arXiv:2602.07431v1 [math.CA] 7 Feb 2026

广义下Assouad型维数及其插值

HAIPENG CHEN 和 WEN WANG*

Abstract. 本文研究 ϕ-下 Assouad 维数的解析性质与结构性质，这是一种对下 Assouad 维数加以推广的广义概念。我们建立了关于维数函数的 ϕ-下 Assouad 维数等价性，证明了与 ϕ-下维数正则性相关的解析性质，并分析了速率窗口在这一背景下的作用。此外，我们通过给出相应定理来刻画 ϕ-下维数的正向与负向插值性质。

Contents

1. 引言 1 1.1. 下 Assouad 型维数的历史 1 1.2. 广义下维数与速率窗口。2 1.3. 主要结果与说明 4 1.4. 本文结构 5 2. 预备知识 5 2.1. 记号与辅助引理 5 2.2. Moran 构造的维数 7 2.3. 广义下维数的一般性质 8 3. 主要结果的证明。9 3.1. 定理 1 的证明：等价性 9 3.2. 定理 2 的证明：两个广义下 Assouad 维数的故事 10 3.3. 定理 3 的证明：广义下维数的插值 16 3.4. 定理 4 的证明：爆米花图上的广义下维数 18 致谢。19 参考文献 19 附录：恢复下 Assouad 维数的一种新证明 21

1. Introduction

1.1. 下 Assouad 型维数的历史。 分形几何与几何测度论中的一个基础研究方向，是阐明具有不规则几何结构的集合的精细尺度结构。下 Assouad 维数是维数理论文献及相关领域中的一个重要量。它

Date：2026年2月10日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 28A80（主要），28A78（次要）。*Key words and phrases.* 广义下Assouad维数、下Assouad谱、下 Assouad 维数。*：通讯作者。

最初由 Larman 在 1967 [16] 中作为最小维数提出。近几十年来，下 Assouad 维数已成为广为研究的 Assouad 维数的自然对偶，并且是通过对紧集进行“放大观察”所得到的极限集的最小豪斯多夫维数。下 Assouad 维数及其变体在分形几何的维数理论中受到了广泛关注。关于一般性介绍及更多细节，请参阅 [11, 13] 。

我们研究非空的有界倍增度量空间（X，d），在本文余下部分将其简写为 ***n.b.d.*** 空间 X 。对于任意 $F \subseteq X$，我们将 $N_r(F)$ 记为覆盖 F 所需的半径为 的球的最小数量。下 Assouad 维数定义为

$$\dim_{\mathrm{L}} F = \sup\{s \geq 0 : \text{存在常数 } C > 0 \text{，使得}$$
$$\text{for all } 0 < r < R \text{ and } x \in F,\ N_r(B(x,R) \cap F) \geq C\left(\frac{R}{r}\right)^s\}.$$

由定义可知，下 Assouad 维数刻画了最稀疏（最薄）的局部标度性质，反映了集合内部的最小覆盖复杂度。对于 Ahlfors–David 正则集等性质良好的集合 F，有 $\dim_{\mathrm{L}} F = \dim_{\mathrm{B}} F = \dim_{\mathrm{A}} F$，其中这些分别表示下 Assouad 维数、盒计数维数和 Assouad 维数。然而，对于下 Assouad 维数，某些不规则行为可能会出现：例如，任何包含孤立点的集合，其下 Assouad 维数始终为零。此外，存在开集 $U = \cup_{n=1}^{\infty}(1/n - 1/2^{n+1},\ 1/n + 1/2^{n+1})$，使得 $\dim_{\mathrm{L}} U = 0$。详见 Fraser [11]。

将下 Assouad 维数与其他经典分形维数进行比较颇有启发意义。一般而言，下 Assouad 维数是标准维数概念中最小的。例如，对于所有 $F \subseteq X$，

$$\dim_{\mathrm{L}} F \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$$

对于所有紧集，

$$\dim_{\mathrm{L}} F \leq \dim_{\mathrm{H}} F.$$

然而，对于某些非紧集，例如 $[0,1] \cap \mathbb{Q}$，下 Assouad 维数实际上可能大于豪斯多夫维数。理解这种粗尺度缩放如何产生，以及不同维数概念如何发挥作用，在分形几何及相关领域的发展中具有重要意义。

1.2. 广义下维数与速率窗口。本文研究下 Assouad 维数的精细尺度性质，既在一般框架下考察，也针对若干重要的显式集合族进行研究。在这一背景下，一个尤为突出的例子是下 Assouad 谱，它是 Assouad 谱的自然对偶；这两个概念均由 Fraser 和 Yu 在 [12] 中引入。下 Assouad 谱是下 Assouad 维数的一种变体，其定义方式是将下 Assouad 维数中的标度关系限制为某个固定 $\theta \in (0, 1)$ 下的 $r = R^{1/\theta}$ 。这一概念也为更广泛的维数插值研究计划作出了贡献。有关维数插值的更多信息，请参阅 Fraser [11] 及其中的参考文献。

我们分别用 $\dim_{\mathrm{L}}^{\theta} F$ 和 $\dim_{\mathrm{L}}^{\theta} F$ 表示下 Assouad 谱和拟下 Assouad 谱。它是一个连续参数化的维数族，

$$\dim_{\mathrm{L}} F \leq \underline{\dim}_{\mathrm{L}}^{\theta} F \leq \dim_{\mathrm{L}}^{\theta} F \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F.$$

近年来，下 Assouad 谱的稳健理论因其独特的标度行为而备受关注。值得注意的是，下

Assouad 谱表现出不同于经典 Assouad 谱的现象。Assouad 谱在盒维数与准 Assouad 维数之间插值，而下 Assouad 谱则不一定遵循这一模式。相反，正如 Chen 等人所示，$[6, 8]$, $\lim_{\theta\to 0}\dim_{\mathrm{L}}^{\theta} F$和

$\lim_{\theta\to 1}\dim_{\mathrm{L}}^{\theta} F$存在，且下 Assouad 谱在准下 ***Assouad*** 维数与下盒维数之间进行插值，其

$$\dim_{\mathrm{L}} F \le \dim_{\mathrm{qL}} F = \lim_{\theta\to 1}\dim_{\mathrm{L}}^{\theta} F \le \lim_{\theta\to 0}\dim_{\mathrm{L}}^{\theta} F \le \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F,$$

但 $\dim_{\mathrm{qL}} F$可能严格大于 $\dim_{\mathrm{L}} F$，而 $\lim_{\theta\to 0}\dim_{\mathrm{L}}^{\theta} F$可能严格小于 $\dim_{\mathrm{B}} F$。对于某些分形集，例如 McMullen 集，已知 $\lim_{\theta\to 0}\dim_{\mathrm{L}}^{\theta} F$与下盒维数相同，参见 [11]。然而，Chen 等人 [8] 证明，这种相同关系并非普遍成立。下 Assouad 型维数旨在捕捉集合最粗略的尺度性质，但一般而言，下 Assouad 谱无法完整地在下 Assouad 维数与下盒维数之间进行插值。

针对这一问题，G´arcia 等人[14] 引入了 Assouad 维数和下 Assouad 维数的变体，分别称为上 ϕ-***Assouad*** 维数和下 ϕ-***Assouad*** 维数。在这些定义中，较小尺度 r 被规定为较大尺度 R的函数，正如 Fraser 和 Yu [12]所提出的。Garcia 等人[14] 研究了这些维数的一般性质，并针对若干恰当选取的函数建立了相关结果。关于 Assouad 维数变体的进一步发展及相关研究，读者可参见 [14]。

与 G´arcia 等人[14].不同，Banaji 等人[4] 通过将 r 限制为 R的一般函数，考察了 Assouad 维数的一种不同变体，并将其称为ϕ-***Assouad*** 维数。他们证明，上 ϕ-Assouad 维数可以通过变分原理由 ϕ-Assouad 维数导出，并且能够在上盒维数与 Assouad 维数之间实现完全插值。关于 ϕ-Assouad 维数的一般性质及其在特定分形集上的取值，详见 [4]。关于 Assouad 维数各种变体的进一步发展及相关研究，请参阅 [14]。

为刻画在 r受 R 的一般维数函数约束时下 Assouad 类维数的影响，并进一步考察下 Assouad 类维数是否能在函数意义上实现下 Assouad 维数与下盒维数之间的完全插值，本文通过将较小尺度 r 规定为较大尺度 R的函数，引入了下 Assouad 维数的一种变体。我们系统地研究了这一新维数的基本性质，包括等价性、正则性和插值性质。

设 $\phi\colon R\in(0,\ 1)\to\mathbb{R}^{+}$ 是一个实值函数，若 $\phi(R)$ 满足以下条件，则称其为维数函数:

(1) $\phi(R)$ 随着 $R\to 0$ 增大而减小；(2) $R\to\phi(R)\log(1/R)$ 随着 R 减小至 0 而增大至无穷。

本文始终关注非空、有界的倍增度量空间，简称为 ***n.b.d.*** 空间。给定 n.b.d. 空间 F，我们将 ϕ-下 ***Assouad*** 维数（简记为 ϕ-下维数）定义如下:

$$\dim_{\mathrm{L}}^{\phi} F = \sup\{s\ge 0\ :\exists C>0,\ \text{such that}\ \forall\, 0<r=R^{1+\phi(R)}<R<1,\ \inf_{x\in F} N_r(B(x,R)\cap F)\ge CR^{-\phi(R)s}\}.$$

准 ϕ-下 *Assouad* 维数（简记为准 ϕ-下维数，在 [14],中称为下 ϕ-Assouad 维数）定义如下:

$$\underline{\dim}_{\mathrm{L}}^{\phi}F=\sup\{s\geq 0\ :\exists C>0,\ \text{such that}\ \forall\, 0<r\leq R^{1+\phi(R)}<R<1,\\ \inf_{x\in F}N_r(B(x,R)\cap F)\geq C(R/r)^s\}.$$

由此直接可得

$$\dim_{\mathrm{L}}F\leq\underline{\dim}_{\mathrm{L}}^{\phi}F\leq\dim_{\mathrm{L}}^{\phi}F\leq\underline{\dim}_{\mathrm{B}}F.$$

此外，为刻画 ϕ-下维数更精细的尺度性质，给定维数函数 ϕ，对任意 $\alpha\in(0,\ \infty)$，我们定义 $\phi_\alpha:\ R\mapsto\phi(R)/\alpha$，并将相应的 ϕ_α-下维数 $\dim^{\phi_\alpha}{}_{\mathrm{L}}F$记作 $\mathcal{W}_\phi$。我们还将 $\phi(R)$ 的维数速率窗口称为

$$\mathcal{W}_\phi=\{\phi_\alpha\ :\ \alpha\in(0,\infty)\}.$$

注意，对于包含孤立点或某些开集的集合，任意维数函数 ϕ 对应的 ϕ-下维数总是 0。为克服这一局限并避免某些病态行为，我们还引入 ϕ-修正下 *Assouad* 维数，简称为 ϕ-修正下维数，定义如下:

$$\dim_{\mathrm{ML}}^{\phi}F=\sup\{\dim_{\mathrm{L}}^{\phi}E\ :\ E\subseteq F\}.$$

我们将 ϕ-下维数、ϕ-准下维数和 ϕ-修正下维数统称为广义下维数。本文的主要贡献总结如下:

(1) 我们研究广义下维数的性质。(2) 我们探讨 ϕ-下维数的速率窗口和解析性质。(3) 我们讨论广义下维数从下维数和准下维数出发的插值问题。(4) 我们研究了一些例子，这些例子表明，广义下维数无法充分地从下维数插值到下盒维数。

在本文余下部分，我们将围绕这些主题更精确地介绍主要结果。

1.3. 主要结果与说明。 本节将详细介绍我们的主要定理及其推论。关于广义下维数的性质，我们得到:

定理 1。 设 $\phi(R)$和 $\psi(R)$ 是两个不同的维数函数，则以下条件等价:

