arXiv:2602.07466v2 [math.NA] 13 Feb 2026

基于学习的有限元正则化：心电成像逆问题

Manuel Haas† ThomasGrandits‡ Thomas Pinetz§ Thomas Beiert¶ Simone Pezzuto‖ Alexander Effland†2026年2月16日

摘要

心电成像（ECGI）旨在通过体表电势无创地重建心脏电活动。然而，相关反问题严重不适定，需要稳健的正则化。经典方法主要采用空间平滑，但尽管心脏动力学的时间结构具有生理学意义，这一结构仍未得到充分利用。我们提出一种时空正则化框架，将空间正则化与学习得到的时间 Fields-of-Experts（FoE）先验相结合，以捕捉复杂的时空激活模式。我们在非结构化心脏表面网格上推导出有限元离散化，证明了 Mosco 收敛，并开发了一种能够处理 FoE 项的可扩展优化算法。在合成心外膜数据上进行的数值实验表明，与手工设计的时空方法相比，该方法改善了去噪效果和反问题重建，所得解既能抵御噪声，又符合生理学规律。

1 引言

心脏是一种机电泵，对于维持生命至关重要。异常的电活动可能导致危及生命的心律失常，必须及时诊断，以防造成进一步损害。在心电图学中，记录于胸部曲面上的电位与深层心脏电活动相关，因此能够揭示心律失常的机制，并为治疗决策提供依据 [24]。从数学角度来看，根据体表测量值重建心脏电位，会引出心电图学中的反问题 [5, 6]。这一反问题严重不适定，而电极接触不良和解剖结构限制所导致的噪声及测量伪影，又进一步增加了解题难度 [1]。因此，选择何种正则化对于获得具有生理学意义的重建结果至关重要。

人们研究了多种正则化技术来稳定重建 [17], , 从经典的蒂霍诺夫方法 [31] 到全变差 [28]

https://github.com/mnlhaas/ECGI_FEM

*本研究得到德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）的资助，项目编号为 EXC2151-390873048、EXC-2047/1-390685813 和 CRC 1720 – 539309657。SP 和 TG 还获得了瑞士国家科学基金会（SNSF）“CardioTwin”项目（编号 214817）的资助。SP 感谢瑞士国家超级计算中心（CSCS）项目（编号 lp100）和 PRIN-PNRR 项目（编号 P2022N5ZNP）的支持。SP 是 INdAM-GNCS 的成员。

†德国波恩大学应用数学研究所
‡奥地利格拉茨大学数学与科学计算系§奥地利维也纳医科大学人工智能研究所

¶德国波恩大学医院内科二部波恩心脏中心
‖意大利特伦托大学数学系

方法。尽管空间正则化已得到广泛研究，但医学成像中的时间维度仍未得到充分利用，尽管它对于捕捉复杂的时空激活模式至关重要，例如心脏电势中观察到的波状传播 [15, 22]。深度学习技术在逆问题重建中展现出良好的准确性 [30], ，而机器学习框架中基于优化的方法也已用于患者特异性心脏建模 [14], ，但可解释性有限。

近年来，Fields-of-Experts（FoE） [7, 13, 27] 等机器学习先验以及变分深度正则化器 [18]在图像重建任务中建模高阶依赖关系方面表现出色，同时保留了可解释性；然而，它们与有限元框架下偏微分方程约束逆问题的结合仍鲜有研究。本文提出一类新型学习型有限元正则化器，将空间全变分型项与数据驱动的时间FoE先验相结合。心脏逆问题和所提出的正则化均在有限元框架 [3, 4, 29, 32]中进行离散化。

除建模方面的贡献外，我们在理论上的主要贡献是首次对有限元空间中由学习型FoE类能量正则化的逆问题进行 Mosco 收敛分析，证明在真实域 [8, 20, 21]上，极小化子从离散问题收敛到连续问题。数值实验表明，与传统的非学习方法相比，所提出的学习–分析框架能够生成更准确且在生理学上更合理的重建。本文结构如下：首先介绍具有学习型时空正则化的变分模型；随后阐述其在非结构化心脏网格上的有限元离散，证明 Mosco 收敛及极小化子的收敛性，开发一种可扩展的收敛优化算法；最后通过合成二维数据上的数值实验验证该方法。

2 方法

我们首先介绍心电成像（ECGI）中的正问题与逆问题，以及基于FoE的正则化。

2.1 正问题

正问题是根据给定的心外膜电位，计算由其经躯干体积导体传递而产生的体表电势；这一传递过程通过线性正算子实现。令 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 表示具有外边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 的躯干域，其中 $d \in \{2, 3\}$。体表电极表示为子集 $\Sigma \subset \Gamma$，由每个电极对应的 $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{N_\Sigma} \Sigma_i$ 个互不相交的开有界区域 N_Σ 组成，并可在这些区域获得测量值 z。心脏的心外膜表面记为 $\Gamma_H = \partial\Omega_H$，其中 $\Omega_H \subset \Omega$ 为心脏域。我们将排除心脏后的躯干域定义为 $\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_H$。全文假设区域 Ω_0 具有 C^2 边界，且 Γ_H 和 Γ 均为闭且紧致、互不相交的边界流形。对于时间区间 $\mathbb{T} := (0, \widetilde{t})$，给定 $\widetilde{t} > 0$ 及心外膜电势函数 $u \in L^2(\mathbb{T}; H^{1/2}(\Gamma_H))$，适定的椭圆正问题对几乎每个 $t \in \mathbb{T}$ 定义

$$
\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\sigma(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x},t)\right) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_0, \\ \sigma(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x},t)\cdot \mathbf{n} = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma, \\ v(\mathbf{x},t) = u(\mathbf{x},t), & \mathbf{x} \in \Gamma_H, \end{cases} \tag{1}
$$

表示$\mathbf{n}$ 外向单位法向量， $\sigma \in L^\infty(\Omega\ \mathbb{R}_+)$表示躯干电导率张量或体电导率。这里，我们假设空间相关矩阵 σ 为对称矩阵，并满足椭圆性条件 $\zeta^{-1}|\mathbf{y}|^2 \le \sigma(\mathbf{x})\mathbf{y}\ \cdot\mathbf{y}\ \le \zeta|\mathbf{y}|^2$，其中某个 $\zeta > 0$ 成立，且对所有$\mathbf{y}\ \in \mathbb{R}^d$均成立。解的存在性、唯一性和正则性由 [10]得出。

定理 1. 存在唯一解 $v \in L^2(\mathbb{T}; H^1(\Omega_0))$，它是(1) 在 $u \in L^2(\mathbb{T}; H^{1/2}(\Gamma_H))$ 下的弱意义解。

证明。对于几乎处处的 $t \in \mathbb{T}$，从 $H^1(\Omega_0)$ 到 $H^{1/2}(\Gamma_H)$ 的迹算子的满射性给出了一个函数 $g(\cdot, t) \in H^1(\Omega_0)$，满足 $g|_{\Gamma_H} = u(\cdot, t)$，并且

$$\|g(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega_0)} \le C_E \|u(\cdot,t)\|_{H^{1/2}(\Gamma_H)}.$$

将 $v(\cdot, t) = g(\cdot, t) + w(\cdot, t)$ 写成 $w(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega_0)$，可将 (1) 化为齐次边界条件。定义 $a(\phi, \varphi) := \int_{\Omega_0} \sigma \nabla_{\mathbf{x}} \phi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{x}$，其中 $\phi, \varphi \in H_0^1(\Omega_0)$，该形式是连续且强制的；由 Lax–Milgram定理，对于几乎处处的 $t \in \mathbb{T}$，存在唯一的 $w(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega_0)$ 满足

$$a(w(\cdot,t),\varphi) = -a(g(\cdot,t),\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega_0), \tag{2}$$

