arXiv:2602.07450v1 [math.FA] 7 Feb 2026

索伯列夫函数的迹与高阶可积性

ROBERT DENK、FRANZ GMEINEDER 和 PAUL STEPHAN

值此函数空间巨擘 *Hans Triebel 90* 岁寿辰之际

Abstract. 我们精确刻画了内部额外可积性如何提高 $W^{1,p}$-Sobolev函数边界迹的可积性。我们结果的最优性依赖于一种新颖的非线性延拓或提升算子。

Contents

1. 引言2. 定理的证明 1.1 1
3. 主题的变体 致谢 参考文献 4
15
19
19

1. Introduction

弱可微函数理论中的一个经典事实是，在足够规则的集合上，可以为Sobolev函数赋予边界值。更确切地说，设 $n \geq 2$ 和 $1 \leq p \leq \infty$。那么，对于每个具有 Lipschitz 边界的有界开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，都存在一个有界线性满射迹算子$\gamma_{\partial\Omega}$: $W^{1,p}(\Omega) \to Y(\partial\Omega)$，使得对每个 $u \in C(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$，$u|_{\partial\Omega} = \gamma_{\partial\Omega} u$成立。这里，我们记

$$Y(\partial\Omega) := \begin{cases} L^1(\partial\Omega) & \text{if } p = 1, \\ W^{1-1/p,p}(\partial\Omega) & \text{if } 1 < p < \infty, \\ \mathrm{Lip}_b(\partial\Omega) & \text{if } p = \infty. \end{cases} \tag{1.1}$$

为方便读者，下面第 1.2 节将回顾分数阶 Sobolev 空间 $W^{1-1/p,p}$的定义。$\gamma_{\partial\Omega}$ 的满射性表明，$Y(\partial\Omega)$ 是边界值所属的最优空间，因此我们称 $Y(\partial\Omega)$ 为 $W^{1,p}(\Omega)$ 的迹空间。关于 $\gamma_{\partial\Omega}$ 到式 $Y(\partial\Omega)$ 的映射性质，参见式（1.1），这是经典结果。更多细节可参阅例如 [Leo17、Tri10] 。

然而，以自然的方式对这一框架加以细化后，对于当底层函数先验地属于某个比 Sobolev 嵌入定理给出的一般空间更好的 $L^q(\Omega)$ 空间时，可积性提升的精确结果仍知之甚少。

Date: 2026年2月10日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 42 B25，46B70，46E35。*Key words and phrases.* Sobolev空间，迹，插值。

因此，本文关注一个基本问题：Ω内部的高阶可积性如何改善函数沿着边界 $\partial\Omega$ 的迹的性质。

1.1. 主要结果。具体而言，设 $1 \le p < n$ 和 $p^* < q \le \infty$，其中 $p^* := \frac{np}{n-p}$ 是 p 的Sobolev 共轭指数。我们的目标是确定精确的迹空间 $\gamma_{\partial\Omega}((\mathrm{W}^{1,p} \cap \mathrm{L}^q)(\Omega))$；本文及下文中，对于 Ω 上的两个函数空间 $X(\Omega)$ 和 $Y(\Omega)$，我们将 $(X \cap Y)(\Omega) := X(\Omega) \cap Y(\Omega)$ 简记为.....。注意，根据通常的 Sobolev 嵌入，当且仅当 $\widetilde{p} \le p^*$ 时，$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^{\widetilde{p}}(\Omega)$，因此，只要 $q > p^*$，便有 $(\mathrm{W}^{1,p} \cap \mathrm{L}^q)(\Omega) \subsetneq \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$。此外，显然，与 L^q 取交不会使迹的光滑性超过 $s = 1 - \frac{1}{p}$。对此，我们证明，$\gamma_{\partial\Omega}((\mathrm{W}^{1,p} \cap \mathrm{L}^q)(\Omega))$ 恰好是经典分数阶 Sobolev 空间 $\mathrm{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ 与 Lebesgue 空间 $\mathrm{L}^r(\partial\Omega)$ 的交，其中具体指数 r 取决于 p 和 q。在主要结果定理 1.1 中，我们给出一个版本，也涵盖半空间上的齐次空间；其精确定义请参见第 1.2 节。

定理 1.1 ($\mathrm{W}^{1,p} \cap \mathrm{L}^q$ 的迹空间)。设 $1 < p < n$ 和 $p^* < q \le \infty$。则有以下结论：

(a) 记上半空间为 $\mathbb{R}^n_+ := \{(x', x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0\}$，并将 $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ 与 $\mathbb{R}^{n-1}$视为同一对象，则有

$$\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}((\dot{\mathrm{W}}^{1,p} \cap \mathrm{L}^q)(\mathbb{R}^n_+)) = (\dot{\mathrm{W}}^{1-\frac{1}{p},p} \cap \mathrm{L}^r)(\mathbb{R}^{n-1}), \tag{1.2}$$

其中指数 r 由缩放关系确定

$$r = 1 + q\left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{1.3}$$

特别地，存在一个连续延拓算子

$$\mathrm{E}\colon (\dot{\mathrm{W}}^{1-\frac{1}{p},p} \cap \mathrm{L}^r)(\mathbb{R}^{n-1}) \to (\dot{\mathrm{W}}^{1,p} \cap \mathrm{L}^q)(\mathbb{R}^n_+)$$

使得 $\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}} \circ \mathrm{E} = \mathrm{id}$ 在 $(\dot{\mathrm{W}}^{1-1/p,\,p} \cap \mathrm{L}^r)(\mathbb{R}^{n-1})$上成立。

(b) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集，且具有 *Lipschitz* 边界 $\partial\Omega$。则有

$$\gamma_{\partial\Omega}((\mathrm{W}^{1,p} \cap \mathrm{L}^q)(\Omega)) = (\mathrm{W}^{1-\frac{1}{p},p} \cap \mathrm{L}^r)(\partial\Omega), \tag{1.4}$$

其中指数 r 由缩放关系 (1.3)确定。特别是，存在一个 连续延拓算子

$$\mathrm{E}\colon (\mathrm{W}^{1-\frac{1}{p},p} \cap \mathrm{L}^r)(\partial\Omega) \to (\mathrm{W}^{1,p} \cap \mathrm{L}^q)(\Omega)$$

使得 $\gamma_{\partial\Omega} \circ \mathrm{E} = \mathrm{id}$ 定义在 $(\mathrm{W}^{1-1/p,p} \cap \mathrm{L}^r)(\partial\Omega)$上。

在 (a) 和(b)中，$\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}$ 和 $\gamma_{\partial\Omega}$ 分别表示 $\dot{\mathrm{W}}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ 或$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$上的通常迹算子。

鉴于极限指数，我们注意到

$$q \searrow p^* := \frac{np}{n-p} \Longrightarrow r \to 1 + \frac{n(p-1)}{n-p} = p\,\frac{n-1}{n-p} =: \overline{p}$$

并且 $\dot{\mathrm{W}}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1}) \hookrightarrow \mathrm{L}^{\overline{p}}(\mathbb{R}^{n-1})$。因此，指数（1.3）实现了从 L^q约束情形到无约束情形的尖锐过渡。作为后文参考，我们指出，据我们所知，定理1.1 并不能通过常规乃至更精细的插值技术得出；更多细节请参见注释 2.6 。

定理 1.1 证明中最困难的部分，是在（1.2）或（1.4）中分别证明包含关系 '$\supset$'。我们无法通过直接使用线性延拓算子来证明这一方向。事实上，我们在第 2.2 节中引入的延拓或提升，旨在达到由（1.3）给出的最优指数 r，而这依赖于一个非线性截断过程。原则上，后者仅对在边界上具有光滑性的函数有定义。由于我们的延拓具有非线性，这尤其需要额外论证，以确保它能够连续延拓到交空间 $(\mathrm{W}^{1-1/p,p}\cap \mathrm{L}^r)(\partial\Omega)$。

读者或许已经注意到，定理 1.1 仅适用于指数范围 $1<p<n$，而不适用于 $p=1$。事实上，针对 $p=1$的定理 1.1 是一个较简单的情形，其结论呈二分形式；这一结果基于 M¨uller [M¨u16], 提出的观察，他证明了以下结果。

定理 1.2 ($p=1$, M¨uller [M¨u16])。设 $p=1$ 且 $1^*:=\frac{n}{n-1}\le q\le\infty$。则有

$$\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}((\dot{\mathrm{W}}^{1,1}\cap \mathrm{L}^q)(\mathbb{R}^n_+))=\begin{cases}\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1}) & \text{if } \frac{n}{n-1}<q<\infty,\\ (\mathrm{L}^1\cap\mathrm{L}^\infty)(\mathbb{R}^{n-1}) & \text{if } q=\infty.\end{cases}\tag{1.5}$$

同样，若$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是具有 *Lipschitz* 边界的开有界区域，则有

$$\gamma_{\partial\Omega}((\mathrm{W}^{1,1}\cap \mathrm{L}^q)(\Omega))=\begin{cases}\mathrm{L}^1(\partial\Omega) & \text{if } \frac{n}{n-1}<q<\infty,\\ \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega) & \text{if } q=\infty.\end{cases}\tag{1.6}$$

这里，$\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}$ 和 $\gamma_{\partial\Omega}$ 分别表示定义在 $\dot{\mathrm{W}}^{1,1}(\mathbb{R}^n_+)$ 或 $\mathrm{W}^{1,1}(\Omega)$上的通常的迹算子。

特别地，由于 $\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}(\dot{\mathrm{W}}^{1,1}(\mathbb{R}^n_+))=\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1}$，根据 Gagliardo 的经典结果 [Gag57]（另见 Mironescu [Mir15]），迹的可积性提升只能在 $q=\infty$的情形下实现；区域也同样如此。关键仍在于迹算子的满射性。为使本文内容自成一体，我们在第 2.3 节重新考察 M¨uller 的论证，但采用更接近 Gagliardo 原始构造 [Gag57, §3] 的思路。这样做在技术上更有利（例如，延拓时无需绕道经过有界变差空间），并能直接证明正确迹的可达性。

定理 1.1 和 1.2 的结论对于这类算子适配空间依然成立。关于精确陈述，请参见第3 节，其中我们还展示了采用不同迹算子的必要性，并介绍了近期在 [BDG20, DG25]中确立的该算子的构造；这也为定理 $\subset$（1.5）和（1.6）中的包含关系 '1.2' 提供了独立证明。

1.2. 记号与背景材料。 我们简要说明一下记号。对于$n\in\mathbb{N}$，我们用 $\mathbb{S}^{n-1}$ 表示单位球面：$=\{x\in\mathbb{R}^n\colon\ |x|=1\}$ 并记

$$\mathbb{R}^n_+:=\{x=(x',x_n)\colon\ x'\in\mathbb{R}^{n-1},\ x_n>0\}$$

对于沿第 n 个坐标方向的上半空间；如上所述，此时通常直接用 $\mathbb{R}^{n-1}$ 表示 $\partial\mathbb{R}^n_+$。通常，我们用 $\mathscr{L}^n$ 和 $\mathscr{H}^{n-1}$ 分别表示 n 维勒贝格测度和 $(n-1)$ 维豪斯多夫测度；为简洁起见，记 $\mathrm{d}x':=\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}(x')$。此外，对于 $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})$，哈代–利特尔伍德极大函数定义为

$$Mf(x'):=\sup_{r>0}\fint_{\mathrm{B}_r(x')}|f(z')|\mathrm{d}z':=\sup_{r>0}\frac{1}{|\mathrm{B}_r(x')|}\int_{\mathrm{B}_r(x')}|f(z')|\mathrm{d}z',\qquad x'\in\mathbb{R}^{n-1}.$$