(1) $\lim_{R\to 0}\phi(R)/\psi(R)\ =1$。*(2)* 对所有有界的 $F\subseteq\mathbb{R}$，$\dim^{\phi}{}_{\mathrm{L}}F=\dim^{\psi}{}_{\mathrm{L}}F$。*(3)* 对所有非空有界直径空间 F，$\dim^{\phi}{}_{\mathrm{L}}F=\dim^{\psi}{}_{\mathrm{L}}F$。

我们将 ϕ-下维数的速率窗口和解析性质具体化如下。

定理 2。 设 F 是一个 *n.b.d.* 空间，且 $\phi(R)$ 是一个维数函数，则

$$\underline{\dim}_{\mathrm{L}}^{\phi}F=\inf_{0<\alpha<1}\dim_{\mathrm{L}}^{\phi_\alpha}F$$

对于从下 Assouad 维数到准下 Assouad 维数的 ϕ-下维数的插值性质，我们将证明

定理 3. 给定 $F \subseteq \mathbb{R}^d$ 和 $s \in [$维数$_{\mathrm{L}} F$，维数$_{\mathrm{qL}} F]$，则存在一个维数函数 ϕ：$R \in (0,\ 1) \to [0, d]$ 使得

$$\dim_{\mathrm{L}}^{\phi} F = \underline{\dim}_{\mathrm{L}}^{\phi} F = s.$$

值得注意的是，下 Assouad 维数还可以通过以下更一般的方式得到恢复。

定理 4. 给定 $F \subseteq \mathbb{R}^d$。对于任意维数函数 $\phi(R)$，我们可以选取一个维数函数 $\Psi(R)$，使得对于所有充分小的 $R > 0$，均满足 $\Psi(R) \leq \phi(R)$，且 维数$_{\mathrm{L}}^{\Psi} F =$维数$_{\mathrm{L}}^{\Psi} F =$维数$_{\mathrm{L}} F$。

——

然而， ϕ-下维数和修正的 ϕ-下谱无法完全实现从下 Assouad 维数到下盒维数的插值，如下所示。这意味着存在一些例子，使得 ϕ-下维数、准 ϕ-下维数和修正的 ϕ-下维数均不满足 ($\dim_{\mathrm{qL}} F$，$\dim_{\mathrm{B}} F$]之间的插值性质。

——

定理 5. 存在一个紧集 $F \subseteq \mathbb{R}^2$，使得对于所有维数函数 $\phi(R)$，均有 维数$^{\phi}{}_{\mathrm{L}}$ $F =$维数$^{\phi}{}_{\mathrm{L}} F <$维数$^{\phi}{}_{\mathrm{ML}} F <$维数$_{\mathrm{B}} F$。 ——

1.4. **本文结构**。本文其余部分安排如下：第 2 节介绍必要的预备知识，第 3 节研究广义下维数的性质。具体而言，第 3.1 节讨论若干概念的等价性，并证明定理 1。第 3.2 节研究由 $\phi(R)$ 确定的速率窗口类，并考察 ϕ-下维数的解析性质，最终得到定理 2。第 3.3 节专门讨论 ϕ-下维数的正向插值性质，主要结果见定理 3 和定理 4；第 3.4 节则聚焦于负向插值方面，其结果概括于定理 5。

2. Preliminaries

2.1. **记号与辅助引理**。本节介绍一些记号和辅助引理。设 $a, b \in \mathbb{R}$。若存在常数c 使得 $a \leq cb$，则记为 $a \lesssim b$；若存在常数 c 使得 $a \geq cb$，则记为 $a \gtrsim b$。此外，若 $a \lesssim b$ 且 $a \gtrsim b$，则记为 $a \approx b$。

给定一个 n.b.d. 空间 F，对于任意 $r > 0$，我们将 $N_r(F)$ 定义为覆盖 F 所需的半径为 r 的球的最小数量，并将 $M_r(F)$ 定义为 F 中两两距离为 r 的离散子集的最大数量。给定 n.b.d. 空间 F，由倍增性质可知，存在一个常数 $C > 1$，使得对于任意 $x \in F$ 和 $r > 0$，$N_r(B(x,\ 2r) \cap F) \leq C$，于是

$$N_r(F) \approx M_r(F), \tag{2.1}$$

这表明， $N_r(F)$ 与 $M_r(F)$ 可以互相控制，差一个乘法常数。更多细节可参见 [10, 11] 及其中的参考文献。

对于任意 $\theta \in (0,\ +\infty)$，我们记为 $R_\theta = R^{1+\phi(R)/\theta}$。基于倍增性质，下面的结果给出了对所有 $0 < \alpha < \beta < \infty$，以 $N_{R_\beta}(B(x,\ R) \cap F)$ 表示的 $N_{R_\alpha}(B(x,\ R) \cap F)$ 的一个上界估计。

引理 1. 对于 *n.b.d.* 空间 F，任意充分小的 $R > 0$,

$$N_{R_\alpha}(B(x,R) \cap F) \lesssim N_{R_\beta}(B(x,R) \cap F) \cdot \sup_{y \in F} N_{R_\alpha}(B(y, R_\beta) \cap F)$$

对于球覆盖或离散子集的基数的更精细下界估计，以下来自 Hare 和 Troscheit[15], 的结果给出了 $M_r(F)$ 的更为精细的下界。

引理 2 ([15]). 给定 $F \subseteq \mathbb{R}^d$、 $R > 0$ 和 $0 < r := r_k < r_{k-1} < \cdots < r_1 < R$，则对任意 $x \in F$,

$$M_r(B(x,R)\cap F) \geq M_{r_1}(B(x,R-r_1)\cap F)\cdot \inf_{y_1\in F} M_{r_2}(B(y_1,r_1-r_2)\cap F)\cdots \\ \cdot \inf_{y_{k-1}\in F} M_{r_k}(B(y_{k-1},r_{k-1}-r_k)\cap F).$$

我们将反复使用以下关于广义下 Assouad 型维数的基本但关键的引理。第一个引理介绍了 $R^{-\phi(R)}$ 的倍增性质，其中 $\phi(R)$ 是一个维数函数。

引理 3. 设 ϕ 是一个维数函数，则对任意正的常数 $0 < C <1$，存在一个与 ϕ 相关的常数 M，使得对任意充分小的 $R > 0$，有

$$R^{-\phi(R)} < (CR)^{-\phi(CR)} < C^{-M}R^{-\phi(R)}. \tag{2.2}$$

证明。 由维数函数的定义可知，存在一个常数 $M > 0$，使得对任意充分小的 $R > 0$， $\phi(R) < M$， $\phi(R)$ 趋于 0，且 $R^{-\phi(R)}$ 趋于无穷大，当 $R \to 0$时。因此

$$(CR)^{-\phi(CR)} \leq (CR)^{-\phi(R)} \leq C^{-M}R^{-\phi(R)}. \tag{2.3}$$

□

根据引理 3，我们有以下引理，它对于在某些尺度上给出引理 2 的下界很重要。

引理 4. 给定 *n.b.d.* 空间 F 和维数函数 ϕ，令 $s =$ 维数$^{\phi}$ $_{\mathrm{L}}F > 0$，则对任意 $\varepsilon > 0$ 和任意 $0 < C < 1$，存在 $R' > 0$，使得对任意$0 < R < R'$，有

$$M_{R^{1+\phi(R)}}(B(x,CR)\cap F) \geq R^{-\phi(R)(s-\varepsilon)} \tag{2.4}$$

证明。 由 $0 < C < 1$，根据倍增性质，对于任意 $x \in F$ 和任意 $R > 0$，可得

$$\begin{aligned} &M_{(CR)^{1+\phi(CR)}}(B(x, CR)\cap F) \\ &\leq M_{R^{1+\phi(R)}}(B(x,CR)\cap F)\cdot \sup_{x'\in F} N_{(CR)^{1+\phi(CR)}}(B(x',R^{1+\phi(R)})\cap F). \end{aligned} \tag{2.5}$$

根据引理 3,

$$R^{-\phi(R)} < (CR)^{-\phi(CR)} < C^{-M}R^{-\phi(R)}.$$

因此，由 F 的倍增性质，存在一个常数 $C_1 > 0$，使得

$$\sup_{x'\in F} N_{(CR)^{1+\phi(CR)}}(B(x',R^{1+\phi(R)})\cap F) \leq C_1. \tag{2.6}$$

由 (2.5)、(2.6)，可得

$$M_{R^{1+\phi(R)}}(B(x,CR)\cap F) \geq C_1^{-1}M_{(CR)^{1+\phi(CR)}}(B(x,CR)\cap F). \tag{2.7}$$

对于任意 $\varepsilon > 0$，由 $s =$ dim$^{\phi}$ $_{\mathrm{L}}F$ 和 (2.6)，对于任意充分小的 $R >$0，有 $M_{R^{1+\phi(R)}}(B(x, R) \cap F) \geq R^{-\phi(R)(s-\varepsilon/2)}$ 和 $C_1^{-1} > R^{\varepsilon\phi(R)/2}$。因此，由 (2.7) 及 $R^{-\phi(R)}$ 的单调性可得

$$\begin{aligned} M_{R^{1+\phi(R)}}(B(x,CR)\cap F) &\geq C_1^{-1}\cdot (CR)^{-\phi(CR)(s-\varepsilon/2)} \\ &\geq R^{\varepsilon\phi(R)/2}\cdot R^{-\phi(R)(s-\varepsilon/2)} \geq R^{-\phi(R)(s-\varepsilon)}, \end{aligned}$$

这便得到了所需的论证。 □

2.2. **Moran 构造的维数**。在本节中，我们研究 Moran 构造的维数公式。Moran 构造的维数理论对于讨论维数的性质至关重要，并广泛应用于分形几何研究。

我们首先回顾 $\mathbb{R}^d$ 中齐次 Moran 集的定义。设 $\mathcal{I}=\{0,1\}^d$。记 $\mathcal{I}^*=\cup_{n=0}^{\infty}\mathcal{I}^n$，并将长度为 0 的唯一词 $\{\emptyset\}$ 记为 $\mathcal{I}^0$。给定收缩比序列$\mathbf{r}=\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $0<r_n\le 1/2$ 对所有$n\in\mathbb{N}$均成立。对于任意$\mathbf{i}\in\mathcal{I}$，记

$$S_{\mathbf{i}}^n(x)=r_nx+\lambda_{\mathbf{i}}^n$$

其中，$\lambda_{\mathbf{i}}^n=((\lambda_{\mathbf{i}}^n)^{(1)},\ (\lambda_{\mathbf{i}}^n)^{(2)},\ \ldots\ldots,\ (\lambda_{\mathbf{i}}^n)^{(d)})\in\mathbb{R}^d$ 为

$$(\lambda_{\mathbf{i}}^n)^{(j)}=\begin{cases}0 & \text{if } \mathbf{i}^{(j)}=0;\\ 1-r_n & \text{if } \mathbf{i}^{(j)}=1.\end{cases}\qquad \forall 1\le j\le d.$$

对于任意词 $\sigma=(\mathbf{i}_1,\ \cdots,\ \mathbf{i}_n)\in\mathcal{I}^*$，我们将收缩映射扩展为 $S_\sigma=S_{\mathbf{i}_1}\circ\cdots\circ S_{\mathbf{i}_n}$。因此定义

$$M_n=\bigcup_{\sigma\in\mathcal{I}^n}S_\sigma([0,1]^d)\qquad\text{and}\qquad M:=M(\mathbf{r})=\bigcap_{n=1}^{\infty}M_n$$

并将 M 称为由$\mathbf{r}$确定的齐次 Moran 集。

我们首先研究齐次 Moran 集的显式公式。给定$\mathbf{r}=\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$，对于任意 $n\ge 1$，记 $\rho(n)$ 为第 n 个柱集的边长，其定义为

$$\rho(n)=r_1r_2\ldots r_n.$$

根据 ϕ-下维数的定义，对于任意 n.b.d. 空间 F，

$$\dim_{\mathrm{L}}^{\phi}F=\liminf_{R\to 0}\frac{\inf_{x\in F}\log N_{R^{1+\phi(R)}}(B(x,R)\cap F)}{-\phi(R)\log R},\tag{2.8}$$

