \mathrm{Ric}(\theta) + \epsilon\theta)$ 使得

$$e^{-f_\epsilon} \in L^p(X).$$

证明。根据我们的假设，$-K_X$ 是伪有效且渐近 klt 的，因此存在一个 $(\mathrm{Ric}(\theta) + \epsilon\theta)$-拟奇异半正函数 f_ϵ，使得 e^{-f_ϵ}是 L^1-可积的。根据由 [4, 54] 解决的 Demailly-Kollár 开性猜想，e^{-f_ϵ} 对某个 $p > 1$ 是 L^p 可积的。引理得证。□

引理 2.3. 对于任意 $\epsilon > 0$，存在满足以下条件的 $F_\epsilon \in$ 拟次调和函数$(X, \mathrm{Ric}(\theta) + \epsilon\theta)$

(1) $F_\epsilon \in C^\infty(X \setminus \mathcal{S})$ 对于某个解析子簇 $\mathcal{S}$ *of* X，且 F_ϵ 具有解析奇点。

(2) $e^{-F_\epsilon} \in L^p(X)$ *for some* $p > 1$.

证明。 我们固定 $f_{\epsilon/2}$，如引理 2.2中所选取的。根据 Demailly 的正则化 [33, 定理（13.12），第 134], 页，存在 $f_{k,\ \epsilon} \in$ 拟次调和函数$(X$、Ric$(\theta) + 2\epsilon\theta)$，使得

(1) $f_{k,\ \epsilon/2}$ 在解析集 Z_k 的 $X \setminus Z_k$ 上光滑，其中

$$Z_0 \subset Z_1 \subset ... \subset Z_k \subset ... \subset X.$$

(2) $f_{k,\ \epsilon/2}$ 具有解析奇点，并且 $f_{k,\ \epsilon/2}$ 递减收敛到 $f_{\epsilon/}$ $_2$.

因此，取充分大的 $k > 0$，使得$F_\epsilon = f_{k,\ \epsilon/2}$，即可证明该引理。 □

我们考虑如下复 Monge-Amp`ère 方程

$$(\theta + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi_\epsilon)^n = e^{\epsilon\varphi_\epsilon - F_\epsilon}\theta^n. \tag{2.2}$$

其诱导的 $\omega_\epsilon = \theta + \sqrt{-1}\partial\partial\varphi_\epsilon$ 曲率方程为

$$\mathrm{Ric}(\omega_\epsilon) = -\epsilon\omega_\epsilon + (\mathrm{Ric}(\theta) + \epsilon\theta + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}F_\epsilon) \geq -\epsilon\omega_\epsilon \tag{2.3}$$

在流的意义下。

Ko-lodziej 定理 [68] 结合引理 2.3 立即得到以下L^∞-估计。

引理 2.4。 取 $\epsilon \in (0,1)$ 并设 Z_ϵ 为与以下对象的奇点相关联的解析子簇： X，则存在唯一的 F_ϵ，使得 $\varphi_\epsilon \in$ 拟次调和函数$(X, \theta) \cap L^\infty(X) \cap C^\infty(X^\circ)$满足 (2.2)，其中 $X^\circ := X \setminus Z_\epsilon$。

我们定义

$$(\hat{X}_\epsilon, d_\epsilon, \mu_\epsilon) = \overline{(X \setminus Z_\epsilon, \omega_\epsilon, \omega_\epsilon^n)}$$

为 $X \setminus Z_\epsilon$ 的度量完备化。

若令

$$\psi_\epsilon = \varphi_\epsilon + F_\epsilon \in PSH(X, \mathrm{Ric}(\theta) + (1+\epsilon)\theta),$$

则方程（2.2）等价于

$$(\theta + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi_\epsilon)^n = e^{(1+\epsilon)\varphi_\epsilon - \psi_\epsilon}\theta^n. \tag{2.4}$$

引理 2.5。 [44, 引理 2。4] 对于每个 $\epsilon \in$（0，1），存在 $\psi_{\epsilon,\ j} \in$ 拟次调和函数$(X$，Ric$(\theta) +$（$1+\epsilon$）θ）$\cap C^\infty$（X），使得 $\psi_{\epsilon,\ j}$递减收敛到 ψ_ϵ，当 $j \to \infty$时。此外，可以假设 $\psi_{\epsilon,\ j}$ 在 Z_ϵ之外光滑收敛到 ψ_ϵ 。

证明。 回顾一下，我们已经假设 Ric$(\theta) + \theta$ 是 K¨ahler。由 [7], 存在$\psi_i \in$ 拟次调和函数$(X$，Ric(θ) + $(1+\epsilon)\theta) \cap C^\infty$（$X$），使得 ψ_i 递减收敛到 ψ_ϵ。由于 ψ_ϵ 在 $X \setminus Z_\epsilon$上光滑， ψ_i 在 $L^\infty(\mathcal{K})$中收敛到 ψ_ϵ，对任意 $\mathcal{K} \subset\subset X \setminus Z_\epsilon$均成立。

我们希望对 ψ_i 进行修改，使其在 $\mathcal{K}$上光滑收敛。注意， φ_ϵ 有界，且当 $x \to Z_\epsilon$时， $F_\epsilon(x)$趋于 $-\infty$，因此 $\psi_\epsilon \in$ 是拟次调和函数 PSH$(X,$ Ric$(\theta) + (1+\epsilon)\theta)$，并且当 $x \to Z_\epsilon$时，˜趋于 $-\infty$。令$\psi_{i,\tau,\delta} = \mathcal{M}_\tau(\psi_i, \psi_\epsilon + \delta)$为 ψ_i 和 $\psi_\epsilon + \delta$ 在 $\delta, \tau > 0$ 处的正则化最大值（参见 [34, 引理 I.5.18，第 43]页）。根据定义，有˜ ˜ ˜$\psi_{i,\tau,\delta}$ $\in$是拟次调和函数 PSH$(X,$ Ric$(\theta) +(1+\epsilon)\theta)$，其中$\psi_{i,\tau,\delta} \geq \psi_i \geq \psi$。此外，当 $\tau > 0$充分小时，$\psi_{i,\tau,\delta} \in C^\infty(X)$˜，因为在 $X \setminus Z_\epsilon$ 附近，$\psi_{i,\tau,\delta} = \mathcal{M}_\tau(\psi_i)$。

˜对于任意 $K \subset\subset X \setminus Z_\epsilon$, $\psi_{i,\tau,}$，当 $i > 0$ 充分大且 $\delta \gg \tau$充分小时，$_\delta = \mathcal{M}_\tau($ $\psi_\epsilon + \delta)$在 K 上成立，因为 ψ_i 在 $L^\infty(K)$中一致收敛到 ψ 。同时，当 $\psi_\epsilon + \delta$ 沿着 $X \setminus Z_\epsilon$趋于 $-\infty$ 时，在 Z_ϵ 附近有$\psi_{i,\tau,\delta} = \mathcal{M}_\tau(\psi_i)$。通过选取合适的 $\tau_i, \delta_i \to 0$, $\psi_{i,}$ $_{\tau_i,\delta_i}$ ，可使其在$X \setminus Z_\epsilon$的任意固定紧子集上光滑收敛到 ψ 。这就证明了该引理。□

我们可以考虑以下复 Monge-Amp`ère 方程

$$(\theta + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi_{\epsilon,j})^n = e^{(1+\epsilon)\varphi_{\epsilon,j} - \psi_{\epsilon,j}}\theta^n. \tag{2.5}$$

$\omega_{\epsilon,\ j} = \theta + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi_{\epsilon,\ j}$ 对应的曲率方程为

$$\mathrm{Ric}(\omega_{\epsilon,j}) = -(1+\epsilon)\omega_{\epsilon,j} + (\mathrm{Ric}(\theta) + (1+\epsilon)\theta + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\psi_{\epsilon,j}) \geq -(1+\epsilon)\omega_{\epsilon,j}. \tag{2.6}$$

引理 2.6。对于任意 $\epsilon \in (0,\ 1)$，存在与 j 无关的 $p > 1$ 和 $C > 0$，使得对所有 $j > 0$，我们都有

$$\|e^{-\psi_{\epsilon,j}}\|_{L^p(X)} \leq C,$$
$$\|\varphi_{\epsilon,j}\|_{L^\infty(X)} \leq C$$

and

$$\mathrm{Diam}(X, \omega_{\epsilon,j}) \leq C.$$

此外，*Ricci* 曲率 $\omega_{\epsilon,\ j}$ 有统一下界 -2 .

证明。注意到 $\psi_{\epsilon,\ j} \geq \psi_\epsilon$ 以及 L^p 的界 $e^{-\psi_\epsilon}$ 由 F_ϵ 和 φ_ϵ [68]的有界性得出。因此$e^{-\psi_{\epsilon,\ j}}$一致有界。然后，由 [68]可得 $\varphi_{\epsilon,\ j}$ 的一致界，这是标准结果。$\omega_{\epsilon,\ j}$ 的直径界由 [56]得出。□

引理 2.7. 存在一个与 j 无关的常数 $C > 0$，使得

$$\omega_{\epsilon,j} \geq C\theta.$$

此外，对于任意紧集 $K \subset\subset X \setminus Z_\epsilon$，$\varphi_{\epsilon,\ j}$在取子列后于 $X \setminus Z_\epsilon$ 上光滑收敛到 φ_ϵ。

证明.由里奇曲率下界（2.6），$\omega_{\epsilon,\ j} \geq C\theta$ 可由 Yau 的 C^2 估计得到。注意到 $\psi_{\epsilon,}$ $_j$在 $X \setminus Z_\epsilon$ 上光滑收敛到 ψ_ϵ。这意味着 $\omega_{\epsilon,\ j} \leq C_K\theta$ 其中某个正常数为 C_K。然后由 Evans-Krylov 理论可得到高阶估计。□

ˆ**引理 2.8** (**=定理 2.1 的证明).** $(X,\omega_{\epsilon,j}, \omega^n_{\epsilon,j})$ 在 *Gromov-Hausdorff* 拓扑下收敛到 $(X_\infty, d_\infty, \mu_\epsilon)$ˆ，其中 $j \to \infty$，且 X_ϵ 与 X. 同胚。此外，ˆ$(X_\infty, d_\infty, \mu_\epsilon)$ 是一个 $\mathrm{RCD}(-\epsilon,$ $2n)$-空间。

证明。根据里奇曲率下界（2.6），以及一致的直径上界 [56]（独立于 j），标准的 Cheeger-Colding 理论表明，取一个子列后（X，$\omega_{\epsilon,\ j}$，$\omega^n_{\epsilon,\ j}$）当 $j \to \infty$时，在 Gromov-Hausdorff 拓扑下收敛到一个紧致度量测度空间。由于 Z_ϵ 是 X 的一个解析子簇，其 Hausdorff 余维不小于 2，$X \setminus Z_\epsilon$ 在（X，$\omega_{\epsilon,\ j}$）中是一致近似凸的（[53]）。因此，极限空间必与（X_ϵ，d_ϵ，μ_ϵ）重合。显然，$X_\epsilon \in$ 满足 RCD（-2，$2n$），并且

此外，按照 Honda 的定义，它是一个几乎光滑度量测度空间 [61]。根据 $X \setminus Z_\epsilon$ （2.3）上的里奇曲率下界，我们可以将全局里奇曲率下界提高到 $-\epsilon$，因此 $X_\epsilon \in \mathrm{RCD}(-\epsilon, 2n)$（参见 [44, 引理 2。3] 详情见下文）。

根据引理2.7，恒等映射 $\iota_j : (X, \omega_{\epsilon,j}) \to (X, \theta)$ 是一列一致的 Lipschitz 映射。此外，ι 将收敛到一个利普希茨满射 $\iota_\infty : X_\epsilon \to X$。

接下来，我们将利用 Tian [90] 的基本偏C^0-估计的局部版本证明 ι_∞ 是单射（另见 Donaldson-Sun [40] 的基础性工作）。由于 $[\theta]$ 不一定是有理类，因此不能直接应用全局偏 C^0-估计。然而，根据 Schwarz 引理 [29, 定理 1.2], ，如果我们固定一个开欧几里得球 $B \subset X$ （特别地，它是强伪凸的），那么对于充分大的 j， B 包含一个半径为 ω_ϵ 的测地球 $_j$。因此，每个 $\omega_{\epsilon,j}$ 都是 B 上一个平凡线丛 L_j 的曲率，并且 $(B,\omega_{\epsilon,j})$ 局部收敛到 $(B_\epsilon, d_\epsilon) \subset X_\epsilon$。由 [70], 可知，$(B_\epsilon, d_\epsilon)$ 的每个切锥按照 [28] 的意义都是良好的。我们可以立即将 C^0-估计应用于 [70] 中的 B，将其视为定量 Kodaira 嵌入定理。特别地，对于任意两个不同的点 $p, q \in B_\epsilon$，存在一个定义在 B 上的全纯函数 σ，使得 $\iota_\infty^*\sigma(p) \neq \iota_\infty^*\sigma(q)$。这意味着 $\iota_\infty(p) \neq \iota_\infty(q)$。因此， ι_∞ 在 $\iota_\infty^{-1}(B)$ 上是单射，进而在 X_ϵ 上是单射。

ˆ 最后，我们指出， $X \setminus Z_\epsilon$ 位于 X_ϵ 的正则部分，因为$\omega_{\epsilon,j}$ 在远离 Z_ϵ处光滑收敛到 ω_ϵ。□

2.2.2. 复三维情形：在推论 1.1 的假设下，我们着手构造一列具有几乎非负里奇曲率的 RCD 空间。由引理 2.1，推论 1.1 的第（2）项是定理 1.2 的一个特例，因此从现在起我们将重点讨论推论 1.1 的第（1）项。首先假设 $\Delta = 0$。设 X是一个具有对数终端奇点的三维正规 K¨ahler 簇。令 X°为 X的光滑部分。假设 $-K_X$ 是数值有效的。设 θ 是一个光滑的 K¨ahler 形式，且 Ω 是 X上的光滑适配体积测度。由于 $-K_X$是数值有效的，对于任意 $\epsilon \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$，$c_1(X) + \epsilon[\theta]$ 是 K¨ahler 类，因此存在 $f_\epsilon \in$ 拟次调和函数$(X, \mathrm{Ric}(\Omega) + \epsilon\theta) \cap C^\infty(X)$。

我们将考虑以下复 Monge-Amp`ère 方程

$$(\theta + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi_\epsilon)^n = e^{\epsilon\varphi_\epsilon + f_\epsilon}\Omega. \tag{2.7}$$

令 $\omega_\epsilon = \theta + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi_\epsilon$。那么由方程 (2.7) 导出的曲率方程为

$$\mathrm{Ric}(\omega_\epsilon) = -\epsilon\omega_\epsilon + \left(\mathrm{Ric}(\Omega) + \epsilon\theta + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial} f_\epsilon\right) \geq -\epsilon\omega_\epsilon. \tag{2.8}$$

Then 方程 (2.8) 解的以下正则性结果是标准的（参见 [43]） .