这里，$|B_r(x')| := \mathscr{H}^{n-1}(B_r(x'))$。对于开集 $U \subset \mathbb{R}^n$、$0 < s < 1$、$1 \le p < \infty$ 和 $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\partial U)$，我们定义 $(s,\ p)$-Gagliardo 半范数为

$$[v]_{s,p,\partial U} := \Big(\iint_{\partial U \times \partial U} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n-1+sp}} \mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}(x) \mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}(y) \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

若 $U = \mathbb{R}^n_+$，我们采用以下齐次 Sobolev 空间和分数阶 Sobolev 空间的定义：

$$\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) := \overline{C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})}^{\|\nabla \cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}} \quad \text{and} \quad \dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^{n-1}) := \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}^{[\cdot]_{s,p,\mathbb{R}^{n-1}}}.$$

首先，这些闭包取自 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$ 和 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n-1})$。对于开集$U \subset \mathbb{R}^n$，$W^{s,\,p}(\partial U)$ 是由所有满足$[v]_{s,\,p,\,\partial U} < \infty$ 的 $v \in L^p(\partial U)$ 构成的线性空间。最后，$c,\ C > 0$ 表示可能逐行变化的通用常数；只有在下文需要时，我们才指出其确切的依赖关系。

2. Proof of Theorem 1.1

2.1. **辅助结果**。鉴于定理 1.1 的证明，我们现在记录两个关于调和延拓和极大函数估计的准备性引理如下。第一个结果本质上归功于 Agmon、Douglis 和 Nirenberg [ADN59，定理 3。3]；下面给出的版本可见于 Galdi [Gal11，定理 II.11。6]。

引理 2.1. 设核 K 具有如下形式

$$K(x', x_n) = \frac{\widetilde{\omega}(x'/|x|, x_n/|x|)}{|x|^{n-1}}, \quad x = (x', x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), \tag{2.1}$$

其中，函数 $\widetilde{\omega}$ 在半球面 $\{x \in \mathbb{S}^{n-1} :\ x_n \ge 0\}$ 上连续，并且在满足 $x_n = 0$的点 $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ 处满足一致的 *Hölder* 条件。假设$\partial_i K$ 对于 $i = 1, \dots, n$，以及 $\partial_n^2 K$ 在 $\{x \in \mathbb{R}^n :\ x_n > 0\}$ 上连续，并且在 $\{x \in \mathbb{R}^n :\ x_n > 0\} \cap \mathbb{S}^{n-1}$ 上有界，其上界为正常数 κ。此外，我们假设

$$\int_{\{|x'|=1\}} \widetilde{\omega}(x', 0)\, \mathrm{d}x' = 0. \tag{2.2}$$

那么，对于满足$[f]_{1-1/p,p,\mathbb{R}^{n-1}} < \infty$的函数 $f \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$，

$$u(x', x_n) := (K(\cdot, x_n) * f)(x') = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x'-y', x_n) f(y')\, \mathrm{d}y', \quad (x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+,$$

属于 $L^p(\mathbb{R}^n_+)$，并且下列不等式成立，其中 $c = c(n,p) > 0$为常数：

$$\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \le c [f]_{1-\frac{1}{p},p,\mathbb{R}^{n-1}}. \tag{2.3}$$

我们验证泊松算子满足上述定理的条件。半空间的泊松核为

$$K_P(x) := c_n \frac{x_n}{|x|^n}, \qquad x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+, \tag{2.4}$$

其中，$c_n > 0$的选取使得对所有 $x_n > 0$，$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_P(x', x_n)\, \mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}(x') = 1$。选取满足 $\xi = x/|x| \in \mathbb{S}^{n-1}$的 $\widetilde{\omega}(\xi) = c_n \xi_n$ 后，我们发现该核具有形式（2.1）。此外，由于对所有 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$均有 $\widetilde{\omega}(x', 0) = 0$，条件（2.2）也成立。注意到当 $x \ne 0$时，K_P 属于C^∞ 类，因此我们可直接得出，$\partial_i K_P$ 和$\partial_n^2 K_P$ 在 $\{x \in \mathbb{R}^n$ 中连续：$x_n > 0\}$，并且对所有 $i = 1, ..., n$，在 $\{x \in \mathbb{R}^n$ 中有界：$x_n > 0\} \cap \mathbb{S}^{n-1}$。因此，我们得到以下引理。

引理 2.2（泊松延拓的性质）。设 $1 < p < \infty$，并设 $f \in \dot{W}^{1-\frac{1}{p},\,p}(\mathbb{R}^{n-1})$。对于 $x = (x',\ x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\ \infty)$，我们定义泊松延拓如下

$$v(x', x_n) := (K_P(\cdot, x_n) * f)(x'),$$

其中 K_P 如(2.4)中所述。于是 $v \in \mathrm{W}^{1,\,p}(\mathbb{R}^n_+)$，且 $\dot{\mathrm{W}}^{1,\,p}$-迹满足$\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}} v = f$ $\mathbb{R}^{n-1}$。此外，存在一个常数 $c = c(n, p) > 0$ 使得

$$\|\nabla v\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n_+)} \le c\,[f]_{1-\frac{1}{p},p,\mathbb{R}^{n-1}}.$$

引理 2.3。设 $1 < r < \infty$ 和 $f \in \mathrm{L}^r(\mathbb{R}^{n-1})$。若 v 表示将 f 通过泊松延拓到上半空间 $\mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$，如引理2.2所述，则

$$|v(x', x_n)| \le Mf(x') \quad \textit{for all } (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty), \tag{2.5}$$

其中 M 表示 $\mathbb{R}^{n-1}$上的 *Hardy–Littlewood*极大算子。因此，存在一个常数 $C = C(n, r) > 0$ 使得

$$\Big\| \sup_{x_n > 0} |v(\cdot, x_n)| \Big\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^{n-1})} \le C \|f\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

证明。逐点界（2.5）见 [Gra14，推论 2.1.12，例 2.1。13]。范数估计直接由 $r > 1$ 的经典极大定理□得出。

注 2.4. 尽管这已是众所周知的事实，我们仍明确指出，无界半空间中的泊松算子并不将 $\dot{\mathrm{W}}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ 映入 $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n_+)$。这一点可如下看出：考虑由 $f(x') = (1 + |x'|)^{-\alpha}$ 定义的函数 $f\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$，其中我们选取 α 使得 $\frac{n-1}{p} < \alpha \le \frac{n}{p}$。于是 $f \in \dot{\mathrm{W}}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$。令$v(x', x_n) := (K_P(\cdot, x_n) * f)(x')$，对 $x_n > 1$我们考虑环域 $A_{x_n} = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : 1 \le |x'| < x_n\}$。对于 $z' \in A_{x_n}$ 与 $x' \in A_{x_n}$，我们有 $|x' - z'| < 2x_n$，从而

$$K_P(x' - z', x_n) = c_n \frac{x_n}{(x_n^2 + |x' - z'|^2)^{n/2}} \ge c_n \frac{x_n}{(5x_n^2)^{n/2}} = C\, x_n^{-(n-1)}.$$

此外，在 A_{x_n} 上，我们有 $f(x') \ge (2x_n)^{-\alpha}$，因此

$$v(x', x_n) \ge C x_n^{-(n-1)} \int_{A_{x_n}} (2x_n)^{-\alpha}\, \mathrm{d}z' = C x_n^{-(n-1)} (x_n^{n-1} - 1) x_n^{-\alpha}.$$

注意到 $x_n > 2^{\frac{1}{n-1}}$ 蕴含 $1 - x_n^{1-n} > \frac{1}{2}$，我们得到

$$\begin{aligned} \|v\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n_+)} &\ge \int_{2^{\frac{1}{n-1}}}^{\infty} \int_{A_{x_n}} (C x_n^{-\alpha})^p \,\mathrm{d}x' \mathrm{d}x_n \ge C \int_{2^{\frac{1}{n-1}}}^{\infty} x_n^{-\alpha p} (x_n^{n-1} - 1) \mathrm{d}x_n \\ &\ge C \int_{2^{\frac{1}{n-1}}}^{\infty} x_n^{-\alpha p + n - 1} (1 - x_n^{1-n}) \mathrm{d}x_n \ge C \int_{2^{\frac{1}{n-1}}}^{\infty} x_n^{-\alpha p + n - 1} \mathrm{d}x_n, \end{aligned}$$

其中 $C = C(n,\ p,\ \alpha) > 0$ 在相邻的不等式之间变化。由于我们假设了 $\alpha \le \frac{n}{p}$，关于 x_n 的剩余积分发散。

2.2. **定理 1.1(a) 和 (b) 的证明**。根据引理 2.1–2.3，我们现在来证明定理 1.1。我们先处理较难的情形 $p^* < q < \infty$:

定理 1.1，情形 $1 < p < p^* < q < \infty$。我们先考虑半空间上的齐次情形，见 (a)。这可由乘法迹不等式以及基于泊松积分的显式非线性延拓得到。为简化记号，我们记作 $X := (\dot{\mathrm{W}}^{1,\,p} \cap \mathrm{L}^q)(\mathbb{R}^n_+)$。

在（1.2）中包含 '$\subset$'。作用于 $W^p(\mathbb{R}^n_+),^p(\mathbb{R}^n_+)$ 的经典迹算子将 $\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}\colon X \subset \dot{\mathrm{W}}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \to \dot{\mathrm{W}}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ 映射为 $\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}\colon X \subset \dot{\mathrm{W}}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \to \dot{\mathrm{W}}^{1-1/p,\,p}(\mathbb{R}^{n-1})$。因此，只需证明 $\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}\colon X \to$

$L^r(\mathbb{R}^{n-1})$。这是利用 H¨older 不等式即可轻松完成的计算，相关内容例如见 [DiB16，第 10 章，命题 16。1]。为求完整起见，我们在此给出详细证明。设 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n_+)$。任取一点 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$，由微积分基本定理可得

$$\begin{aligned} |u(x',0)|^r &= -\int_0^\infty \partial_{x_n}\big(|u(x',x_n)|^r\big)\,\mathrm{d}x_n \\ &\leq r\int_0^\infty |u(x',x_n)|^{r-1}|\nabla u(x',x_n)|\,\mathrm{d}x_n. \end{aligned} \tag{2.6}$$

由于（1.3），我们有（$r-1$）$p' = q$。因此，对（2.6）关于$x' \in \mathbb{R}^{n-1}$进行积分，利用 H¨older 不等式可得

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x',0)|^r\,\mathrm{d}x' \leq r\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}|u|^{(r-1)p'}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}},$$

从而得到乘法不等式

$$\|u(\cdot,0)\|^r_{L^r(\mathbb{R}^{n-1})} \leq r\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}\|u\|^{r-1}_{L^q(\mathbb{R}^n_+)}.$$

通过光滑逼近，随后可得 $\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}\colon\ X \to (\dot{W}^{1-1/p,\,p}\cap L^r)(\mathbb{R}^{n-1})$ 有界。

（'⊃' 包含于 （1.2）中。为了构造延拓算子，我们首先令$f \in C_c^\infty$（$\mathbb{R}^{n-1}$），并令 v（x'，x_n）：=（K_P（·，x_n）∗f）（x'）为 f到上半空间的泊松延拓 $\mathbb{R}^n_+$，参见引理 2.2。特别地，我们有

$$\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}v = f \quad\text{and}\quad \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq c\,[f]_{1-1/p,p,\mathbb{R}^{n-1}}, \tag{2.7}$$