由此我们可以得到齐次 Moran 集的 ϕ-下 Assouad 维数的显式公式。

现在我们讨论齐次 Moran 集的维数公式。首先给出一些术语和记号。给定 $R>0$，我们将满足以下条件的最大整数记为 $l(R)$

$$\rho(l(R)+1)<R\le\rho(l(R))\tag{2.9}$$

并将满足以下条件的最大整数记为 $l_\phi(R)$

$$\rho(l(R)+l_\phi(R)+1)<R^{1+\phi(R)}\le\rho(l(R)+l_\phi(R)).\tag{2.10}$$

下面的结果给出了齐次 Moran 构造的广义下 Assouad 维数的显式公式。

命题1. 假设 $r_*:=\inf_{n\ge1}r_n>0$，则对于任意齐次 *Moran* 集 $M\subseteq\mathbb{R}$，有

$$\dim_{\mathrm{L}}^{\phi}M=\liminf_{n\to\infty}\frac{l_\phi(\rho(n))\log 2}{\log\rho(n)/\rho(n+l_\phi(\rho(n)))}.$$

证明。这是由定义直接得到的结果，但为完整起见，我们在此给出证明。对于任意 $x\in M$ 以及充分小的 $R>0$，球 $B(x,\ R)$ 至多与两个 $l(R)$ 级柱集相交，并且至少包含一个 $l(R)+1$柱集。对于任意层级 $k\in\mathbb{N}^+$，我们将 I_k 记为 M的第 k 个柱集。因此，由（ 2.9 ）和（ 2.10 ）可得

$$N_{\rho(l(R)+l_\phi(R))}(I_{l(R)+1})\le\inf_{x\in M}N_{R^{1+\phi(R)}}(B(x,R)\cap M)\le 2N_{\rho(l(R)+l_\phi(R)+1)}(I_{l(R)})\tag{2.11}$$

and

$$\frac{\rho(l(R)+1)}{\rho(l(R)+l_\phi(R))} \le R^{-\phi(R)} \le \frac{\rho(l(R))}{\rho(l(R)+l_\phi(R)+1)}. \tag{2.12}$$

显然，（2.11）的两边都与 $2^{l_\phi(R)}$ 同阶，并且根据 $r_*>0$，（2.12）的两边分别与 $\rho(l(R))\,\rho(l(R)+l_\phi(R))$ 同阶。这就直接得到了所需结论。□

2.3. 广义下维数的一般性质。 本节将通过维数函数比较广义下 Assouad 维数。对于某些 n.b.d. 空间 F，例如自相似集或自仿射集，对于任意满足 $\limsup_{R\to 0}\frac{\phi(R)}{\psi(R)}<1$ 的维数函数 ϕ 和 ψ，总有 $\dim^\phi_{\mathrm{L}} F \le \dim^\psi_{\mathrm{L}} F$，对于阿尔福斯正则集 F，也有 $\dim^\phi_{\mathrm{L}} F = \dim^\psi_{\mathrm{L}} F$. 然而，根据齐次莫兰集的维数公式，以下例子表明，维数的排序未必与其维数函数的排序相对应。

例 1。 设 ϕ、ψ 是任意两个不同的维数函数，且满足 $\liminf_{R\to 0}\frac{\phi(R)}{\psi(R)}<1$，则存在一个紧集 $M\subseteq\mathbb{R}$，使得

$$\dim^\phi_{\mathrm{L}} M < \dim^\psi_{\mathrm{L}} M.$$

证明。 由 $\liminf_{R\to 0}\frac{\phi(R)}{\psi(R)}<1$ 可知，存在某个常数 $\varepsilon>0$，使得存在一个满足以下条件的序列 $\{R_n\}_{n=1}^\infty$

$$\frac{\phi(R_n)}{\psi(R_n)} < 1-\varepsilon.$$

通过选取$\{R_n\}_{n=1}^\infty$中的元素，我们假设$\{R_n\}_{n=1}^\infty$ 对所有$n\ge 1$均满足,

$$R_{n+1} < \min\{R_n^{1+\psi(R_n)}/16, R_n^{2n}\}.$$

接下来，我们应用归纳法构造由$\mathbf{r}:=\{r_n\}_{n=1}^\infty$确定的齐次莫兰集 $M(\mathbf{r})\subseteq\mathbb{R}$。给定 $1<\alpha<\infty$，令 $r_0=1, r_1=R_1$，则由(2.9-2.10)，对任意 $n\ge 1$，我们定义

$$r_k = \begin{cases} 2^{-\alpha} & l(R_n)+1\le k\le l(R_n)+l_\phi(R_n);\\ 2^{-1} & l(R_n)+l_\phi(R_n)+1\le k\le l(R_{n+1}).\end{cases}$$

于是由命题1可得

$$\dim^\phi_{\mathrm{L}} M = \liminf_{n\to\infty}\frac{l_\phi(R_n)\cdot\log 2}{\log\rho(l(R_n))/\rho(l(R_n)+l_\phi(R_n))} = \frac{1}{\alpha}.$$

注意，对所有充分大的 n，$\frac{\phi(R_n)}{\psi(R_n)}<1-\varepsilon$，因此由 $l_\phi(R_n)$与 $l_\psi(R_n)$的定义可得

$$R_n^{-\phi(R_n)} \approx 2^{\alpha\cdot l_\phi(R_n)} \quad\text{and}\quad R_n^{-\psi(R_n)} \approx 2^{-l_\psi(R_n)-(\alpha-1)l_\phi(R_n)}.$$

因此存在常数 $c_0>1$，使得对所有充分大的 n，$l_\psi(R_n) > c_0\cdot l_\phi(R_n)$，从而得到

$$\begin{aligned}\dim^\psi_{\mathrm{L}} F &= \liminf_{n\to\infty}\frac{l_\psi(R_n)\log 2}{\log\rho(l(R_n))/\rho(l(R_n)+l_\psi(R_n))}\\ &= \liminf_{n\to\infty}\frac{l_\psi(R_n)}{l_\psi(R_n)+(\alpha-1)\cdot l_\phi(R_n)} > \frac{1}{\alpha} = \dim^\phi_{\mathrm{L}} F\end{aligned}$$

如所需。 □

例 2. 设 ϕ 为维数函数，设 $\psi(R)=3\phi(R)/2$，则存在一个紧集 $M\subseteq\mathbb{R}$，使得

$$\dim_{\mathrm{L}}^{\phi} M>\dim_{\mathrm{L}}^{\psi} M.$$

证明。我们现在通过归纳法引入齐次莫兰集 $M\subseteq\mathbb{R}$的构造。由 ϕ和 ψ 的选取可知，存在一个序列$\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得对所有 $n\in\mathbb{N}$,

$$R_{n+1}<\min\{R_n^{1+\psi(R_n)}/16,R_n^{2n}\}.$$

给定 $1<\alpha<\infty$，并令 $r_1=R_1$, $l(R_1)=1$。根据 (2.9-2.10)，对于任意 $n\geq 1$，我们定义

$$r_k=\begin{cases}2^{-\alpha} & l(R_n)+1\leq k\leq l(R_n)+l_{\phi/2}(R_n);\\ 2^{-1} & l(R_n)+l_{\phi/2}(R_n)+1\leq k\leq l(R_n)+l_{\phi}(R_n);\\ 2^{-\alpha} & l(R_n)+l_{\phi}(R_n)+1\leq k\leq l(R_n)+l_{\psi}(R_n);\\ 2^{-1} & l(R_n)+l_{\psi}(R_n)+1\leq k\leq l(R_{n+1}).\end{cases}$$

与例 1 的证明类似，由命题1可得

$$\frac{\alpha+2}{3\alpha}=\dim_{\mathrm{L}}^{\psi} M<\dim_{\mathrm{L}}^{\phi} M=\frac{\alpha+1}{2\alpha}.$$

计算与例 1 的证明类似，因此细节留给读者。□

3. Proof of main results.

3.1. 定理 1 的证明：等价性。 下面的结果估计了与维数函数之商相关的两个不同广义下维数之间的误差。

命题 2。 设 ϕ,ψ 是两个维数函数，若存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$1-\varepsilon\leq\liminf_{R\to 0}\frac{\phi(R)}{\psi(R)}\leq\limsup_{R\to 0}\frac{\phi(R)}{\psi(R)}\leq 1+\varepsilon,$$

那么，对于任意具有倍增常数 C 的 *n.b.d.* 空间 F，可得

$$\left|\dim_{\mathrm{L}}^{\phi} F-\dim_{\mathrm{L}}^{\psi} F\right|\leq\varepsilon\cdot(1+2\log_2 C+\varepsilon).$$

证明。由假设可知，对于所有充分小的 $0<R<1$，可得

$$1-\varepsilon\leq\frac{\phi(R)}{\psi(R)}\leq 1+\varepsilon.$$

给定充分小的 R，若 $\psi(R)>\phi(R)$，则由引理 2 可得

$$N_{R^{1+\psi(R)}}(B(x,R)\cap F)\leq N_{R^{1+\phi(R)}}(B(x,R)\cap F)\cdot\sup_{y\in F}N_{R^{1+\psi(R)}}(B(y,R^{1+\phi(R)})\cap F),$$

因此，由倍增常数可知

$$\sup_{y\in F}N_{R^{1+\psi(R)}}(B(y,R^{1+\phi(R)})\cap F)\leq\left(R^{\phi(R)-\psi(R)}\right)^{\log_2 C}=R^{(\phi(R)-\psi(R))\log_2 C},$$

并且根据 $\dim^{\phi}{}_{\mathrm{L}}F$ 和 $\dim^{\psi}{}_{\mathrm{L}}F$ 的定义，可得

$$R^{-\psi(R)\cdot(\dim_{\mathrm{L}}^{\psi}F-\varepsilon)+(\psi(R)-\phi(R))\cdot\log_2 C}\leq R^{-\phi(R)\cdot(\dim_{\mathrm{L}}^{\phi}F+\varepsilon)},$$

因此，我们得到

$$-\psi(R)\cdot(\dim_{\mathrm{L}}^{\psi}F-\varepsilon)+(\psi(R)-\phi(R))\cdot\log_2 C\geq-\phi(R)\cdot(\dim_{\mathrm{L}}^{\phi}F+\varepsilon)$$

然后，由于 $\dim^{\psi}{}_{\mathrm{L}} F \le \log_2 C$ and $\psi(R) - \phi(R) \le \varepsilon \cdot \psi(R)$，我们得到

$$\dim_{\mathrm{L}}^{\psi} F - \dim_{\mathrm{L}}^{\phi} F \le \varepsilon \cdot (\varepsilon + 2\log_2 C + 1).$$

逆向部分的结论可通过类似的证明得到。 □

现在我们来证明定理 1。

定理 *1* 的证明。 (3) 推出 (2)：这显然成立。(2) 推出 (1)：
由例 1 可得。(1) 推出 (3)：这是命题 2 的自然推论。

□

3.2. 定理 2 的证明：两个广义下 Assouad 维数的故事。 我们首先讨论速率窗口的一般性质。下面的结果给出了给定维数函数时速率窗口的一般界估计，并且是文献 [8, 15]中下 Assouad 谱连续性估计的推广。

命题 3。 设 ϕ 是一个维数函数。设 F 是一个 *n.b.d.* 空间，且$\varphi(\alpha) := 维^{\phi_\alpha}{}_{\mathrm{L}} F$。那么对于任意 $0 < \alpha < \beta < \infty$,

$$\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)\varphi\left(\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\right) \le \frac{1}{\alpha}\varphi(\alpha) - \frac{1}{\beta}\varphi(\beta) \le c\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right).$$