其中 $\|w(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega_0)} \le C\|g(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega_0)}$。因此，$v(\cdot, t)$ 满足 (1) 的弱形式，并且 $\|v(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega_0)} \le C\|u(\cdot, t)\|_{H^{1/2}(\Gamma_H)}$。对 $\mathbb{T}$ 积分即可得到所述结论，唯一性由强制性推出。 □

令 $v_u(\cdot, t)$ 为几乎处处对应于边界数据 $u(\cdot, t)$ 的弱解。我们定义算子

$$A_{\mathbb{T}} : H^{1/2}(\Gamma_H) \to H^{1/2}(\Gamma), \quad \text{with} \quad A_{\mathbb{T}}[u(\cdot,t)] \coloneqq v_u(\cdot,t)|_{\Gamma}$$

该算子是解算子与躯干边界迹算子的复合。因此，正向算子是一个有界线性算子；又由于 $u(\cdot, t) : \mathbb{T} \to H^{1/2}(\Gamma_H)$ 强可测，复合算子 $A_{\mathbb{T}}[u(\cdot, t)]$ 强可测（因为 $H^{1/2}(\Gamma)$ 是可分的），从而根据下式可保证其有界性

$$\|A_{\mathbb{T}}[u(\cdot,t)]\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le C \|v(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega_0)} \le \widetilde{C} \|u(\cdot,t)\|_{H^{1/2}(\Gamma_H)}.$$

通过对时间积分，我们定义线性正算子

$$A : L^2(\mathbb{T}; H^{1/2}(\Gamma_H)) \to L^2(\mathbb{T}; H^{1/2}(\Gamma)), \quad u \mapsto v_u|_{\Gamma}.$$

请注意，正向算子的逆通常是无界的。

2.2 反问题

对于心电图学中的反问题，我们将每个电极 $i = 1$、.....、N_Σ 对应的测量时间序列 $z \in (L^2(\mathbb{T}))^{N_\Sigma}$ 与势函数 $\widetilde{z} \in L^2(\Sigma \times \mathbb{T})$ 在 Γ 上的 $d-1$ 维曲面测度 S^Γ 下的平均积分 $z_i(t) = \fint_{\Sigma_i} \widetilde{z}(\mathbf{x}\ t)\mathrm{d}S^\Gamma(\mathbf{x})$ 进行比较。由于测量值按电极定义为标量，我们最小化代价泛函

$$\underset{u \in L^2(\mathbb{T}; H^{1/2}(\Gamma_H))}{\arg\min} \left\{ G(u,z) \coloneqq \frac{1}{2N_\Sigma} \sum_{i=1}^{N_\Sigma} \int_{\mathbb{T}} \left(\fint_{\Sigma_i} A[u](\mathbf{x},t)\mathrm{d}S^\Gamma(\mathbf{x}) - z_i(t) \right)^2 \mathrm{d}t \right\}.$$

由于该问题的不适定性，我们遵循逆问题理论中的标准方法并引入正则化项。该反问题被表述为对由数据保真项和正则化项组成的能量泛函进行最小化。对于给定的测量值 $z \in (L^2(\mathbb{T}))^{N_\Sigma}$，我们寻求使下式最小化的心外膜电位 u

$$\underset{u \in \mathcal{V}}{\arg\min} \left\{ \mathcal{J}(u,z) \coloneqq G(u,z) + R_\theta(u) \right\}, \tag{3}$$

在空间 $\mathcal{V} := L^2(\mathbb{T};\, H^1(\Gamma_H))$上。选择 $\mathcal{V}$作为解空间，源于紧 C^2 流形上的连续嵌入 $H^1(\Gamma_H) \hookrightarrow H^{1/2}(\Gamma_H)$，因此$\mathcal{V} \subset L^2(\mathbb{T};\, H^{1/2}(\Gamma_H))$。博赫纳空间 $\mathcal{V}$的范数定义为

$$\|u\|_{\mathcal{V}} = \left(\int_{\mathbb{T}} \|u(\cdot,t)\|^2_{H^1(\Gamma_H)} \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Gamma_H \times \mathbb{T}} (u(\mathbf{x},t))^2 + |\nabla_{\Gamma_H} u(\mathbf{x},t)|^2 \mathrm{d}\Pi(\mathbf{x},t) \right)^{\frac{1}{2}}$$

其曲面梯度为 ∇_{Γ_H}，对任意 $v\colon \Gamma_H \to \mathbb{R}$，且 $\mathrm{d}\Pi(\mathbf{x}\ t) := \mathrm{d}S(\mathbf{x}) \otimes \mathrm{d}\lambda(t)$，其中$S$是 Γ_H的（$d-1$）维曲面测度，λ是一维勒贝格测度。此外，我们定义空间 $\mathcal{Y}$:$= L^2(\Gamma_H \times \mathbb{T})$，以便更方便地表示范数。

2.3 时空正则化项

蒂霍诺夫正则化 [31] 和全变差正则化 [28]等标准正则化技术是通用方法，能够有效抑制测量噪声。本文旨在设计一种针对特定问题的正则化项，在保持数学适定性和可解释性的同时，融入有关底层心脏动力学的数据驱动知识。

为此，我们采用最初为成像领域开发的 FoE 框架。在该框架中，不是预先设定固定惩罚项，而是学习一组专家 [7, 13,27]。每个专家 $i = 1, \ldots, N_C$由一个作用于心外膜电位的有界线性算子 L_i及其对应的非线性势函数 ϕ_i定义。算子响应 $L_i[u]$ 通过 ϕ_i在时空中逐点进行惩罚。总体而言，连续时空形式下的正则化项可写为

$$R_\theta(u) = \sum_{i=1}^{N_C} \int_{\Gamma_H \times \mathbb{T}} \phi_i \left(L_i[u](\mathbf{x},t) \right) \mathrm{d}\Pi(\mathbf{x},t). \tag{4}$$

在经典 FoE 中，算子 L_i 被选为与学习得到的核进行卷积，这与神经网络中的卷积层相对应。然而，由于非结构化有限元网格的结构不规则，在其上进行时空卷积的计算开销很大；相比之下，在通常均匀的时间网格上进行时间卷积则很容易计算。因此，我们提出一种多变量算子，将空间微分与时间滤波分离，同时仍允许对二者的响应进行联合学习和耦合。在我们的表述中，算子 L_i 由三个部分组成：用于确保稳定性的零阶项 $\epsilon_\theta u$、用于施加空间正则性的曲面梯度 $\nabla_{\Gamma_H} u$，以及一个经时间滤波的分量 $K_i[u]$，其形式为

$$L_i[u](\mathbf{x},t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \quad \text{with} \quad L_i[u] := (\epsilon_\theta u, \nabla_{\Gamma_H} u, K_i[u]), \tag{5}$$

其中，$\epsilon_\theta > 0$ 是一个学习得到的标量，K_i 通过一维核 $k_i \in L^1(\mathbb{T})$ 进行有界时间交叉相关来实现，其中 $\mathbb{T} = (-\omega/2, \omega/2)$，作用于 $\omega > 0$，并应用于零扩展信号 $\widetilde{u}$

$$K_i[u] := (k_i *_{\mathbb{T}} u)(\mathbf{x},t) := \mathbf{1}_{\mathbb{T}}(t) \int_{\widetilde{\mathbb{T}}} k_i(\tau)\, \widetilde{u}(\mathbf{x}, \tau + t)\, \mathrm{d}\tau, \quad \widetilde{u} = u \text{ on } \mathbb{T},\ \widetilde{u} = 0 \text{ otherwise.}$$