其中 $c = c(n,\ p) > 0$。此外，由（2.5），我们得到逐点极大估计

$$|v(x',x_n)| \leq (Mf)(x') \qquad \text{for all } (x',x_n) \in \mathbb{R}^n_+. \tag{2.8}$$

由于 $r > 1$, M 在 $L^r(\mathbb{R}^{n-1})$ 上有界。

现在通过根据 v 的大小对其进行截断来定义提升 u 。令$\eta \in C^\infty([0,\infty))$为一个截断函数，满足 $\eta(t) = 1$，当 $0 \leq t \leq 1$, $\eta(t) = 0$ 时；当$t \geq 2$, $0 \leq \eta \leq 1$时，且对所有 $t \geq 0$，有 $|\eta'(t)| \leq 2$。定义

$$u(x',x_n) := \eta\Big(x_n|v(x',x_n)|^\beta\Big)v(x',x_n), \qquad (x',x_n) \in \mathbb{R}^n_+, \tag{2.9}$$

其中我们记

$$\beta := \frac{q}{p} - 1 \quad\text{and therefore}\quad q - \beta \overset{(1.3)}{=} r. \tag{2.10}$$

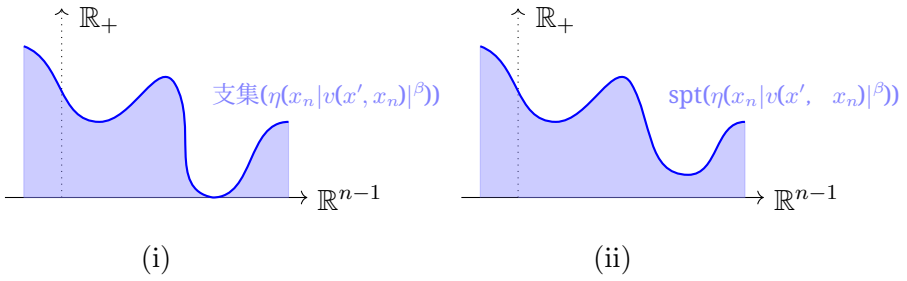
鉴于还可能存在其他延拓，下面的注 2.5 将讨论这一特定选择。注意，对于满足 $x = (x', x_n)$ 且 $u(x) \neq 0$的点，我们有

$$x_n|v(x)|^\beta \leq 2 \quad\text{and therefore}\quad x_n \leq 2|v(x)|^{-\beta}. \tag{2.11}$$

此外，由于 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$，由(2.4)及其后续结果可得$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}$。因此，若 $0 < x_n < \|f\|_\infty^{-1}L(\mathbb{R}^{n-1})$，则 $x_n|v(x',x_n)|^\beta \leq 1$，从而对所有 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ 及所有此类 x_n，均有 $u(x',x_n) = v(x',x_n)$。因此，由(2.7)可得

$$\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}u = f \tag{2.12}$$

前提是我们能够证明 $u \in \dot{W}^{1,\,p}(\mathbb{R}^n_+)$。特别地，这将是接下来两个步骤的推论。



(i) (ii)

FIGURE 1. u的支集的（非）坍缩。若 $|v(x', x_n)| \to \infty$ 随 $x_n \searrow 0$足够快，则可能出现 $u(x', 0) = 0$，见(i)。若这发生在一个过大集合的点上，(2.12)未必成立。若 v 有界，正如步骤 1 和 2 的设定中那样，则此情形不会发生；见(ii)。因此，步骤 3 中连续性论证的结论可解释为：对一般的($\dot{W}^{1-1/p,p} \cap L^r$)-函数 f而言，(i)不会过于频繁地发生： $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$；另见备注 2.5。

步骤 *1*： L^q界。 我们首先给出 L^q范数的界 u。为此，我们使用（2.8），它在 x_n上是一致成立的。令 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ 任意取值，将关于 x_n的积分在 $T = 2(Mf(x'))^{-\beta}$处拆分。

对于 $x_n \le T$，我们用 $|v(x', x_n)| \le Mf(x')$ 来估计 $|u(x', x_n)|$。对于 $x_n > T$，并假设 $u(x', x_n) \neq 0$，支集条件 (2.11) 蕴含估计$|u(x', x_n)| \le |v(x', x_n)| \le (2/x_n)^{1/\beta}$。对于 $x_n > T$，该界严格小于 $Mf(x')$；这由 T 的定义可得。由于 $0 \le \eta \le 1$，这些估计的组合给出逐点界

$$|u(x', x_n)| \le G(x', x_n) := \min\left\{Mf(x'), \left(\frac{2}{x_n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\}, \qquad (x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+. \tag{2.13}$$

因此，对于 $(x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+$，我们得到

$$\int_0^\infty |u(x', x_n)|^q \, \mathrm{d}x_n \le \int_0^T (Mf(x'))^q \, \mathrm{d}x_n + \int_T^\infty \left(\frac{2}{x_n}\right)^{\frac{q}{\beta}} \mathrm{d}x_n. \tag{2.14}$$

第一个积分等于 $T(Mf(x'))^q = 2(Mf(x'))^{q-\beta}$。第二个积分收敛，因为 $\frac{q}{\beta} = \frac{pq}{q-p} > 1$（当 $p > 1$时），并且等于

$$\left[\frac{2^{q/\beta} x_n^{1-q/\beta}}{1 - q/\beta}\right]_T^\infty = cT^{1-\frac{q}{\beta}} = c\,(Mf(x'))^{-\beta\left(1-\frac{q}{\beta}\right)} = c\,(Mf(x'))^{q-\beta}. \tag{2.15}$$

由于 $q - \beta = r$，见 (2.10)，(2.14)–(2.15) 给出逐点界

$$\int_0^\infty |u(x', x_n)|^q \, \mathrm{d}x_n \le c\,(Mf(x'))^r. \tag{2.16}$$

在 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ 上积分，并利用极大算子在 $L^r(\mathbb{R}^{n-1})$ 上的有界性，我们得到

$$\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n_+)} \le c\|Mf\|^r_{L^r(\mathbb{R}^{n-1})} \le c\|f\|^r_{L^r(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{2.17}$$

步骤 *2*： L^p-梯度界。 接下来，我们给出弱梯度 ∇u 的估计。根据乘积法则，

$$\nabla u(x) = \eta\big(x_n|v(x)|^\beta\big)\nabla v(x) + v(x)\nabla\Big(\eta\big(x_n|v(x)|^\beta\big)\Big) =: \mathrm{I}_1(x) + \mathrm{I}_2(x).$$

项 $\mathrm{I}_1(x)$ 的支集位于 $\eta(x_n|v(x)|^\beta) \neq 0$ 上，并且逐点有界于$|\nabla v(x)|$。因此，其 L^p 范数受$\|\nabla v\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n_+)}$ 控制。对于第二项，我们定义 $\Psi(x) := x_n|v(x)|^\beta$。因此，我们有

$$\nabla\Psi(x) = |v(x)|^\beta \mathbf{e}_n + \beta x_n |v(x)|^{\beta-1}\operatorname{sgn}(v(x))\nabla v(x),$$

其中 $\mathbf{e}_n := (0, \dots, 0, 1)$。请注意，这一弱梯度计算是合理的，因为 v 在 $\mathbb{R}^n_+$中是光滑的；可积性所需的相关估计将在下文给出。因此，项 $\mathrm{I}_2(x)$ 可通过以下方式估计

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}_2(x)| &= |v(x)\eta'(\Psi(x))\nabla\Psi(x)| \\ &\leq |\eta'(\Psi(x))|\Big(|v(x)|^{\beta+1} + \beta|x_n||v(x)|^\beta|\nabla v(x)|\Big) =: A(x) + B(x)\end{aligned}$$

其中 A 和 B的定义显而易见。对于项 B，注意到在 η'的支集上，论证 $\Psi(x', x_n) = x_n|v(x', x_n)|^\beta$的值不超过 2。因此，$|B| \leq c|\nabla v|$，且后一个表达式根据 (2.7) 属于 $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n_+)$。

对于项 A，利用 η' 仅当 $1 \leq x_n|v(x', x_n)|^\beta \leq 2$时才非零，可得逐点界 $|v(x', x_n)| \leq (2/x_n)^{1/\beta}$。此外，全局估计 $|v(x', x_n)| \leq Mf(x')$意味着，在 η' 的支集上必有$x_n \geq (Mf(x'))^{-\beta}$。因此，关于 x_n的积分有以下上界

$$\int_0^\infty |A(x', x_n)|^p \,\mathrm{d}x_n \leq c\int_{(Mf(x'))^{-\beta}}^\infty x_n^{-\frac{p(\beta+1)}{\beta}}\,\mathrm{d}x_n, \tag{2.18}$$

它收敛，因为 $\frac{p(\beta+1)}{\beta} \geq 1$。在下限处求值可得

$$\Big((Mf(x'))^{-\beta}\Big)^{1-\frac{p(\beta+1)}{\beta}} = (Mf(x'))^{-\beta+p(\beta+1)}. \tag{2.19}$$

回顾从 ($\beta = \frac{q}{p} - 1$ 2.10)中作出的选择，我们注意到 $p(\beta+1) = q$。因此，(2.19) 中的指数可简化为

$$-\beta + p(\beta+1) = -\beta + q \overset{(2.10)}{=} r. \tag{2.20}$$

对 2.18) 关于 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ 积分，并利用 (2.19)，可得估计$\|A\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq c\|f\|^r_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^{n-1})}$，其中 $c > 0$仍与 f和 v无关。综上，结合步骤 1 中的不等式 (2.17)，我们得到

$$\|u\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^n_+)} + \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq c\big(\|f\|^{\frac{r}{q}}_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^{n-1})} + \|f\|^{\frac{r}{p}}_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^{n-1})} + [f]_{1-1/p,p,\mathbb{R}^{n-1}}\big) \tag{2.21}$$

对所有 $f \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R}^{n-1})$ 均成立。由前一个不等式 (2.21) 可知 $u \in (\dot{\mathrm{W}}^{1,p} \cap \mathrm{L}^q)(\mathbb{R}^n_+)$，因此现在可以使用 (2.12)。

步骤 3：过渡到一般的 $\dot{\mathrm{W}}^{1-1/p,p} \cap \mathrm{L}^r$-函数。尚需验证所构造的、在 (2.9) 中定义的提升算子 $f \mapsto u$ 从 $(\dot{\mathrm{W}}^{1-1/p,p} \cap \mathrm{L}^r)(\mathbb{R}^{n-1})$ 到 X 是连续的。设 $f, f_1, f_2, \dots \in (\dot{\mathrm{W}}^{1-1/p,p} \cap \mathrm{L}^r)(\mathbb{R}^{n-1})$ 使得 $f_k \to f$ 在 $(\dot{\mathrm{W}}^{1-1/p,p} \cap \mathrm{L}^r)(\mathbb{R}^{n-1})$ 中关于交空间范数成立。为建立延拓 $u_k \to u$ 在 X 中的强收敛，只需证明 $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 的每个子序列都有进一步的子序列在 X 中收敛到 u。设 $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 为任意未重新标记的子列。由于 $f_k \to f$ 属于 $\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^{n-1})$，我们可以再抽出一个仍记为 $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 的子序列，使得 $f_k \to f$ 逐点$\mathscr{H}^{n-1}$-几乎处处于 $\mathbb{R}^{n-1}$，并找到控制函数 $F \in \mathrm{L}^r(\mathbb{R}^{n-1})$，使得对 $\mathscr{H}^{n-1}$-几乎处处的 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ 以及所有 $k \in \mathbb{N}$，有 $|f_k(x')| \leq F(x')$。