证明。 我们首先讨论下界估计。对于任意 $s_1 > 维^{\phi_\alpha}{}_{\mathrm{L}} F$，存在一个单调递减序列 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足对所有n都有 $R_n < 1$，且当 n 趋于无穷时该序列趋于 0；并且存在一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$，使得对所有 n，分别令 $(R_n)_\alpha = R^{1+\phi(R_n)_n}{}^{/\alpha}$和 $(R_n)_\beta = R^{1+\phi(R_n)_n}{}^{/\beta}$，则

$$M_{(R_n)_\alpha}(B(x_n, R_n) \cap F) \le R_n^{-\phi_\alpha(R_n)\cdot s_1}.$$

设 $s_2 < \dim^{\phi_\beta}{}_{\mathrm{L}} F$ 且 $s_3 < \dim^{\phi_{\alpha\beta/(\beta-\alpha)}}{}_{\mathrm{L}} F$，则根据倍增性质和$\phi$ 单调性，可得

$$\begin{aligned}
M_{16(R_n/2)_\beta}(B(x_n, R_n/2) \cap F) &\approx M_{(R_n/2)_\beta}(B(x_n, R_n/2) \cap F) \quad \text{(by doubling property)} \\
&\gtrsim (R_n/2)^{-\phi(R_n/2)s_2/\beta} \\
&\gtrsim R_n^{-\phi(R_n/2)s_2/\beta} \\
&\gtrsim R_n^{-\phi(R_n)s_2/\beta} \quad (\text{since } \phi(R) > \phi(R/2) > 0\ )
\end{aligned}$$

此外，对于所有 $y \in F$

$$\begin{aligned}
M_{(R_n)_\alpha}(B(y, (R_n)_\beta) \cap F) &\gtrsim R^{-\phi(R)\cdot(1/\alpha - 1/\beta)s_3} \\
&\gtrsim R^{-\phi(R)\cdot(1/(1/(1/\alpha - 1/\beta)))s_3} \\
&\gtrsim R^{-\phi(R)\cdot(1/(\alpha\beta/(\beta-\alpha)))s_3}
\end{aligned}$$

注意，对于所有充分小的 $R > 0$ 以及任意 $0 < \alpha < \infty$,

$$R - 2R_\alpha > R/2.$$

并且对于充分小的 $R > 0$, $2^{\phi(R_n)/\alpha} < 8$，且

$$0 \le \frac{(R_n)_\alpha}{(R_n/2)_\alpha} \le 2^{1+\phi(R_n/2)/\alpha} < 8.$$

因此，由 (2.1) 和引理 2 可得

$$\begin{aligned}
N_{(R_n)_\alpha}(B(x_n, R) \cap F) &\gtrsim N_{2(R_n)_\beta}(B(x_n, R_n - 2(R_n)_\beta) \cap F) \\
&\quad \cdot \inf_y M_{(R_n)_\alpha}(B(y, 2(R_n)_\beta - (R_n)_\alpha) \cap F) \\
&\gtrsim N_{16(R_n/2)_\beta}(B(x_n, R_n/2) \cap F) \cdot \inf_y M_{(R_n)_\alpha}(B(y, (R_n)_\beta) \cap F),
\end{aligned}$$

这意味着

$$-\frac{\phi(R)}{\beta}\cdot s_2-\frac{\phi(R)}{\alpha\beta/(\beta-\alpha)}\cdot s_3\geq-\frac{\phi(R)}{\alpha}s_1$$

and

$$\frac{1}{\beta}\cdot\varphi(\beta)+\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}\cdot\varphi\left(\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\right)\leq\frac{1}{\alpha}\cdot\varphi(\alpha),$$

这等价于

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\varphi(\alpha)-\frac{1}{\beta}\cdot\varphi(\beta)\geq\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}\varphi\left(\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\right).$$

接下来讨论上界估计。设 $s_1<\dim^{\phi_\alpha}_{\mathrm{L}}F$ 且 $s_2>\dim^{\phi_\beta}_{\mathrm{L}}F$，则存在一个 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的单调递减序列，满足 $R_n<1$ 对所有 n成立，且当 n 趋于无穷时趋于 0；此外还存在一个序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq F$，使得对所有 n,

$$N_{(R_n)_\beta}(B(x_n,R_n)\cap F)\leq R_n^{-\phi_\beta(R_n)\cdot s_2}.$$

然后，由引理 1 可得

$$R_n^{-\phi_\alpha(R_n)\cdot s_1}\leq R_n^{-\phi_\beta(R_n)\cdot s_2}\cdot R_n^{-\phi(R_n)\cdot\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)\cdot\log_2 M},$$

因此，存在一个与 C 相关的常数 c，使得

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\varphi(\alpha)-\frac{1}{\beta}\cdot\varphi(\beta)\leq c\cdot\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right).$$

□

注。 由命题 3 可知，速率窗口的广义下维数是一个连续函数。

现在给出不相交维数函数之间的差异估计如下。

命题4. 给定一个 *n.b.d.* 空间 F。设 ψ 是维数函数。对于任意$\varepsilon>0$，存在与倍增常数相关的 η 、 ε、ψ，使得对于所有满足 $\limsup\limits_{R\to0}\frac{\phi(R)}{\psi(R)}<\eta$的其他维数函数 ϕ，我们得到

$$\underline{\dim}^{\psi}_{\mathrm{L}}F\geq\dim^{\phi}_{\mathrm{L}}F-2\varepsilon.$$

证明. 设 $s:=$维数$^{\phi}{}_{\mathrm{L}}F$。若 $s=0$，讨论显然成立，因此我们考虑 $s>0$ 的情形；只需证明对于任意充分小的 $\varepsilon>0$，任意充分小的 $R>0$ 和 $r<R^{1+\psi(R)}$，都有

$$N_r(B(x,R)\cap F)\geq\left(\frac{R}{r}\right)^{s-2\varepsilon},$$

而下界估计依赖于维数$^{\phi}{}_{\mathrm{L}}F$ 的性质， r 的逼近也依赖于 $\left\{R^{1+\phi(R_i)}{}_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ 的构造。

给定维数函数 ψ，由洛必达法则可知，对于任意$\varepsilon>0$，存在 η，使得

$$\eta\leq\frac{\left(1-\frac{1}{1+\psi(R)}\right)\varepsilon}{\psi(R)(s-\varepsilon)},$$

由此可得，对于任意满足 $\limsup\limits_{R\to0}\frac{\phi(R)}{\psi(R)}<\eta$ 的维数函数 ϕ，有

$$\left(\frac{1}{1+\psi(R)}-1\right)\varepsilon+\phi(R)(s-\varepsilon)\leq\left(\frac{1}{1+\psi(R)}-1\right)\varepsilon+\eta\psi(R)(s-\varepsilon)<0. \tag{3.1}$$

固定维数函数 ϕ 和 ψ，对于任意充分小的 $\varepsilon>0$，由维数函数 ϕ 可知，存在 $R'>0$，使得对于所有充分小的 $R<R'$，$\phi(R)\le 1$ 且

$$R^{1+\phi(R)}\le \varepsilon\cdot R. \tag{3.2}$$

给定 $R>0$，我们通过归纳法定义序列 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$。令 $R_1=R$，则 $R_2=R^{1+\phi(R_1)}$。若已定义 R_k，则 $R_{k+1}=R_k^{1+\phi(R_k)}$。

因此，对于满足 (3.1) 的任意维数函数 ϕ 以及任意 $r\le R^{1+\psi(R)}$，我们定义 N 为与 r 相关的最大整数，使得

$$R_N>r\ge R_{N+1}=R_N^{1+\phi(R_N)}.$$

因此，由 (2.1)、引理 2 和引理 3，对于任意 $x\in F$，可得

$$\begin{aligned} N_r(B(x,R)\cap F)&\approx M_r(B(x,R)\cap F)\ge M_{R_N}(B(x,R)\cap F)\\ &\ge M_{R_1}(B(x,R/2)\cap F)\cdots\inf_{x'}M_{R_N}(B(x',R_N/2)\cap F). \end{aligned} \tag{3.3}$$

因此，由引理 3、引理 4 和 (3.2)，可得

$$M_{R_i}(B(x,R_{i-1}/2)\cap F)\ge\left(\frac{R_{i-1}}{R_i}\right)^{s-\varepsilon}. \tag{3.4}$$

这意味着，对于任意 $R_{N+1}\le r\le R_N$，由 (3.3) 和 (3.4) 可得

$$\begin{aligned} N_r(B(x,R)\cap F)&\ge\left(\frac{R}{R_1}\right)^{(s-\varepsilon)}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{(s-\varepsilon)}\cdots\left(\frac{R_{N-1}}{R_N}\right)^{(s-\varepsilon)}\ge\left(\frac{R}{R_N}\right)^{(s-\varepsilon)}\\ &\ge\left(\frac{R}{r}\right)^{(s-\varepsilon)}\left(\frac{r}{R_N}\right)^{(s-\varepsilon)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

注意到 $\phi(R)$ 单调递减，可得

$$\left(\frac{r}{R_N}\right)^{s-\varepsilon}\ge\left(\frac{R_{N+1}}{R_N}\right)^{s-\varepsilon}\ge R_N^{\phi(R_N)\cdot(s-\varepsilon)}\ge r^{\phi(R)\cdot(s-\varepsilon)}. \tag{3.6}$$

因此，由 $R/r\ge r^{\left(\frac{1}{1+\psi(R)}-1\right)}$，~~(3.1)~~、(3.5) 和 (3.6)，我们得到

$$N_r(B(x,R)\cap F)\ge\left(\frac{R}{r}\right)^{s-2\varepsilon}r^{\left(\frac{1}{1+\psi(R)}-1\right)\varepsilon}r^{\phi(R)(s-\varepsilon)}\ge\left(\frac{R}{r}\right)^{s-2\varepsilon},$$

由此即可得到所需的论证。 □

根据命题4的证明，我们得到以下推论。

推论 1. 若存在某些 $x\in F$、$R>0$、$\theta>0$ 和 $s>0$，使得

$$N_{R^{1+\theta}}(B(x,R)\cap F)<R^{-\theta s},$$

那么，对于每个 $\varepsilon<s$，都存在与 ε 相关的 $\eta>0$，使得对于任意 $\theta^*<\eta\theta$，都存在满足以下条件的 $x^*\in F$ 和 $R^*\in(R^{1+\theta}、R)$

$$N_{R^{*(1+\theta^*)}}(B(x^*,R^*)\cap F)<R^{*-\theta^*(s+\varepsilon)}.$$

由推论 1，我们得到以下关于变分原理以及通过维数函数恢复下 Assouad 维数的技术引理。

引理5. 设 F 是一个 *n.b.d.* 空间。对于任意 $\varepsilon\in(0,s)$，若存在一个序列$\{(R_n,\theta_n,x_n)\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $x_n\in F$，$\lim_{n\to\infty}R_n=0$，$\lim_{n\to\infty}\theta_n\log\frac{1}{R_n}=\infty$，且

$$N_{R_n^{1+\theta_n}}(B(x_n,R_n)\cap F)\le(R_n)^{-\theta_n(s+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}})}, \tag{3.7}$$

则存在一个序列 $\{(R_n^*, \theta_n^*, x_n^*)\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $\{R_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减至 0，$\{\theta_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 非递增且 $\lim_{n\to\infty} \theta_n^* \log \frac{1}{R_n^*} = \infty$，此外

$$N_{{R_n^*}^{1+\theta_n^*}}(B(x_n^*, R_n^*) \cap F) \le (R_n^*)^{-\theta_n^*(s+\frac{\varepsilon}{2^n})}. \tag{3.8}$$

此外，假设对某个维数函数 $\phi(R)$，不等式 $\theta_n \ge \phi(R_n)$ 对所有充分大的 n 成立。则对相关的构造序列 $\{(R_n^*, \theta_n^*)\}_{n=1}^{\infty}$，在 $\theta_n^* \ge \phi(R_n^*)$ 的条件下，*(3.8)* 成立。进一步，若原序列 $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 无界，则对任意 $\theta > 0$，存在某个序列$\{(R_n^*, \theta_n^*, x_n^*)\}_{n=1}^{\infty}$，使得对所有充分大的 n 有 $\theta_n^* = \theta$，从而 *(3.8)* 成立。