我们对 [7] 中引入的多变量情形进行调整，使相应的势函数 $\phi_i : \mathbb{R}^{d+2} \to \mathbb{R}$ 能够惩罚式 (5) 中各分量的联合响应。因此，式 (4) 变为

$$R_\theta(u) = \lambda_\theta \sum_{i=1}^{N_C} \int_{\Gamma_H \times \mathbb{T}} \phi_i \left(\epsilon_\theta u(\mathbf{x},t), \nabla_{\Gamma_H} u(\mathbf{x},t), (k_i *_{\mathbb{T}} u)(\mathbf{x},t) \right) \mathrm{d}\Pi(\mathbf{x},t), \tag{6}$$

加权参数为 $\lambda_\theta > 0$。滤波器 k_i 和参数 ϕ_i 由数据学习，并与 ϵ_θ 和 λ_θ联合学习；空间算子 ∇_{Γ_H} 则由几何结构固定。

为构造灵活且性质良好的多变量势函数，我们依赖于莫罗包络 [19]的概念。给定一个适当的下半连续凸函数 $f:\mathbb{R}^{d+2}\to\mathbb{R}$ 以及参数 $\mu>0$，其莫罗包络定义为 $M_\mu f(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^{d+2}}\left\{f(\mathbf{z}) + \frac{1}{2\mu}\|\mathbf{z}-\mathbf{x}\|_2^2\right\}$。莫罗包络可视为 f 的平滑近似，在保留原函数关键性质的同时，确保可微性并具有良好的梯度性质。特别地，其梯度与 f的近端算子直接相关： $\nabla M_\mu f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu}\left(\mathbf{x}-\mathrm{prox}_{\mu f}(\mathbf{x})\right)$。该算子具有非扩张性，这意味着 $\nabla M_\mu f$具有利普希茨连续性，并且对于许多 f的选择，都能高效计算。这些性质使莫罗包络特别适合用于设计基于优化的逆问题中的势函数，因为稳定且高效地计算梯度至关重要。基于这一思路，我们将多变量势函数定义为 ℓ^∞ 范数的莫罗包络之差，并结合线性变换和零阶蒂科诺夫项。对于每个算子 L_i，势函数为

$$\phi_i(\mathbf{y}) = \mu_i\,\omega_{\mu_i}^{d+2}(\mathbf{y}) - \mu_i\,\omega_{\eta_i\mu_i}^{d+2}(\mathbf{Q}_i\mathbf{y}), \tag{7}$$

具有可学习矩阵 $\mathbf{Q}_i\in\mathbb{R}^{(d+2)\times(d+2)}$ 和标量 η_i，其中

$$\omega_\mu^{d+2}(\mathbf{y}) = \left\|\mathbf{y}-\mu\,\mathrm{Proj}_{B_{\ell^1}}(\mathbf{y}/\mu)\right\|_\infty + \frac{\mu}{2}\left\|\mathrm{Proj}_{B_{\ell^1}}(\mathbf{y}/\mu)\right\|_2^2 + \frac{\epsilon_\omega}{2}\|\mathbf{y}/\mu\|_2^2,$$

且$\mathrm{prox}^{\iota_{B_{\ell^1}}}(\mathbf{y}) = \mathrm{Proj}^{B_{\ell^1}}(\mathbf{y}) = \arg\min_{\mathbf{z}\in B_{\ell^1}}\{\|\mathbf{z}-\mathbf{y}\|_2^2\}$,到$\ell^1$球上的投影，于 $\mathbb{R}^{d+2}$ 中，用于 ℓ^1球$\iota_{B_{\ell^1}}$的示性函数。该构造确保若干理想性质：它倾向于弱响应，同时对强响应施加递增惩罚，并通过$\mathbf{Q}_i$捕捉多个分量之间的相关性，且由于莫罗包络和零阶项而保持光滑且强制。 ω_μ^{d+2}的导数， $\nabla\omega_\mu^{d+2}(\mathbf{y}) = \mathrm{Proj}^{B_{\ell^1}}(\mathbf{y}/\mu) + \epsilon_\omega\mathbf{y}/\mu$，计算高效且非扩张，从而确保基于梯度的优化中的稳定性。

根据 [7, 定理 1],，条件 $\|\mathbf{Q}_i\|_\infty\le 1$ 与 $\eta_i > \|\mathbf{Q}_i\|_2^2$ 保证势函数 ϕ_i 非负，并在原点处取得唯一全局最小值，该性质自然延续至我们的框架，并确保所学正则化项有下界，同时倾向于弱算子响应。我们还注意到，正则化泛函 R_θ 可微，从而允许高效的基于梯度的优化。然而，由于(7)中的负部，它通常是非凸的，这反映了表达能力与凸性之间的权衡。

3 有限元离散

本节介绍本文中使用的离散域、函数空间和算子，它们均通过有限元法（FEM）构造。

3.1 时空离散

我们将 $\mathcal{T}_h$ 定义为直径最大的单元为 $h>0$ 的一组曲面单元，用于离散化 Γ_H； 稍微滥用一下记号，它也是逼近 Γ_H的形状规则自适应共形曲面网格。此外，我们假设 $\mathcal{T}_h$ 中的单元仅包含位于 Γ_H上的顶点。类似地，我们将 Γ 离散化，并通过 $\mathcal{T}_h^\Gamma$和 $\mathcal{T}_h^{\Sigma_i}$将其一致地定义为 Σ_i的子集，其中 $i=1$、.....、N_Σ。躯干域 Ω_0通过网格 $\mathcal{U}_h$ 离散化，该网格定义为满足 $\mathcal{T}_h\cup\mathcal{T}_h^\Gamma = \partial\mathcal{U}_h$ 的形状规则体积离散化，可由三角形（$d=2$）或四面体（$d=3$）构成。

时间区间 $\mathbb{T}$ 被离散为均匀时间网格 $\mathcal{S}_h$。具体而言，我们假设在 $s=0,\dots,N_\mathbb{T}$ 处可获得时间测量值，这些等距时间点$t_s = s\delta$ 共定义了 $N_\mathbb{T}$ 个大小为 $\delta>0$的时间区间，其中 $\delta = O(h)$。

3.2 函数空间

我们使用 P_1 在自适应曲面网格 $\mathcal{T}_h$ 上进行空间离散、在时间网格 $\mathcal{S}_h$上进行时间离散的有限元，将连续时空函数空间 $\mathcal{V}$ 近似为离散空间$\mathcal{V}_h$ 。每个时间步的空间网格均相同，由维数为 d的仿射单元构成。令 $\boldsymbol{\Xi} := \{\boldsymbol{\xi}_i\}_{i=1}^{N_\mathcal{V}} \subset \Gamma_H$ 表示与 $\mathcal{T}_h$相关联的节点集合。空间单元 $J \in \mathcal{T}_h$ 与时间区间 $Z \in \mathcal{S}_h$ 的张量积定义了一个时空单元 $J \otimes Z \in \mathcal{T}_h \otimes \mathcal{S}_h$。由此得到的离散时空函数空间为

$$\mathcal{V}_h := \Big\{ v \in L^2(\mathbb{T}; H^1(\mathcal{T}_h)) \colon v|_{J\otimes Z} \in P_1(J) \otimes P_1(Z), \forall J \in \mathcal{T}_h, Z \in \mathcal{S}_h \Big\},$$