引理 2.9。 对于任意 $\epsilon \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$，存在唯一的 $\varphi_\epsilon \in$拟次调和函数$(X, \theta) \cap L^\infty(X) \cap C^\infty(X^\circ)$。

现在， ω_ϵ 是 X° 上的光滑 K¨ahler 度量，我们定义

$$(\hat{X}_\epsilon, d_\epsilon, \mu_\epsilon) = \overline{(X^\circ, \omega_\epsilon, \omega_\epsilon^n)}.$$

为度量测度空间 $(X^\circ,\ \omega_\epsilon,\ \omega_\epsilon^n)$ 的度量完备化。关于 $(X_\epsilon,\ d_\epsilon,\ \mu_\epsilon)$ 的以下正则性结果见 [44, 定理 1。1]。

命题 2.1 ([44])。 对于任意 $\epsilon \in (0,1)\cap\mathbb{Q}$，$(X_\epsilon, d_\epsilon, \mu_\epsilon)$ 是一个与之同胚的紧致 $\mathrm{RCD}(-\epsilon, 2n)$ 空间 X。特别地，

(1) X_ϵ 的正则部分与 X°重合；*(2)* 恒等映射 $\iota : (X^\circ, \omega_\epsilon) \to (X^\circ, \theta)$ 可延拓为一个满射 *Lipschitz* 映射，从 (X_ϵ, d_ϵ) 映到(X, θ)。

以下注记非常重要。

注 2.2。 在 [44, 定理 1。1], 中，我们需要假设 X 是射影的，且 θ是一个极化的 *K¨ahler* 度量。我们指出了用到 X 的射影性的地方。

(1) 在 [44, 引理 2。4], 中，我们需要正则化可能奇异的正流$\mathrm{Ric}(\Omega) + \epsilon\theta + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial} f_\epsilon$ 于 (2.8)。 *(2)* 我们在复维数三的情形下使用了极小模型纲领，以证明 *klt* 簇存在终端化。*(3)* 我们利用了三维终端奇点局部 $\mathbb{Q}$ 可平滑化。*(4)* 在 [44, 引理 5。15], 中，我们使用丰线丛的截面 L 于 X 上分离点，并进一步证明 ι是同胚的。

下面，我们逐一处理上述四个问题。

（*1*）对于第一点，$\mathrm{Ric}(\Omega) + \epsilon\theta + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial} f_\epsilon$ 在我们的情形下是光滑的，因此不需要正则化。（*2*）对于第二点，在 *K¨ahler* 情形下，复维数三时相对极小模型纲领成立。（*3*）对于第三点，复维数三的解析终端奇点局部是 $\mathbb{Q}$-可平滑化的（参见 [67,第 162 页，记号 5.29]）。*(4)* 为了证明 ι 是同胚的。引理 C^0 *5* 中的部分 [44, 型估计15]可以在强伪凸域上局部完成。细节请参阅附录 A 。

总之，命题*2.1*在 X 不具备射影性时仍然成立。

现在我们考虑 klt K¨ahler 对 (X, Δ) 的情形，其中 $-(K_X + \Delta)$ 为数值有效。令$\Delta = \sum_{i=1}^I a_i D_i$，其中 D_i 是一个素因子，且 $a_i \in (0,1)$，令 σ_i 为 D_i 的定义截面，h_i 为与 D_i相关联的线丛上的光滑厄米度量。我们令 σ 为满足以下条件的多值截面

$$|\sigma| = \prod_{i=1}^I |\sigma_i|^{a_i} \quad \text{and} \quad h = \prod_{i=1}^I (h_i)^{a_i}. \tag{2.9}$$

若 $-(K_X + \Delta)$ 数值有效，则对于任意 $\epsilon > 0$，$-(K_X + \Delta) + \epsilon\theta$ 是 K¨ahler。因此，对于任意$\epsilon > 0$，存在 $f_\epsilon \in C^\infty(X)$，使得

$$\mathrm{Ric}(\Omega)+\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}f_\epsilon-\mathrm{Ric}(h)\geq-\frac{\epsilon}{2}\theta,\ \sup_X f_\epsilon=0. \tag{2.10}$$

考虑复 Monge-Amp`ère 方程

$$(\theta+\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi_\epsilon)^n=|\sigma|_h^{-2}e^{\epsilon\varphi_\epsilon-f_\epsilon}\Omega. \tag{2.11}$$

根据 klt 假设，对于每个固定的 $\epsilon>0$，(2.11) 存在一个解 $\varphi_\epsilon\in C^\infty(X^\circ\setminus\Delta)\cap L^\infty(X)$（参见[43]），其中 X° 是 X 的正则部分。设 $\omega_\epsilon=\omega_0+\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi_\epsilon$。直接计算可得

$$\mathrm{Ric}(\omega_\epsilon)=-\epsilon\omega_\epsilon+\left(\mathrm{Ric}(\Omega)-\mathrm{Ric}(h)+\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}f_\epsilon\right)+[\Delta]\geq-\epsilon\omega_\epsilon \tag{2.12}$$

在流的意义下整体成立。

类似地，我们定义

$$(\hat{X}_\epsilon,d_\epsilon,\mu_\epsilon)=\overline{(X^\circ\setminus\Delta,\omega_\epsilon,\omega_\epsilon^n)}, \tag{2.13}$$

为度量测度空间（$X^\circ\setminus\Delta$，ω_ϵ，ω_ϵ^n）的度量完备化。

我们将证明 μ_ϵ 的存在性在命题 2.3中，这扩展了 [44] 对偶所得到的结果。此前，我们指出，若 X 光滑，则很容易建立（X_ϵ，d_ϵ，μ_ϵ）的 RCD 性质。

命题 2.2. [44, 引理 5。7] 假设 X 光滑，则$(X_\epsilon,d_\epsilon,\mu_\epsilon)$ 是一个$\mathrm{RCD}(-\epsilon,2n)$-空间。此外，$X_\epsilon$ 与 X.同胚

证明。 在 [44, 引理 5。7], 中已证明（X_ϵ，d_ϵ，μ_ϵ）是一个 RCD$(-\epsilon,\ 2n)$-空间。证明的其余部分与引理2.8的证明相同。 □

命题 2.3. 对于任意 $\epsilon\in(0,\ 1)\cap\mathbb{Q}$，$(X_\epsilon,d_\epsilon,\mu_\epsilon)$ 是一个紧致$\mathrm{RCD}(-\epsilon,2n)$-空间，与 X同胚。

证明。 现在处理方程（2.11）时面临的额外困难是，我们还有一个退化锥项$|\sigma|_h^{-2}$，其中$|\sigma|_h^{-2}$ 的定义同（2.9）。为了应用 [44], 的结果，关键观察是，拟次调和函数 $|\sigma|_h^{-2}$ 存在一种自然的正则化。更确切地说，我们对（2.11）进行正则化，并考虑

$$(\theta+\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi_\epsilon)^n=(|\sigma|_h^2+\delta)^{-1}e^{\epsilon\varphi_\epsilon-f_\epsilon}\Omega. \tag{2.14}$$

以下计算是众所周知的

$$\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log(|\sigma|_h^2+\delta)=-\mathrm{Ric}(h)+\frac{\delta}{|\sigma|_h^2+\delta}\mathrm{Ric}(h)+\frac{\delta}{(|\sigma|_h^2+\delta)^2}|\partial\sigma\wedge\overline{\partial\sigma}|_h^2. \tag{2.15}$$

直接计算可得

$$\mathrm{Ric}(\omega_{\epsilon,\delta})=-\epsilon\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi_\epsilon+\mathrm{Ric}(\Omega)+\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}f_\epsilon+\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log(|\sigma|_h^2+\delta).$$

特别地，若 $\delta<<\epsilon$，则由（2.10）、（2.15）以及 [29, 定理 1。2], 可得

$$\mathrm{Ric}(\omega_{\epsilon,\delta})\geq-C\omega_{\epsilon,\delta},$$

对于某个 C 与 δ无关的量。不失一般性，我们假设 $C=1$。由备注 2.2和（2.15），我们可以应用 [44]，从而得出对于每个固定的 $1>>\delta>0$，度量完备化

$$(\hat{X}_{\epsilon,\delta}, d_{\epsilon,\delta}, \mu_{\epsilon,\delta}) = \overline{(X^\circ, \omega_{\epsilon,\delta}, \omega^n_{\epsilon,\delta})}$$

ˆ 是 RCD$(-1,\ 2n)$ 空间，并且，$X_{\epsilon,\ \delta}$ 与 X 同胚。

ˆ 现在，利用 $RCD(-1,2n)$ 的紧致性，当 $\delta\to 0$ 时，$(X_{\epsilon,\delta}, d_{\epsilon,\delta}, \mu_{\epsilon,\delta}) \to (Y, d_Y, \mu_Y)$ 在 Gromov-Hausdorff 意义下收敛。此外，显然该收敛在 $X^\circ\setminus\Delta$ 上是 C^∞。我们断言，Y 的度量正则部分与开集 $X^\circ\setminus\Delta$ 重合，这进而意味着，根据正则部分的凸性，Y 与 X_ϵ 等距 [38]。为证明这一断言，我们采用反证法。假设存在一个度量正则点 $p\in Y$ˆ，但它不属于 $X^\circ\setminus\Delta$。取一列点 $p_i\in X_{\epsilon,\delta_i}$ 收敛到 p。根据体积密度在 Gromov-Hausdorff 拓扑下的下半连续性，p_i（取子列后）不包含于 X 的奇异集中。因此，我们可以假设所有点 p_i 都包含于 Δ 中。如果所有点都属于 Δ 的正则部分，那么根据具有锥形奇点的 Monge-Ampere 方程的正则性理论 [44], ，p 的体积密度不会大于取决于 Δ 系数的锥角；特别地，p 不是度量正则的。如果点 p_i 的某个子列属于 Δ 的奇异部分，那么根据体积密度在 Gromov-Hausdorff 拓扑下的下半连续性，同样有 p 不是度量正则的。至此，断言得证。

最后，我们证明度量完备化 X_ϵ（或 Gromov-Hausdorff 极限Y）同胚于 X。我们遵循 [44, 第 6] 节的论证，唯一的区别是这里我们还需要处理边界除子 Δ。我们概述证明。若存在两个不同的点 p_1、p_2，使得 $\iota(p_1)=\iota(p_2)=q\in X$。由 ˆ Schwarz 引理 [29], ，存在从 $X_\epsilon\to X$ 出发的 Lipschitz 映射 ι，因此存在 q 的强伪凸邻域 U，使得 $\iota^{-1}U$ 包含 p_1、p_2 附近一个充分小的度量球。若 q 是 X 的复解析奇异点，则由 [44, 推论 6.2]（或附录 A），$\iota(p_1)\neq\iota(p_2)$，矛盾。关键在于，在此情形下，p_1、p_2 处的切锥由 [44, 引理 6.7] 知容量为零，并且偏C^0 估计适用于 [44, 推论 6.1]。现在若 q 是 X 的复解析正则点，则ω_ϵ、δ 是 p_1 与 p_2 附近一列 Ricci 曲率有下界（与 δ 无关）的光滑度量，于是由 [70] 的偏 C^0 估计（局部应用于强伪凸域，参见[44, 引理 5.9]与附录 A），特别地，$\iota(p_1)\neq\iota(p_2)$，矛盾。

最后，由 $X^\circ\setminus\Delta$（2.12）上的里奇曲率下界，我们可以将整体里奇曲率ˆ下界改进为 $-\epsilon$，借助Honda技巧，从而 $X_\epsilon\in\mathrm{RCD}(-\epsilon,2n)$ □

随即，我们可以将命题2.3 通过扰动论证改进到对数典范对。

引理2.10。设(X,Δ) 是一个三维对数典范对，并假设存在一个 $\mathbb{R}$-除子 $\Delta_0\geq 0$，使得 (X,Δ_0) 是 *klt*。若 $-(K_X+\Delta)$ 是数值有效的，则对于

一个固定的 *K¨ahler* 类 $[\theta]$ 以及 $\epsilon > 0$ 充分小的情形，存在一个 *K¨ahler* 流 $\omega_\epsilon \in [\theta]$, 并且 ω_ϵ 诱导一个 *K¨ahler* $\mathrm{RCD}(-2\epsilon,\ 2n)$-空间，如 (2.13)

证明。 对于任意固定的 $0 < \epsilon \ll 1$ ，我们有如下恒等式

$$-(K_X + (1-\epsilon^2)\Delta + \epsilon^2\Delta_0) = -(K_X + \Delta) + (\epsilon^2\Delta - \epsilon^2\Delta_0 + \epsilon\theta) - \epsilon\theta.$$

因此，当 ϵ 充分小时， $-(K_X + (1-\epsilon^2)\Delta) + \epsilon\theta$ 是一个 K¨ahler 类。此外，$(X,(1-\epsilon^2)\Delta + \epsilon^2\Delta_0)$ 是一个 klt对。因此，由命题 2.3，我们可以在一个固定的 K¨ahler RCD$(-2\epsilon, 2n)$ 空间中构造一个凯勒类 ¨ $[\theta]$。 □

现在我们继续证明，在定理 $\pi_1(X$ 的假设下，1.2、推论1.1，其为虚幂零。

2.3. **Margulis 引理与** $\pi_1(X)$ 的虚幂零性。 在本小节中，我们将利用 Margulis 引理完成对 $\pi_1(X)$ 幂零性的证明。首先记录 [37]，的 RCD 版本 Margulis 引理，而它又基于 ([26, 63]) 的思路。

定理 2.2. [37] 存在 $\varepsilon(n) > 0$ 和 $M(n) \in \mathbb{Z}^+$，使得如果 (X, d, μ) 是一个紧致的 m 维 $RCD^*(-1, n)$ 且 $p \in X$，则由包含映射诱导的映射

$$\pi_1(B(p, \varepsilon(n))) \to \pi_1(X, p) \tag{2.16}$$

的像包含一个指数为 $\leq M(n)$ 的子群，该子群存在长度为 $\leq n$ 的幂零基。

为了对上一小节构造的 Ricci几乎非负RCD空间序列 $(X_\epsilon, d_\epsilon, \nu_\epsilon)$ 应用 Margulis 引理，有必要证明态射 (2.16) 对 ϵ 充分小时是满射。一般而言，很难控制 ω_ϵ直径的增长， [35] 以下技巧将会有用：它指出，我们可以一致地控制 $\pi_1(X)$ 中生成元的适当代表元的长度，且 ϵ。关键在于， ω_ϵ 处于同一个类中。

引理 2.11. 固定 $\pi_1(X)$的一组生成元 $\{\gamma_1, \gamma_2, ...\gamma_n\}$ 。我们可以选取一点$\tilde{}$ $\tilde{}$ $p_\epsilon \in X$，其中 X 是 X的万有覆盖，使得存在一条连接 p_ϵ~与 $\gamma_j(p_\epsilon)$ $j = 1, 2...n$的路径，该路径包含在 X的正则部分中，且其 ω_ϵ 长度由一个与 ϵ无关的常数 D 所界定。

~证明. 固定一个开集 $U \subset X$ ，使得 U 包含一个基本域 E ，并且 $\mathrm{Vol}_\omega(\gamma_j(U) \cap U) > \mathrm{Vol}_\omega(E) - \delta$。由于 $\mathrm{Vol}_\omega(X_{sing}) = 0$，我们进一步缩小 U，使得U 位于 X 的正则部分中，且下列关系仍然成立,

$$\mathrm{Vol}_\omega(\gamma_j(U) \cap U) > \mathrm{Vol}_\omega(E) - \delta. \tag{2.17}$$