证明。我们首先考虑 $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 无界的情形。对任意$\theta > 0$ 与 $i \ge 1$，由推论 1 可知，对 $\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$，我们可以找到 $\eta_i > 0$，其中 $k > i$ 且 $\theta_k > \frac{\theta}{\eta_i}$，即 $\theta < \eta_i\theta_k$，可以选择 $(R_k^{(i)}, \theta, x_k^{(i)})$ 满足$R_k^{(i)} \in (R_k^{1+\theta_k}, R_k)$ 以及

$$N_{{R_k^{(i)}}^{1+\theta}}(B(x_k^{(i)}, R_k^{(i)}) \cap F) < {R_k^{(i)}}^{-\theta(s+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}+\frac{\varepsilon}{2^{i+1}})} < {R_k^{(i)}}^{-\theta(s+\frac{\varepsilon}{2^i})}.$$

Let

$$\mathcal{J}_i = \left\{ k \mid k > i, \theta_k > \frac{\theta}{\eta_i} \right\},$$

and

$$\mathcal{S}_i = \{(R_k^{(i)}, \theta, x_k^{(i)}) \mid k \in \mathcal{J}_i\}.$$

注意，由于 $(\theta_n)_{n=1}^{\infty}$ 无界，$\lim_{k\to\infty} R_k^{(i)} = 0$ 和 $\mathcal{J}_i$ 均为无穷大。对于每个i，我们归纳地从 $\mathcal{S}_i$ 中选取一个元素 $(R_k^{(i)}, \theta, x_k^{(i)})$，记为 (R_i^*, θ, x_i^*)，使得 $R_{i+1}^* < \frac{R_i^*}{2}$。因此，对所有充分大的 n，令 $\theta_n^* = \theta$，即可得到所需的序列。

此外，假设 $\phi(R)$ 是一个维数函数，并且对所有充分大的 n，都有 $\theta_n \ge \phi(R_n)$。注意到 $\phi(R)$ 有界，令 M 为其上界，取某个 $\theta^* > M$ 并令 $\theta_n^* = \theta^*$。因此，仿照上述情形的证明，由于对所有充分大的 n，都有 $\theta_n^* = \theta^* > M \ge \phi(R_n^*)$，所需的序列同样成立。

当 $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界时，通过取一个子序列，我们可以假设序列 $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调且收敛到某个 θ^*。若 $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$非递增，只需对所有 $n \ge 1$设 $(R_n^*, \theta_n^*, x_n^*) = (R_n, \theta_n, x_n)$。由于$\{(R_n^*, \theta_n^*, x_n^*)\}_{n=1}^{\infty}$是 $\{(R_n, \theta_n, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$的一个子序列，它自动满足 (3.8)，也满足 $\theta_n^* \ge \phi(R_n^*)$，因此这一情形的证明完成。

否则，若 $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 递增并收敛到某个 $\theta^* > 0$，则对所有 n，我们可以设 $(R_n^*, \theta_n^*, x_n^*) = (R_n, \theta^*, x_n)$。因此，

$$\begin{aligned} N_{{R_n^*}^{1+\theta_n^*}}(B(x_n^*, R_n^*) \cap F) &= N_{{R_n}^{1+\theta_n}}(B(x_n, R_n) \cap F) \\ &\le (R_n)^{-\theta_n(s+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}})} \\ &= {R_n}^{*-\theta^*[\frac{\theta_n}{\theta^*}(s+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}})]} \end{aligned} \tag{3.9}$$

注意到，对于每个 n，我们都可以找到某个 n'，使得对任意 $k > n'$，都有

$$\frac{\theta_k}{\theta^*} \cdot \left(s + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) < s + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

因此，通过选取一个合适的子序列，我们得到一个序列，仍记作 $\{(R_n, \theta_n^*, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$，其中 $\theta_n^* = \theta^*$ 对所有充分大的 n 都成立，并且满足 (3.8) 和$\theta_n^* \ge \theta_n \ge \phi(R_n) = \phi(R_n^*)$。证明至此完成。□

引理6. 设 F 是一个 *n.b.d.* 空间，且 $\{(R_n, \theta_n, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个序列，其中$\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减至0，$\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调不增，$\{\theta_n$ 对数 $\frac{1}{R_n}\}_{n=1}^{\infty}$

单调递增至 $+\infty$。对于任意 $\varepsilon \in (0,\ s)$ 以及所有充分大的$n \geq 1$，有

$$N_{R_n^{1+\theta_n}}(B(x_n, R_n) \cap F) \leq R_n^{-(s+\frac{\varepsilon}{2^n})\theta_n}, \tag{3.10}$$

那么存在一个维数函数 $\phi(R)$ 满足 $\phi(R_n) = \theta_n$ 对所有 $n \geq 1$ 均成立，因此 $\dim^{\phi}{}_{\mathrm{L}} F \leq s$。此外，对于任意满足$\phi^*(R_n) = \theta_n$的维数函数 $\phi^*(R)$，我们总有 $\phi(R) \geq \phi^*(R)$，由此可得，$\phi(R)$ 是相对于给定条件的极大元。

证明。若对某个整数 $n, \theta_{n+1} = \theta_n$，只需在 $[R_{n+1}, R_n]$ 上定义 $\phi(R) = \theta_n$。这意味着 $\phi(R)\log\frac{1}{R}$ 在 $[R_{n+1}, R_n]$ 上严格递减。因此，不失一般性，我们假设 $\theta_{n+1} < \theta_n$。根据假设，对于任意 $n \geq 1$，$\theta_{n+1}\log\frac{1}{R_{n+1}} > \theta_n \log\frac{1}{R_n}$，即 $R_{n+1}^{\theta_{n+1}} < R_n^{\theta_n}$，并且我们可以找到某个 $R_n' \in (R_{n+1}, R_n)$，使得$\theta_n \log\frac{1}{R_n'} = \theta_{n+1}\log\frac{1}{R_{n+1}}$，即 $R_n'^{\theta_n} = R_{n+1}^{\theta_{n+1}}$。

我们首先介绍维数函数的构造。对任意 $R \in [R_n', R_n]$，我们定义 $\phi(R) = \theta_n$，则 $\phi(R)\log\frac{1}{R}$ 在 $[R_n', R_n]$上递减。对 $R \in [R_{n+1}, R_n']$，令 $\phi(R) = \theta_{n+1} \cdot \log R_{n+1}\log R$，则 $\phi(R)\log\frac{1}{R}$是常数 $\theta_{n+1}\log\frac{1}{R_{n+1}}$，由此可得 $\phi(R)$递增。由维数的定义可知，$\phi(R)$是一个维数函数，对所有 n满足 $\phi(R_n) = \theta_n$，即

$$\phi(R) = \begin{cases} \theta_n, & R \in [R_n', R_n]; \\ \theta_{n+1} \cdot \frac{\log R_{n+1}}{\log R}, & R \in [R_{n+1}, R_n']. \end{cases}$$

我们现在证明，对任意维数函数 ϕ^*，$\phi(R) \geq \phi^*(R)$，其中对所有 $n \geq 1$有 $\phi^*(R_n) = \theta_n$。给定任意 $n \geq 1$，对任意 $R \in [R_n', R_n]$，根据维数函数的定义，可得

$$\phi^*(R) \leq \phi^*(R_n) = \phi(R_n) = \phi(R). \tag{3.11}$$

当 $R \in [R_{n+1}, R_n']$时，我们有

$$\phi^*(R)\log R \geq \phi^*(R_{n+1})\log R_{n+1} = \theta_{n+1}\log R_{n+1} = \phi(R)\log R. \tag{3.12}$$

这给出对于任意 $R \in [R_{n+1}, R_n]$，$\phi^*(R) \leq \phi(R)$。

接下来只需证明 $\dim^{\phi}{}_{\mathrm{L}} F \leq s$。由广义下维数的定义可得

$$\begin{aligned} \dim_{\mathrm{L}}^{\phi} F &\leq \liminf_{R\to 0} \frac{\inf_{x\in F} \log N_{R^{1+\phi(R)}}(B(x,R)\cap F)}{-\phi(R)\log R} \\ &\leq \liminf_{R\to 0} \frac{\inf_{x\in F} \log N_{R_n^{1+\phi(R_n)}}(B(x,R_n)\cap F)}{-\phi(R_n)\log R_n} \leq s. \end{aligned}$$

□

注。类似于引理6的证明，对于引理6中的序列 $\{(R_n, \theta_n, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$~，~，我们也可以定义维数函数 $\phi(R)$，使得 $\phi(R)$ 是满足以下条件的最小元素：对于所有 $n \geq 1$，$\phi(R_n) = \theta_n$。换言之，对于满足对所有 $n \geq 1$都有 $\phi(R_n) = \theta_n$ 的任意维数函数 $\phi(R)$，我们总有$\sim\phi(R) \leq \phi(R)$。因此，我们只需考虑

$$\widetilde{\phi}(R) = \begin{cases} \frac{\theta_n \log R_n}{\log R} & R \in [\widetilde{R_n}, R_n] \\ \theta_{n+1} & R \in [R_{n+1}, \widetilde{R_n}] \end{cases}$$

~ ~其中 R_n 满足 $\theta_{n+1}\log R_n = \theta_n \log R_n$。

现在我们来证明定理 2，它给出了两个不同广义下维数之间的一个变分原理。

定理 2 的证明。如果 $\lim_{R\to 0}\phi(R)>0$，那么我们选取 $\phi(R)=-1+1/\theta$，其中 $\theta\in$ 取某个(0,1)中的值。由定理 1 以及 [8] 和 [15] 可得

$$\underline{\dim}_{\mathrm{L}}^{\phi}F=\underline{\dim}_{\mathrm{L}}^{\theta}F=\inf_{0<\theta'\le\theta}\dim_{\mathrm{L}}^{\theta'}F,$$

其中，$\underline{\dim}_{\mathrm{L}}^{\theta}F$ 和 $\dim_{\mathrm{L}}^{\theta}F$ 分别是 $\theta\in(0,1)$的拟下 Assouad 谱和下 Assouad 谱。

因此，我们总是假设 $\lim_{R\to 0}\phi(R)=0$。对于任意 $\alpha\in(0,1)$，以及任意 $0<R<1$, $\phi(R)\le\phi(R)/\alpha$，由 $\dim^{\phi}{}_{\mathrm{L}}F$ 和 $\dim^{\phi_\alpha}{}_{\mathrm{L}}F$的定义可知

$$\underline{\dim}_{\mathrm{L}}^{\phi}F\le\inf_{0<\alpha<1}\dim_{\mathrm{L}}^{\phi_\alpha}F$$

对于反向不等式，令 $s:=\dim^{\phi}{}_{\mathrm{L}}F$。若 $s=0$，则讨论显然成立。因此，在证明的其余部分，我们考虑 $s>0$的情形，只需证明

$$\inf_{0<\alpha<1}\dim_{\mathrm{L}}^{\phi_\alpha}F\le\underline{\dim}_{\mathrm{L}}^{\phi}F.$$

给定充分小的 $\varepsilon>0$，由 $\dim^{\phi}{}_{\mathrm{L}}F$ 的定义可知，存在一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq F$，以及满足条件 $r_n\le R_n^{1+\phi(R_n)}$和的 $\{(r_n,R_n)\}_{n=1}^{\infty}$

$$N_{r_n}(B(x_n,R_n)\cap F)\le\left(\frac{R_n}{r_n}\right)^{s+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}}.$$

固定 n，定义 θ_n 为方程的解

$$r_n=R_n^{1+\theta_n},$$

于是 $\phi(R_n)\le\theta_n$。根据引理5，我们可以找到一个序列 $\{(R_n^*,\theta_n^*,x_n^*)\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $\{\theta_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 非递增且 $\phi(R_n^*)\le\theta_n^*$，此外，

$$N_{R_n^{*\,1+\theta_n^*}}(B(x_n,R_n^*)\cap F)\le R_n^{*\,-\theta_n^*(s+\frac{\varepsilon}{2^n})}$$

结合引理6，存在一个维数函数 $\phi(R)$，使得$\widetilde{\phi}(R_n^*)=\theta_n^*$，因此 $\dim^{\phi}{}_{\mathrm{L}}F\le s$ 且 $\phi(R_n^*)\le\theta_n^*=\widetilde{\phi}(R_n^*)$。