分别具有空间和时间基函数 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_\mathcal{V}}$ 和 $\{\rho_s\}_{s=0}^{N_\mathbb{T}}$。任意离散函数 $u_h \in \mathcal{V}_h$ 均可表示为

$$u_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{s=0}^{N_\mathbb{T}} \sum_{i=1}^{N_\mathcal{V}} \mathbf{u}_{i,s}\, \varphi_i(\mathbf{x}) \rho_s(t),$$

其中，$\mathbf{u}_{i,s}$是节点 $(\boldsymbol{\xi}_i, t_s)$ 处的值，且 $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^{1,0}, \mathbf{u}_{2,0}, \ldots, \mathbf{u}_{N_\mathcal{V}, N_\mathbb{T}}) \in \mathbb{R}^{N_\mathcal{V} \times (N_\mathbb{T}+1)}$。接下来，我们考察由线性算子 L_i 诱导的函数空间。由于 P_1 函数在每个网格单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 上都是仿射的，因此其空间梯度在单元内为常数，属于间断 L^2 空间

$$P_0(\mathcal{T}_h) := \{ v \in L^2(\Omega) : v|_T \text{ is constant for all } T \in \mathcal{T}_h \}.$$

这定义了一个离散梯度空间 $\mathcal{Q}_h$ ，它由向量值函数 $p_h = (p_{h_1}, \ldots, p_{h_d})^\top$ 组成，满足 $p_{h_k} \in L^2(\mathcal{T}_h \times \mathbb{T})$（对于 $k = 1, \ldots d$），这些函数在每个单元内空间上分片常数，且在时间上为仿射函数:

$$\mathcal{Q}_h := \Big\{ p \in \big(L^2(\mathcal{T}_h \times \mathbb{T})\big)^d : p_k|_{J\otimes Z} \in P_0(J) \otimes P_1(Z), \forall L \in \mathcal{T}_h, J \in \mathcal{S}_h \Big\}.$$

这里， $\{\vartheta_l\}_{l=1}^{N_\mathcal{Q}}$ 表示带有 $N_\mathcal{Q} \in \mathbb{N}$的 $P_0(\mathcal{T}_h)$的基。正则化函数中的时间互相关作用于函数 $u_h \in \mathcal{V}_h$，形式为 $k_h *_\mathbb{T} \cdot \colon \mathcal{V}_h \to \mathcal{W}_h$，其中分段仿射函数的互相关会产生一个分段三次函数

$$\mathcal{W}_h := \Big\{ w \in L^2(\mathbb{T}; H^1(\mathcal{T}_h)) \colon w|_{J\otimes Z} \in P_1(J) \otimes P_3(Z), \forall J \in \mathcal{T}_h, Z \in \mathcal{S}_h \Big\}.$$

我们使用均匀时间网格 $t_0, \ldots, t_{N_\mathbb{T}}$上的标准分片线性帽函数 ρ_i来近似时间相关函数，步长为 δ，其定义为$\rho_i(t) = \max\{0, 1 - |t - t_i|/\delta\}$，其中 $i = 0, \ldots, N_\mathbb{T}$。这些函数自然导出时间质量矩阵

$$\widetilde{\mathbf{D}}_{ij} = \int_\mathbb{T} \rho_i(t)\rho_j(t)\, dt = \frac{\delta}{6} \begin{cases} 4, & i = j, 1 \le i \le N_\mathbb{T} - 1, \\ 2, & i = j, i \in \{0, N_\mathbb{T}\}, \\ 1, & |i - j| = 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在空间上，我们采用网格 $\mathcal{T}_h$上的分段仿射基函数 φ_i，由此得到空间质量矩阵

$$\widetilde{\mathbf{M}}_{ij} = \int_{\mathcal{T}_h} \varphi_i(\mathbf{x})\varphi_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad 1 \le i, j \le N_\mathcal{V}.$$

为了处理同时依赖空间和时间的函数，我们使用张量积将时间矩阵 $\widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \otimes \mathbf{I}^{N_\mathcal{V}}$和空间矩阵组合起来：$\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{S+1} \otimes \mathbf{M}$。这种

构造确保所得矩阵能够正确涵盖离散解 $u_h \in \mathcal{V}_h$的所有自由度，将每个空间节点与每个时间步相对应。最后，对于具有 d 个分量的向量值函数，我们在时空域 $\mathcal{T}_h \times \mathbb{T}$ 上定义标准L^2 内积如下:

$$(v_h, w_h)_{\mathcal{Y}_h^d} = \sum_{i=1}^{d} \int_{\mathcal{T}_h \times \mathbb{T}} v_{h,i}(\mathbf{x}, t)\, w_{h,i}(\mathbf{x}, t)\, d(\mathbf{x}, t),$$

其中 $\mathcal{Y}_h := L^2(\mathcal{T}_h \times \mathbb{T})$。该内积为测量误差和构建全离散变分问题提供了自然框架。

3.3 正向算子

正向算子 A 在分片仿射有限元中的离散化遵循 [32]。对于几乎所有的 $t \in \mathbb{T}$，我们考虑式 (2) 的离散形式

$$a_h(v_h(\cdot, t), \varphi_h) = \int_{\mathcal{U}_h} \sigma_h(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} v_h(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_h(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} = 0 \quad \forall \varphi_h \in P_1(\mathcal{U}_h), \varphi_h|_{\mathcal{T}_h} = 0 \tag{8}$$

其心外膜上的边界条件为 $v_h|_{\mathcal{T}_h} = u_h$ ，其中 $u_h \in \mathcal{V}_h$。等价地，我们设 $v_h = w_h + g_h$，其中 $w_h|_{\mathcal{T}_h} = 0$ 和 $g_h|_{\mathcal{T}_h} = u_h$，由此得到

$$a_h(w_h(\cdot, t), \varphi_h) = -a_h(g_h(\cdot, t), \varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in P_1(\mathcal{U}_h),\ \varphi_h|\mathcal{T}_h = 0. \tag{9}$$

由 a 的强制性和连续性可知，对于固定的边界数据 u_h，(8) 存在唯一解 v_h。随后，将 v_h 限制到躯干边界上，即 $A_h[u_h] = v_h|_\Gamma$，从而定义离散正向算子 A_h 。实际计算中，对于每个时间步 $t \in \mathbb{T}$，这相当于求解一个线性系统，以获得 v_h 的分段仿射有限元系数，从而建立从心外膜电位到躯干边界的映射 $\mathbf{v_u} = \mathbf{A}\mathbf{u}$ 。

3.4 正则化项中的线性算子

正则化泛函涉及线性算子 $L[u] = (\epsilon_\theta u,\ \nabla_{\Gamma_H} u,\ K[u])$。对于空间梯度，我们利用这样一个事实：流形网格上的分段仿射函数具有精确梯度表示

$$\left\|\nabla_{\Gamma_H}^h u_h\right\|_{\mathcal{Y}_h^d} = \left\|\nabla_{\Gamma_H} u_h\right\|_{\mathcal{Y}_h^d}$$

对于 $u_h \in \mathcal{V}_h$。在节点为 $(\boldsymbol{\xi}_i)$ 的 $J \in \mathcal{T}_h$ 上， $u_h|_J$ 的限制是仿射的，因此，逐元素的常数欧几里得梯度可写为

$$\nabla_{\Gamma_H} u_h|_J(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3} u_h(\boldsymbol{\xi}_i) \nabla_{\Gamma_H} \varphi_i(\mathbf{x}),$$