现在我们选取一个基点 $p \in U$ 并将命题 B.1应用于开集$U_1 = U_2 = U$，于是任意两点 $x_1 \in U_{1,\delta,\epsilon}, x_2 \in U_{2,\delta,\epsilon}$ 都可以由一条路径 γ 连接（该路径位于$\tilde{X}$的光滑部分内），其关于 ω_ϵ 的长度为 $\leq C\delta^{-1/2}$ ，此外，我们仍有

$$\mathrm{Vol}_\omega(\gamma_j(U_{\delta,\epsilon}) \cap U_{\delta,\epsilon}) > \mathrm{Vol}_\omega(E) - 2\delta. \tag{2.18}$$

特别地， $\gamma_j(U_{\delta,\epsilon})\cap U_{\delta,\epsilon}$ 非空，因此我们可以固定一点 $p_j \in \gamma_j(U_{\delta,\epsilon})\cap U_{\delta,\epsilon}$。总之，我们可以用两段路径连接 p 和 $\gamma_j(p)$：一段连接 p和 p_j，另一段连接 $p_j = \gamma_j(q_j)$和 $\gamma_j(p)$（注意， γ_j 是 X的等距变换）。根据命题 B.1，总长度不超过 $2C\delta^{-1/2}$，且该上界与 ϵ无关。□

现在，我们可以基于 P˘aun 的思路，轻松证明 $\pi_1(X)$ 的虚幂零性。

引理 2.12. 在定理*1.2*的假设下，推论 *1.1*， $\pi_1(X)$ 是虚幂零的。

证明。令 $\epsilon(n)$为引理 2.11 中的常数。取足够小的 ϵ，使得 $\epsilon D^2 \le \epsilon(n)$（D 是引理 2.11 中的常数），由引理 2.11 可知， $\pi_1(B_d(p,\varepsilon(n))) \to \pi_1(X,p)$ 是满射。因此，根据定理 2.2， $\pi_1(X)$ 是虚幂零的。□

注记 2.3. 从证明中显然可见，若猜想*1.4* 成立且簇 X满足定理*1.1*的假设，我们也可以构造一列 *Ricci* 几乎非负 *RCD* 空间，它们与 X 同胚，因此 $\pi_1(X)$ 根据 *Margulis* 引理是几乎幂零的。

3. From virtual nilpotence to almost abelianity of $\pi_1(X)$

本节的主要目标是利用前几节证明的虚幂零性结果引理 $\pi_1(X)$，即引理 2.12，推出几乎阿贝尔性。借助 Camapana 的一个结果（一般介绍见附录 C），主要任务是证明阿尔巴内塞映射是满射。为此，我们需要以下关于扭曲相对典范除子的正性定理，它类似于 [74, 命题 3.1]。

命题 3.1. 设 $f : X \to Y$ 是紧致 *K¨ahler* 流形之间的一个射影态射。设 A 是 X 上一个 f- 相对丰线丛，且 X 上有一个 $\mathbb{Q}$- 线丛 N，使得 $c_1(N)$ 伪有效且渐近 *klt*。假设当 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 足够大且可整除时，$f_*\mathcal{O}_X(mK_{X/Y}+A+mN)$是一个非零层。那么， $\mathbb{Q}$-线丛 $K_{X/Y}+N-$分歧除子(f) 是伪有效的，其中 分歧除子(f)表示 f 的分歧除子，即

$$\mathrm{Ram}(f) := \sum_i (e_i - 1)W_i\,,$$

其中， W_i 遍历 X 上的所有素除子，满足 $f(W_i)$ 在 Y上的余维数为1，且 e_i是 $f^*f(W_i)$ 沿 W_i 的重数。

证明。证明与 [74, 命题 3.1(a)]的证明非常相似。固定 X 和 Y 上的 K¨ahler 形式ω_X 和 ω_Y。由于 N 是伪有效且渐近 klt，对于每个 $\epsilon > 0$，我们都可以在 N 上构造一个奇异 Hermitian 度量 h_ϵ，使得$\sqrt{-1}\Theta_{h_\epsilon}(N) \ge -\epsilon\omega_X$ 且 $\mathcal{J}(h_\epsilon) = \mathcal{O}_X$（由备注 2.1(c)），这意味着$\mathcal{J}(h_\epsilon|_{X_y}) = \mathcal{O}_{X_y}$对 $y \in Y$几乎处处成立（由备注 3.29]）。由于 A是 f-相对丰的，我们在 A上有一个 Hermitian 度量 h_A，使得$\sqrt{-1}\Theta_{h_A}(A) + f^*\omega_Y \ge \omega_X$。对于

每个 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们选取 $\epsilon_m \leq 1/m$ 并考虑 $A+mN$上的奇异度量 $h_m := h_{\epsilon_m}^m \cdot h_A$，于是有

$$\sqrt{-1}\Theta_{h_m}(A+mN) \geq -m\epsilon_m\omega_X + \omega_X - f^*\omega_Y \geq -f^*\omega_Y. \tag{3.1}$$

此外，由于 h_A 是一个 $\mathcal{C}^\infty$-度量，我们有

$$\mathcal{J}(h_m^{1/m}) = \mathcal{J}(h_{\epsilon_m} \cdot h_A^{1/m}) = \mathcal{J}(h_{\epsilon_m}) = \mathcal{O}_X. \tag{3.2}$$

于是由霍尔德不等式及我们的假设，对一般的 $y \in Y$，存在 $0 \neq u \in H^0(X_y, \mathcal{O}_{X_y}(mK_{X_y} + A + mN))$，满足

$$\int_{X_y} |u|^{\frac{2}{m}} e^{-\frac{\phi_m}{m}} < +\infty,$$

其中 ϕ_m 表示 h_m的局部权重。于是我们可以构造相对 m-伯格曼核度量 $h^{(m)}_{X/Y,h_m}$ 于 $mK_{X/Y} + A + mN$（见 [5, §A.2], [81, §4.2] 和[20,§3.2]），使得

$$\sqrt{-1}\Theta_{h^{(m)}_{X/Y,h_m}}(mK_{X/Y} + A + mN) - m[\mathrm{Ram}(f)] \geq -f^*\omega_Y \tag{3.3}$$

由 [96, 定理 2.3] 得（另见 [23, 注 2.5], [24, 定理 1.2] 和 [74, 定理 5.1]）。这里微妙之处在于，我们不能直接应用 [5, 定理 0.1]（[81,定理 4.2.7], [20, 定理 3.5]），因为 h_m 的曲率流未必是半正的；相反，我们只能按以下方式在 Y 上局部应用它们：局部地，我们将 $\omega_Y = dd^c\varphi$ 写成某个光滑严格拟次调和函数 φ，于是由（3.1）可得 $\sqrt{-1}\Theta_{he^{-f^*\varphi}}(A+mN) \geq 0$，并且可以应用 [5, 定理 0.1]，得到 m-伯格曼相对核度量 $h^{(m)}_{X/Y,\, h_m e^{-f^*\varphi}}$ 于 $mK_{X/Y}+A+mN$，其曲率流为半正的（这些只能局部定义，无法粘合在一起！）。根据构造，局部地有

$$h^{(m)}_{X/Y,h_m e^{-f^*\varphi}} = h^{(m)}_{X/Y,h_m} \cdot e^{-f^*\varphi},$$

因此我们得到了所需的曲率界（3.3）。现在令 $m \to +\infty$，（3.3）保证了在 $c_1($ $K_{X/Y} + N -$ 分歧除子（f）中存在一个闭正流，换言之，$K_{X/Y} + N -$ 分歧除子（f）是伪有效的，因而命题得证。□

注 3.1。（a）命题*3.1* 与 [74,命题 3.1] 之间的主要区别在于，当 N 是数值有效的时，我们可以在 $\mathcal{C}^\infty$-度量 h_ϵ 上构造一列 N，使其曲率形式的负部分任意小；而在我们的情形中，这些度量h_ϵ 通常是奇异的；尽管 h_ϵ 的奇点很温和（乘子理想为平凡理想），我们仍无法保证对于某个 $h_\epsilon \cdot h_L$，其乘子理想 $\epsilon > 0$仍然是平凡的，因此我们失去了对附加线丛进行扭曲的灵活性 L；出于同样的原因，我们应假设 A 是相对丰的，而不是相对大的。

（b）在命题 *3.1* 的陈述中，我们可以稍微弱化对 N 的条件：只需假设 N 是伪有效的，并且 $\mathcal{J}_+(c_1(N))$ 的余支撑（见注 *2.1(a)*）不支配 Y。另见 [97, 定理 2。1]。

3.1. **阿尔巴内塞映射的满射性**。 本小节的主要目标是证明定理 1.3 ，并在推论 1.1 的假设下证明阿尔巴内塞映射的满射性。

定理3.1。 设 X 是一个紧致 *Kähler* 流形。假设 $-K_X$ 伪有效且渐近 *klt*。那么，阿尔巴内塞映射 alb_X ： $X \to \mathrm{Alb}_X$ 是 X 的纤维化。

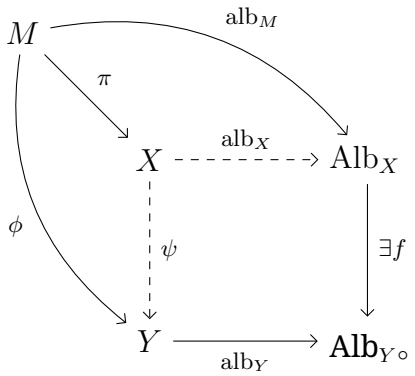
定理 3.1 可视为 [36, 命题 2.7。1]: 若 $_X$ 为伪有效，且 $-K_X$ 伪有效 $\mathcal{J}(c_1($ $-K_X)) = \mathcal{O}_X$(见定义2.1)，则可证明 alb_X 的满射性。事实上，还可证明 alb_X 是一个全纯次沉浸（光滑态射）。

定理 1.3 和 3.1 的证明与 [74, 推论 3。13], 基本相同，只要我们证明下文的命题3.2 ，它是 [102,主定理] 和 [74, 命题 3.12(a)] 的推广:

命题3.2。 设 X 是 *Fujiki* 类中的紧正规复簇 $\mathcal{C}$，并假设 X 满足定理 *1.3* 或定理 *3.1* 的条件。设 $\psi : X \dashrightarrow Y$ 是一个亚纯映射，其中 Y 是一个紧 *Kähler* 流形，并设 ϕ: $M \to Y$ 是对 ψ 的不定点消解，且 $\pi : M \to X$ 是自然的双亚纯态射。此外，假设 ϕ是射影的，且 Y 不是单有理的。那么有

(a) K_Y 与一个有效除子 D_Y线性等价（模 $\mathbb{Q}$），使得 $\phi^* D_Y$ 是π-例外的，且 $[D_Y]$ 是 $c_1(K_Y)$ 中唯一的闭半正 *(1,1)*- 流。特别地， $\nu(X) = \kappa(Y) = 0$。*(b)* 关于 ψ， Δ 是水平的。*(c)* 分歧除子(ϕ)是 π-例外的。

在给出命题3.2的证明之前，我们先简要说明如何由命题1.3 和3.1 推出3.2，以方便读者:



设 X 是 Fujiki 类 $\mathcal{C}$ 中满足定理1.3或3.1条件的紧正规复簇。设 ψ： $X \dashrightarrow Y$ 是 X 的MRC纤维化，并设 ϕ 和 π 如命题3.2所述。由于 X 属于 Fujiki 类 $\mathcal{C}$，我们可以令 M 和 Y 为紧 K¨ahler流形，并令 alb_X： $X \dashrightarrow \mathrm{Alb}_X$ （分别令 alb_Y： $Y \to \mathrm{Alb}_Y$）

为 X（分别为 Y）的阿尔巴内塞映射。于是 $\mathrm{alb}_X \circ \pi$ 与 M 的阿尔巴内塞映射 alb_M 重合，由阿尔巴内塞映射的泛性质可得复环面之间的态射 $f : \mathrm{Alb}_X \to \mathrm{Alb}_Y$，并且有上方的交换图。由 [30, 定理1.2] 可知，ϕ 是一个射影态射，因此可以应用命题 3.2(a)，得出 $\kappa(Y) = 0$，进而推出，根据 [96, 定理C]，alb_Y 是一个纤维化，因此 f 也是纤维化。另一方面，根据 MRC纤维化的性质，有 $H^1(M, \mathcal{O}_M) \simeq H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$，故 Alb_X 和 Alb_Y 的维数相同。由于 f 是满射，它必为同源（见[31, §2.3-2.4，第7-8]页）；但 f 是纤维化，因此它进而是一个同构。因此 alb_M 是一个纤维化。特别地，如果 X 光滑，则 alb_X 也是处处有定义的纤维化。

现在我们来证明命题 3.2。在本小节余下部分中，所有拉回均按 $\mathbb{Q}$-线丛（或 $\mathbb{R}$-线丛）的意义理解。

命题3.2的证明。在命题3.1得以确立后，该命题的证明几乎与 [74, 命题3.13(a)]相同，其关键要素是 Ou [76] 近期在 K¨ahler 几何方面取得的重大进展（另见[24]）。接下来，我们将统一处理定理1.3和定理3.1的情形。为此，先固定一些记号：在进一步吹起 M之后，我们可以假设存在一个有效的 $\mathbb{Q}$除子 F_+，使得 $N := -K_M + F_+$是伪有效且渐近 klt。事实上，在定理3.1的情形下，我们可以将 $K_M = \pi^* K_X + F_+$ 写成 $F_+ \geq 0$ π-例外 $\mathbb{Z}$除子，于是 $N := -K_M + F_+ = -\pi^* K_X$ 是伪有效且渐近 klt；而在定理1.3的情形下，我们可以假设 π 是 (X, Δ) 的对数解消，并且可以写成

$$K_M + \Delta_M \sim_{\mathbb{R}} \pi^*(K_X + \Delta) + F_+,$$

其中 $\Delta_M = \pi_*^{-1}\Delta + F_-$、$F_+$ 和 F_- 是有效的 π-例外 $\mathbb{R}$-除子，且没有公共分量，并且它们的支集都是SNC支撑，那么由对数典范性可知 $\Delta_M \leq 1$（即 Δ_M 中各分量的系数均为 ≤ 1），因此$N := -K_M + F_+ \sim_{\mathbb{Q}} -\pi^*(K_X + \Delta) + \Delta_M$ 是伪有效且渐近 klt（见引理 2.1 的证明）。此外，我们可以将 F_+ 扰动为一个 $\mathbb{Q}$-除子 F'_+，使得 $F'_+ - F_+$ 充分小且有效，并且其支集包含于 $\mathrm{Supp}(F_+)$ 中。然后，通过将 F_+ 替换为 F'_+，我们可以使 $N = -K_M + F_+$ 成为一个 $\mathbb{Q}$-线丛，并且 N 仍然伪有效且渐近 klt，因为 Δ_M 和 F_+ 没有公共分量。接下来，我们按照 [74,命题 3.13] 的证明，分 4 步证明条目 (a)：