我们记

$$b_n=\frac{\phi(R_n^*)}{\widetilde{\phi}(R_n^*)},$$

于是 $0<b_n\le 1$。取一个子序列后，我们假设 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调的，并将 b_0 记为 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$的极限。

(1) 若 $b_0=0$，由命题4可得

$$\dim_{\mathrm{L}}^{\phi}F\le\dim_{\mathrm{L}}^{\widetilde{\phi}}F\le s=\underline{\dim}_{\mathrm{L}}^{\phi}F,$$

因此

$$\inf_{0<\alpha<1}\dim_{\mathrm{L}}^{\phi_\alpha}F\le\underline{\dim}_{\mathrm{L}}^{\phi}F.$$

(2) 若 $0<b_0<1$，在这种情况下，$\lim_{n\to\infty}{}^{\phi(R_n^*)\widetilde{\phi}\,R_n^*}{}^{/b_0}()=1$，因此 $\dim^{\phi_{b_0}}{}_{\mathrm{L}}F\le s$，在这种情况下，我们还有

$$\inf_{0<\alpha<1}\dim_{\mathrm{L}}^{\phi_\alpha}F\le\underline{\dim}_{\mathrm{L}}^{\phi}F.$$

□

由定理 2 直接可得如下自然推论。

推论 2. 给定 *n.b.d.* 空间 F 和维数函数 $\phi(R)$，存在一个维数函数 $\psi(R)$，使得

$$\underline{\dim}_{\mathrm{L}}^{\phi}F=\underline{\dim}_{\mathrm{L}}^{\psi}F=\dim_{\mathrm{L}}^{\psi}F.$$

3.3. **定理 3 的证明：广义下维数的插值**。本节中，我们研究广义下 Assouad 型维数的插值，并给出定理 3 的证明。我们首先讨论如何通过维数函数恢复下 Assouad 维数。注意，采用与定理 2 类似的方法，我们可以得到如下关于一般性恢复下 Assouad 维数的另一种证明。

命题 5. 给定 $F \subseteq \mathbb{R}^d$。令 $s := \dim_{\mathrm{L}} F$，则存在一个维数函数 $\phi(R)$ 使得 $\dim^{\phi}_{\mathrm{L}} F = s$。

证明。给定充分小的 $\varepsilon > 0$，由 $\dim_{\mathrm{L}} F$ 的定义可知，存在一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$，以及 $\{(r_n, R_n)\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $\frac{r_n}{R_n}$ 趋于 0，并且

$$N_{r_n}(B(x_n, R_n) \cap F) \leq \left(\frac{R_n}{r_n}\right)^{s+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}}.$$

固定 n，我们定义 θ_n 为下列方程的解

$$r_n = R_n^{1+\theta_n}.$$

根据引理5，我们可以找到一个序列 $\{(R_n^*, \theta_n^*, x_n^*)\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $\{\theta_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 单调不增且 $\phi(R_n^*) \leq \theta_n^*$。此外，

$$N_{R_n^{*1+\theta_n^*}}(B(x_n^*, R_n^*) \cap F) \leq R_n^{*-\theta_n^*(s+\frac{\varepsilon}{2^n})}.$$

结合引理6，存在一个维数函数 $\phi(R)$，使得 $\widetilde{\phi}(R_n^*) = \theta_n^*$，因此我们有 $\dim^{\phi}_{\mathrm{L}} F \leq s$。反向部分显然。□

根据引理5、引理6和命题 5，我们可以如下证明定理 4。

定理 4 的证明。 令 $s := \dim_{\mathrm{L}} F$。根据假设 s 并结合引理5，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们有一个序列 $\{(R_n, \theta_n, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减至 0，$\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调不增，且 $\lim_{n\to\infty} \theta_n \log \frac{1}{R_n} = \infty$。此外，对于任意 $n \geq 1$，有

$$N_{R_n^{1+\theta_n}}(B(x_n, R_n) \cap F) \leq R_n^{-\theta_n(s+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}})}.$$

如果存在某个常数 $\theta > 0$ 使得 $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta$，在这种情况下，$\dim^{\theta}_{\mathrm{L}} F = \dim_{\mathrm{L}} F$，则结论显然成立。不失一般性，我们总是假设 $\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0$。如果存在一个子序列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ 使得 $\theta_{n_k} \leq \Phi(R_{n_k})$，令 $\Psi(R)$ 为满足 $\Psi(R_{n_k}) = \theta_{n_k}$ 的最小维数函数，则 $\Psi(R_{n_k}) = \theta_{n_k} \leq \Phi(R_{n_k})$。由于 $\Psi(R)$ 是最小的，我们得到，对于所有 $R > 0$，$\Psi(R) \leq \Phi(R)$。这也说明 $\dim^{\Psi}_{\mathrm{L}} F = s$。

如果 $\{\Phi^{\theta_n}(R_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 无界，那么通过取一个子序列，不妨设 $\{\Phi^{\theta_n}(R_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递增趋于无穷大。这给出 $\lim_{n\to\infty} \Phi(R_n)^{\theta_n} = 0$。因此，结合引理6和命题 5，结论自然成立。

否则，如果存在一个常数 $C > 1$，使得对于所有 $n \geq 1$，$1 \leq \Phi^{\theta_n}(R_n) \leq C$，由于 $\lim_{n\to\infty} \theta_n \log \frac{1}{R_n} = \infty$，再次通过取一个子序列，不妨设 $\theta_n \log \frac{1}{R_n} > n\theta_{n-1} \log \frac{1}{R_{n-1}}$，即，

$$\frac{\theta_n}{n} \log \frac{1}{R_n} > \theta_{n-1} \log \frac{1}{R_{n-1}}.$$

通过引理5的技术，存在一个序列 $\{(R_n^*, \theta_n^*, x_n^*)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\{R_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减至 0，$x_n^* \in F$ 对所有 $n \geq 1$，$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_n^*}{\theta_n} = 0$，

$\lim_{n\to\infty}\theta_n^*\log\frac{1}{R_n^*}=\infty$ 以及

$$N_{R_n^{*1+\theta_n^*}}(B(x_n^*,R_n^*)\cap F)\le {R_n^*}^{-\theta_n^*(s+\frac{\varepsilon}{2^n})}.$$

于是，令 $\Psi(R)$ 为满足 $\Psi(R_n^*)=\theta_n^*$ 的最小维数函数，则所需论证成立。至此，证明完毕。□

现在我们转而讨论区域 $(\dim_{\mathrm{L}}F,\ \dim_{\mathrm{qL}}F]$ 上的插值。首先介绍一些记号。对于任意 $x>0$ 和 $0<y<x$，我们首先将局部复杂度函数 $\omega(x,\ y)$ 定义为

$$\omega(x,y)=\inf_{\xi\in F}\frac{\log N_y(B(\xi,x)\cap F)}{\log(x/y)}. \tag{3.13}$$

给定任意正连续函数 $f(t)$ $f_1(t)$ $f_2(t)$：$\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$，我们还定义由下式确定的区域 $\mathcal{D}(R,\ f(t))$ 和 $\mathcal{D}(R,\ f_1(t)\ f_2(t))$

$$\mathcal{D}(R,f(t))=\{(t,y)\ :\ 0<t\le R,0<y\le f(t)\}, \tag{3.14}$$

$$\mathcal{D}(R,f_1(t),f_2(t))=\mathcal{D}(R,f_1(t))\setminus\mathcal{D}(R,f_2(t)). \tag{3.15}$$

以下技术性命题适用于讨论广义下 Assouad 维数下下 Assouad 型维数的插值。

命题 1。对于任意 $s\in(\dim_{\mathrm{L}}F、\dim_{\mathrm{qL}}F]$ 以及充分小的 $\varepsilon>0$，若存在维数函数 $\phi(x)$ 和一个趋于0的递减序列 $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得对于任意$i\ge1$，有

(1) For any $(x,y)\in\mathcal{D}(R_i,t^{1+\phi(t)})$, $\omega(x,y)\ge s$,
(2) $\omega(R_i,R_i^{1+\phi(R_i)})\le s+\frac{\varepsilon}{2^i}$,
则有 $\dim^{\phi}{}_{\mathrm{L}}F=\dim^{\phi}{}_{\mathrm{L}}\underline{F}=s$。

证明。该结果直接由广义下 Assouad 维数的定义得出。□

下面的命题给出了下维数与拟下维数之间的一种插值。

命题 6. 设 $s\in(\dim_{\mathrm{L}}F,\ \dim_{\mathrm{qL}}F]$，则存在维数函数$\phi(R)$使得 $s=\dim^{\phi}{}_{\mathrm{L}}F=\dim^{\phi}{}_{\mathrm{L}}\underline{F}$。

证明。对任意 $s\le\dim_{\mathrm{qL}}F$，若存在 $\theta>0$ 使得 $\dim_{\mathrm{L}}^{\theta}F=s$，则令$\phi(R)=\theta$，当 $R>0$ 充分小时，即可得到所需结果。否则，给定$\theta_0=1$，我们可以找到充分小的 $R_1<1$，使得对任意 $(x,y)\in\mathcal{D}(R_1,t^{1+\theta_0})$，有 $\omega(x,y)\ge s$。令 $k_1=R_1^{\theta_0}$并定义

$$R_1'=\sup\{x:\text{ 对任意 }0<t<R_1\text{ 以及}$$

$$(x,y)\in\mathcal{D}(R_1,k_1t,t^{1+\theta_0})\setminus\mathcal{D}(x,k_1t,t^{1+\frac{\log k_1}{\log x}}),\omega(x,y)\ge s,\} \tag{3.16}$$

令 $\theta_1=\frac{\log k_1}{\log R_1'}$，(3.16) 蕴含，

$$\omega(x,y)\ge s,\quad \text{for any }(x,y)\in\mathcal{D}(R_1,k_1t,t^{1+\theta_0})\setminus\mathcal{D}(x,k_1t,t^{1+\theta_1}). \tag{3.17}$$

此外，我们可以找到 $R_1^*\le R_1'$ 使得

$$\omega(R_1^*,(R_1^*)^{1+\theta_1})\le s+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.18}$$

记 $R_2=\frac{1}{2}R_1^*$、$k_2=R_2^{\theta_1}$，并定义

$$\phi(R)=\begin{cases}\frac{\log k_1}{\log R} & R_1'<R\le R_1;\\ \theta_1 & R_2<R\le R_1'.\end{cases}$$

由 (3.17) 可得

$$\omega(x,y)\geq s,\qquad \text{when } R_2<x\leq R_1 \text{ and } 0<y<x^{1+\phi(x)}. \tag{3.19}$$

递归地，若已定义 R'_n、R^*_n 和 θ_n，令 $R_{n+1}=\frac{1}{2}R^*_n$、$k_{n+1}=R^{\theta_n}_{n+1}$，我们定义

$R'_{n+1}=$ 上确界$\{x:$ 对于任意 $0<t<R_{n+1}$ 和

$$(x,y)\in\mathcal{D}(R_{n+1},k_{n+1}t,t^{1+\theta_n})\setminus\mathcal{D}(x,k_{n+1}t,t^{1+\frac{\log k_n}{\log x}}),w(x,y)\geq s\}. \tag{3.20}$$

令 $\theta_{n+1}=$对数k_{n+1}/对数R'_{n+1}，则存在满足条件的 $R^*_{n+1}<R_{n+1}$

$$(R^*_{n+1},(R^*_{n+1})^{1+\theta_{n+1}})\in\mathcal{L}(R'_{n+1},t^{1+\theta_{n+1}})\subset\mathcal{D}(R_n,k_nt,t^{1+\theta_{n+1}}),$$

and

$$\omega(R^*_{n+1},(R^*_{n+1})^{1+\theta_{n+1}})\leq s+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

因此，对于任意 $0<R\leq R_1$，我们定义

$$\phi(R)=\begin{cases}\frac{\log k_n}{\log R} & R'_{n+1}<R\leq R_n,\\ \theta_{n+1} & R_{n+1}<R\leq R'_{n+1}.\end{cases}$$