其中 $\{\varphi_i\}_{i=1}^3$ 为局部节点基函数。离散梯度通过切向投影定义为 $\nabla_{\Gamma_H}^h u_h|_J := (\mathbf{I}_d - \mathbf{n}_J \otimes \mathbf{n}_J)\nabla_{\Gamma_H} u_h|_J$，其中 $\mathbf{n}_J$表示 J的单位法向量。我们将作用于分段仿射函数节点值的 $\nabla_{\Gamma_H}^h$ 的矩阵表示记为 $\boldsymbol{\nabla}_{\Gamma_H}$。通过使用标准 L^2-投影，将 $k \in L^1(\widetilde{\mathbb{T}})$ 近似为离散化 $\widetilde{\mathcal{S}}_h$ 上的分段仿射时间有限元 $k_h \in P_1(\widetilde{\mathcal{S}}_h)$，得到离散算子 K_h 和节点向量 $\mathbf{k}$。时间核函数 k_h定义在扩展区间 $\mathbb{T} = [t_{-N_w}, t_{N_w}]$上，其中 $N_w \in \mathbb{N}$；而u_h定义在 $\mathbb{T}$ 上。时间互相关 $K_h[u_h](\mathbf{x}\ t) = (k_h *_{\mathbb{T}} u_h)(\mathbf{x}\ t)$ 离散化为

$$K_h[u_h](\mathbf{x}, t) = \mathbf{1}_{\mathbb{T}}(t) \int_{\widetilde{\mathbb{T}}} k_h(\tau) u_h(\mathbf{x}, \tau + t)\, d\tau = \sum_{i=1}^{N_\mathcal{V}} \sum_{l=0}^{N_\mathbb{T}} \sum_{j=1}^{2N_w} \mathbf{u}_{i,l} \mathbf{k}_j \mathbf{D}_{lj}(t) \varphi_i(\mathbf{x}).$$

令 $\mathbf{K}$ 表示 K_h的矩阵。由此得到的离散算子为

$$L_h : \mathcal{V}_h \to \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h \times \mathcal{W}_h, \quad L_h[u_h] \coloneqq (\epsilon_\theta u_h, \nabla^h_{\Gamma_H} u_h, K_h[u_h]). \tag{10}$$

将 (7) 中与势函数 ϕ_i 相关的范数球进行投影是一种逐点操作，因此要求所有涉及的离散量都表示在同一个有限元空间中。然而，离散算子 L_h 映射到一个分片常数函数空间，而这类函数在单元界面处没有定义良好的点值。因此，无法直接应用投影。我们引入一个插值算子 $\mathcal{P}_h : \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h \times \mathcal{W}_h \to (\mathcal{V}_h)^{d+2}$，使得 $\widetilde{L}_h = \mathcal{P}_h \circ L_h$。请注意，对于 ϕ_i 的平方 ℓ^2 范数部分，无需在同一个有限元空间中计算线性算子的不同维度。我们定义 $\widetilde{\phi}_i$ 的一个变体 ϕ_i，其中 $\widetilde{\omega}^{d+2}_{\mu_i}$，使得

$$\widetilde{\omega}^{d+2}_{\mu}(\mathbf{y}, \widetilde{\mathbf{y}}) = \left\| \widetilde{\mathbf{y}} - \mu \operatorname{Proj}_{B_{\ell^1}}(\widetilde{\mathbf{y}}/\mu) \right\|_\infty + \frac{\mu}{2} \left\| \operatorname{Proj}_{B_{\ell^1}}(\widetilde{\mathbf{y}}/\mu) \right\|_2^2 + \frac{\epsilon_\omega}{2} \left\| \mathbf{y}/\mu \right\|_2^2, \tag{11}$$

$\widetilde{\ }$，以考虑 L_h 和 L_h 之间的差异。首先定义插值算子 $\mathcal{P}_h$。两个分段仿射函数的互相关是分段三次的，并且在节点基下全局连续。为此，我们在 $\mathcal{V}_h$ 的时间节点处计算互相关，并引入一个插值算子

$$\mathcal{P}^{\text{temp}}_h : C^0(\overline{\mathbb{T}}) \to P_1(\mathcal{S}_h), \quad \mathcal{P}^{\text{temp}}_h[u](t) = \sum_{s=0}^{N_{\mathbb{T}}} u(t_s)\rho_s(t),$$

连续性适用于分片仿射插值 $\left\|\mathcal{P}^{\text{temp}}_h[v]\right\|_{L^2(\mathbb{T})} \le C \left\|v\right\|_{L^2(\mathbb{T})}$ for $v \in C^0(\mathbb{T})$。注意，对于任意分片三次函数 $v_h \in P_3(\mathcal{S}_h)$，我们利用 v_h 的二阶导数有界性计算出一个上界 [3]

$$\left\|\mathcal{P}^{\text{temp}}_h v_h - v_h\right\|_{L^2(\mathbb{T})} \le Ch^2 \left\|\partial_{tt} v_h\right\|_{L^2(\mathbb{T})}. \tag{12}$$

我们进一步定义空间插值算子 $\mathcal{P}^{\text{sp}}_h : L^2(\mathcal{T}_h) \to P_1(\mathcal{T}_h)$，将其定义为投影到分段仿射空间函数子空间上的$L^2$投影，从而能够计算分片常数函数的分段仿射投影。上述 L^2投影定义为

$$\mathcal{P}^{\text{sp}}_h[p] = \operatorname*{arg\,min}_{p_h \in P_1(\mathcal{T}_h)} \left\{ \left\|p - p_h\right\|_{\mathcal{Y}_h} \right\}.$$

该正交投影通过其最优性条件计算

$$\int_{\mathcal{T}_h} \widetilde{p}_h(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathcal{T}_h} p_h(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in P_1(\mathcal{T}_h) \tag{13}$$

其中 $\widetilde{p}_h \coloneqq \mathcal{P}^{\text{sp}}_h[p_h]$。选择 φ 作为基函数 $(\varphi_i)_{i=1}^{N_\mathcal{V}}$ 和 $p_h \in P_0(\mathcal{T}_h)$，即可通过下式计算投影的节点值 $\widetilde{\ }\mathbf{p}$

$$\widetilde{\mathbf{M}}\widetilde{\mathbf{p}} = \mathbf{b} \quad \text{with} \quad \mathbf{b}_i = \int_{\mathcal{T}_h} p_h(\mathbf{x})\varphi_i(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \sum_{j\,:\,\boldsymbol{\xi}_i \in J_j} \mathbf{p}_j \int_{J_j} \varphi_i(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \sum_{j\,:\,\boldsymbol{\xi}_i \in J_j} \mathbf{p}_j \frac{|J_j|}{d}$$

其中，φ_i 是与节点 $\boldsymbol{\xi}_i$ 对应的基函数，适用于 $i = 1, \ldots, N_\mathcal{V}$。我们将$\mathcal{P}^{\text{sp}}_h$ 和 $\mathcal{P}^{\text{time}}_h$ 的矩阵表示分别定义为$\mathbf{P}^{\text{sp}}$ 和$\mathbf{P}^{\text{time}}$。这些插值使我们能够定义

$$\widetilde{L}_h : \mathcal{V}_h \to \mathcal{V}^{d+2}_h, \quad \widetilde{L}_h[u_h] \coloneqq (\epsilon_\theta u_h, \mathcal{P}^{\text{sp}}_h \nabla^h_{\Gamma_H} u_h, \mathcal{P}^{\text{temp}}_h K_h[u_h]). \tag{14}$$