为看出后者，注意 $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 关于 $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^{n-1})}$ 是柯西的。经典的黎斯-费歇尔构造使我们能够找到一个子序列 $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $j\in\mathbb{N}$ 有 $\|f_{k_{j+1}}-f_{k_j}\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^{n-1})}<2^{-j}$。于是只需令

$$F(x') := |f_{k_1}(x')| + \sum_{l=1}^{\infty} |f_{k_{l+1}}(x') - f_{k_l}(x')|, \qquad x'\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.22}$$

显然，$F\in \mathrm{L}^r(\mathbb{R}^{n-1})$。此外，对于任意的 $j\in\mathbb{N}$，有 $f_{k_j} = f_{k_1} + \sum_{l=1}^{j-1}(f_{k_{l+1}}-f_{k_l})$，因此对于任意 $j\in\mathbb{N}$，$|f_{k_j}|\le F$ 成立。

我们回顾一下，v_k 和 v 分别表示 f_k 和 f 的泊松延拓，并且 v_k 和 v 都属于 C^∞ 类，定义在 $\mathbb{R}^n_+$ 上。特别地，由于 $f_k\to f$ 在 $\dot{\mathsf{W}}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ 中强收敛，根据 (2.3) 可得 $\nabla v_k\to\nabla v$ 在 $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$ 中强收敛；由索 Sobolev 嵌入，$v_k\to v$ 在 $\mathrm{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n_+)$ 中强收敛。因此，存在另一个未重新标记的子列，使得 $v_k\to v$ 和 $\nabla v_k\to\nabla v$ $\mathscr{L}^n$ 几乎处处于 $\mathbb{R}^n_+$。回到 (2.9)，并注意到 η 是一个连续函数，可得对于 $\mathscr{L}^n$-几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^n_+$，$u_k(x)\to u(x) = \eta(x_n|v(x)|^\beta)v(x)$。此外，我们回顾一下

$$|v_k(x',x_n)| \le Mf_k(x') \le MF(x') \qquad \text{for all } k\in\mathbb{N} \text{ and all } x'\in\mathbb{R}^{n-1},$$

并且 $MF\in\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^{n-1})$。现在类比（2.13），令

$$G(x',x_n) := \min\left\{MF(x'), \left(\frac{2}{x_n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\}, \qquad (x',x_n)\in\mathbb{R}^n_+,$$

使得 $|u_k(x',x_n)|\le|G(x',x_n)|$ 对几乎处处的 $\mathscr{L}^n$-a.e. $(x',x_n)\in\mathbb{R}^n_+$ 逐点成立。这与（2.13）中的论证相同；这里我们处理的是 $T:=2(MF(x'))^{-\beta}$，并利用 F 是 f_k 的控制函数这一事实。鉴于勒贝格控制收敛定理，我们需要证明 $G\in\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^n_+)$。为此，我们仿照（2.14）进行估计：

$$\int_0^\infty |G(x',x_n)|^q\,\mathrm{d}x_n \le \int_0^T (MF(x'))^q\,\mathrm{d}x_n + \int_T^\infty \left(\frac{2}{x_n}\right)^{\frac{q}{\beta}}\,\mathrm{d}x_n.$$

如（2.14）–（2.17）中那样，我们进行估计

$$\|G\|^q_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^n_+)} \le c\,\|MF\|^r_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^{n-1})} \le c\,\|F\|^r_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty.$$

因此，$G\in\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^n_+)$。由于 $u_k\to u$ 和 $|u_k|\le G$ 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中几乎处处（$\mathscr{L}^n$）逐点成立，控制收敛定理推出 $\|u_k-u\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^n_+)}\to 0$。

接下来，我们考虑弱梯度。引理 2.2 表明，对于另一个未重新标记的子序列，我们有 $\nabla v_k\to\nabla v$ 逐点 $\mathscr{L}^n$-a.e. 于 $\mathbb{R}^n_+$，并且在 $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$ 中强收敛。类似于 (2.22)，存在一个控制函数 $H\in\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n_+)$，使得 $|\nabla v_k|\le H$ $\mathscr{L}^n$-a.e. 于 $\mathbb{R}^n_+$。应用链式法则可得

$$\begin{aligned}\nabla u_k(x) &= \eta(\Psi_k(x))\nabla v_k(x)\\ &\quad + v_k(x)\eta'(\Psi_k(x))\Big[|v_k(x)|^\beta \mathbf{e}_n + \beta x_n|v_k(x)|^{\beta-1}\operatorname{sgn}(v_k(x))\nabla v_k(x)\Big],\end{aligned} \tag{2.23}$$

其中 $\Psi_k(x) := x_n|v_k(x)|^\beta$，并且对 $\Psi(x) := x_n|v(x)|^\beta$ 同样成立：

$$\begin{aligned}\nabla u(x) &= \eta(\Psi(x))\nabla v(x)\\ &\quad + v(x)\eta'(\Psi(x))\Big[|v(x)|^\beta \mathbf{e}_n + \beta x_n|v(x)|^{\beta-1}\operatorname{sgn}(v(x))\nabla v(x)\Big].\end{aligned} \tag{2.24}$$

再次，由于 v_k 和 v 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中光滑，这些弱梯度的计算是合理的；可积性所需的相关估计将在下文给出。

由于 $v_k \to v$ 和 $\nabla v_k \to \nabla v$ 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中逐点 $\mathscr{L}^n$-几乎处处成立， η 和 η' 的连续性意味着 $\nabla u_k \to \nabla u$ 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中逐点 $\mathscr{L}^n$-几乎处处成立。为将后者提升为 L^p 收敛，我们构造一个控制函数。(2.23) 中的第一项由 $|\nabla v_k| \leq H$ 控制。涉及 e_n 的项的支集位于满足 $x_n \geq (MF(x'))^{-\beta}$ 和 $|v_k(x)| \leq (2/x_n)^{1/\beta}$ 的区域内，因此我们可以估计

$$\big|v_k(x)\eta'(\Psi_k(x))|v_k(x)|^\beta \mathsf{e}_n\big| \leq c\left(\frac{2}{x_n}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} \mathbb{1}_{\{x_n \geq (MF(x'))^{-\beta}\}}(x) =: \widetilde{G}(x).$$

我们有 $G \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n_+)$；这可以仿照 (2.18)ff. 得出。包含 ∇v_k 的最后一项仅在 $x_n|v_k(x)|^\beta \leq 2$ 处有支集，这意味着系数 $x_n|v_k(x)|^\beta$ 有界。因此，该项由 $c|\nabla v_k| \leq cH$ 控制。结合这些估计，我们得到 $|\nabla u_k| \leq c(H+G) \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n_+)$ $\mathscr{L}^n$-几乎处处成立于 $\mathbb{R}^n_+$。由控制收敛定理可知， $\nabla u_k \to \nabla u$ 属于 $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$；特别地， $\nabla u \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$。因此，我们已经证明， $f_k \to f$ 在 $(\dot{\mathrm{W}}^{1-1/p,p} \cap \mathrm{L}^r)(\mathbb{R}^{n-1})$ 中强收敛，意味着 $u_k \to u$ 在 $(\dot{\mathrm{W}}^{1,p} \cap \mathrm{L}^q)(\mathbb{R}^n_+)$ 中强收敛。

现在我们可以完成证明。任取 $f \in (\dot{\mathrm{W}}^{1-1/p,p} \cap \mathrm{L}^r)(\mathbb{R}^{n-1})$。由于 $\mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R}^{n-1})$ 在交空间范数下关于 $(\dot{\mathrm{W}}^{1-1/p,p} \cap \mathrm{L}^r)(\mathbb{R}^{n-1})$ 稠密，因此我们可以选取一个序列 $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R}^{n-1})$，使得 $f_k \to f$ 在 $(\dot{\mathrm{W}}^{1-1/p,p} \cap \mathrm{L}^r)(\mathbb{R}^{n-1})$ 中强收敛。在这种情况下，由 (2.12) 可知，对每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}} u_k = f_k$；而由步骤 3 可知， $u_k \to u$ 在 $(\dot{\mathrm{W}}^{1,p} \cap \mathrm{L}^q)(\mathbb{R}^n_+)$ 中强收敛。由迹算子 $\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}\colon \dot{\mathrm{W}}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \to \dot{\mathrm{W}}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ 的连续性可知，$\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}} u_k \to \gamma_{\mathbb{R}^{n-1}} u$ 在 $\dot{\mathrm{W}}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ 中强收敛，并且 $\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}} u_k = f_k \to f$ 在 $\dot{\mathrm{W}}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ 中强收敛。因此， $\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}} u = f$，定理 1.1(a) 对 $q < \infty$ 的证明完成。

根据定理 1.1(b) 和注 2.4，再将（2.9）乘以一个作用于 n坐标方向的光滑截断函数，即可将上述过程局部化。结合常规的展平处理，证明得证。 □

我们接下来讨论情形 $q = \infty$。

定理 1.1 的证明，情形 $q = \infty$。这里我们关注非齐次空间，齐次情形的证明类似。设 $\eta \in \mathrm{C}^\infty([0,\infty);[0,1])$ 是一个截断函数，满足 $\eta(t) = 1$ 当 $t \leq 1$ 时，以及 $\eta(t) = 0$ 当 $t \geq 2$ 时。用 $\mathrm{B}_1^{(n-1)}(0)$ 表示 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的开单位球。对于固定的径向对称标准磨光核 $\psi \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathrm{B}_1^{(n-1)}(0))$ 和 $(x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+$

$$\mathrm{E}f(x', x_n) := \eta(x_n)(\psi_{x_n} * u)(x') = \frac{\eta(x_n)}{x_n^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi\Big(\frac{x'-y'}{x_n}\Big) f(y')\mathrm{d}y', \tag{2.25}$$

其中 $f \in \mathrm{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$。众所周知，$\mathrm{E}: \mathrm{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1}) \to \mathrm{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ 是一个有界线性算子，并且还满足 $\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}\mathrm{E}f = f$ $\mathscr{H}^{n-1}$-几乎处处于 $\mathbb{R}^{n-1}$ ，对每个 $f \in \mathrm{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ 都成立；例如参见 [Leo17, 推论 18.29]。由于 $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi(x')\mathrm{d}x' = 1$，由 (2.25) 可直接推出 $\|\mathrm{E}f\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}$。总之，$\mathrm{E}: (\mathrm{W}^{1-1/p,p} \cap \mathrm{L}^\infty)(\mathbb{R}^{n-1}) \to (\mathrm{W}^{1,p} \cap \mathrm{L}^\infty)(\mathbb{R}^n_+)$ 是线性有界的。对于具有 Lipschitz 边界的有界开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ，通过局部化可得到相应的提升算子。

现在令 $u \in (\mathrm{W}^{1,p} \cap \mathrm{L}^\infty)(\Omega)$。由于 Ω 具有 Lipschitz 边界，我们回顾[EG15，定理 5。7] 对于 $\mathscr{H}^{n-1}$-几乎处处的 $x_0 \in \partial\Omega$，有

$$\gamma_{\partial\Omega} u(x_0) = \lim_{r\searrow 0} \fint_{\mathrm{B}_r(x_0)\cap\Omega} u(x)\mathrm{d}x =: \lim_{r\searrow 0} \frac{1}{\mathscr{L}^n(\mathrm{B}_r(x_0)\cap\Omega)} \int_{\mathrm{B}_r(x_0)\cap\Omega} u(x)\mathrm{d}x.$$