(1) 将命题 3.1 应用于 $\phi : M \to Y$ 和 $N = -K_M + F_+$，我们得到˜ $-\phi^* K_Y + F_+$ 是伪有效的。设 T是 $c_1(-\phi^* K_Y + F_+)$ 上的一个闭正 (1, 1)-流˜，则局部有 $T = dd^c\tilde{\varphi}$，其中 $\tilde{\varphi}$是定义在 M上的一个（局部）拟奇异半正函数。根据 Grauert-Remmert 延拓定理 [49, 定理 4，第181] $\tilde{\varphi}|_{X\setminus\pi(E)}$页，$\varphi$可延拓为定义在 X 上的一个（局部）拟奇异半正函数（见 [32, 定´义 1.5]），由此得到 X 上的一个具有局部势的闭正 (1, 1)-流 T（见定义 4.6.2，第430]页），它定义了一个 Bott-Chern 类 $\alpha = \{T\} \in H^{1,1}_{\mathrm{BC}}(X)$，使得

$\alpha = \pi_* c_1\left(-\phi^* K_Y + F_+\right) = -\pi_* \phi^* c_1\left(K_Y\right)$。这里我们的论证避免使用 [74, 引理 3.4]，因为它要求 $\mathbb{Q}$-阶乘性 X。

(2) 由于 Y 不是单有理簇，根据 [76, 定理 1，1] K_Y 是伪有效的，因此根据上述相同论证，$-\alpha$ 也是伪有效的。结合 (1)，我们得到$\alpha = 0$。(3) 取一个闭正 (1, 1)-流 $T_0 \in c_1(K_Y)$，则 $\pi_* \phi^* T_0 = 0$，因此 T_0 的支集包含于 Exc(π) 中；由支集第二定理[34, III.2.14, p.143]，我们可知，对于某个有效的 π-例外$\mathbb{R}$-除子 D，有 $\phi^* T_0 = [D]$；此外，由于对于一般的 $y \in Y$，$[D \cap M_y] = \phi^* T_0|_{M_y} = 0$，$D$是垂直的，再由支集定理可得，对于某个 $D_Y \geq 0$ 和 $D = \phi^* D_Y$，有 $T_0 = [D_Y]$。此外，根据负性引理 [96, 引理 1.3]，$T_0 = [D_Y]$ 在 $c_1(K_Y)$ 中是唯一的。(4) 由 (3) 可知 $K_Y \equiv D_Y \geq 0$；根据 [96, 推论 5.9(b)]，我们有 $K_Y \sim_{\mathbb{Q}} D_Y$。此外，由于 $D = \phi^* D_Y$是 π-例外的，我们有 $\nu(Y) = \kappa(Y) = 0$(见 [33, 定义 (18.13), p.198])。由此即得 (a)。

(b) 和 (c) 是 (a) 的直接推论：应用命题 3.1 于$N = -(K_M + \Delta_M^v) + F_+ \sim_{\mathbb{Q}} -\pi^*($ $K_X + \Delta) + \Delta_M^h$，我们得到 $-\phi^* K_Y - \Delta_M^v -$分歧除子($\phi$)$+ F_+$ 是伪有效的。通过 π_* 推前，我们得到 $-\pi_*(\Delta_M^v +$分歧除子(ϕ)) 是伪有效的，这意味着 $\pi_* \Delta_M^v = \pi_*$分歧除子(ϕ) $= 0$，因为二者都是有效的，因此 (b) 和 (c) 得证。□

3.2.**关于 Demailly-Peternell-Schneider 对 K¨ahler 簇所提出问题的讨论**。在进入主定理证明的最后一步之前，我们先注意到，命题 3.1 中的正性结果导出了 Chen-Zhang 定理 [27, 主定理] 和 Deng 定理 [39, 定理 B],的如下推广，从而在 Fujiki 类的紧复簇背景下，对 Demailly-Peternell-Schneider 的经典问题作出了肯定回答[36, 问题 4.13.a] (另见 [82, 问题 3。4])（不过要注意，我们应假设态射 f 是射影的）。在陈述这些结果之前，我们先注意以下有用的引理；它可用命题 3.2 证明中的步骤 (1) 同样的论证证明，也可直接由 [9, 命题 4.6.3，第 230 页－231]证明。

引理 3.1. 设 X 是一个紧正规复簇，且 $g : X' \to X$ 是一个以光滑 X' 为目标的真修改。对于 $\alpha \in H^{1,1}_{\mathrm{BC}}(X)$，$\alpha$ 是伪有效的，当且仅当对于某个（不一定有效的）g-例外除子 E，$g^*\alpha + c_1(E) \in H^{1,1}_{\mathrm{BC}}(X')$ 是伪有效的。

定理 3.2. 设 $f : X \to Y$ 是紧正规复簇之间的射影态射，满足 X 属于 *Fujiki* 类 $\mathcal{C}$，且存在一个有效的 $\mathbb{R}$-除子 Δ，使得 (X, Δ) 是一个对数典范对，$-(K_X + \Delta)$ 是伪有效的，并且 Y 是 $\mathbb{Q}$-*Gorenstein*。假设存在一个奇点解消 $\pi : X' \to X$，以及 Y 上的一个$\mathbb{Q}$-线丛 L_Y，使得 $c_1(-\pi^*(K_X + \Delta) - \pi^* f^* L_Y)$ 的非 *nef* 位不支配 Y。那么 $-K_Y - L_Y$ 是伪有效的。

In 特别是，如果 $L_Y = 0$ 和 $-(K_X + \Delta)$ 是数值有效的，那么 $-K_Y$是伪有效的 *e.*

证明。根据 [94, Th´eor`eme, 3] Y 也属于 Fujiki 类 $\mathcal{C}$，因此我们可以取一个解奇点 $\pi_Y\colon Y' \to Y$，使得 Y' 是一个紧致 K¨ahler 流形。由引理 D.2 可知，我们可以任意将 X' 替换为进一步的胀开，使得 X' 是一个紧致 K¨ahler 流形，$\pi\colon X' \to X$ 是一个射影修改，也是 (X,Δ) 的对数解消，并且$f'\colon X' \to Y'$ 是 $X \dashrightarrow Y'$的不定点消解。取 X'上的一个 K¨ahler 形式 ω。于是我们可以写成

$$K_{X'} + \Delta' \sim_{\mathbb{R}} \pi^*(K_X + \Delta) + F_+ ,$$

其中 $\Delta' = \pi_*^{-1}\Delta + F_-$、$F_+$ 和 F_- 是没有公共分支的有效 π-例外 $\mathbb{R}$-除子；由于 (X, Δ) 是对数典范的，$\Delta' \leq 1$，因此对每个 $\epsilon > 0$，都存在一个流 $T_{\Delta',\epsilon} \in c_1(\Delta')$，使得 $T_{\Delta',\epsilon} \geq -\frac{\epsilon}{2}\omega$ 且 $\mathcal{J}(\varphi_{\Delta',\epsilon}) = \mathcal{O}_{X'}$，其中 $\varphi_{\Delta',\epsilon}$是 $T_{\Delta',\epsilon}$的局部势。根据假设，$c_1(-\pi^*($ $K_X + \Delta) - \pi^* f^* L_Y)$ 的非 nef 位不支配 Y，于是对每个 $\epsilon > 0$，存在一个闭正 (1, 1)-流 $T_\epsilon^\circ \in c_1(-\pi^*(K_X + \Delta) - \pi^* f^* L_Y)$，使得 $T_\epsilon^\circ \geq -\frac{\epsilon}{4}\omega$ 且 $\nu(T_\epsilon^\circ, x)_\perp = 0$ 对每个 $x \in X'_y$ 都成立。对于一般的 $y \in Y$，根据 Demailly 的正则化（见 [8, 定理 2.1(ii)]），存在一个具有解析奇点的闭正 (1, 1)-流 $T_\epsilon \in c_1(-\pi^*(K_X + \Delta) - \pi^* f^* L_Y)$，使得 $T_\epsilon \geq -\frac{\epsilon}{2}\omega$ 且对每个 $x \in X'_y$都有 $\nu(T_\epsilon, x) = 0$；特别地，这意味着 $T_\epsilon|_{X'_y}$ 是一个光滑 (1,1)-形式。接着考虑流 $T_{N,\epsilon} = T_{\Delta',\epsilon} + T_\epsilon \in c_1(N)$，其中 $N := -K_{X'} + F_+ - \pi^* f^* L_Y = -\pi^*($ $K_X + \Delta - f^* L_Y) + \Delta'$，我们有 $T_{N,\epsilon} \geq -\epsilon\omega$ 且对一般的 $y \in Y$ 有 $\mathcal{J}(\varphi_N|_{X'_y}) = \mathcal{O}_{X'_y}$，因此 $\mathcal{J}_+(c_1(N))$ 的余支撑不支配 Y。此外，正如命题3.2的证明中那样，我们可以扰动 F_+，使其成为一个 $\mathbb{Q}$- 除子，从而 $N = -K_{X'} + F_+ - \pi^* f^* L_Y$ 是一个 $\mathbb{Q}$- 线丛，并且仍然是伪有效的，且 $\mathcal{J}_+(c_1(N))$ 的余支撑不支配 Y。于是，由命题 3.1 和注 3.1(b)，$-(f')^* K_{Y'} - \pi^* f^* L_Y + F_+$是伪有效的；因此，根据引理 3.1，$-f^*(K_Y + L_Y)$ 也是伪有效的，因为 $-(f')^* K_{Y'} - \pi^* f^* L_Y + F_+ + \pi^* f^*(K_Y + L_Y)$ 是一个 π-例外除子；故 $-\pi^* f^*($ $K_Y + L_Y) = -(f')^* \pi_Y^*(K_Y + L_Y)$ 是伪有效的。最后，由引理 C.2 可知 $-\pi_Y^*(K_Y + L_Y)$ 是伪有效的，$-K_Y - L_Y$也如此。定理得证。□

3.3. 具有数值有效反典范除子的紧K¨ahler簇的特殊性。设 X 是Fujiki类 $\mathcal{C}$ 中的一个紧簇，且存在一个有效的 $\mathbb{R}$-除子 Δ，使得对（X, Δ）是对数典范的，并且反对数典范除子 $-$（$K_X+\Delta$）是数值有效的。如§1.1X所承诺的，本节将证明（X, Δ）按照Campana [15, 定义2.41]的意义是一个特殊轨形。在给出这一结果的证明之前，我们先简要回顾 [15, 16]中的相关概念。设 $f\colon X \to Y$ 是紧复簇之间的纤维化，并设（X, Δ），[15] 中的基本观察是：为了理解这一纤维化的几何，不仅应考虑（X, Δ）和 Y，还应考虑B_f上的一个“轨形基”除子$_\Delta$，它编码了 f 在余维一处的分歧，即使 $\Delta = 0$也是如此。根据其在§1.6.1]中的定义，我们发现B_f，$_\Delta$是满足 $f^* B \leqslant$ Ram（f）$+ \Delta^v + E$的最大有效除子 B，其中 Δ^h（分别为 Δ^v）表示除子 Δ的水平部分（分别为垂直部分）。参见 [96,引理7.2和注7.3]。

对于亚纯纤维化 f：（X,Δ） $\dashrightarrow Y$， f的典范维数（记作 κ（f,Δ））定义为：对于足够高的全纯模型 f'：（X',Δ'） $\to Y'$，它是 κ（$Y',B_{f',\Delta'}$）的Kodaira 维数（见 [15, 定义2.40]）。如果一个亚纯 f 满足$\dim Y>0$ 且 κ（f,Δ） $=\dim Y$，则称其为一般型纤维化；如果（X,Δ）不容许任何一般型纤维化，则称其为特殊轨形（见 [15, 定义2.41]）；特别地，若簇 X 使得（$X,0$）是特殊轨形，则称 X 为特殊簇。此外，对于一个对数典范对（X,Δ），在所有一般型纤维化（X,Δ） $\dashrightarrow Y$ （包括常值映射）中，根据[16, 定理 10.]，存在唯一一个（在双有理等价意义下）支配所有其他纤维化者，并且它被称为（X,Δ）的核心映射；显然，如果（X,Δ）的核心映射是常值映射，则（X,Δ）是特殊轨形。现在让我们转向以下内容的证明：

定理 3.3 (K¨ahler 版本的 [17, 定理10。3])。 设 X 是 *Fujiki* 类 $\mathcal{C}$ 中的紧致簇，且存在一个有效 $\mathbb{R}$-除子 Δ，使得对偶 (X,Δ) 是对数典范的，并且反对数典范除子 $-(K_X+\Delta)$ 是数值有效的。那么 X 是特殊的。此外，若 Δ 是一个 $\mathbb{Q}$-除子，则 (X,Δ) 是特殊轨形。

证明。对于第一个断言，考虑 X 的核心映射 c_X：$X \dashrightarrow (C_X, B_c)$ 以及 MRC纤维化 ψ：$X \dashrightarrow Y$。由于有理连通簇是特殊的，由 [15,定理 3.7] 可知，存在一个纤维化 g：$Y \dashrightarrow C_X$，使得 $c_X=\psi\circ g$。设 ϕ：$M\to Y$ 是 ψ 的不定点消解；经过替换为更高模型后，我们可以假设 g 是一个态射，且 $c_X\circ\pi=\phi\circ g$，并令 $B_Y:=B_{\phi,\Delta_M}$。由命题3.2(b)(c)、[96, 引理7.2及注7.3] 可知， ϕ^*B_Y 是 π-例外的。由 [15, 定理 4.11] $\mathcal{F}$ 可知，对于每个充分可整除的 $m_0\in\mathbb{Z}_{>0}$ 以及某个 g-例外除子 E，$=g_*(m_0(K_{Y/C_X}+B_Y-g^*B_{g,B_Y})+E)$ 都是弱正的。特别地，对于 C_X 上的任意丰线丛 A 以及每个 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$，存在 $b\in\mathbb{Z}_{>0}$，使得我们有一个非零映射

$$\mathcal{O}_{C_X}\to \mathrm{Sym}^{bm}\mathcal{F}\otimes A^{\otimes b}\to g_*(bmm_0(K_{Y/C_X}+B_Y-g^*B_{g,B_Y})+bmE+bA),$$

这显然也是一个单射。此外，根据 Kodaira 引理，我们可以假设$m_0(K_{C_X}+B_{g,B_Y})\geq A$，于是我们有

$$\begin{aligned} h^0(Y,bmm_0(K_Y+B_Y)+bmE) &\geq h^0(C_X,(bm-1)m_0(K_{C_X}+B_{g,B_Y}))\\ &\geq h^0(C_X,b(m-1)m_0(K_{C_X}+B_c)) \end{aligned}$$

第二个不等式由 [15, 命题 1.30]得出。由于我们可以假设 g 按照 [15, 定义 1.2],的意义是整齐的，因此我们有

$$h^0(Y,bmm_0(K_Y+B_Y))\geq h^0(C_X,b(m-1)m_0(K_{C_X}+B_c)),$$

根据命题 3.2(a)，可知左端有一个与 m无关的常数作为上界；但（C_X， B_c）是对数一般型的，这意味着 dim $C_X=0$，从而证明了第一个断言。

第二个断言在 [17, 定理 10 中得到证明。3] 当 X 是射影的时（尽管 Campana 对光滑 X给出了该结果，但很容易观察到，这一论证在 X 为奇异且 Moishezon 时同样适用；事实上，还可以给出一个更具解析性的证明

基于命题3.1，如下文所述）。然而，Campana 的证明无法推广到 K¨ahler 情形，原因有以下两个：

- 如果态射不是射影的，扭曲相对典范丛的正性定理便不成立。当然，我们可以通过考虑 sRC 商（见 [17, 定理 1。5]）来仿照第一个断言的证明，但如果簇不是射影的，其构造尚不明确。
- 即使我们能为紧致 K¨ahler 流形合理地构造 sRC 商，要像 Campana 的论证那样得出结论，我们仍需证明数值维数为 0 情形下对数典范对的丰度猜想；而在 K¨ahler 情形下，这一点尚不清楚（射影情形已由川又 [65, 定理 1] 和 [19, 定理 0.1]证明），另见 [96, 备注 5.8]。