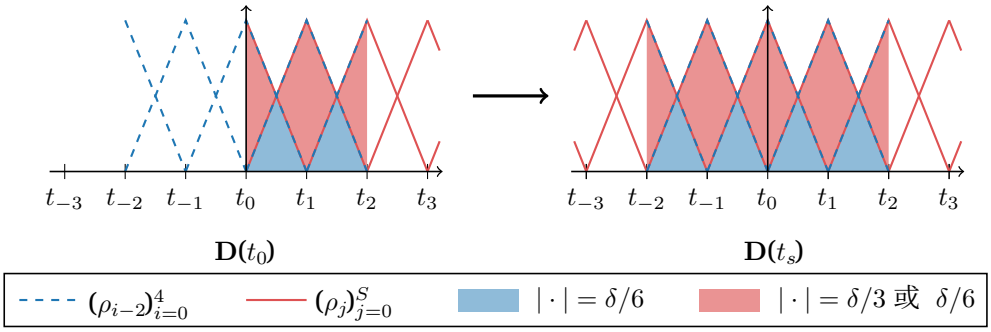

图1：矩阵$\widetilde{\mathbf{D}}(t)$的离散互相关计算示意图，该计算在均匀网格的节点 t_s 处进行，核函数定义见 $\mathbb{T} = [t_{-2}, t_2]$。矩阵元素通过帐篷函数的重叠区域计算得出。

由于 $\mathcal{P}_h^{\text{temp}} K_h[u_h]$ 在时间上是分段仿射的，因此只需在 $\mathcal{S}_h$的时间节点处对其求值

$$\mathcal{P}_h^{\text{temp}} K_h[u_h](\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_\mathcal{V}} \sum_{s,l=0}^{N_\mathbb{T}} \sum_{j=1}^{2N_w} \mathbf{u}_{i,l} \mathbf{k}_j \mathbf{D}_{lj}(t_s) \varphi_i(\mathbf{x}) \rho_s(t).$$

利用均匀时间步以及关系式 $t_{s_1} = t_{s_2} + t_{s_3}$（对整数 $s_1 = s_2 + s_3$），我们得到离散时间矩阵的各项

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(t_s)_{ij} &= \int_{\widetilde{\mathbb{T}}} \rho_{i-N_w}(\tau) \rho_j(t_s + \tau)\, d\tau = \int_{\widetilde{\mathbb{T}}} \rho_{i-N_w}(\tau) \rho_{j-s}(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{\delta}{6} \begin{cases} 2, & \text{if } j = (i - N_w) - s, \quad i \in \{0, 2N_w\} \text{ or } j \in \{0, N_\mathbb{T}\}, \\ 4, & \text{if } j = (i - N_w) - s, \quad 1 \le i \le 2N_w - 1, 1 \le j \le N_\mathbb{T} - 1, \\ 1, & \text{if } j - ((i - N_w) - s) = 1, \quad i \in \{0, 2N_w\} \text{ or } j \in \{0, N_\mathbb{T}\}, \\ 1, & \text{if } |j - ((i - N_w) - s)| = 1, \quad 1 \le i \le 2N_w - 1, 1 \le j \le N_\mathbb{T} - 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}
\end{aligned}$$

离散互相关矩阵的计算如图 1 所示。

3.5 能量泛函

令 $\mathcal{J}_h(u_h, z_h)$ 表示式 (3) 中连续能量 $\mathcal{J}(u, z)$ 的有限元离散，我们旨在对其进行优化

$$\arg\min_{u_h \in \mathcal{V}_h} \left\{ \mathcal{J}_h(u_h, z_h) \coloneqq G_h(u_h, z_h) + R_{\theta,h}(u) \right\}, \tag{15}$$

由离散分量 G_h 构成，其中

$$G_h(u_h, z_h) = \frac{1}{2N_\Sigma} \sum_{i=1}^{N_\Sigma} \int_\mathbb{T} \left(\fint_{\mathcal{T}^{\Sigma_i}} A_h[u_h](\mathbf{x}, t) \mathrm{d}S_h^\Gamma(\mathbf{x}) - z_{h,i}(t) \right)^2 \mathrm{d}t$$

$\widetilde{\ }$以及正则化函数$R_{\theta,h}$，其势函数为式 (11) 中的 ϕ_i

$$R_{\theta,h}(u_h) = \lambda_\theta \sum_{i=1}^{N_C} \int_{\mathcal{T}_h \times \mathbb{T}} \widetilde{\phi}_i(L_{h,i}[u_h](\mathbf{x}, t), \widetilde{L}_{h,i}[u_h](\mathbf{x}, t)) \mathrm{d}\Pi_h(\mathbf{x}, t).$$

我们通过将式 (15) 在 $+\infty$ 之外设为 $\mathcal{V}_h$，扩展离散泛函

$$\widetilde{\mathcal{J}}_h(u_h, z_h) = \begin{cases} \mathcal{J}_h(u_h, z_h), & \text{if } u_h \in \mathcal{V}_h, \\ +\infty, & \text{else.} \end{cases}$$

对于固定的网格尺寸 $h > 0$，通过采用求积规则计算能量的显式值，可以将离散能量表示为有限元自由度的函数。对于该反问题，我们定义线性算子记号 $\widetilde{A}[u]_i(t) := \fint_{\Sigma_i} A[u](\mathbf{x}, t)\mathrm{d}S^{\Gamma}(\mathbf{x})$，以及其矩阵表示 $\widetilde{\mathbf{A}}$；该矩阵表示采用梯形法则计算，以确保对分段仿射函数进行精确积分。离散数据保真项为

$$\mathbf{G}_h(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2}(\widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{u} - \mathbf{z})^{\top}\mathbf{D}^{\Sigma}(\widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{u} - \mathbf{z}), \quad \text{with} \quad \mathbf{D}^{\Sigma} = \widetilde{\mathbf{D}} \otimes I_{N_{\Sigma}}.$$

离散时空正则项采用集中求积规则计算 e

$$\mathbf{R}_{\theta,h}(\mathbf{u}) = \lambda_{\theta} \sum_{i=1}^{N_C} \sum_{m=0}^{N_{\mathbb{T}}} \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{V}}} \mathbf{D}^{\mathrm{lump}}_{mm} \mathbf{M}^{\mathrm{lump}}_{ii} \phi_i \begin{pmatrix} \epsilon_{\theta}\mathbf{u}_{j,m} \\ (\mathcal{P}_h^{\mathrm{sp}} \nabla_x^h \mathbf{u})_{j,m} \\ (\mathbf{k}_i^{\top}\mathbf{D}(t_m)(\mathbf{u}_{j,s})_{s=0}^{N_{\mathbb{T}}}) \end{pmatrix},$$

其中，$\mathbf{D}^{\mathrm{lump}}$ 和$\mathbf{M}^{\mathrm{lump}}$ 表示集中质量矩阵。请注意，为了避免实际应用中的不必要计算，我们使用 ϕ_i 而不是 ϕ_i 来计算$\widetilde{}$正则化项。该公式以有限元自由度为基础，对能量泛函进行了完全离散的表示，便于高效地实现数值计算。

注 1. 泛函$\mathbf{G}_h$ 是 G_h 的精确表示，因为分段仿射函数采用精确求积规则进行计算。联合正则项$\mathbf{R}_{\theta,\ h}$ 以 $O(h^2)$阶收敛。