因此，

$$|\gamma_{\partial\Omega}u(x_0)| \le \limsup_{r\searrow 0} \fint_{\mathrm{B}_r(x_0)\cap\Omega} |u(x)|\mathrm{d}x \le \|u\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}. \tag{2.26}$$

由 $x_0 \in \partial\Omega$ 的任意性以及 $\gamma_{\partial\Omega}\colon \mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathrm{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ 是有界线性算子可知，由 (2.26) 得 $\gamma_{\partial\Omega}\colon (\mathrm{W}^{1,p}\cap\mathrm{L}^\infty)(\Omega) \to (\mathrm{W}^{1-1/p,p}\cap\mathrm{L}^\infty)(\partial\Omega)$ 是有界线性算子。这就证明了所要断言。□

注 2.5. 选择 (2.9) 是为了掌握延拓在 $x_n \searrow 0$处的行为：数据额外具有 $\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^{n-1})$-可积性，尤其应当使其在靠近 $\mathbb{R}^{n-1}$处具有更好的 L^q-可积性。作为这一构造的结果，如果 $v(x', x_n)$ 在过大的集合$\Sigma \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 上随着 $x_n \searrow 0$增长得过快，那么 (2.9) 中 u 的迹可能会在 Σ 上等于零。在这种情况下， u 沿着 $\mathbb{R}^{n-1}$ 就不会具有正确的指定迹；见图 1。结合定理 1.1(a) 证明中的步骤 1 和 2，步骤 3 中的连续性论证可理解为排除这样一种行为：对于 $(\mathring{\mathrm{W}}^{1-1/p,p}\cap\mathrm{L}^r)(\mathbb{R}^{n-1})$ 中的一般边界值，它发生在过大的集合 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 上。

注2.6。注意，空间 $(\mathrm{W}^{1,p}\cap\mathrm{L}^q)(\Omega)$ 不能视为各向异性混合范数空间 $\mathrm{W}^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$ 的一个特例，例如文献 [JS08] 中所讨论的空间。对于这类空间，不同方向上的可积性参数可以不同 x_j，但在每个方向上，所有导数的可积性参数都相同。这与此处考虑的情形不同。因此，不能应用这类空间上的迹结果（参见 [JS08，定理 2.2]，[HL22，命题 3.7]）。

此外，据我们所知，定理 1.1 的结果无法通过简单的插值论证得到。我们讨论有界 Lipschitz 域 Ω 的两种可能方法。

a) 由经典迹结果和情形 $q = \infty$，我们得到以下映射的连续性

$$\gamma_{\partial\Omega}\colon (\mathrm{W}^{1,p}\cap\mathrm{L}^{p^*})(\Omega) \to (\mathrm{W}^{1-1/p,p}\cap\mathrm{L}^{\frac{n-1}{n-p}p})(\partial\Omega),$$
$$\gamma_{\partial\Omega}\colon (\mathrm{W}^{1,p}\cap\mathrm{L}^{\infty})(\Omega) \to (\mathrm{W}^{1-1/p,p}\cap\mathrm{L}^{\infty})(\partial\Omega),$$

这里，我们利用了 Sobolev 嵌入定理：在 Ω 和 $\partial\Omega$ 上分别有 $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) = (\mathrm{W}^{1,p}\cap\mathrm{L}^{p^*})(\Omega)$ 和 $\mathrm{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega) = (\mathrm{W}^{1-1/p,p}\cap\mathrm{L}^{\frac{n-1}{n-p}p})(\partial\Omega)$。我们采用复插值，其中插值参数 θ 定义为

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p^*} + \frac{\theta}{\infty}.$$

由此得到 $1-\theta = \frac{p^*}{q} = \frac{np}{n=p()q_\circ}$ 通过复插值，我们得到.....的连续性

$$\gamma_{\partial\Omega}\colon [(\mathrm{W}^{1,p}\cap\mathrm{L}^{p^*})(\Omega), (\mathrm{W}^{1,p}\cap\mathrm{L}^{\infty})(\Omega)]_\theta \to (\mathrm{W}^{1-1/p,p}\cap\mathrm{L}^{\widetilde{r}})(\partial\Omega), \tag{2.27}$$

其中 $\widetilde{r}$ 由下式给出

$$\frac{1}{\widetilde{r}} = \frac{1-\theta}{\frac{n-1}{n-p}p} = \frac{n}{(n-1)q},$$

即， $\widetilde{r} = \frac{n-1}{n}q$。然而，众所周知，插值与交集一般不可交换。我们只能得到

$$[(\mathrm{W}^{1,p}\cap\mathrm{L}^{p^*})(\Omega), (\mathrm{W}^{1,p}\cap\mathrm{L}^{\infty})(\Omega)]_\theta \subset (\mathrm{W}^{1,p}\cap\mathrm{L}^{q})(\Omega),$$

但等式并不成立。事实上，经过简短计算可得 $q > p^*$ 我们得到 $\widetilde{r} > r$，因此，式（2.27）右侧的目标空间比定理1.1中的正确目标空间更小。只有在

对所考察的空间施加非常强的限制时，插值与交集才可交换，参见例如 [ACK15], [GMS91]。关于拟线性化插值对及相关迹空间的讨论，另请参见 [Tri78，第 1.8 小节。4]。

b) 在第二种方法中，我们先在定义域内部进行插值，然后应用经典迹结果。更确切地说，我们从如下观察出发：对于任意 $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathrm{L}^q(\Omega)$，都成立一种形式为

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{\theta,p_\theta}(\Omega)} \leq C\|u\|^{\theta}_{\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_{\mathrm{L}^q(\Omega)} \tag{2.28}$$

其中 $\theta \in (0,1)$ 可任意选取，且 p_θ 定义为

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

该不等式是 [BM18定理 1]的一个特例。由 (2.28)，可得连续嵌入 $(\mathrm{W}^{1,p} \cap \mathrm{L}^q)(\Omega) \subset \mathrm{W}^{\theta,p_\theta}(\Omega)$。若 $\theta > 1/p_\theta$，则可应用迹算子，并得到

$$\gamma_{\partial\Omega}\colon (\mathrm{W}^{1,p} \cap \mathrm{L}^q)(\Omega) \to \mathrm{W}^{\theta-1/p_\theta,p_\theta}(\partial\Omega).$$

注意，条件 $\theta > 1/p_\theta$ 对于迹的连续性是必要的，参见例如 [JS08，定理 2。4]该条件等价于

$$\theta > \frac{1}{q}\Big(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\Big)^{-1} = \frac{p}{pq - q + p} =: \theta_{\min}.$$

由于 $1/p_\theta = \theta(1/p - 1/q) + 1/q$ 和 $q > p$，我们看到 p_θ 是关于 θ的严格递减函数。因此，通过选择接近 $\theta_{\min}$的 θ，我们可以得到任意 $p_\theta < p_{\max}$，其中

$$p_{\max} = \frac{1}{\theta_{\min}} = 1 + q\Big(1 - \frac{1}{p}\Big).$$

将其与（1.3）比较，我们看到 $p_{\max} = r_*$。因此，这种方法得到了的连续性

$$\gamma_{\partial\Omega} : (\mathrm{W}^{1,p} \cap \mathrm{L}^q)(\Omega) \to (\mathrm{W}^{1-1/p,p} \cap \mathrm{L}^{r_*-\varepsilon})(\partial\Omega)$$

对任意 $\varepsilon > 0$。这已接近最优。不过请注意，无法得到 $\varepsilon = 0$ 的情形，而且由于应用 Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式（2.28）时丢失了信息，这种方法无法证明连续延拓算子的存在。

2.3. **定理 1.2 的证明。** 为求完整，并使本文自成一体，我们现在讨论 $p = 1$的情形；事实上，它比$1 < p < n$更简单。正如引言中所指出的，相应结果归功于 M¨uller [M¨u16]；我们略作修改，直接沿用 Gagliardo 的原始方法[Gag57， §3]并严格说明了为何相应的延拓确实具有正确的迹。

定理1.2的证明。通过常规的展平和局部化技术，只需再次考虑半空间上的齐次情形。

式 (1.5) 中的包含关系“⊂”—若 $q > \frac{n}{n-1} < \infty$，则该包含关系可直接由 $(\dot{\mathrm{W}}^{1,1} \cap \mathrm{L}^q)(\mathbb{R}^n_+) \subset \dot{\mathrm{W}}^{1,1}(\mathbb{R}^n_+)$，以及定义在 $\dot{\mathrm{W}}^{1,1}(\mathbb{R}^n_+)$ 上的通常的迹算子将 $\dot{\mathrm{W}}^{1,1}(\mathbb{R}^n_+)$ 映射到 $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})$ 这一事实得出。若 $q = \infty$，则与区域上的情形（例如参见 [EG15，定理 5.7]）相同的论证可得

$$\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x) = \lim_{r \searrow 0} \fint_{\mathrm{B}_r(x) \cap \mathbb{R}^n_+} u(y)\mathrm{d}y \tag{2.29}$$

对所有 $u \in \dot{\mathrm{W}}^{1,1}(\mathbb{R}^n_+)$ 以及几乎处处的 $\mathscr{H}^{n-1}$，该结论成立。由此，我们推得 $\|\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}} u\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \le \|u\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n_+)}$，前提是 $u \in (\dot{\mathrm{W}}^{1,1} \cap \mathrm{L}^\infty)(\mathbb{R}^n_+)$，因此我们也可推得 $\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}} \colon (\dot{\mathrm{W}}^{1,1} \cap \mathrm{L}^\infty)(\mathbb{R}^n_+) \to (\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^\infty)(\mathbb{R}^{n-1})$。

包含 '$\supset$' 于 (1.5)。首先令 $\frac{n}{n-1} < q < \infty$ 并令 $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})$ 为任意的。我们选取序列 $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$，使得

$$\|f - f_j\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})} \le 2^{-j} \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})} \qquad \text{for all } j \in \mathbb{N}, \tag{2.30}$$

并注意到 (2.30) 对于 $j = 0$ 和 $f_0 := 0$成立。然后定义，在 ∇'表示沿着 $\mathbb{R}^{n-1}$的切向梯度时，对于 $j \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} \gamma_j &:= \|f_j\|^q_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^{n-1})} + \|\nabla' f_j\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})}, \\ t_{j+1} &:= t_j - s_j := t_j - 2^{-j-1} \frac{\|f\|^q_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})}}{1 + \gamma_j + \gamma_{j+1} + \|f\|^q_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})}} \quad \text{and} \quad t_0 := \sum_{j=0}^\infty s_j. \end{aligned} \tag{2.31}$$

我们遵循 Gagliardo 的经典构造（参见，例如，[Gag57, §3]），并定义 $u\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ 如下

$$u(x', x_n) := \frac{t_j - x_n}{t_j - t_{j+1}} f_{j+1}(x') + \frac{x_n - t_{j+1}}{t_j - t_{j+1}} f_j(x'), \qquad t_{j+1} \le x_n \le t_j \tag{2.32}$$

其中 $j \in \mathbb{N}_0$，且 $u(x', x_n) := 0$ 若 $x_n \ge t_0$。该函数在 $\mathbb{R}^n_+$ 上连续，并且对于所有 $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$ 及所有 $j \in \mathbb{N}_0$，满足

$$\begin{aligned} |u(x', x_n)| &\le |f_j(x')| + |f_{j+1}(x')|, \\ |\partial_\ell u(x', x_n)| &\le |\nabla' f_{j+1}(x')| + |\nabla' f_j(x')|, \\ |\partial_n u(x', x_n)| &\le \frac{|f_{j+1}(x') - f_j(x')|}{t_j - t_{j+1}} \end{aligned} \tag{2.33}$$