为绕过这些困难，我们考虑 (X,Δ) 的核心映射 $c_{X,\Delta}:(X,\Delta)\dashrightarrow(C_{X,\Delta},B_{c,\Delta})$，以及 X 的 MRC 纤维化 $\psi: X\dashrightarrow Y$。ψ 的一般纤维 F（注意，MRC 纤维化几乎全纯）是有理连通的，特别地，它是 Moishezon，因此我们可以应用 [17, 定理 10.3]（见下文定理3.4）得出 $(F,\Delta|_F)$ 是特殊轨形。随后，类似于第一个断言的证明，我们得到一个分解 $g:Y\dashrightarrow C_{X,\Delta}$；而第一个断言证明中的相同论证表明 $\dim C_{X,\Delta}=0$，从而得到第二个断言。□

为结束本小节，我们简要概述下述双亚纯版本的证明 [17, 定理103]，以方便读者阅读。

定理3.4。设 X 是一个紧*Moishezon*簇，存在有效 $\mathbb{Q}$除子 Δ，使得对偶(X,Δ) 是对数典范的，且反对数典范除子$-(K_X+\Delta)$ 是数值有效的。设 $f:(X,\Delta)\dashrightarrow Z$ 是一个亚纯纤维化，其中(Z,B_Z)是 f 的一个整齐模型的轨形基（见 [17, 定义25]）。假设K_Z+B_Z是伪有效的，则 $\kappa(K_Z+B_Z)=\nu(K_Z+B_Z)=0$。特别地，$(X,\Delta)$ 是一个特殊轨形。

证明。这个结果本质上已由 [17, 定理 10。3]，我们在此给出一个基于命题 3.1 的更具解析性的证明。与命题 3.2 的证明一样，令$\phi:(M,\Delta_M)\to(Z,B_Z)$ 为 f 的一个 neat模型，使得 M 和 Z 是射影流形（因为 X 是 Moishezon），$B_Z=B_{\phi,\Delta_M}$，并且我们可以写成

$$K_M+\Delta_M\sim_{\mathbb{Q}}\pi^*(K_X+\Delta)+F_+$$

其中 $\pi:\ M\to X$ 是自然的双亚纯态射，$\Delta_M=\pi_*^{-1}\Delta+F_-$、$F_+$ 和F_- 是不含公共分量的有效 π-例外除子，且 Δ_M和 F_+具有SNC支集。然后，我们对 ϕ和 $N=-(K_M+\Delta_M^v)+F_+$应用命题 3.1，得到$-\phi^*K_Z-\Delta_M^v-\mathrm{Ram}(\phi)+F_+$是伪有效的。由 [96, 引理7.2和注记7.3]，，可知对某个例外除子 E'，$-\phi^*(K_Z+B_Z)+E'$是伪有效的。另一方面，根据我们的假设，K_Z+B_Z 是伪有效的，因此我们可以仿照命题3.2的证明进行论证，得到对任意半正闭(1,1)-流 $T\in c_1(K_Z+B_Z)$，存在某个有效除子 D_Z，使得 $T=[D_Z]$

ϕ^*D_Z 是 π-例外的。这意味着数值维数 $\nu(K_Z+B_Z)=0$，由此根据在此情形下所确立的丰度猜想得出结论 [65, 定理1。3]（另见 [19, 定理0。1]）。此外，若 f 是一般型纤维化，则可加性定理 [15, 定理4。2] 推出 $\dim Z=0$，这意味着（X, Δ）是特殊轨形。□

3.4. 切层的一般 nef 性。如 [75, 定理 6.1], [74, 定理 1.4] 和 [62, 定理 6.1，命题 6.5], 所示，反典范除子的数值有效性蕴含切层的一般 nef 性；此处一般 nef 性的定义与 [62, 设置 6.2]中的定义相同。在陈述定理之前，我们先简要回顾[62]中的定义。在本小节中，设 X 为 Fujiki 类 $\mathcal{C}$中维数为 n 的紧致正规簇，且 $\gamma\in H_{2n-2}(X,\mathbb{R})$要么是大类 $\alpha\in H^1$ 的非多重极点乘积 $\langle\alpha^n\rangle$ ([62,§3.1])，其中 $\alpha\in H^1\in$1 BC$(X,\mathbb{R})$且具有消失性质（[62, 定义 3.23]）；要么是$\gamma=\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}$，对应于 nef 类 $\alpha_i\in H^1\in$1 BC$(X,\mathbb{R})$（见 [62, 定义 2.2]）。注意，由 [62, 备注 3.11(5)]可知，γ是一个可动类。设 $\mathcal{E}$ 为 X上的无挠层，则 $\mathcal{E}$关于 γ 的斜率 $\mu_\gamma(\mathcal{E})$定义于 [62, 定义-引理 3.20], 。按照标准方式，我们可以定义μ_γ、$_{\min}(\mathcal{E})$以及μ_γ、$_{\max}(\mathcal{E})$；对于任意 $\mathcal{E}$（关于 γ），Harder-Narasimhan 过滤均存在，见 [62, 设置 6.2]。若μ_γ、$_{\min}(\mathcal{E})\geq 0$，则称 $\mathcal{E}$ 关于 γ 具有一般 nef 性。

定理 3.5. 设 X 是 *Fujiki* 类 $\mathcal{C}$中的紧簇。假设在 X 上存在一个 $\mathbb{R}$除子 $\Delta\geq 0$，使得(X,Δ) 是一个对数典范对，且 $-(K_X+\Delta)$ 是数值有效的。那么，X 的切层 T_X 关于 γ一般数值有效。

证明. 该定理由 [24, 推论 1.5] 和正性结果命题 3.1通过标准论证得出。这里我们仅略述证明。否则，若$\mu_{\gamma,\min}(T_X)<0$，则通过类似于 [75, 定理 1.4], 证明中的标准论证，可以找到 T_X 的一个饱和子层 $\mathcal{F}$，它满足 [62, 命题 6.3] 的条件 (1)（另见 [75, 命题 2.2]），并且 $\mu_\gamma(T_X/\mathcal{F})<0$，因此 $\mathcal{F}$ 是一个代数可积叶状结构，其叶的闭包有理连通。令$\psi: X\dashrightarrow Y$ 为由 $\mathcal{F}$定义的亚纯映射，并取 ψ 的不定点消解 $\phi: M\to Y$，以及自然修改 $\pi: M\to X$，假设该修改是 (X,Δ) 的对数解消。由于 X 属于 Fujiki 类 $\mathcal{C}$，我们可以假设 M 和 Y 是紧致 K¨ahler 流形。与命题3.2的证明一样，我们可以写成

$$K_M+\Delta_M\sim_{\mathbb{R}}\pi_*(K_X+\Delta)+F_+,$$

并且根据命题 3.1（采用与命题证明中相同的扰动技巧3.2），我们有

$$K_{M/Y}+\Delta_M-\pi^*(K_X+\Delta)-\mathrm{Ram}(\phi)+F_+$$

是伪有效的，因此我们有

$$(K_M+\Delta_M-\pi^*(K_X+\Delta)-\mathrm{Ram}(\phi)+F_+)\cdot\gamma_M\geq 0, \tag{3.4}$$

其中 $\gamma_M=\langle\pi^*\alpha^{n-1}\rangle$若 $\gamma=\langle\alpha^{n-1}\rangle$（$\alpha$ 具有消失性质的大性质），或 $\gamma=\pi^*\alpha_1\cdot\pi^*\alpha_{n-1}$（$\alpha_i$ 数值有效）。另一方面，令 $\mathcal{F}_M$ 为由 ϕ定义的叶状结构，

则在 Exc(π) 之外， $\mathcal{F}_M$ 与 $\pi^{[*]}\mathcal{F}$ 重合，因此根据引理 3.27]，$-K_{\mathcal{F}_M}\cdot\gamma_M = c_1(\mathcal{F})\cdot\gamma$ [62,。出于同样的原因，我们有 $c_1(T_X)\cdot\gamma =(-\pi^*(K_X+\Delta)+\Delta_M)\cdot\gamma_M$。此外，由于对于某个（不一定有效的）$\pi$-例外除子 E'，Ram(ϕ) $+E'$，因此由 (3.4) 可得

$$c_1(\mathcal{F})\cdot\gamma = -K_{\mathcal{F}_M}\cdot\gamma_M \le (-\pi^*(K_X+\Delta)+\Delta_M)\cdot\gamma_M = c_1(T_X)\cdot\gamma,$$

这与我们的假设 $\mu_\gamma(T_X/\mathcal{F}) < 0$ 矛盾。 □

注意，该定理在以下情形下已为人所知：

- X 是射影的： [75, 定理 1.4]，
- X 是紧致凯勒流形： [74, 命题 5.2]
- X 是 Fujiki 类 $\mathcal{C}$ 中具有 klt奇点的紧致簇： [62, 定理 6.1 和命题 6.5]。

此外，正如 Masataka Iwai 教授所指出的， X 的特殊性可以直接由切层的一般 nef 性推出，因为特殊性可以刻画为不存在 Bogomolov层（见 [15, 定理 2.27]）。

3.5. **主定理证明的最后一步**。

推论 1.1、定理 1.2、定理 1.1 的证明。由引理 2.12 和注记 2.3，我们知道 $\pi_1(X)$ 是虚幂零的。令 alb$_X$： $X \dashrightarrow$Alb$_X$ 为 X的阿尔巴内塞映射（任意奇点解消的阿尔巴内塞映射），由于 X 根据 [64,引理 8.1] 具有有理奇点，alb$_X$ 是处处有定义的态射，并且对于任意奇点解消 ϕ： $X' \to X$ ，都有 alb$_{X'} = \phi\circ$ alb$_X$。由 [74, 推论 3.13] 可知，alb$_X$以及 alb$_{X'}$都是代数纤维空间。于是我们可以对 X' 应用命题 C.1（或推论 C.1），从而得出$G := \pi_1(X') \simeq \pi_1(X)$的无挠幂零完备化是阿贝尔的；这里的同构 $\pi_1(X') \simeq \pi_1(X)$由[89, 定理 1.1]推出。然而，我们已经看到 G 自身是虚幂零的（引理 2.12），因此它是几乎阿贝尔的。□

为完成本文，我们将在高维的某些特殊情形下证明猜想1.2 。

定理 3.6。 设 X 是一个紧致的 *K¨ahler* 簇，则 $\pi_1(X)$ 在满足以下任一条件时是几乎阿贝尔的：

(1) $-K_X$ 是数值有效的，并且存在一个奇点解消 π： $Y \to X$ ，使得 $-K_{Y/X}$ 是相对丰的；*(2)* $-K_X$ 是数值有效的，并且存在一个奇点解消 π： $Y \to X$ ，使得 $-K_{Y/X}$ 是相对有效的。

证明。 关键在于，在上述两个假设下，对于一个固定的 K¨ahler 类 θ以及任意的 $\epsilon > 0$，我们可以构造一个 Ricci 几乎负的 RCD($-\epsilon, n$) 空间 [58, 87, 44]。此外，阿尔巴内塞映射是满射，因此前面的论证适用。 □

附录

A. Partial C^0 estimate: local case

在本附录中，我们首先证明一个局部版本的部分 C^0 估计，该估计最初由田在 [91], 中提出；另见 [40, 92, 100, 70, 69] ，其中包含重要进展。我们始终假设 $\hat{}$ $(X, d_\omega, \mu_\omega)$ 是一个紧 RCD$(-1, 2n)$ 空间，并且存在一个 Lipschitz $\hat{}$ 满射映射 $\iota\colon X \to X$ ，如命题 2.3 的设定所示，其中 X 是一个 klt K¨ahler$\hat{}$ 簇，并且 ι 限制在 X 的度量正则部分上时是一个一一映射。

命题 A.1. ι 是单射。

为证明该命题，我们需要一些预备引理。下面的 L^2-估计是针对 $\bar{\partial}$-方程的，它是对奇异 K¨ahler 簇的直接推广。固定一点 $z \in X$ ，取 $\Omega := \{\rho < 0\}$ 为 p 的一个小邻域，且包含于X中，其中 ρ 是光滑环境空间上一个光滑 PSH 函数的限制。再令 Ω° 为 Ω 的一个光滑 Zariksi 开子集。假设 $\omega := \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$ 是Ω上的一个 K¨ahler 流，其中 $\varphi \in L^\infty(\Omega) \cap C^\infty(\Omega^\circ) \cap PSH(\Omega)$。为与 [44], 的记号一致，我们令 L 为 Ω 上的平凡线丛，并将 $e^{-\varphi}$ 视为 L的一个奇异度量。

引理 A.1。 对于任意满足以下条件的 $k \geq 2$ 和光滑的 L^k-值 $(0,1)$-形式 τ

(1) $\bar{\partial}\tau = 0$, *(2)*

$Supp\,\tau \subset\subset \Omega^\circ$,

存在一个 L^k-值截面 u，使得

$$\bar{\partial} u = \tau \tag{A.1}$$

在 Ω 上并且

$$\int_\Omega |u|^2_{h^k}(k\omega)^n \leq \frac{1}{4\pi}\int_\Omega |\tau|^2_{h^k,k\omega}(k\omega)^n.$$

证明。该引理通过 Demailly 的一个技巧得证。首先选取一个全纯函数 f，使得超曲面 $D := \{f = 0\}$ 在 Ω 上覆盖 $\mathcal{S} := \Omega \setminus \Omega^\circ$。注意， f 不一定是不可约的。于是 $\Omega \setminus D$ 是一个 Stein 流形。在 $\Omega \setminus D$ 上存在一个光滑的多重次调和函数 ψ，使得 $\theta_D = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi$ 是 $\Omega \setminus D$ 上的完备 K¨ahler 度量。于是

$$\omega_\epsilon = k\omega + \epsilon\theta_D$$

显然也是一个完备的 K¨ahler 度量。现在我们将 τ 视为 $\Omega_{\Omega\setminus D}$ 值的（n，1）-形式，并令

$$h_\epsilon = h^k e^{-\epsilon\psi}\omega^n$$

是 $L^k \otimes K^{-1}{}_{\Omega\setminus D}$ 上满足条件的厄米度量

$$\mathrm{Ric}(h_\epsilon) = k\omega + \epsilon\theta_D + \mathrm{Ric}(\omega) \geq (k-1)\omega + \epsilon\theta_D \geq \frac{1}{2}\omega_\epsilon.$$

因此，根据 Demailly 关于 ∂ 方程的 L^2估计，存在一个取值于 $L^k \otimes K^{-1}{}_{\Omega\setminus D}$ 的 (n，0)-形式 u_ϵ，满足

$$\bar{\partial} u_\epsilon = \tau$$

在 $\Omega \setminus D$ 和

$$\int_{\Omega\setminus D} |u_\epsilon|^2_{h_\epsilon} \omega_\epsilon^n \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega\setminus D} |\tau|^2_{h_\epsilon,\omega_\epsilon} \omega_\epsilon^n.$$