3.6 几何近似与提升

按照 [9], ，我们定义离散区域与真实区域之间函数的提升。首先介绍从离散空间区域到连续区域的双射提升。窄带周围的法向投影$\mathbf{x} \mapsto p(\mathbf{x})\Omega_0$定义为满足$\mathbf{x} = p(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x})\mathbf{n}(p(\mathbf{x}))$的唯一解，其中距离函数

$$d(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\inf\limits_{\mathbf{y}\in\partial\Omega_0} \{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|\}, & \mathbf{x} \in \Omega_0, \\ \inf\limits_{\mathbf{y}\in\partial\Omega_0} \{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|\}, & \mathbf{x} \notin \overline{\Omega}_0, \end{cases}$$

以及对于几乎所有的 $\mathbf{x} \in \partial\Omega_0$，边界的外法向量 $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} d(\mathbf{x})$。我们假设 h 足够小，使得 $\mathcal{T}_h$ 的所有顶点都位于一个窄带内，在该窄带中距离函数和最近点投影均有良好定义。此外，函数 $v : \Gamma_H \to \mathbb{R}$ 的曲面梯度定义为 $\nabla_{\Gamma_H} v = (\mathbf{I}_d - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\nabla_{\mathbf{x}} v$，其中 $\nabla_{\mathbf{x}} v$是将 v 任意延拓到窄带后在外围坐标中的梯度。同胚 $H_h : \mathcal{U}_h \to \Omega_0$的定义遵循 [9]: 将计算区域中的每个单元映射回参考单元，再映射到真实的弯曲区域。将参考单元 J 到单元 $J \in \mathcal{U}_h$ 的映射记为 M_J，将参考单元到代表具有弯曲边界真实区域的弯曲单元 J^e的映射记为 M_J^e。那么

$$H_h(\mathbf{x}) = M_J^e((M_J)^{-1}(\mathbf{x})).$$

限制在内部单元上时，同胚 H_h 与恒等映射一致。图2展示了 $\mathbb{R}^2$中边界单纯形的提升。$\mathbb{R}^3$ 的类似示意图可见于 [9]。

为描述离散边界映射在 $\partial\Omega_0$, 附近的局部行为，我们采用如下估计。对于在 $\partial\Omega_0$,上具有多于一个顶点的边界元 $J \in \partial\mathcal{U}_h$，同胚满足

$$\|\nabla_{\mathbf{x}} H_h^{\top}|_J - \mathrm{Id}\|_{L^{\infty}(J)} \le ch \quad \text{and} \quad \left\|\det \nabla_{\mathbf{x}} H_h^{\top}|_J| - 1\right\|_{L^{\infty}(J)} \le ch,$$

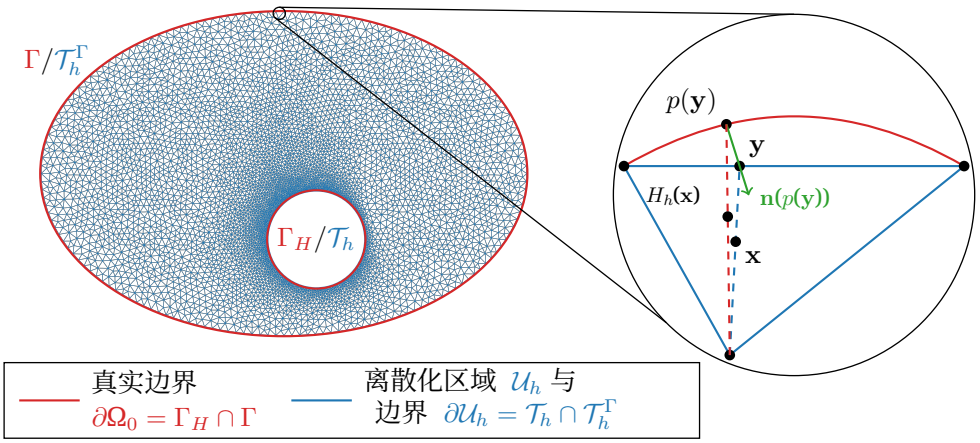

图2：将边界单元处单纯形中的$\mathbf{x}$ 点通过 $H_h(\mathbf{x}) \in J^e \subset \Omega_0$ 中的 $\mathbb{R}^2$提升至真实区域 $J \subset \mathcal{U}_h$。我们计算$\mathbf{y}$ （即$\mathbf{x}$ 在边界 $\mathcal{T}_h^\Gamma$上的线性投影），在 Γ上取其最近点投影 $p(\mathbf{y})$，并将$\mathbf{x}$ 朝 $p(\mathbf{y})$的方向映射，以计算 $H_h(x)$。

其中 $c > 0$ 是与 h无关的常数。此外，对于 $\partial\Omega_0$，边界的任意离散化 $\partial\mathcal{U}_h$，我们定义测度之比 ν_h 和 ν_h^Γ，使得对 $\mathcal{T}_h$ 和 $\mathcal{T}_h^\Gamma$的曲面测度 S_h 和 S_h^Γ 分别有$\mathrm{d}S = \nu_h \mathrm{d}S_h$ 以及 $\mathrm{d}S^\Gamma(\mathbf{x}) = \nu_h \mathrm{d}S_h^\Gamma(\mathbf{x})$。这些测度刻画了流形与其离散化之间的几何差异，并满足

$$\sup_{\mathcal{T}_h} \{|1 - \nu_h|\} \leq ch \quad \text{and} \quad \sup_{\mathcal{T}_h^\Gamma} \left\{|1 - \nu_h^\Gamma|\right\} \leq ch. \tag{16}$$

因此，我们定义了一种将离散化信号提升至连续区域的投影提升。

定义*1*（提升与逆提升）。对于函数 $v_h : \mathcal{U}_h \to \mathbb{R}$，我们将其在$\Omega_0$, 上的提升定义为$v_h^l := v_h \circ H_h^{-1}$；对于 $v : \Omega_0 \to \mathbb{R}$，将其在 $\mathcal{U}_h$上的逆提升定义为 $v^{-l} := v \circ H_h$。类似地，对于 $u_h : \partial\mathcal{U}_h \to \mathbb{R}$，提升 $u_h^l : \partial\Omega_0 \to \mathbb{R}$ 定义为 $u_h^l(p(x)) := u_h(x)$；对于 $u: \partial\Omega_0 \to \mathbb{R}$，逆提升定义为 $u^{-l}(x) := u(p(x))$。

根据这些定义，函数及其提升在相关的索博列夫范数下具有可比性，见 [9, 命题 4.9，4.13]。

命题 1 (提升下的范数等价性)。设 $v_h : \mathcal{U}_h \to \mathbb{R}$ 和 $u_h : \partial\mathcal{U}_h \to \mathbb{R}$的提升分别为 $v_h^l : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ 和 $u_h^l : \partial\Omega_0 \to \mathbb{R}$。那么，$v_h$ 和 u_h 的 L^2- 范数与 H^1- 范数分别等价于其提升的相应范数。等价常数与离散参数 h无关。

4 收敛

本节证明，在凸正则化框架下，有限元离散化能量收敛于相应的连续能量，即假设式 (7) 中的势函数 ϕ_i对 $i = 1, \ldots, N_C$均为凸函数。此外，我们还证明极小化子的收敛性。证明运用了一些关于 [21] 的概念。我们首先定义收敛所用的拓扑。