每当 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ 和 $t_{j+1} \le x_n \le t_j$ 满足 $j \in \mathbb{N}_0$ 时。我们估计

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q \,\mathrm{d}x \overset{(2.33)_1}{\le} c \sum_{j=0}^\infty (t_j - t_{j+1}) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_j(x')|^q + |f_{j+1}(x')|^q \,\mathrm{d}x' \overset{(2.31)}{\le} c \|f\|^q_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})},$$

其中 $c = c(n, q) > 0$ 是一个常数。此外，对于所有 $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}\times(0,t_0)} |\partial_\ell u(x', x_n)| \,\mathrm{d}x &\overset{(2.33)_2}{\le} \sum_{j=0}^\infty (t_j - t_{j+1}) (\|\nabla' f_{j+1}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})} + \|\nabla' f_j\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})}) \\ &\overset{(2.31)}{\le} c \|f\|^q_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}\times(0,t_0)} |\partial_n u(x', x_n)| \,\mathrm{d}x &\overset{(2.33)_3}{\le} \sum_{j=0}^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_{j+1}(x') - f_j(x')| \mathrm{d}x' \\ &\overset{(2.30)}{\le} c \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

前面的三个估计表明，$u \in$ 属于 $(\dot{\mathrm{W}}^{1,1} \cap \mathrm{L}^q)(\mathbb{R}^n_+)$；并且我们注意到，按构造，$u$ 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中连续。通过证明u 确实具有正确的$\dot{\mathrm{W}}^{1,1}$-迹，我们即可完成证明。为此，我们回顾一下，$\dot{\mathrm{W}}^{1,1}$-迹$\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}} u$ 定义为 $(u_k(x', 0))_{k\in\mathbb{N}}$在 $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})$ 中唯一确定的极限，其中 $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ 满足 $\|\nabla u - \nabla u_k\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n_+)} \to 0$ 当 $k \to \infty$ 时。特别地，迹不依赖于具有上述性质的序列 $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 的具体选择。

在此处考虑的情形中，连续函数 u属于 $(\dot{\mathrm{W}}^{1,\frac{1}{n}}\cap \mathrm{L}^q)(\mathbb{R}^n_+)$，因此我们可以找到一个序列 $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset \mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n_+)$，使得 $u_k\to u$在 $\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^n_+)$ 中强收敛，$u_k\to u$ 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中逐点收敛，并且 $\nabla u_k\to\nabla u$ 在 $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$ 中强收敛。取一个未重新标记的子序列，不失一般性地可以假设，对于 $\mathscr{H}^{n-1}$-几乎处处的 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$，有$u_k(x',0)\to\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}u(x')$。现在，对于 $x_n>0$，法图引理与微积分基本定理结合起来可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|u(x',x_n)-\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}u(x')|\,\mathrm{d}x'&\\ \leq\liminf_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|u_k(x',x_n)-u_k(x',0)|\,\mathrm{d}x'&\\ \leq\liminf_{k\to\infty}\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\nabla u_k(x',t)|\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}t&\\ =\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\nabla u(x',t)|\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}t,&\end{aligned}\tag{2.35}$$

其中最后一行由强收敛 $\nabla u_k\to\nabla u$ 于 $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n_+;\ \mathbb{R}^n)$ 得出；注意，由于 u 在 $\mathbb{R}^n_+$中连续，因此 (2.35)$_1$ 中的积分对任意$x_n>0$都有定义。估计 (2.35) 意味着存在一个序列 $(x_n^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}\subset(0,t_0)$，使得 $x_n^{(i)}\searrow 0$ 从而

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|u(x',x_n^{(i)})-\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}u(x')|\,\mathrm{d}x'=0.\tag{2.36}$$

对每个 $i\in\mathbb{N}$，都存在 $j=j(i)\in\mathbb{N}_0$ 满足 $t_{j+1}\leq x_n^{(i)}\leq t_j$，并且注意到$i\to\infty$ 可推出 $j=j(i)\to\infty$。根据 (2.32)，我们记录如下

$$\begin{aligned}|u(x',x_n^{(i)})-f(x')|&\leq\left|\frac{t_j-x_n}{t_j-t_{j+1}}(f_{j+1}(x')-f(x'))+\frac{x_n-t_{j+1}}{t_j-t_{j+1}}(f_j(x')-f(x'))\right|\\ &\leq|f_{j+1}(x')-f(x')|+|f_j(x')-f(x')|.\end{aligned}\tag{2.37}$$

鉴于 (2.30)，将前一个不等式在 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$ 上积分，得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|f(x')-\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}u(x')|\,\mathrm{d}x'&\leq\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|u(x',x_n^{(i)})-\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}u(x')|\,\mathrm{d}x'\\ &\quad+\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|u(x',x_n^{(i)})-f(x')|\,\mathrm{d}x'\\ &\overset{(2.30),\,(2.37)}{\leq}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|u(x',x_n^{(i)})-\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}u(x')|\,\mathrm{d}x'\\ &\quad+c\,2^{-j}\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})}\\ &\overset{i,j\to\infty,\,(2.36)}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$

总之，在 $\mathbb{R}^{n-1}$中，$\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}u=f$ $\mathscr{H}^{n-1}$-几乎处处有 $\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}u=f$ $\mathscr{H}^{n-1}$，由此便完成了半空间情形下关于 $\frac{n}{n-1}<q<\infty$ 的证明。

如果 $q=\infty$ 并且相应地 $f\in(\mathrm{L}^1\cap\mathrm{L}^\infty)(\mathbb{R}^{n-1})$，我们不仅有（2.30）对某个适当的序列（$f_j$）$_{j\in\mathbb{N}}$，而且还可以做到

$$\sup_{j\in\mathbb{N}_0}\|f_j\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}\leq\|f\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}.\tag{2.38}$$

作为（2.31）的替代，我们现在设

$$\gamma_j := \|f_j\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} + \|\nabla' f_j\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})},$$
$$t_{j+1} := t_j - s_j := t_j - 2^{-j-1}\frac{\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})}}{1+\gamma_j+\gamma_{j+1}+\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})}} \quad \text{and} \quad t_0 := \sum_{j=0}^{\infty} s_j.$$

引入 u如（2.32）中那样，我们可以像情形 $q<\infty$ 那样论证，从而推出$u \in \dot{\mathrm{W}}^{1,1}$（$\mathbb{R}^n_+$）以及 $\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}} u = f$。由（2.38），从（2.32）立即得到$u \in \mathrm{L}^\infty$（$\mathbb{R}^n_+$）亦成立，由此即得所述结论。□

注 2.7（定理 1.1 和 1.2）。令 $p \searrow 1$ 于（1.3）中得到$r \searrow 1$，只要 $q<\infty$。因此，若我们非正式地将 $\dot{\mathrm{W}}^{0,1}$ 解释为 L^1，（1.5）1便证实了 $p \searrow 1$ 的正确极限情形。

3. Variations of the theme

我们以讨论定理 1.1 和 1.2 的若干变体来结束本文，这些变体涉及适配于微分算子的空间。这正是我们最初的动机，另见注 3.5，因此我们简要描述其背景。为此，设 $\mathbb{A} = \sum_{j=1}^n A_j \partial_j$ 为向量值一阶微分算子，其中对每个 $j \in \{1,\dots,n\}$，$A_j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ 为固定的线性映射。遵循 [BDG20、Ka-l94、Smi70],，我们称 $\mathbb{A}$ 为 $\mathbb{C}$-椭圆的，只要其傅里叶符号 $\mathbb{A}[\xi] : = \sum_{j=1}^n A_j \xi_j : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^M$ 对每个 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ 都是单射。对具有 Lipschitz 边界的有界开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，我们对 $1 \le p < \infty$ 定义

$$\mathrm{W}^{\mathbb{A},p}(\Omega) := \{u \in \mathrm{L}^1(\Omega;\mathbb{R}^N) : \ \mathbb{A}u \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{R}^M)\}. \tag{3.1}$$

对于半空间 $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^n$，齐次变体 $\dot{\mathrm{W}}^{\mathbb{A},p}(\mathbb{H})$ 定义为 $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{H};\mathbb{R}^N)$ 在 $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{H};\mathbb{R}^N)$ 中的$\|\mathbb{A}\cdot\|_{\mathrm{L}^p}(\mathbb{H})$-闭包。在满足 $\mathbb{A}$ 的 $\mathbb{C}$-椭圆性并假设 $1<p<\infty$ 的条件下，由 [DG25、Ka-l94、Smi70] 可知，$\mathrm{W}^{\mathbb{A},p}(\Omega) = \mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$，且 $\dot{\mathrm{W}}^{\mathbb{A},p}(\mathbb{H}) = \dot{\mathrm{W}}^{1,p}(\mathbb{H};\mathbb{R}^N)$。因此，定理 1.1 适用。

一般而言，有 $\mathrm{W}^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^N) \subsetneq \mathrm{W}^{\mathbb{A},1}(\Omega)$（例如参见 [Orn62]），这一事实与 Calder´on-Zygmund 算子在 L^1 上的不有界性密切相关。按照 [BDG20、DG25、GRVS21、GRVS24],，然而，$\mathbb{A}$ 的 $\mathbb{C}$-椭圆性允许我们得出满射迹算子 $\gamma_{\partial\Omega}$: $\mathrm{W}^{\mathbb{A},1}(\Omega) \to \mathrm{L}^1(\partial\Omega;\mathbb{R}^N)$ 存在；对于半空间上的齐次变体，也有类似结果，且与具体的半空间无关。因此，以下我们可以仅考虑特定选择 $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n_+$。这里有如下结果:

定理 3.1. 设 $\mathbb{A}$ 是上述形式的 $\mathbb{C}$-椭圆微分算子。此外，设 $p=1$ 和 $1^* := \frac{n}{n-1} < q \le \infty$。则有

$$\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}((\dot{\mathrm{W}}^{\mathbb{A},1} \cap \mathrm{L}^q)(\mathbb{R}^n_+)) = \begin{cases} \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1}) & \text{if } \frac{n}{n-1} < q < \infty, \\ (\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^\infty)(\mathbb{R}^{n-1}) & \text{if } q = \infty. \end{cases} \tag{3.2}$$

同样地，如果 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是具有 *Lipschitz* 边界的有界开集，则有

$$\gamma_{\partial\Omega}((\mathrm{W}^{\mathbb{A},1} \cap \mathrm{L}^q)(\Omega)) = \begin{cases} \mathrm{L}^1(\partial\Omega) & \text{if } \frac{n}{n-1} < q < \infty, \\ \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega) & \text{if } q = \infty. \end{cases} \tag{3.3}$$

这里，$\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}$ 和 $\gamma_{\partial\Omega}$ 分别表示定义在 $\dot{\mathrm{W}}^{\mathbb{A},1}(\mathbb{R}^n_+)$ 或 $\mathrm{W}^{\mathbb{A},1}(\Omega)$上的迹算子。