现在令 $\epsilon \to 0$。由于 $u_{\epsilon_1} - u_{\epsilon_2}$ 在 $\Omega \setminus D$中某个固定紧子集上是全纯的，且具有一致的 L^2有界性，因此它必定一致有界，从而 u_ϵ 收敛到一个取值于 L^k的截面 u，满足 $\partial u = \tau$ 在 $\Omega \setminus D$ 和

$$\int_\Omega |u|^2_{h^k} (k\omega)^n \leq \frac{1}{4\pi} \int_\Omega |\tau|^2_{h^k,k\omega} (k\omega)^n.$$

由于 ω 在 Ω°上光滑， u 的 L^2界推出 $\partial u = \tau$ 在 Ω°上成立。还要注意， τ在 Ω°上具有紧支集，因此在 τ的支集之外， $\partial \bar{u} = 0$。由 u的 L^2 界可知， u 可延拓到 Ω，并在 τ的支集之外成为全纯函数。至此，我们完成了证明。□

我们用 $\Delta_\sharp$ 和 $\nabla_\sharp$ 分别表示关于重标度度量 h^k和 $k\omega$的拉普拉斯算子与梯度算子，并类似地定义关于厄米度量 h^k 和 $k\omega$的 $s \in H^0(\Omega\ L^k)$ 的缩放范数 $||\cdot||_{L^{\infty,\sharp}}$和 $||\cdot||_{L^{2,\sharp}}$。

引理A.2。 [44] 存在 $\Lambda > 0$ 使得如果 $s \in H^0(\Omega\ L^k)$ 对于 $k \geq 1$ 且 B_1 是 $k\omega$ 包含于 $\iota^{-1}\Omega$，那么

$$\|s\|_{L^\infty,\sharp}(B_{1/2}) \leq \Lambda \|s\|_{L^{2,\sharp}}(B_1). \tag{A.2}$$

$$\|\nabla_\sharp s\|_{L^\infty,\sharp}(B_{1/2}) \leq \Lambda \|s\|_{L^{2,\sharp}}(B_1). \tag{A.3}$$

一旦引理A.2 和引理 A.3 得到证明，我们就可以证明局部部分C^0 估计。

引理*A.3*。 [44, 引理*5.*15] 设 *(V, o)* 为任意一个切锥 *(Y_∞, p)*。假设对于某个 $\varepsilon > 0$，ε-奇异集 $V \setminus \mathcal{R}_\varepsilon(V)$ 的容量为 *0*。设 $q \in \iota^{-1}\Omega$ 是一个不同于 p 的点。那么对于任意给定的小 ξ，存在 $C > 0, m > 0$ 和$\sigma \in H^0(\Omega\ L^m)$，满足

(1) $\frac{1}{2} \leq |\sigma|_{h^m} \leq 1$ 在 $B_1(p) \cap \Omega^\circ$ 上，关于度量 $m\omega$。*(2)* $|\sigma|_{h^m} \leq \xi$ 在 $B_1(q) \cap \Omega^\circ$ 上，关于度量 $m\omega$。

现在我们继续证明本附录的主要命题。

ˆ 命题 A.1 的证明。假设有两个不同的点 $p, q \in X$，使得$z = \iota(p) = \iota(q)$。取 z 的一个邻域 Ω，如引理 A.2 中所述，且包含于 $\hat{X}$ 中。令 Ω° 为 Ω 与 X 的度量正则部分的交集。我们还固定两列点列 $p_i \in \Omega^\circ$ 和 $q_i \in \Omega^\circ$，它们分别在 $\hat{X}$ 的拓扑下收敛到 p, q。注意，在 X 的拓扑下， $\{p_i\}$ 和 $\{q_i\}$ 都收敛到 z。根据引理 A.3，存在一个整数 m 和两个全纯函数 f_p，使得在 -

$B_1(p)\cap\Omega^\circ$，且 $|f_p|_{h^m}\le\xi$ 在 $B_1(p)\cap\Omega^\circ$ 上。类似地，存在 f_q，使得 $\frac{1}{2}\le|f_q|_{h^m}\le 1$ 在 $B_1(q)\cap\Omega^\circ$ 上，且 $|f_q|_{h^m}\le\xi$ 在 $B_1(p)\cap\Omega^\circ$ 上。我们先假设 $f_p(z)=0$，那么 $|f_p|(p_i)\to 0$，因为 $i\to\infty$，这与 $|f_p|_{h^m}\ge\frac{1}{2}$ 矛盾。现在，若令 $g:=\frac{f_q}{f_p}$，则 g 是 z 附近定义良好的全纯函数。我们还有 $|g|(p_i)\le 2\xi$，并且 g 和 $|g|(q_i)\ge\frac{1}{2\xi}$。通过令 ξ 足够小，这与 g 在z处连续相矛盾。命题得证。□

B. A segment inequality for Kähler spaces

在本节中，我们假设 (X,ω) 是一个紧致的 Kähler 簇，带有一个光滑的 Kähler 形式 ω。我们还固定一个子簇 $\mathcal{S}$，它属于 X，并满足 $X\setminus\mathcal{S}$是连通的。对于任意 $\phi\in$ 拟次调和函数(X,ω)，记 $\omega_\phi=\omega+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\phi$。下面的命题本质上归功于 [35]。

命题 B.1. 对于任意紧子集 $U_1,U_2\subset X\setminus\mathcal{S}$，存在 $C=C(U_1,U_2)>0$ 使得对于任意 $\phi\in$拟次调和函数$(X,\omega)\cap L^\infty(X)\cap C^2(X\setminus\mathcal{S})$ 以及任意$\delta\in(0,1)$，存在闭子集 $U_{1,\delta}\subset U_1$ 和 $U_{2,\delta}\subset U_2$，满足以下条件。

(1) $\mathrm{Vol}_\omega(U_i\setminus U_{i,\delta})<\delta,\quad i=1,2$;

(2) 任意两点 $x_1\in U_{1,\delta}$,$x_2\in U_{2,\delta}$ 都可以由一条路径 $\gamma\subset X\setminus\mathcal{S}$ 连接，且

$$\mathcal{L}_{\omega_\phi}(\gamma)\le C\delta^{-1/2},$$

其中 $\mathcal{L}_{\omega_\phi}(\gamma)$ 是相对于 ω_ϕ γ 的弧长。

证明。为方便读者，我们略述证明。关键在于以下恒等式；由于 ω_ϕ 与 $[\omega]$属于同一个类，我们有

$$\int_X\omega_\phi\wedge\omega^{n-1}=\int_X\omega^n.$$

首先，设 $U_1=U_2=K$，其中 K 是包含在˜中 X的某个坐标图内的紧凸集。我们只需在 K 中用一条线段$[x_1,x_2]$ 连接 $x_1\in K$ 和 $x_2\in K$，并计算相对于 K的勒贝格测度的 ω_ϕ-长度平均值。由富比尼定理和柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}&\int_{K\times K}\left(\int_0^1\sqrt{\omega_\phi(tx_2+(1-t)x_1)(x_2-x_1)}dt\right)^2dx_1dx_2\\&\le|x_2-x_1|\int_0^1dt\int_{K\times K}\omega_\phi(tx_2+(1-t)x_1)dx_1dx_2\\&\le 2^{2n}\cdot diam_\omega(K)\cdot\mathrm{Vol}_\omega(K)\cdot\|\omega_\phi\|_{L^1(K)}\le C_1\end{aligned}$$

其中 C_1 与 ϕ 无关，最后一个不等式是先对 $y=(1-t)x_1$ 积分（当 $t\le\frac{1}{2}$ 时），或对 $y=tx_2$ 积分（当 $t\ge\frac{1}{2}$ 时）得到的。（注意，在这两种情况下,¯$dx_j\le 2^{2n}$ 。）

由此可得 使得 S 对 $(x_1,x_2)\in K\times K$ 的 ω_ϕ-长度超过 ($[x_1,x)$ 的集合 $_2]$

在 $K \times K$ 中的测度小于 δ。根据 Fubini定理，点 $x_1 \in K$ 的集合 Q 中，使得切片 $S(x_1) := \{x_2 : (x_1, x_2) \in S\}$ 的体积 $\mathrm{Vol}(S(x_1)) \geq \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(K)$，其自身的测度为 $\mathrm{Vol}(Q) \leq 2\delta/\mathrm{Vol}(K)$。现在，对于$x_1, x_2^- \in K \setminus Q$，我们有 $\mathrm{Vol}(S(x_j)) \leq \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(K)$，因此

$$\big(K \setminus S(x_1)\big) \cap \big(K \setminus S(x_2)\big) \neq \emptyset.$$

若 y 是上述集合中的一点，则有 $(x_1, y) \notin S$ 与 $(x_1, y) \notin S$，s o

$$\mathrm{length}([x_1, y] \cup [y, x_2]) \leq 2C_1\delta^{-1/2}$$

现在我们令 $U_{j,\delta,\phi} = K \setminus Q$，则有

$$\mathrm{Vol}(U_j \setminus U_{j,\delta,\phi}) \leq \mathrm{Vol}(Q) \leq 2C_1\delta/\mathrm{Vol}(K).$$

通过修改 δ，我们得到所需的 δ 体积界 $\mathrm{Vol}(U_j \setminus U_{j,\delta,\phi})$。

若 U_1 与 U_2 是 $X \setminus \mathcal{S}$中两个不同的紧凸集，我们只需选取包含在 X 的光滑˜部分中的有限序列紧凸集 $V_i, i = 1, 2...N$，使得 $U_1 = V_1$、$U_2 = V_N$ 与 $V_i \cap V_{i+1}$ 包含一个开集（这是˜可能的，因为 X 的复解析正则部分是连通的）。注意，V_i 的选取与 K¨ahler 度量无关。将前述论证应用于每个 V_i，其中 $V_{i+1,\delta,\phi} \cap V_{i,\delta,\phi} \neq \emptyset$，即可完成证明。当 U_1, U_2 非凸时，可通过用有限多个紧凸坐标图覆盖这些集合来得到该情形。□

C. Surjectivity of the Albanese map and the almost abelianity of the fundamental group

F. Campana 证明，对于阿尔巴内塞映射为满射的紧致 K¨ahler 流形，其基本群的虚幂零性与几乎阿贝尔性等价。

命题 C.1 ([14, 推论 3。1]). *设 Y 是一个紧致 K¨ahler 流形，且 Y 的阿尔巴内塞映射为满射，则 $\pi_1(Y)$ 的幂零完备化是阿贝尔的。*

为方便读者，我们将紧随 [14] 中的论证，给出该命题的证明。先回顾群论中的一些概念：设 G 是一个群，并令

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_i \supseteq G_{i+1} \supseteq \cdots$$

为 G的中心列，即我们归纳地定义 $G_{i+1} := [G, G_i]$。并且令$G_\infty := \bigcap_{i\geq 1} G_i$。对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}$，我们定义 $G'_n := \sqrt{G_n}$，这里对于任意子集 $S \subseteq G$，我们定义

$$\sqrt{S} := \left\{ g \in G \,\middle|\, g^n \in S \right\}.$$

（无挠）幂零完备化的 G 定义为 $G^{\mathrm{nilp}} := G/G'_\infty$。其定理 C.1的证明基于 J. Stallings 提出的以下刻画：

定理 C.1（[86, 定理 3.4]）。设 f： $G \to H$ 是一个群同态。假设 $H_1(f)$： $H_1(G, \mathbb{Q}) \to H_1(H, \mathbb{Q})$ 是同构，且 $H_2(f)$： $H_2(G, \mathbb{Q}) \to H_2(H, \mathbb{Q})$ 是满射。那么

(a) 诱导同态 f_k： $G/G'_k \to H/H'_k$ 对于 $k \in \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}$ 是单射的，对于 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ 具有有限指数；(b) 若 f 是满射，则对于每个 $k \in \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}$， f_k 都是同构。

证明概要。 该定理可通过归纳法，结合 [86,定理 2.1]中建立的以下正合序列来证明：

$$H_2(G) \to H_2(G/N) \to N/[G, N] \to H_1(G) \to H_1(G/N)$$

其中 $N \subseteq G$ 是正规子群，并且该序列关于 f 具有函子性：$(G, N) \to (G', N')$，其中 f： $G \to G'$ 是满足 $f(N) \subseteq N'$ 的群同态。□

现在我们转向命题 C.1 的证明。事实上，我们将证明一个更强的结果；为陈述该结果，先引入一些记号：设 Y 是一个紧致 Kähler 流形，且 alb_Y： $Y \to \mathrm{Alb}_Y$ 是 Y的阿尔巴内塞映射，设 W 是 alb_Y的像的奇点解消。取 $Y' \to W$ 对 α： $Y \dashrightarrow W$ 的不定点消解，并带有自然的（二有理）态射 μ： $Y' \to Y$。由于 μ 在基本群上诱导同构，我们可以假设 α 是处处有定义的态射。令 $G := \pi_1(Y)$ 和 $H := \pi_1(W)$，则 α 诱导群同态 α_*： $G \to H$。下面我们将证明以下结论：

定理 C.2 ([14, 定理 2.1])。 **</style}诱导态射，** $_n$： $G/G'_n \to H/H'_n$在 $n \in \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}$ 时是单射，在 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$时具有有限指数。此外，如果 α_* 是满射，那么对于每个 $n \in \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}$， $\alpha_{*,\ n}$ 都是同构。

证明。 鉴于 定理 C.1，我们只需验证以下两个条件成立：

(i) $H_1(\alpha) : H_1(G, \mathbb{Q}) \to H_1(H, \mathbb{Q})$ is an isomorphism;
(ii) $H_2(\alpha) : H_2(G, \mathbb{Q}) \to H_2(H, \mathbb{Q})$ is surjective.