详见图1。

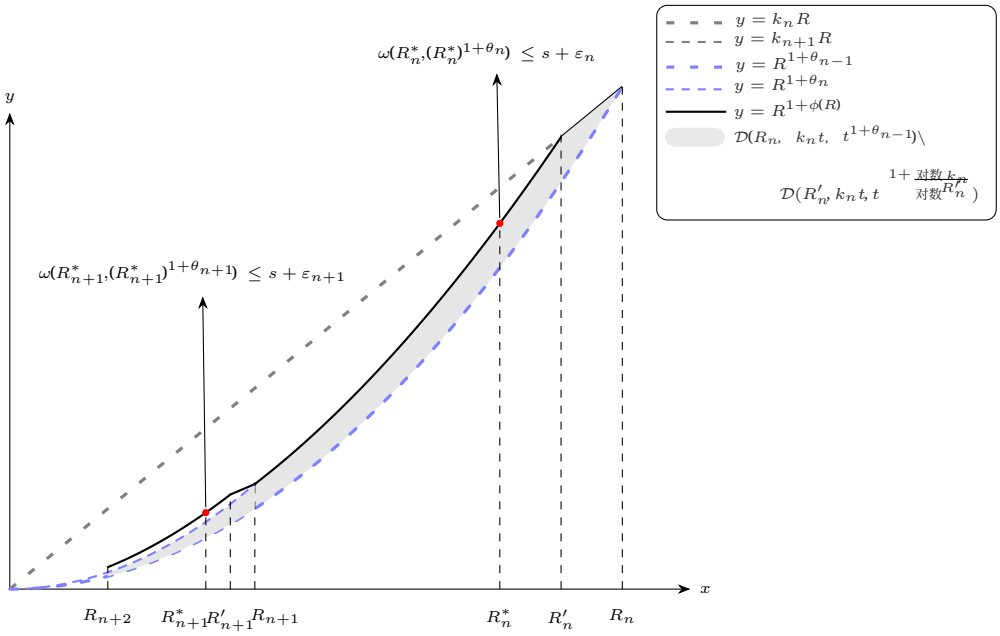


FIGURE 1. $R^{1+\phi(R)}$ 的 $R\in[R_{n+2},R_n]$图

我们很容易验证，$\phi(R)$是一个维数函数，并且根据 $\phi(R)$的定义和命题 1，所需结论成立。□

3.4. 定理 4 的证明：爆米花图上的广义下维数。本节讨论爆米花图的广义下型维数，并特别展示爆米花图的广义下型维数类比中的插值问题。关于爆米花图及其变体的维数理论的一般讨论，参见 [2, 5, 7, 9]及其中的参考文献。

我们首先回顾爆米花函数和爆米花图的定义。

给定 $0 < t < \infty$。令 $f\colon [0,1] \to [0,1)$ 为爆米花函数，其中对于任意$x \in [0,1]$

$$f_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{q^t} & x = \frac{p}{q} \text{ where } 1 \le p \le q,\ \gcd(p,q) = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

我们记

$$S_t = \{(x, f_t(x)) \ : \ x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

为爆米花图像。

由 [5, 7, 9] 可得

$$\dim_{\mathrm{B}} S_t = \begin{cases} \frac{4}{2+t} & 0 < t < 2; \\ 1 & 2 \le t < \infty, \end{cases}$$

注意到 S_t 含有孤立点，因此对任意维数函数 ϕ，都有 $\dim^{\phi}{}_{\mathrm{L}} S_t = 0$。此外，注意到

$$([0,1] \backslash \mathbb{Q}) \times \{0\} \subseteq S_t,$$

因此由 [11, 第 3.4 节。2], 对所有维数函数 ϕ，都有 $\dim^{\phi}{}_{\mathrm{ML}} S_t = 1$，从而对任意 $0 < t < 2$,

$$\dim_{\mathrm{L}}^{\phi} S_t < \dim_{\mathrm{ML}}^{\phi} S_t < \dim_{\mathrm{B}} S_t.$$

这也表明，对于一般集合，广义下型维数无法在 $\lim_{\theta \to 0} \dim_{\mathrm{L}}^{\theta} F$和 $\dim_{\mathrm{B}} F$之间实现完全插值。

Acknowledgements.

作者谨向 Amlan Banaji 博士和 Alex Rutar 博士致以谢意，感谢他们深厚的友谊、富有助益的讨论以及始终如一的鼓励。H. P. Chen 感谢 Amlan Banaji 博士在其访问于韦斯屈莱大学期间提供接待，并营造了卓越的研究氛围。H. P. Chen 获得国家自然科学基金项目 12401107 和于韦斯屈莱大学 2026 年访问学者计划的资助。W. Wang 获得国家自然科学基金项目 12061086 的资助。

References

[1] Banaji A. *Generalised Intermediate dimensions.*《数学月刊》，202 (2023)，465-506。[2] Banaji A., Chen H.-P., *Dimensions of popcorn-like pyramid sets*分形几何期刊，第 10 卷第 1 期（2023），151-168。[3] Banaji A., Rutar A., *Attainable forms of intermediate dimensions.* 芬兰数学年刊，第 47 卷第 2 期（2022），939-960。[4] Banaji A., Rutar A., Troscheit S., *Interpolating with Generalized Assouad dimensions.* 几何分析，35 (2025)，270。[5] Chen H.-P., *Dimensions and spectra of the t-popcorn graphs*数学分析与应用期刊，第 510 卷第 1 期（2022），126013。[6] Chen. H.-P., Du Y.-L., Wei C., *Quasi-lower dimension and quasi-Lipschitz mapping.* 分形，第 25 卷第 3 期（2017），1750034。[7] Chen H.-P., Fraser J. M., Yu H., *Dimensions of the popcorn graph*美国数学会会刊，第 150 卷第 11 期（2022），4729-4742。[8] Chen. H.-P., Wu M., Chang Y.-Y. *Lower Assouad-type dimensions of uniformly perfect sets in doubling metric spaces.* 2 28 2020 2050039 分形，第 . 卷第 . 期（），. [9] Du Y.-L., Wei C., Wen S. *dimensions of popcorn subsets*数学分析与应用期刊，第 524 卷第 2 期（2023），127088。[10] Falconer K. J.,《分形几何：数学基础与应用》，Wiley & Sons，纽约（2014）。[11] Fraser J. M.,《Assouad 维数与分形几何》，剑桥大学出版社，剑桥（2020）。[12] Fraser J. M., Yu H., *New dimension spectra: Finer information on scaling and homogeneity*《数学进展》，329（2018），273-328。[13] Fraser J. M., Howroyd J. D., K¨aenm¨aki A., Yu H., *On the Hausdorff dimension of microsets*美国数学会会刊，第 147 卷第 11 期（2019），4921-4936。

[14] Garcia I.、Hare K.、Mendivil F.， *Intermediate Assouad-like dimensions.* 分形几何期刊 8 (2021)，201-245。[15] Hare K.、Troscheit S.， *Lower Assouad Dimension of Measures and Regularity.* 剑桥哲学学会数学汇刊 no.2，170 (2021)，379-415。[16] Larman D.G.， *A New Theory of Dimension*，伦敦数学会会刊，no.1，s3-17 (1967年)，178-192。[17] Rutar A.， *Attainable forms of Assouad spectra.*，印第安纳大学数学杂志，73 (2024)，1331-1356。

Appendix: A new proof on recovering lower Assouad dimension

在本附录中，我们给出一种替代证明，说明如何通过维数函数恢复下 Assouad 维数。该证明从下 Assouad 维数的一个等价定义出发，随后通过直接构造相应的维数函数，证明下 Assouad 维数可以由维数函数恢复。我们首先研究下 Assouad 维数关于维数函数的等价定义，如下所示。

命题 7. 设 $\Phi(R)$ 是一个单调递减的维数函数，且满足当 $R\to 0$ 时 $R^{\Phi(R)}\to 0$，则

$$\begin{aligned}\text{(3.21)}\qquad \dim_{\mathrm{L}} F = \text{上确界}\{s\geq 0:\ \ &\exists c>0,\ \text{使得}\ \forall 0<R^{1+\Phi(R)}\leq r<R<1,\\ &\inf_{x\in F} N_r(B(x,R)\cap F)\geq c\cdot(R/r)^s\}.\end{aligned}$$

证明。我们将 (3.21) 的右端记为 RHS。根据定义，显然有 $\dim_{\mathrm{L}} F\leq$ RHS。反过来，只需证明：对于任意$s<$ RHS 和充分小的 $\varepsilon>0$，以及任意 $R>0$ 和 $0<r<R^{1+\Phi(R)}$,

$$M_r(B(x,R)\cap F)\geq\left(\frac{R}{r}\right)^{s-\varepsilon}.$$

给定 s 和 ε，对于任意充分小的 $R>0$ 和 $R^{1+\Phi(R)}\leq r<R$，可得

$$M_r(B(x,R)\cap F)\geq R^{-\Phi(R)(s-\varepsilon)}$$

并且 $R^{\Phi(R)}<\varepsilon$. 给定任意 $r<R^{1+\Phi(R)}$，定义 $R_0=R$，对于任意 $n\geq 1$,

$$R_n=R_{n-1}^{1+\Phi(R_{n-1})}.$$

因此存在 $n(r)$，使得

$$R_{n(r)+1}<r\leq R_{n(r)}.$$

由引理 2 和引理 4，若 $\frac{R_{n(r)}}{2}<r\leq R_n$，则

$$\begin{aligned}M_r(B(x,R)\cap F)&\geq M_{R_1}(B(x,R-R_1)\cap F)\cdot\inf_{y_1\in F}M_{R_2}(B(y_1,R_1-R_2)\cap F)\cdot\ldots\\ &\quad\cdot\inf_{y_{n(r)-2}\in F}M_r(B(y_{n(r)-2},R_{n(r)-1}-R_{n(r)})\cap F)\\ &\geq\left(\frac{R}{R_1}\right)^{s-\varepsilon}\cdot\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{s-\varepsilon}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{R_{n(r)-1}}{R_{n(r)}}\right)^{s-\varepsilon}\geq\left(\frac{R}{2r}\right)^{s-\varepsilon}.\end{aligned}$$

否则，对于 $R_{n(r)+1}<r\leq\frac{R_{n(r)}}{2}$，由 (7) 和引理 3，存在一个常数 $c_0>0$，使得对于任意 $y\in F$,

$$M_r(B(y,R_{n(r)}-r)\cap F)\geq c_0\left(\frac{R_{n(r)}}{r}\right)^{s-\varepsilon},\tag{3.22}$$

因此

$$\begin{aligned}M_r(B(x,R)\cap F)&\geq M_{R_1}(B(x,R-R_1)\cap F)\cdot\inf_{y_1\in F}M_{R_2}(B(y_1,R_1-R_2)\cap F)\cdot\cdots\\ &\quad\cdot\inf_{y_{n(r)-1}\in F}M_r(B(y_{n(r)-1},R_{n(r)}-r)\cap F)\\ &\geq c_0\cdot\left(\frac{R}{R_1}\right)^{s-\varepsilon}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{R_{n(r)-1}}{R_{n(r)}}\right)^{s-\varepsilon}\cdot\left(\frac{R_{n(r)}}{r}\right)^{s-\varepsilon}\geq\left(\frac{R}{r}\right)^{s-\varepsilon}\end{aligned}$$

从而得到所需的结果。 □

基于命题 7，我们得到了维数函数下的下 Assouad 维数的一个精细化。这是 [4,定理 2.9]的一个平行结果。

命题 8. 设 F 为一个 *n.b.d.* 空间，且 $g:(0,\ 1)\ \to(0,\ 1)$ 为一个满足如下条件的连续函数

$$\lim_{R\to 0} g(R)/R = 0.$$

那么存在一个维数函数 ψ，使得 $R^{1+\psi(R)} \geq g(R)$ 对所有 $R \in (0,1)$均成立，从而

$$\dim_{\mathrm{L}} F = \dim_{\mathrm{L}}^{\psi} F = \underline{\dim}_{\mathrm{L}}^{\psi} F.$$