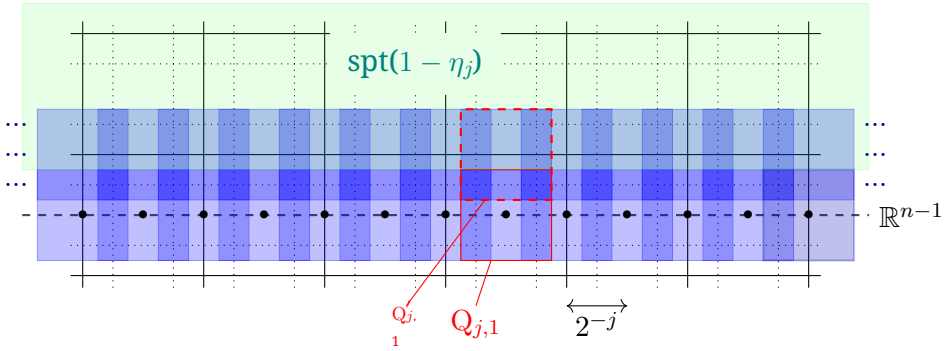


FIGURE 2. 第 3 节中的几何设置。在远离 $\mathbb{R}^{n-1}$、 u 处保持不变（见（ $\mathcal{T}_j^{(1)}u$ 3.10）中的项），而在靠近 $\mathbb{R}^{n-1}$处，则局部替换为投影到有限维零空间上的加权和（见（ $\mathcal{T}_j^{(2)}u$ 3.10）中的项）。

我们指出，对于任意半空间 $\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}}$: $\dot{\mathrm{W}}^{\mathbb{A},1}(\mathbb{H}) \to \mathrm{L}^1(\partial\mathbb{H};\mathbb{R}^N$存在有界线性迹算子 $\mathbb{H}$ 确实等价于 $\mathbb{C}$-椭圆性，而对具有Lipschitz边界的有界开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ，作显而易见的修改后，同样的结论也成立，参见 [BDG20, DG25]。

需要指出的是，在当前情形下，无法像梯度情形那样引入迹算子（参见（ 2.34）及后续内容），其构造将在下文重新讨论。特别是，（2.35）不能使用，这是因为一般而言 $\dot{\mathrm{W}}^{1,1}(\mathbb{R}^n_+) \subsetneq \dot{\mathrm{W}}^{\mathbb{A},1}(\mathbb{R}^n_+)$。在 $\dot{\mathrm{W}}^{1,1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^N)$ 上， $\dot{\mathrm{W}}^{\mathbb{A},1}(\mathbb{R}^n_+)$ 上的迹算子与 $\dot{\mathrm{W}}^{1,1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^N)$ 上的经典迹算子一致。由于对具有 Lipschitz边界的开有界区域作相应的自然修改后，同样的结论仍成立，因此，（3.2)1 和（3.3)1 中的“$\subset$”可直接得出，而（3.2）和（3.3）中的“$\supset$”则直接由定理 1.2 的相应部分推出。因此，剩下只需证明（3.2)1 和（3.3)1中的“$\subset$”。为此，我们给出一个直接论证，既避免使用公式（2.29），也为定理 1.2 中相应方向的结论提供另一种证明。

为此，我们重新考察 [BDG20、DG25], 中迹算子的构造，该构造是在半空间 $\mathbb{R}^n_+$ 的情形下给出的；如上所述，其基本论证与具体的半空间无关。我们先描述几何设定：对于 $j \in \mathbb{Z}$，我们考虑立方体

$$2^{-j}z + \left[-3\cdot 2^{-j-2}, 3\cdot 2^{-j-2}\right]^n, \qquad z \in \mathbb{Z}^n, \tag{3.4}$$

并以指标 $i \in \mathbb{N}$为这些立方体编号。对于每个 $j \in \mathbb{Z}$，这就得到一个序列 $(\mathrm{Q}_{j,\,i})_{i\in\mathbb{N}}$。由于这样得到的立方体是对应于 $j = 0$ 的立方体的缩放版本，因此它们具有以下性质：

(C1) 对于每个 $j \in \mathbb{Z}$，立方体 $\mathrm{Q}_{j,\,i}$ 覆盖 $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Q}_{j,i}.$$

(C2) 存在一个常数 $\mathrm{N} = \mathrm{N}(n) \in \mathbb{N}$ ，使得对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 和每个$j \in \mathbb{N}$，至多有 N 个立方体 $\mathrm{Q}_{j,\,i}$ 满足 $x \in \mathrm{Q}_{j,\,i}$。特别地，覆盖 $(\mathrm{Q}_{j,\,i})_{i\in\mathbb{N}}$ 是一致局部有限的。

(C3) 存在一个常数 $c > 1$，具有以下性质：如果 i_1, $i_2 \in \mathbb{N}$ 满足 $Q_{j,i_1} \cap Q_{j,i_2} \neq \emptyset$，那么

$$\tfrac{1}{c} 2^{-jn} \leq \mathscr{L}^n(Q_{j,i_1} \cap Q_{j,i_2}) \leq c 2^{-jn}.$$

根据 (C1)–(C3)，我们可以选取一个满足以下性质的单位分解 $(\varphi_{j,i})_{i\in\mathbb{N}}$：

(PU1) 单位分解：对于每个 $j \in \mathbb{Z}$, $\varphi_{j,i} \in C_c^\infty(Q_{j,i}; [0,1])$，并且我们有

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_{j,i} \equiv 1 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n_+.$$

(PU2) 缩放导数界：存在一个常数 $c > 0$ 使得

$$\max_{|\alpha|=1} \sup_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{Z}}} 2^{-j} \|\partial^\alpha \varphi_{j,i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_+)} \leq c. \tag{3.5}$$

为完成构造，我们对 $j \in \mathbb{Z}$ 定义

$$\mathbb{H}_j := \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n_+ : \ 0 < x_n < 2^{-j}\}.$$

随后，我们选取一个局部化函数 $\eta_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+; [0,1])$，使得

$$\mathbb{1}_{\mathbb{H}_{j+1}} \leq \eta_j \leq \mathbb{1}_{\mathbb{H}_j} \tag{3.6}$$

and

$$\max_{|\alpha|=1} \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \|\partial^\alpha \eta_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_+)} \leq c. \tag{3.7}$$

最后，若立方体 $Q_{j,\,i}$ 由某个 3.4) 定义，其中 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$，则令

$$Q'_{j,i} := 2^{-j}(z_1, ..., z_{n-1}, z_n + 1) + \left[-3 \cdot 2^{-j-2}, 3 \cdot 2^{-j-2}\right]^n.$$

换句话说，$Q'_{j,\,i}$ 是将 $Q_{j,\,i}$ 沿第 n个坐标方向平移 2^{-j} 得到的。

现在设 $Q \subset \mathbb{R}^n$ 是一个立方体。由 $\mathbb{C}$-椭圆性的一个关键推论可知，零空间

$$\ker(\mathbb{A}; Q) := \{u \in L^1_{\mathrm{loc}}(Q; \mathbb{R}^N) : \ \mathbb{A}u = 0 \text{ in } \mathscr{D}'(Q; \mathbb{R}^M)\}$$

是有限维的，并且包含于空间 $\mathscr{P}_m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^N)$ 中，该空间由次数不超过固定最大次数 $m \in \mathbb{N}_0$ 的 $\mathbb{R}^N$-值多项式构成。我们选取 $\ker(\mathbb{A}; [0,1]^n)$ 的一组正交归一基 $\{\pi_1, ..., \pi_l\}$，其对应于 $L^2([0,1]^n; \mathbb{R}^N)$-内积，并定义

$$\Pi^{\mathbb{A}}_{[0,1]^n} u := \sum_{i=1}^{l} \langle u, \pi_i \rangle \pi_i, \qquad u \in L^2([0,1]^n; \mathbb{R}^N). \tag{3.8}$$

通过平移和旋转，可得到投影算子 $\Pi^{\mathbb{A}}_Q : L^2(Q; \mathbb{R}^N) \to \ker(\mathbb{A}; Q)$。注意，式 (3.8) 以及下文中的 $\Pi^{\mathbb{A}}_Q u$ 只要 $u \in L^1(Q; \mathbb{R}^N)$ 就有定义；这是因为 π_i都是多项式。

引理 3.2. 设 $\mathbb{A}$ 是上述形式的一阶 $\mathbb{C}$-椭圆微分算子。那么存在常数 c、$C > 0$，使得

$$\|\Pi^{\mathbb{A}}_Q u\|_{L^\infty(Q)} \leq c \fint_Q |\Pi^{\mathbb{A}}_Q u| \, dx \leq C \fint_Q |u| \, dx \tag{3.9}$$

对所有 $u \in \dot{W}^{\mathbb{A},1}(\mathbb{R}^n_+)$ 以及所有立方体 $Q \in \mathbb{R}^n_+$，该不等式均成立。

前面的引理取自 [DG25，引理 3。5]。我们注意到，(3.9)1 是由 $\dim(\ker(\mathbb{A}; Q)) \leq m < \infty$ 以及有限维空间上所有范数的等价性和恰当的缩放所推出的。现在我们可以给出：

定理 3.1 的证明。 首先，我们回顾[BDG20、DG25] 中迹算子的构造。如上所述，$\mathrm{W}^{,1}$-函数的梯度不一定存在为 L^1-映射，因此需要采用不同于通常方法的途径（参见 (2.35)及后续内容）。因此，按照 [DG25，第 5], 节中，我们对 $u \in \dot{\mathrm{W}}^{\mathbb{A},1}(\mathbb{R}^n_+)$ 定义逼近序列 $(\mathcal{T}_j u)_{j\in\mathbb{Z}}$ 如下

$$\mathcal{T}_j u := \mathcal{T}_j^{(1)} u + \mathcal{T}_j^{(2)} u := (1-\eta_j)u + \eta_j \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_{j,i} \Pi^{\mathbb{A}}_{\mathrm{Q}'_{j,i}} u. \tag{3.10}$$

本质上，(3.10) 在远离 u 时不会改变 $\mathbb{R}^{n-1}$，而是将 u 替换为投影到 $\mathbb{A}$ 的零空间上的加权和，其中立方体与$\mathbb{R}^{n-1}$相交；关于这一几何构形，见图 2 。注意，由于 $\mathcal{T}_j^{(2)} u$ 是光滑函数的局部有限和，其限制到 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上是良定义的。

在 [DG25的命题 5.2、式 (5.9)–(5.13) 以及注 5 中，5],证明了

$$\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}} u := \lim_{j\to\infty} \mathcal{T}_j^{(2)} u(\cdot, 0) \tag{3.11}$$

这是良定义的，其中极限是关于 $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})$ 中的强收敛取得的，并且有如下估计

$$\|\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}} u\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{n-1})} \leq c \|\mathbb{A} u\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n_+)} \qquad \text{for all } u \in \dot{\mathrm{W}}^{\mathbb{A},1}(\mathbb{R}^n_+). \tag{3.12}$$

支撑 (3.11) 和 (3.12) 的估计依赖于望远镜求和论证，该论证借助 Poincar´e 型不等式，使我们能够只处理零空间中的元素，参见 [DG25，式 (5.9)ff.]。反过来，这使得能够将差值 $\mathcal{T}(\ {}_{j+1}^{2} u - \mathcal{T}_j^{(2)} u$) 的估计转移到零空间中的元素上，在那里所有范数都是等价的，而来自 [Orn62] 的基本障碍因而变得不可见；特别地，对于此类元素，立方体上的标度化 $\mathrm{W}^{1,1}$-范数与立方体上的 L^1-范数等价。此外，只要 $u \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^N) \cap \dot{\mathrm{W}}^{\mathbb{A},1}(\mathbb{R}^n_+)$，就有 $\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}} u(0,\cdot) = u|_{\mathbb{R}^{n-1}}$ ，由此 (3.11) 确实是由 (3.12) 和稠密性唯一确定的迹算子。