为此，我们需要将复代数簇（或更一般地，胞腔复形）的上同调与其基本群的（群）同调联系起来。可以通过以下构造实现：

设 K 是一个连通胞腔复形，通过向 K 添加维数为 ≥ 3 的胞腔，我们可以构造一个无球复形 K'，使得 K 嵌入到 K'中。由构造可知， K' 的高阶同伦群均为零，因此$K' = K(\pi_1(K), 1)$ 是 $\pi_1(K)$ 的 Eilenberg-Maclane空间；特别地，对于任意 n，都有 $H_n(K') \simeq H_n(\pi_1(K))$。由于 $K' \backslash K$ 不含维数为 ≤ 2的胞腔，考察偶对 (K', K) 的同调序列可得，自然态射 $H_1(K) \to H_1(K')$ 是同构，且 $H_2(K) \to H_2(K')$ 是满射：

$$H_2(K) \to H_2(K') \to \underbrace{H_2(K', K)}_{=0} \to H_1(K) \to H_1(K') \to \underbrace{H_1(K', K)}_{=0} \to 0.$$

因此 $H_1(K) \simeq H_1(\pi_1(K))$ 且 $H_2(K) \twoheadrightarrow H_2(\pi_1(K))$。

现在，(i) 可由阿尔巴内塞映射的构造得出：同调群的态射 $H_1(\mathrm{alb}_Y)\colon H_1(Y,\mathbb{Z})/\mathrm{tors}_{H_1(\alpha)}\longrightarrow H_1(W,\mathbb{Z})\to H_1(\mathrm{Alb}_Y,\mathbb{Z})$ 是一个同构。为了证明 (ii)，我们先注意到下面这个基本上归功于 J. Stallings 的引理（见 [86, 定理 5。1]）：

引理 *C.1*（[14, 引理 *2*.3]）。设 $\phi\colon K\to L$ 是有限连通胞腔复形之间的态射。假设 $H^2(\phi)\colon H^2(L,\mathbb{Q})\to H^2(K,\mathbb{Q})$ 是单射，则 $H_2(\phi_*)\colon H_2(\pi_1(K),\mathbb{Q})\to H_2(\pi_1(L),\mathbb{Q})$ 是满射。

证明。注意，我们有以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} H_2(K,\mathbb{Q}) & \twoheadrightarrow & H_2(\pi_1(K),\mathbb{Q}) \\ \downarrow{\scriptstyle H_2(\phi)} & & \downarrow{\scriptstyle H_2(\phi_*)} \\ H_2(L,\mathbb{Q}) & \twoheadrightarrow & H_2(\pi_1(L),\mathbb{Q}), \end{array}$$

其中，水平箭头如上构造，且均为满射。根据我们的假设，左侧箭头 $H_2(\phi)\colon H_2(K,\mathbb{Q})\to H_2(L,\mathbb{Q})$ 是满射，因此由五引理可知，右侧箭头 $H_2(\phi_*)$ 也是满射。□

由上面的引理可知，(ii) 可由下式的单射性直接推出：$H^2(\alpha)\colon H^2(W,\mathbb{Q})\to H^2(Y,\mathbb{Q})$，而这由下文更一般的引理 C.2得到。因此，我们完成了定理 C.2的证明。□

引理 C.2 (参见 [14, 引理 2。4])。设 $\alpha: X\to Y$ 是（不一定紧致的）连通复流形之间的满射本征态射，并假设 X 是 *K¨ahler*。则对任意 $H^i(\alpha)\colon H^i(Y,\mathbb{R})\to H^i(X,\mathbb{R})$ 均为单射。$i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$。

证明. 这一结果的思想已出现在A. Fujiki的工作 [46, 命题1的证明.6]中。我们指出，只要假定态射 α 是逆紧的，X（以及 Y）的紧致性就不是必要的。在 X上取一个K¨ahler形式 ω，并令$r:=\dim X-\dim Y$。设 Y_0 为 Y的Zariski开集，在其上 α 是光滑的，则我们断言积分 $c(y):=\int_{X_y}\omega|^r_{X_y}$ 与 $y\in Y_0$无关。事实上，只需证明 $c(\cdot)$ 是局部常值的，因此由Ehresmann定理（见 [95, 命题9.3]），我们可以假定 $X_0:=\alpha^{-1}(Y_0)$微分同胚于一个乘积 $Y_0\times F$，其中 F是 α的一般纤维。于是我们可以写成 $c(y)=\int_F\tau^*\omega|^r_{\{y\}\times F}$，其中 $\tau\colon Y_0\times F\xrightarrow{\simeq}X_0$是由Ehresmann定理给出的微分同胚，因此由 ω 的 d-闭性，我们有

$$dc(y)=\int_F d(\tau^*\omega|^r_{\{y\}\times F})=0.$$

断言由此得证，我们将此常数简记为 c。于是，对 Y上任意具有紧支集的实2 dim Y-形式 ϕ，我们有

$$\int_X \alpha^*\phi \wedge \omega^r = \int_{X_0} \alpha^*\phi \wedge \omega^r = c \cdot \int_{Y_0} \phi = c \cdot \int_Y \phi.$$

现在取 $[u] \in \ker(H^i(\alpha))$，则 $\alpha^* u$是 d-正合的，因此对任意 $[v] \in H^{2\text{维数}_c \quad Y-i}(Y, \mathbb{R})$，我们有

$$0 = \int_X \alpha^*(u \wedge v) \wedge \omega^r = c \int_Y u \wedge v,$$

$$\uparrow$$

by Stokes

因此，由于 $[u] = 0$ 庞加莱对偶性。 □

作为 定理 C.2的推论，我们得到以下结果，它不过是对 命题 C.1的进一步完善。

推论 C.1 ([14, 推论 3。1])。 设 Y 是一个紧致 *Kähler* 流形，并令$G := \pi_1(Y)$。假设 Y 的阿尔巴内塞映射是满射。那么

(a) $f := \text{alb}_{Y*} : G \to \pi_1(\text{Alb}_Y)$ 是满射。(b)

$G'_1 = G'_n = G'_\infty$ 对任意 $n \geq 1$，且 $G^{\text{nilp}} \simeq \pi_1(\text{Alb}_Y)$。

证明。根据定理 C.2，只需证明 (a)。由于 alb_Y 是满射，由 [13, 命题 1.3] 可知 f 具有有限指数 d。令 $h : T \to \text{Alb}_Y$ 为次数为 d 的同源，使得 $h_*(\pi_1(T)) = f(G)$，则由提升引理可得一个分解 $\beta : Y \to T$，满足 $\text{alb}_Y = h \circ \beta$；由阿尔巴内塞映射的泛性质， h 尤其是一个同构，因此 $f = \text{alb}_{Y*}$ 是满射。□

D. Non-nef loci and asymptotic multiplier ideals

在本附录中，我们将展示一些与伪有效类的非 nef 位相关的结果。首先回顾伪有效类的非 nef 位的定义：

定义 *D.1.* 设 X 是一个紧致 *Kähler* 流形，且 $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 是一个伪有效类。取 X 上的一个 *Kähler* 形式 ω 。如定义 *2.1* 中所述，对每个 $\epsilon > 0$，令 $\alpha[-\epsilon\omega]$ 表示满足 $T \geq -\epsilon\omega$ 的流 $T \in \alpha$ 的集合，并令 $T_{\min,\epsilon}$ 为 $\alpha[-\epsilon\omega]$ 中具有最小奇异性的流（见 [8, §2.8]），并写作 $T_{\min,\epsilon} = \theta_\epsilon + dd^c\varphi_\epsilon$，其中 $\theta_\epsilon \in \alpha$ 是一个光滑 *(1,1)*-形式，φ_ϵ 是准拟次调和函数。那么 α 的渐近乘子理想定义为（见注 *2.1(a)*）

$$\mathcal{J}_+(\alpha) := \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{J}(\varphi_\epsilon).$$

The 关于 α 在 $x \in X$ 处的最小重数定义为（参见 [8, 定义 3.1] ）

$$\nu(\alpha, x) := \sup_{\epsilon>0} \nu(T_{\min,\epsilon}, x).$$

并且 α 的非 ***nef*** 位定义为（参见 [8, 定义 3.3]）

$$\mathrm{NNef}(\alpha) = \left\{ x \in X \,\middle|\, \nu(\alpha, x) > 0 \right\}.$$

显然，这些定义既不取决于所选的具有最小奇异性的流，也不取决于 ***K¨ahler*** 形式 ω。

首先证明等式 (2.1)，它可视为 Ein-Lazarsfeld-Mustat 著名工作中确立的基本关系的解析版本˘a-Nakamaye-Popa [41, 推论 210]。

引理 D.1. 设 X 是一个紧致 ***K¨ahler*** 流形，且 $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 是一个伪有效类。那么

$$\mathrm{NNef}(\alpha) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} V(\mathcal{J}_+(m\alpha))_{\mathrm{red}}.$$

这里，对于任意理想层 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$, $V(\mathcal{I})$ 表示由 $\mathcal{I}$定义的复子空间。

证明。取 X上的一个 K¨ahler 形式 ω。若 $\nu(\alpha, x) = 0$，则对每个 $\epsilon > 0$， $\nu(T_{\min,\epsilon}, x) = 0$；特别地，我们有 $\nu(\varphi_\epsilon, x) < 1$，这意味着 $\mathcal{J}(\varphi_\epsilon)_x = \mathcal{O}_{X,x}$，因此由 Skoda 定理 [33, 引理 (5.6.a)，第40]页，可得 $\mathcal{J}_+(\alpha)_x = \mathcal{O}_{X,x}$。此外，由齐次性可知，对每个 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$， $\nu(m\alpha, x) = 0$，同样的论证表明$\mathcal{J}_+(m\alpha)_x = \mathcal{O}_{X,x}$。这就证明了该等式中的“⊇”部分。

若 $\nu(\alpha, x) > 0$，再次由齐次性和命题 3.5]，可得 $\nu(m\alpha, x) > n$，当$m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 充分大时成立。因此，对每个充分小的 $\epsilon > 0$，都有

$$\nu(\varphi_{m,\epsilon}, x) = \nu(T_{m,\min,\epsilon}, x) > n,$$

其中 $T_{m,\min,\epsilon}$ 是 $m\alpha[-\epsilon\omega]$ 中的具有最小奇异性的流，而 $\varphi_{m,\epsilon}$ 是$T_{m,\min,\epsilon}$的局部势。再次由 Skoda 定理 [33, 引理 (5.6.b)，第 40] $\mathcal{J}_+$ 页，$m\alpha)_x \subsetneq \mathcal{O}_{X,x}$，于是等式中的“⊆”部分得证。□

若 $f : X \to Y$ 是射影簇之间的满射态射，且 D 是 Y 上的伪有效除子，那么容易根据定义验证， $\mathbb{B}_-(f^*D) \subseteq f^{-1}\mathbb{B}(D)$。这一事实的解析类比如下：

引理 D.2. 设 $f : X \to Y$ 是紧致 ***K¨ahler*** 流形之间的满射态射，并设 $\alpha \in H^{1,1}(Y, \mathbb{R})$ 是一个伪有效类。那么 $\mathrm{NNef}(f^*\alpha) \subseteq f^{-1}\,\mathrm{NNef}(\alpha)$。

为证明该引理，一个关键观察是以下简单事实：

引理 D.3. 设 φ 是 Y 上的一个拟拟次调和函数，且 $f : X \to Y$ 是紧致 ***K¨ahler*** 流形之间的一个态射，满足 $f(X)$ 不包含于 $\varphi^{-1}(-\infty)$。若 $\nu(\varphi, y) = 0$ 对某个 $y \in f(X)$成立，则对每个 $x \in f^{-1}(y)$， $\nu(\varphi \circ f, x) = 0$ 均成立。

这可以直接由勒隆数的定义 [33, 定义（5.5），第40],页加以验证，因此我们省略证明。

引理 D.2 的证明。分别在 X 与 Y 上选取K¨ahler形式 ω_X 和 ω_Y，并且我们可以假定 $\omega_X \geq f^*\omega_Y$。若 $\nu(\alpha, y) = 0$，则对每一个 $\epsilon > 0$，有 $\nu(T_{\min,\epsilon}, y) =$0，并由引理 D.3，这对每一个 $x \in f^{-1}(y)$蕴含 $\nu(f^*T_{\min,\epsilon}, x) = 0$。这里，流的拉回是在 [8, §2.2.3]的意义下取的。此外，我们有$f^*T_{\min}$，$_\epsilon \geq -\epsilon f^*\omega_Y \geq -\epsilon\omega_X$，即$f^*T_{\min}$，$_\epsilon \in f^*\alpha[-\epsilon\omega_X]$。因此，对每一个 $x \in f^{-1}(y)$，有 $\nu(f^*\alpha, x) = 0$。于是该引理得证。□

References

[1] Thierry Aubin. ´紧致卡拉比流形上的 Monge-Amp`ère 型方程。数学学报，102:63–95，1978。[2] Arnaud Beauville. 第一陈类为零的卡拉比流形。微分几何杂志，18(4):755–782，1983。[3] Fabio Bernasconi、Stefano Filipazzi、Zsolt Patakfalvi 和 Nikolaos Tsakanikas。对数正则 Beauville–Bogomolov 分解的一个反例。预印本 https://arxiv.org/ abs/2407.17260，2024。[4]Bo Berndtsson。多重次调和函数的开性猜想。arXiv 预印本 arXiv:1305.5781，2013。[5] Bo Berndtsson 和 Mihai P˘aun。Bergman 核与子伴随。arXiv 预印本 arXiv:1002.4145，2010。[6] Caucher Birkar 和 De-Qi Zhang。极化对的饭高纤维化与多重正则系统的有效性´。数学研究所数学出版物，123:283–331，2016。[7] Zbigniew B-locki 和 S-lawomir Ko-lodziej。关于流形上多重次调和函数的正则化。美国数学会会刊，135(7):2089–2093，2007。[8] S´ebastien Boucksom。紧复流形上的除子 Zariski 分解。法国高等科学研究所科学年刊，37(4):45–67，2004。[9] S´ebastien Boucksom、Philippe Essydieux 和 Vincent Guedj（编）。卡拉比流的导论，数学讲义第 2086 卷。Springer International Publishing，Cham、Heidelberg、纽约、Dordrecht、伦敦，2013。[10] Lukas Braun。Kawamata 对数终端奇点的局部基本群是有限群。数学新进展，226(3):845–896，2021。[11] Lukas Braun 和 Fernando Figueroa。基本群、余正则性与低维 klt Calabi–Yau 对。arXiv 预印本 arXiv:2401/01315，2024。[12] C´ecile Cachet、Zhining Liu 和 Joaqu´ín Moraga。对数 Calabi-Yau 曲面的基本群。arXiv 预印本 https://arxiv.org/abs/2312.03981，2023。[13] Fr´ed´eric Campana。关于 $\mathcal{C}$ 类的扭量空间。微分几何杂志，33(2):541–549，1991。[14] Fr´ed´eric Campana。关于幂零卡拉比群的评注。法国高等科学研究所科学年刊，28(3):307–316，1995。[15] Fr´ed´eric Campana。轨形、特殊簇与分类理论。Annales de l'Institut Fourier，54(3):499–665，2004。[16]Fr´ed´eric Campana。特殊几何轨形与紧致卡拉比流形的双有理分类。Jussieu 数学研究所杂志，10(4):809–934，2011。[17] Fr´ed´eric Campana。轨形斜率有理连通性。arXiv 预印本 arXiv:1607.07829，2016。