证明。令 $\phi(R) = (\log g(R)/\log R) - 1$，由 [4, 命题 2.6]可知，存在唯一的极大维数函数 $\psi_0(R):(0,1)\to(0,1)$，使得

$$\psi_0(R) = \inf_{R'\in(R,1)} \frac{\inf_{0<r\leq R'} \phi(r)\log(1/r)}{\log(1/R')}.$$

由此可得 $\psi_0(R) \leq \phi(R)$，且 $\psi_0(R)$ 随 $R\to 0$ 单调递减。于是由命题 7，还可得 $\dim_{\mathrm{L}} F = \dim^{\psi_0}{}_{\mathrm{L}} F$。此外，由于 F 是倍增的，因此存在一个序列 $\{x_n, R_n, r_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $r_n \geq R_n^{1+\psi_0(R_n)}$，当 $n\to\infty$ 时 $r_n/R_n \to 0$，且

$$\dim_{\mathrm{L}} F = \lim_{n\to\infty} \frac{\log N_{r_n}(B(x_n,R_n)\cap F)}{\log(R_n/r_n)}. \tag{3.23}$$

接下来介绍维数函数 ψ 的构造。对任意 n，我们将满足 $r_n = R_n^{1+\theta_n}$ 的解记为 θ_n。注意，$r_n \geq R_n^{1+\psi_0(R_n)}$给出 $\theta_n \leq \psi_0(R_n)$。此外，$r_n/R_n \to 0$ 当 $n\to\infty$ 时意味着 $\theta_n\log(1/R_n)$ 趋于无穷大。由于 $\psi_0(R)$ 随 $R\to 0$递减，因此取一个子序列后，我们可以假设 θ_n 单调收敛到某个 $\theta\in[0,\infty)$。若$\theta>0$，则令 $\psi(R) = \theta$，对所有 $R\in(0,1)$ 均成立。于是由引理 4 和 (3.23) 可得 $\dim_{\mathrm{L}} F = \dim^{\psi}{}_{\mathrm{L}} F$，且对所有 $R\in(0,1)$，$\psi(R) \leq \theta_n \leq \psi_0(R)$。

否则，我们可以假设 θ_n 递减至 0，并通过归纳法引入 ψ 在 $(0,1)$ 上的构造。令 $\psi(R) = \theta_1$ for $R\in[R_1,1)$，则我们定义$R_1' < R_1$ 满足

$$\theta_1 \frac{\log R_1}{\log R_1'} = \theta_2,$$

并定义 $\psi(R) = \theta_1\cdot(\log R_1/\log R)$ 在 $[R_1', R_1]$上，以及 $\psi(R) = \theta_2$ 在 $[R_2, R_1']$上。因此，通过归纳法，对于任意 $n\geq 1$，我们定义 $R_n' < R_n$ 为满足以下条件的解

$$\theta_n \frac{\log R_n}{\log R_n'} = \theta_{n+1},$$

并且对于任意 $R\in(0,1)$，我们定义

$$\psi(R) = \begin{cases} \theta_n\cdot(\log R_n/\log R) & R\in[R_n', R_n]; \\ \theta_{n+1} & R\in[R_{n+1}, R_n']. \end{cases} \tag{3.24}$$

这直接表明，$\psi(R)$ 单调递减，且当 $R\to 0$ 趋于 $\to\infty$ as 时，$\psi(R)\log(1/R)$，并且 $\psi(R)$ 是维数函数。此外，对于任意 $R\in(0,1)$ 以及任意$n\geq$，根据 $\psi(R)$ 的构造，$\theta_n \leq \psi_0(R_n)$ 和 $\psi_0(R)$ 随 $R\to 0$ 单调递减，因此可得 $\psi(R) \leq \psi_0(R)$。

还需验证 $\dim_{\mathrm{L}} F = \dim^{\psi}{}_{\mathrm{L}} F = \dim^{\psi}{}_{\mathrm{L}} F$. 注意

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathrm{L}} F \le \underline{\dim}_{\mathrm{L}}^{\psi} F &\le \dim_{\mathrm{L}}^{\psi} F \\
&= \liminf_{R\to 0} \frac{\log \inf_{x\in F} N_{R^{1+\psi(R)}}(B(x,R)\cap F)}{-\psi(R)\log R} \\
&\le \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \inf_{x\in F} N_{R_n^{1+\psi(R_n)}}(B(x,R_n)\cap F)}{-\psi(R_n)\log R_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\log N_{r_n}(B(x_n,R_n)\cap F)}{\log(R_n/r_n)} \quad (\text{ by } (3.23)) \\
&= \dim_{\mathrm{L}} F.
\end{aligned}$$

由此即可得到所需论证。 □

现在，我们研究如何利用维数函数刻画下 Assouad 维数。根据 (3.13) 和 (3.14)，下面的断言给出了命题 8 的一种表述。

断言 2. 设 $\phi(x)$是一个单调递减的维数函数，满足当$x^{\phi(x)} \to 0$ 时， $x \to 0$。设维数$_{\mathrm{L}} F = s$，则对任意的 $R > 0$、 $k > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，存在$(x$、 $y) \in \mathcal{D}(R$、 kt、 $t^{1+\phi(t)})$，使得 $\omega(x$、 $y)$ $\le s + \varepsilon$。

此外，根据 $\dim^{\phi}{}_{\mathrm{L}} F$ 的定义，以下技术性断言可直接得出；它对于利用维数函数恢复下 Assouad 维数至关重要。

断言 3. 设 s =维数$_{\mathrm{L}} F$，对任意收敛至0的序列 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$，若存在维数函数 $\phi(x)$以及一个递减至0的序列 $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得$\omega(R_i$、 $R^{1+\phi(R_i)}{}_i) \le s + \varepsilon_i$，则维数$^{\phi}{}_{\mathrm{L}} F$ =维数 $_{\mathrm{L}} F$。

借助断言 2 和断言 3，我们给出通过维数函数恢复下 Assouad 维数的证明如下。

命题 9. 设 $s =$维数$_{\mathrm{L}} F$，则存在一个维数函数 $\phi(x)$ 使得 维数$_{\mathrm{L}} F =$维数$^{\phi}{}_{\mathrm{L}}$ $F = s$.

证明。 给定一个收敛于 0 的序列 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$，我们首先应用断言 2 构造序列 $\{\theta_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{(R_i^*, R_i^{*1+\theta_i})\}_{i=1}^{\infty}$，以及相应的维数函数$\phi(x)$，使其满足 $\omega(R_i^*, R_i^{*1+\theta_i}) \le s+\varepsilon_i$ 和 $\phi(R_i^*) = \theta_i$。然后由断言 3 完成证明。

我们先引入一些记号。对于任意 $0 < R < \infty$，以及任意非负函数 $f(t)$，定义

$$\mathcal{L}(R, f(t)) = \{(t, y) \,:\, 0 < t \le R,\, y = f(t)\}.$$

给定 $0 < k < 1$和 $0 < t \le R$，记 $\theta(k,t) = \log k \log t$，由此直接可得

$$(t, kt) \in \mathcal{L}(R, kt) \cap \mathcal{L}(R, t^{1+\theta(k,t)}). \tag{3.25}$$

换句话说， $\mathcal{L}(R, t^{1+\theta(k,t)})$ 经过点 (t, kt)。

我们接下来通过归纳法构造序列 $\{\theta_i\}_{i=1}^{\infty}$和 $\{(R_i^*,\ R_i^{*1+\theta_i})\}_{i=1}^{\infty}$，然后通过 $\{\theta_i\}_{i=1}^{\infty}$构造相应的维数函数 $\phi(x)$。给定 $R_1 = \frac{1}{2}$,$k_1 = \frac{1}{2}$，我们定义 $\theta_1 = \log k_1^- / \log R_1^-$。由断言 2 可知，存在$(R_1^*,\ y_1) \in \mathcal{D}(R_1,\ k_1 x,\ x^{1+\theta_0})$，使得

$$\omega(R_1^*, y_1) \le s + \varepsilon_1.$$

注意到

$$\mathcal{D}(R_1, k_1 t, t^{1+\theta_1}) = \bigcup_{0<x\le R_1} \mathcal{L}(x, t^{1+\frac{\log k_1}{\log x}}),$$

其中 $\log k_0 \log x$ 随着 x 从 R_0 趋近于 0 而从 θ_0 单调递减至 0，因此存在 $0 < \theta_1 < \theta_0$ 和 R_1^* 使得 $y_1 = (R_1^*)^{1+\theta_1}$。我们还要强调，

$$(R_1^*, {R_1^*}^{1+\theta_1}) \in \mathcal{L}(R_1', t^{1+\theta_1}).$$

令 $R_2 = \frac{1}{2} R_1^*$, $k_1 = R_1^{\theta_1}$，我们定义

$$\phi(R) = \begin{cases} \frac{\log k_1}{\log R} & R_1' < R \le R_1; \\ \theta_1 & R_2 < R \le R_1'. \end{cases}$$

递归地，若已定义 R_n^*, R_n', θ_n ，则令 $R_{n+1} = \frac{1}{2} R_n^*$, $k_{n+1} = R_n^{1+\theta_n}$。由断言 2 可知，存在 $R_{n+1}^* < R_{n+1}'$ 使得

$$(R_{n+1}^*, (R_{n+1}^*)^{1+\theta_{n+1}}) \in \mathcal{L}(R_{n+1}', t^{1+\theta_{n+1}}) \subset \mathcal{D}(R_{n+1}, k_{n+1} t, t^{1+\theta_{n+1}})$$

and

$$\omega(R_{n+1}^*, {R_{n+1}^*}^{1+\theta_{n+1}}) \le s + \varepsilon_{n+1}$$

其中 $\theta_{n+1} = \log k_{n+1} \log R_{n+1}'$。因此，对于任意 $0 < R < R_1$，我们定义

$$\phi(R) = \begin{cases} \frac{\log k_n}{\log R} & R_{n+1}' < R \le R_n \\ \theta_{n+1} & R_{n+2} < R \le R_{n+1}' \end{cases}.$$

$R^{1+\phi(R)}$ 的详情见图 2。

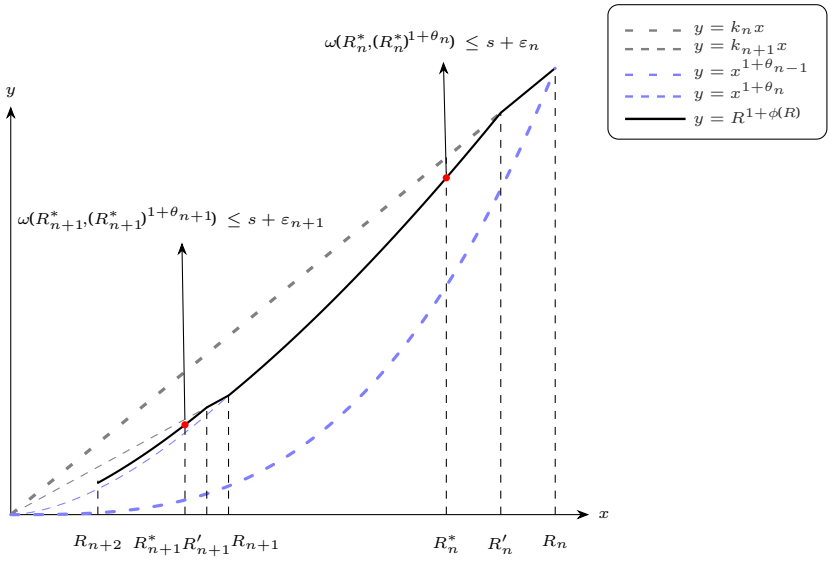


FIGURE 2. $R^{1+\phi(R)}$ 的图（对应 $R \in [R_{n+2}, R_n]$）。

根据$\phi(R)$的定义，我们很容易验证 $\phi(R)$是一个维数函数；再由断言 3即可得到所需结论。

□

School of Artificial Intelligence、 Shenzhen Technology University、 Shenzhen、 China, 518118*Email address*: hpchen0703@foxmail.com
School of Mathematics and Statistics、 Yunnan University、 Kunming、 China, 650504*Email address*: sophia 84@126.com