由于对 $\dot{\mathrm{W}}^{\mathbb{A},1}(\mathbb{R}^n_+)$ 上的迹算子作了这一特殊定义，我们必须直接证明，只要 $u \in \dot{\mathrm{W}}^{\mathbb{A},1}(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^N)$， $\|\mathcal{T}_j^{(2)} u\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n_+)}$ 就能由 $c\|u\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n_+)}$ 控制。下文中，我们固定这样一个映射 u。现在，对于$j \in \mathbb{Z}$ 和 $i \in \mathbb{N}$，我们注意到，若 $\mathrm{Q}_{j,i}$ 以 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的某个元素为中心，则 $\mathrm{Q}'_{j,i} \subset {}^3\mathrm{Q}_{j,i}$；这里，$3\mathrm{Q}_{j,i}$ 表示一个与 $\mathrm{Q}_{j,i}$ 中心和方向相同、边长为其三倍的立方体。我们注意到二者都

$$v \mapsto \fint_{3\mathrm{Q}_{j,i}} |v|\,\mathrm{d}x \quad \text{and} \quad v \mapsto \fint_{\mathrm{Q}'_{j,i}} |v|\,\mathrm{d}x \qquad \text{are norms on } \mathscr{P}_m(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^N).$$

由于有限维空间上的范数彼此等价，结合连续性与缩放论证可知，存在一个常数 $c = c(n,\ m,\ N) \geq 1$，使得

$$\frac{1}{c} \fint_{3\mathrm{Q}_{j,i}} |v|\,\mathrm{d}x \leq \fint_{\mathrm{Q}'_{j,i}} |v|\,\mathrm{d}x \leq c \fint_{3\mathrm{Q}_{j,i}} |v|\,\mathrm{d}x \qquad \text{for all } v \in \mathscr{P}_m(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^N). \tag{3.13}$$

因此，结合 $\mathbb{A}$ 零空间上所有范数的等价性与第一步中的缩放，我们得到

$$\begin{aligned} \|\Pi^{\mathbb{A}}_{\mathrm{Q}'_{j,i}} u\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{Q}_{j,i})} &\leq c \fint_{\mathrm{Q}_{j,i}} |\Pi^{\mathbb{A}}_{\mathrm{Q}'_{j,i}} u|\,\mathrm{d}x \leq c \fint_{3\mathrm{Q}_{j,i}} |\Pi^{\mathbb{A}}_{\mathrm{Q}'_{j,i}} u|\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(3.13)}{\leq} c \fint_{\mathrm{Q}'_{j,i}} |\Pi^{\mathbb{A}}_{\mathrm{Q}'_{j,i}} u|\,\mathrm{d}x \overset{(3.9)}{\leq} c \fint_{\mathrm{Q}'_{j,i}} |u|\,\mathrm{d}x \leq c\,\|u\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n_+)}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

由此我们得出，对于 $x \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$，有

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{T}_j^{(2)} u(x)| &\le \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_{j,i}(x) \|\Pi^{\mathbb{A}}_{\mathrm{Q}'_{j,i}} u\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{Q}_{j,i})} \\
&\overset{(3.14)}{\le} c\Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_{j,i}(x)\Big) \|u\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n_+)} = c\|u\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n_+)}.
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

由（3.11），存在一个未重新标记的子列，使得

$$
\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x') = \lim_{j\to\infty} \mathcal{T}_j^{(2)} u(x', 0) \qquad \text{for } \mathscr{H}^{n-1}\text{-a.e. } x' \in \mathbb{R}^{n-1},
$$

由此，（3.12）和（3.15）立即推出

$$
\|\gamma_{\mathbb{R}^{n-1}} u\|_{(\mathrm{L}^1\cap\mathrm{L}^\infty)(\mathbb{R}^{n-1})} \le c\Big(\|u\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n_+)} + \|\mathbb{A}u\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n_+)}\Big)
$$

对所有 $u \in \dot{\mathrm{W}}^{\mathbb{A},\,1}(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^N)$ 均成立。证明完毕。 □

注 3.3。通过替换序列构造迹算子，如（3.10）*ff*所示，与 Besov 或 Triebel-Lizorkin 空间中迹的原子方法有些许相似；例如参见 [Sch10，§3]。

注 3.4。定理 3.1 经过相应修改后可立即应用于有界 $\mathbb{A}$-变差函数，记作 $u \in$有界变差$^{\mathbb{A}}(\Omega)$，其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个具有 Lipschitz 边界的开有界集。该空间定义为由满足以下条件的 $u \in \mathrm{L}^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ 函数组成的空间：$\mathbb{A}u$ 是 Ω 上取有限 $\mathbb{R}^M$值的 Radon测度。

注 3.5. 对每个半空间 $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^N$，存在有界线性迹算子 $\gamma_{\partial\mathbb{H}}$: $\dot{\mathrm{W}}^{\mathbb{A},1}(\mathbb{H}) \to \mathrm{L}^1(\partial\mathbb{H};\mathbb{R}^N)$，确实等价于 $\mathbb{A}$的 $\mathbb{C}$-椭圆性，参见 [BDG20、GRVS21、GRVS24]；类似的结论也适用于具有 Lipschitz边界的开有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 。此类迹算子所需的 $\mathbb{C}$-椭圆性，其必要性的关键例子依赖于 $\mathbb{A}$ 的零空间中的元素，这些元素并非 $^n_{n-1}$-可积；参见 [BDG20，定理 4.18] 以及 [GR19，定理 1.1]。因此，自然会问：如果预先假设更高的可积性，从而可能排除零空间元素的临界奇异性，那么对底层椭圆性稍作弱化，是否仍能保证存在一个映射到 $\mathrm{L}^1(\partial\Omega;\mathbb{R}^N)$ 的迹算子？后续论文 [CGS+26] 将证明这同样不可能，因此定理 3.1 的一般设定确实是最优的。

Acknowledgments

F.G. 感谢 Hector基金会提供的经费支持，项目编号为 FP 626/21。P.S. 感谢 LGFG（Landesgraduiertenf¨orderungsgesetz）巴登-符腾堡分会提供的奖学金，以资助其在康斯坦茨大学攻读博士学位。

References

[ACK15] Irina Asekritova、Fernando Cobos 和 Natan Kruglyak。闭子空间的插值与算子的可逆性。*Z. Anal. Anwend.*，34(1):1–15，2015年。[ADN59] S. Agmon、A. Douglis 和 L. Nirenberg。满足一般边界条件的椭圆型偏微分方程解在边界附近的估计。I。 *Comm.Pure Appl. Math.*，12:623–727，1959年。[BDG20] Dominic Breit、Lars Diening 和 Franz Gmeineder。关于有界 $\mathbb{A}$-变差函数的迹算子。 *Anal. PDE*，13(2):559–594，2020年。[BM18] Ha¨ım Brezis 和 Petru Mironescu。Gagliardo-Nirenberg不等式与不等式：完整论述。 *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*，35(5):1355–1376，2018年。

[CGS+26] Gui-Qiang G. Chen、Franz Gmeineder、Paul Stephan、Monica Torres 和 Kuan-Ting Yeh。有界 $\mathbb{A}$-变差函数的弱迹。 *In preparation*，2026年。[DG25] Lars Diening 和 Franz Gmeineder。微分算子的尖锐迹不等式与 Korn不等式。 *Potential Anal.*，63(1):169–222，2025年。[DiB16] Emmanuele DiBenedetto。 *Real analysis*。Birkh¨auser高级文本：巴塞尔教材。¨。Birkh¨auser高级文本：巴塞尔教科书]。Birkh¨auser/Springer，纽约，第二版，2016年。[EG15] Lawrence C. Evans 和 Ronald F. Gariepy。 *Measure theory and fine properties of functions* 2015 。数学教科书。

CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，修订版，。[Gag57] Emilio Gagliardo。若干类 n变量函数在边界上的迹的刻画。 *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*，27:284–305，1957年。[Gal11] G. P. Galdi。 *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations*。Springer数学专著。Springer，纽约，第二版，2011年。定常问题。[GMS91] D. J. H. Garling 和 S. J. Montgomery-Smith。由插值得到的空间的补子空间。 *J. London Math. Soc. (2)*，44(3):503–513，1991年。[GR19] Franz Gmeineder 和 Bogdan Raiţ˘a。区域上 $\mathbb{A}$-弱可微函数的嵌入。 *J. Funct. Anal.*，277(12):108278，33，2019年。[Gra14] Loukas Grafakos。 *Classical Fourier analysis* 249 *Graduate Texts in Mathematics* ，第 2014 *Classical Fourier analysis* 249 *Graduate Texts in Mathematics* 卷。Springer，纽约，第三版，。[GRVS21] Franz Gmeineder、Bogdan Raiţ˘a 和 Jean Van Schaftingen。关于向量微分算子的极限迹不等式。 *Indiana Univ. Math. J.*，70(5):2133–2176，2021年。[GRVS24] Franz Gmeineder、Bogdan Raiţ˘a 和 Jean Van Schaftingen。半空间上的边界椭圆性与极限 L^1-估计。 *Adv. Math.*，439:论文编号 109490，25，2024年。[HL22] Felix Hummel 和 Nick Lindemulder。加权函数空间中的椭圆与抛物边值问题。 *Potential Anal.*，57(4):601–669，2022年。[JS08] Jon Johnsen 和 Winfried Sickel。关于混合范数 Lizorkin-Triebel空间的迹问题。 *Math. Nachr.*，281(5):669–696，2008年。[Ka-l94] Agnieszka Ka-lamajska。加权Sobolev空间中的逐点乘法不等式与 Nirenberg 型估计。 *Studia Math.*，108(3):275–290，1994年。[Leo17] Giovanni Leoni。 *A first course in Sobolev spaces* 181 *Graduate Studies in Mathematics* ，第 2017 *A first course in Sobolev spaces* 181 *Graduate Studies in Mathematics* 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，第二版，。[Mir15] Petru Mironescu。关于 Gagliardo 定理“迹 $W^{1\,1} = L^1$ *Ann. Univ. Buchar.*，”的注记。， *Math. Ser.* 6 1 99 103, 2015 (LXIV)( ): –。[M¨u16] Jan-Steffen M¨uller。关于 Sobolev函数及具有额外可积性约束的高阶有界变差函数的一个稠密性结果。 *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*，41(2):789–801，2016年。[Orn62] Donald Ornstein。 L_1 范数下微分算子的一种不等式。 *Arch. RationalMech. Anal.*，11:40–49，1962年。[Sch10] Cornelia Schneider。Besov空间与 Triebel-Lizorkin空间中的迹算子。 *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*，29:275–302，2010年。[Smi70] K. T. Smith。用函数的导数表示函数的公式。 *Math. Ann.*，188:53–77，1970年。[Tri78] H. Triebel。 *Interpolation theory*、 *function spaces*、 *differential operators*。德国科学出版社，柏林，1978年。[Tri10] Hans Triebel。 *Theory of function spaces*。现代 Birkh¨auser经典著作。Birkh¨auser/Springer Basel AG，巴塞尔，2010年。1983年版重印。

Authors' address: Fachbereich Mathematik und Statistik, Universität Konstanz,Universitätsstr. 10, 78464 Konstanz, Germany.*Email address*: robert.denk@uni-konstanz.de*Email address*: franz.gmeineder@uni-konstanz.de*Email address*: paul.stephan@uni-konstanz.de