[18] Fr´ed´eric Campana、Junyan Cao 和 Shin-ichi Matsumura。具有数值有效反典范除子的射影 klt 对。代数几何，8(4):430–464，2021。[19] Fr´ed´eric Campana、Vincent Koziarz 和 Mihai P˘aun。伴随线丛有效性的数值特征。Annales de l'Institut Fourier，62(1):107–119，2012。[20] Junyan Cao。紧卡拉比流形上的大泽-竹越延拓定理及其应用。载于 Daniele Angella、Costantino Medori 和 Adriano Tomassini（编），《复几何与辛几何》，Springer INdAM 丛书第 21 卷，第 19–38 页，纽约，2017。Springer International Publishing。[21] Junyan Cao。具有数值有效反典范丛的射影流形的阿尔巴内塞映射。法国高等科学研究所科学年刊，52(5):1137–1154，2019。[22] Junyan Cao 和 Andreas H¨oring。具有数值有效反典范丛的射影流形的分解定理。Journal of Algebraic Geometry，28(3):567–597，2019。[23] Junyan Cao 和 Mihai P˘aun。阿贝尔簇上代数纤维空间的 Kodaira 维数。数学新进展，207(1):345–387，2017。[24] Junyan Cao 和 Mihai P˘aun。关于卡拉比语境下的相对典范丛与叶丛代数性判据的评注。arXiv 预印本 arXiv:2502.02183，2025。[25] J. Cheeger、T. H. Colding 和 G. Tian。关于具有有界 Ricci 曲率的空间的奇点。几何与泛函分析，12(5):873–914，2002。[26] Jeff Cheeger 和 Tobias Holck Colding。Ricci 曲率下界与扭曲积的近乎刚性。Annals of Mathematics，144(1):189–237，1996。[27] Meng Chen 和 Qi Zhang。关于 Demailly–Peternell–Schneider 的一个问题。《欧洲数学会杂志》，15(5):1853–1858，2013。[28] Xiuxiong Chen、Simon Donaldson 和 Song Sun。法诺流形上的卡拉比-爱因斯坦度量。II：锥角小于 2π 的极限。美国数学会杂志，28(1):199–234，2015。[29] Yifan Chen、Shih-Kai Chiu、Max Hallgren、G´abor Sz´ekelyhidi、Tˆo Tat Dat 和 Freid Tong。关于卡拉比-爱因斯坦流。arXiv 预印本 arXiv:2502.09825，2025。[30]Benoˆıt Claudon 和 Andreas H¨oring。卡拉比态射的射影性判据。arXiv 预印本 arXiv:2404.13927，2004。[31] Olivier Debarre。复环面与阿贝尔簇，专门课程第 6 卷。法国数学会，EDP Sciences，巴黎，1999。[32] Jean-Pierre Demailly。Monge-Ampère 测度与仿射代数簇的几何刻画。法国数学会回忆录，19:1–125，1985。[33] Jean-Pierre Demailly。《代数几何中的解析方法》，现代数学综述第 1 卷。高等教育出版社；国际出版社，北京；萨默维尔，2010。[34] Jean-Pierre Demailly。复解析几何与微分几何。开放内容图书 https: //www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf，2012。[35] Jean-Pierre Demailly、Thomas Peternell 和 Michael Schneider。具有数值有效 Ricci 类的卡拉比流形。《数学汇编》，89(2):217–240，1993。[36] Jean-Pierre Demailly、Thomas Peternell 和 Michael Schneider。紧卡拉比流形上的伪有效线丛。国际数学杂志，12(06):689–741，2001。[37] Qin Deng、Jaime Santos-Rodr´ıguez、Sergio Zamora 和 Xinrui Zhao。RCD(K,N) 空间上的 Margulis 引理。arXiv 预印本 arXiv:2308.15215，2023。已被《分析与偏微分方程》接收。[38] Qing Deng。RCD(K, N) 空间中切锥的 Hölder 连续性与非分支性。博士论文，多伦多大学（加拿大），2021。[39] Ya Deng。大泽-竹越延拓定理在直像问题中的应用。国际数学研究通报，2021(23):17611–17633，2021。[40] Simon Donaldson 和 Song Sun。卡拉比流形的 Gromov-Hausdorff 极限与代数几何。数学学报，213(1):63–106，2014。

[41] Lawrence Ein、Robert Lazarsfeld、Micea Mustat˘a、Michael Nakamaye 和 Mihnea Popa。基集的渐近不变量。《Annales de l'Institut Fourier》，56(6):1701–1734，2006。[42] Sho Ejiri、Masataka Iwai 和 Shin-ichi Matsumura。代数纤维空间的相对反典范除子之渐近基集。《Journal of Algebraic Geometry》，32(3):477–517，2023。[43] Phillipe Eyssidieux、Vincent Guedj 和 Zeriahi Ahmed。奇异 K¨ahler-Einstein 度量。《Journal of Ameroican Mathetical Society》，22(3):607–639，2009。[44] Xin Fu、Bin Guo 和 JIAN SONG。复维数三的奇异 K¨ahler 空间上的 RCD 结构。arXiv 预印本 arXiv:2503.08865，2025。[45] Xin Fu、Jiyuan Han 和 Yongpan Zou。具有混合奇异性的 k¨ahler-Einstein 度量的变化。arXiv 预印本 arXiv:2508.02212v2，2025。[46] Akira Fujiki。紧 K¨ahler 流形的自同构群。《Inventiones Mathematicae》，44(3):225–258，1978。[47] William Fulton 和 Robert Lazarsfeld。连通性及其在代数几何中的应用。载于 Anatoly Libgober 和 Philip Wagreich（编），《Algebraic Geoemtry》，中西部代数几何会议论文集，伊利诺伊大学芝加哥环校区，1980 年 5 月 2–3 日，第 862 卷《数学讲义》，第 26–92 页，柏林、海德堡，1981 年。施普林格出版社。[48] Nicola Gigli。度量测度空间的微分结构及其应用。《美国数学会回忆录》，236(1113)，2015。[49] Hans Grauert 和 Reinhold Remmert。复 R¨aumen 中的多重次调和函数。《Mathematische Zeitschrift》，65:175–194，1956。[50] Daniel Greb、Henri Guenancia 和 Stefan Kebekus。具有平凡典范类的 klt 簇：全纯单值群、微分形式与基本群。《Geometry & Topology》，23(4):2051–2124，2019。[51] Daniel Greb、Stefan Kebekus 和 Thomas Peternell。´Kawamata 对数终端空间的 Étale 基本群、平坦层与阿贝尔簇的商。《Duke Mathematical Journal》，165(10):1965–2004，2016。[52] Daniel Greb、Stefan Kebekus 和 Thomas Peternell。具有平凡典范类的奇异空间。载于 J´anos Koll´ar、Osamu Fujino、Shigeru Mukai 和 Noboru Nakayama（编），《极小模型与极端射线》，第 70 卷《纯数学高级研究》，第 67–113 页，京都，2016 年。日本数学会。[53] Misha Gromov。《黎曼空间与非黎曼空间的度量结构》，《数学进展》第 152 卷。Birkh¨auser，波士顿，1999 年。基于 1981 年法文原著[MR0682063 (85e:53051)], 附录由 M. Katz、P. Pansu 和 S. Semmes 撰写，Sean Michael Bates 译自法文。[54] Qi'an Guan 和 Xiangyu Zhou。Demailly强开性猜想的证明。《Annals of Mathematics》，182(2):605–616，2015。[55] Bin Guo、Duong Hong Phong、JIAN SONG 和 Jacob Sturm。K¨ahler 空间上的 Sobolev不等式。arXiv 预印本 arXiv:2311.00221，2023。[56] Bin Guo、Duong Hong Phong、JIAN SONG 和 Jacob Sturm。K¨ahler 几何中的直径估计。《Communications in Pure and Applied Mathematics》，77(8):3520–3556，2024。[57] Bin Guo、Duong Hong Phong、JIAN SONG 和 Jacob Sturm。K¨ahler 几何中的直径估计 II：去除小退化假设。《Math. Z.》，308(3):文章编号 43，2024。[58] Bin Guo 和 JIAN SONG。奇异 K¨ahler 度量的 Nash熵、Calabi能量与几何正则化。arXiv 预印本 arXiv:2502.02041，2025。[59] Rajendra Vasant Gurjar 和 De-Qi Zhang。对数德尔佩佐曲面的光滑点的 π_1 有限性：I。《Journal of Mathematical Sciences, the University of Tokyo》，1(1):137–180，1994。

[60] Rajendra Vasant Gurjar 和 De-Qi Zhang。对数德尔佩佐曲面的光滑点的 π_1 有限性：II。《Journal of Mathematical Sciences, the University of Tokyo》，2(1):165–196，1995。[61] Shouhei Honda。几乎光滑度量测度空间上的 Bakry-`Emery 条件。《度量空间中的分析与几何》，6(1):129–145，2018。[62] Masataka Iwai、Satoshi Jinnouchi 和 Shiyu Zhang。具有大典范除子或反典范除子的奇异簇的 Miyaoka-Yau 不等式，2025。[63] Vital Kapovitch 和 Burkhard Wilking。Ricci 曲率有下界的流形的基本群结构。arXiv 预印本 arXiv:1105.5955，2011。[64] Yujiro Kawamata。代数纤维空间的极小模型与 Kodaira 维数。《Journal f ¨ur die reine und angewandte mathematik》，1985(363):1–46，1985。[65] Yujiro Kawamata。数值 Kodaira 维数为零情形下的丰盛定理。《美国数学杂志》，135(1):115–124，2013。[66] J´a nos Koll´ar。《Shafarevich 映射与自守形式》。M. B. Porter 讲座。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1995。[67] J´anos Koll´ar 和 Shigefumi Mori。《代数簇的双有理几何》，《剑桥数学论丛》第 134 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1998 年。C. H. Clemens 和 A. Corti 合作，译自 1998 年日文原著。[68] S-lawomir Ko-lodziej。复 Monge-Amp`ère 方程。《数学学报》，180(1):69–117，1998。[69] Gang Liu 和 G´abor Sz´ekelyhidi。Ricci 曲率有下界的 K¨ahler 流形的 Gromov-Hausdorff 极限 II。《纯粹与应用数学通讯》，74(5):909–931，2021。[70] Gang Liu 和 G´abor Sz´ekelyhidi。Ricci 曲率有下界的 K¨ahler 流形的 Gromov-Hausdorff 极限。《几何与泛函分析》，32(2):236–279，2022。[71] Jie Liu、Wenhao Ou、JUANYONG WANG、Xiaokui Yang 和 Guolei Zhong。具有严格 nef 相对反对数典范除子的代数纤维空间。《伦敦数学学会杂志》，109(6)，2024。[72] Zhining Liu。具有数值有效反典范丛的有效紧 K¨ ähler 轨形的基本群。《Mathematische Zeitschrift》，305(2)，2023。[73] Shin-ichi Matsumura 和 JUANYONG WANG。具有数值有效反典范除子的射影 klt 对的结构定理。《欧洲数学会杂志》（在线优先）doi.org/10.4171/jems/1702，2025。[74] Shin-ichi Matsumura、JUANYONG WANG、Xiaojun Wu 和 Qimin Zhang。具有数值有效反典范丛的紧 K¨ähler 流形，2025。[75] Wenhao Ou。关于切丛层的一般 nef 性。《Mathematische Zeitschrift》，304(4)，2023。[76]Wenhao Ou。紧 K¨ähler 流形为单有理的一个刻画。arXiv 预印本 arXiv:2501.18088，2025。[77] Mihai P˘aun。具有数值有效 Ricci 类的紧 K´ähler 流形的基本群。´a Classe de Ricci Num¨eriquement effective。《Acad´emie des sciences 汇刊》，324(11):1249–1254，1997。 `Mihai P´aun。具有数值有效 Ricci 曲率的紧 K ´ähler 流形的阿尔巴内塞映射。《分析与几何通讯》，9(1):35–60，2001。[78] Mihai P˘aun。具有 nef Ricci 曲率的紧 K¨ähler 流形的相对伴随超越类与阿尔巴内塞映射。载于 Keiji Oguiso、Caucher Birkar、Shihoko Ishii 和 Shigeharu Takayama（编），《高维代数几何：纪念 Yujiro Kawamata 教授六十寿辰》，第 47 卷《纯数学高级研究》，第 335–356 页，东京，2017 年。日本数学会。[79] Mihai P˘aun。奇异 Hermitian 度量与多重典范丛的直像的正性。载于 Tommaso de Fernex、Brendan Hassett、Mircea Mustat¨a、Martin Olsson、Mihnea

Popa 和 Richard Thomas，编者，《代数几何：盐湖城 2015》，第 1 部，第 97 卷，载于《纯数学研讨会论文集》，第 519–554 页，普罗维登斯，2018 年。美国数学会。[81] Mihai P˘aun 和 Shigeharu Takayama。扭曲相对多重正则丛及其直接像的正性。《Journal of Algebraic Geometry》，27(2):211–272，2018 年。[82] Thomas Peternell。切丛一般半正的簇。《欧洲数学会杂志》，14(2):571–603，2012 年。[83] Jian Song。K¨ahler-Einstein 流的黎曼几何。arXiv 预印本 arXiv:1404.0445，2014 年。[84] Jian Song。K¨ahler-Einstein 流的黎曼几何 II：Kawamata 无基点定理的解析证明。arXiv 预印本 arXiv:1409.8374，2014 年。[85] Jian Song、Sturm Jacob 和 Xiaowei Wang。K¨ahler-Einstein 流的黎曼几何 III：负标量曲率 K¨ahler-Einstein 流形的紧致性。arXiv 预印本 arXiv:2003.04709，2020 年。[86] John Stallings。《群的同调与中心级数》。《代数杂志》，2(2):170–181，1965 年。[87] Gabor Szekelyhidi。奇异 K¨ahler-Einstein 度量与 RCD 空间。《Forum Math. Pi》，13：论文编号 e24，33 页，2025 年。[88] Gabor Sz´ekelyhidi。塌缩的卡拉比–丘纤维化的 Gromov-Hausdorff 极限。arXiv 预印本 arXiv:2505.14939，2025 年。[89] Shigeharu Takayama。《对数终端奇点消解的局部单连通性》。《国际数学杂志》，14(8):825–836，2003 年。[90] G. Tian。关于正第一陈类复曲面的 Calabi猜想。《数学发明》，101(1):101–172，1990 年。[91] Gang Tian。代数流形上的 K¨ahler-Einstein 度量。载于《国际数学家大会论文集》，第 I、II 卷（京都，1990），第 587–598 页。日本数学会，东京，1991 年。[92] Gang Tian。K稳定性与 K¨ahler-Einstein 度量。《纯粹与应用数学通讯》，68(7):1085–1156，2015 年。[93] Zhiyu Tian 和 Chenyang Xu。《基本群的有限性》。《数学汇编》，153(2):257–273，2017 年。[94] Jean Varouchas。《关于紧致 Kähler 流形的像》。载于 Fran¸cois Norguet 编，《多复变函数 V——Fran¸cois Norguet 研讨会，1979 年 10 月至 1985 年 6 月》，数学讲义第 1188 卷，第 245–259 页，柏林、海德堡，1986 年。施普林格出版社。[95]Claire Voisin。《霍奇理论与复代数几何》，Cours sp´ecialis´és 第 10 卷。法国数学会，EDP Sciences，巴黎，2002 年。[96] Juanyong Wang。关于 Kähler 纤维空间的 Iitaka猜想 $C_{n,m}$ 。《图卢兹科学学院年刊》，30(4):813–897，2021 年。[97] Juanyong Wang。具有半正反典除子的射影簇的结构：对数终端奇点情形。《数学年刊》，384(1-2):47–100，2022 年。[98]Chenyang Xu。《代数基本群的有限性》。《数学汇编》，150(3):409–414，2014 年。[99] Shing-Tung Yau。关于紧致 K¨ahler 流形的 Ricci 曲率与复 Monge-Amp`ère 方程 I。《纯粹与应用数学通讯》，31(3):339–411，1978 年。[100] Kewei Zhang。偏 C^0 估计的一些改进。《分析与偏微分方程》，14(7):2307–2326，2021 年。[101] Qi Zhang。《论具有半正反典除子的射影流形》。《纯粹与应用数学杂志》，478(3):57–60，1996 年。[102] Qi Zhang。《论具有半正反典除子的射影簇》。《数学年刊》，332(3):697–703，2005 年。

* School of Science, Institute for Theoretical Sciences, Westlake University, Hangzhou 310030, China电子邮箱地址: fuxin54@westlake.edu.cn

† Department of Mathematics & Computer Science, Rutgers University, Newark,NJ 07102电子邮箱地址: bguo@rutgers.edu

†† Department of Mathematics, Rutgers University, Piscataway, NJ 08854电子邮箱地址: jiansong@math.rutgers.edu

** State Key Laboratory of Mathematical Sciences, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China电子邮箱地址: juanyong.wang@amss.ac.cn