定义 2. （$\mathcal{Z}$-拓扑）设 Γ_H 为一个曲面，其离散化由$(\mathcal{T}_h)_h$定义，并设$(\mathcal{U}_h)_h$ 为 $\Omega\Omega_0$的一族形状正则的体域离散。若$(u_h)_h$在 $\mathcal{T}_h \times \mathcal{S}_h$ 上弱收敛于 $u \in \mathcal{V}$，关于 $\mathcal{Z}$-拓扑记作 $u_h \xrightarrow{\mathcal{Z}} u$，当且仅当

且仅当提升函数满足 $u_h^l \xrightarrow{\mathcal{V}} u$。若$(u_h)_h$ 关于 $\mathcal{Z}$-拓扑 $u_h \xrightarrow{\mathcal{Z}} u$ 强收敛于 u，当且仅当 $u_h^l \xrightarrow{\mathcal{V}} u$。

我们回顾 Mosco 收敛的定义 [20]。

定义 3. （*Mosco* 收敛）泛函 $\mathcal{J}_h\colon \mathcal{V}_h \to \mathbb{R}$，对于 $h>0$，若满足以下条件，则称其关于 $\mathcal{Z}$-拓扑按 *Mosco* 意义收敛到 $\mathcal{J}\colon \mathcal{V}\to\mathbb{R}$：

1. 对于每个满足 $u_h \xrightarrow{\mathcal{Z}} u$ 的序列 $(u_h)_h \subset \mathcal{V}_h$，泛函不等式 $\mathcal{J}_h(u) \le$下极限$_{h\to 0}\,\mathcal{J}_h(u_h)$ 成立（“下极限不等式”）。

2. 对于每个 $u\in\mathcal{V}$，都存在一个恢复序列 $(u_h)_h \subset \mathcal{V}_h$，使得 $u_h \xrightarrow{\mathcal{V}} u$，并且 $\mathcal{J}(u) \ge$上极限$_{h\to 0}\,\mathcal{J}_h(u_h)$（“上极限不等式”）。

若在1.中要求强收敛 $u_h \xrightarrow{\mathcal{V}} u$，则称 $\mathcal{J}_h$ 关于 $\mathcal{Z}$-拓扑 Γ-收敛到$\mathcal{J}$。

首先，我们证明式（14）中定义的离散算子 L_h 收敛到连续算子 $L=(\epsilon_\theta u,\ \nabla_{\Gamma_H} u,\ K[u])$。

引理 1。设$(u_h)_h \subset \mathcal{V}_h$ 是一个序列，其提升 u_h^l 在 $\mathcal{V}$ 中弱收敛于某个 $u\in\mathcal{V}$。假设核 k_h 在 $L^1(T)$中强收敛于 k。则提升算子 $\widetilde{L}_h^l[u_h^l] := \big(\epsilon_\theta u_h^l,\ (\mathcal{P}_h^{\mathrm{sp}}\nabla_{\Gamma_H}^h u_h)^l,\ K_h[u_h^l]\big)$ 在 $\mathcal{Y}^{d+2}=\mathcal{Y}\times\mathcal{Y}^d\times\mathcal{Y}$ 中弱收敛于 $L[u]$。此外，如果 u_h^l 在 $\mathcal{V}$中强收敛于 u，则 $\widetilde{L}_h^l[u_h^l]$在 $\mathcal{Y}^{d+2}$中强收敛于 $L[u]$。

证明。假设 $u_h^l \rightharpoonup u$ 在 $\mathcal{V}$中弱收敛。我们逐分量证明 $\widetilde{L}_h^l[u_h^l]$在 $\mathcal{Y}^{d+2}$中的弱收敛。对于第一个分量，有 $\epsilon_\theta u_h^l \rightharpoonup \epsilon_\theta u$ 在 $\mathcal{Y}$中，这直接由 u_h^l 在 $\mathcal{V}$ 中的弱收敛以及 $\mathcal{V}\hookrightarrow\mathcal{Y}$的连续嵌入推出。对于空间梯度分量，设 $\varphi\in\mathcal{Y}^d$ 为任意检验函数，并计算

$$\int_{\Gamma_H\times\mathbb{T}} (\mathcal{P}_h^{\mathrm{sp}}\nabla_{\Gamma_H}^h u_h)^l\cdot\varphi \mathrm{d}\Pi(\mathbf{x},t) = \int_{\mathcal{T}_h\times\mathbb{T}} \nabla_{\Gamma_H}^h u_h\cdot \mathcal{P}_h^{\mathrm{sp}}\varphi^{-l}\nu_h \mathrm{d}\Pi_h(\mathbf{x},t),$$

其中 $\mathrm{d}\Pi_h(\mathbf{x}\ t) \coloneqq \mathrm{d}S_h(\mathbf{x})\ \otimes \mathrm{d}\lambda(t)$，最后一个等号由 $\mathcal{Y}_h^d$上的 L^2-投影 $\mathcal{P}_h^{\mathrm{sp}}$ 的自伴性得出。接下来，我们将被积函数分解为

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{T}_h\times\mathbb{T}} \nabla_{\Gamma_H}^h u_h\cdot\mathcal{P}_h^{\mathrm{sp}}\varphi^{-l}\nu_h\,\mathrm{d}\Pi_h(\mathbf{x},t) &= \int_{\mathcal{T}_h\times\mathbb{T}} \nabla_{\Gamma_H}^h u_h\cdot\varphi^{-l}\nu_h\,\mathrm{d}\Pi_h(\mathbf{x},t)\\ &\quad+\int_{\mathcal{T}_h\times\mathbb{T}} \nabla_{\Gamma_H}^h u_h\cdot(\mathcal{P}_h^{\mathrm{sp}}\varphi^{-l}-\varphi^{-l})\nu_h \mathrm{d}\Pi_h(\mathbf{x},t).\end{aligned}$$

对于第一项，提升离散梯度的弱收敛$(\nabla_{\Gamma_H}^h u_h)^{\,l}\rightharpoonup\nabla_{\Gamma_H}u$于 $\mathcal{Y}^d$，结合从 $\mathcal{T}_h$到 Γ_H的变量替换，可得

$$\int_{\mathcal{T}_h\times\mathbb{T}} \nabla_{\Gamma_H}^h u_h\cdot\varphi^{-l}\nu_h \mathrm{d}\Pi_h(\mathbf{x},t) \to \int_{\Gamma_H\times\mathbb{T}} \nabla_{\Gamma_H} u\cdot\varphi \mathrm{d}\Pi(\mathbf{x},t)$$

当 $h\to 0$。对于第二项，我们结合柯西–施瓦茨不等式与 $\nabla_{\Gamma_H}^h u_h$ 在 $L^2(\mathcal{T}_h\times\mathbb{T})$ 中的一致有界性，得到

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathcal{T}_h\times\mathbb{T}} \nabla_{\Gamma_H}^h u_h\cdot(\mathcal{P}_h^{\mathrm{sp}}\varphi^{-l}-\varphi^{-l})\nu_h \mathrm{d}\Pi_h(\mathbf{x},t)\right|\\ &\quad\le C\min_{v_h^l\in(\mathcal{Y}_h^l)^d}\left(\int_{\Gamma_H\times\mathbb{T}}|v_h^l-\varphi|^2\mathrm{d}\Pi_h(\mathbf{x},t)\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

由 $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}^d}$ 的稠密性可知，最后一项在 $h \to 0$ 时趋于 0。因此我们得出 $(\mathcal{P}_h^{\mathrm{sp}} \nabla_{\Gamma_H}^h u_h)^l \rightharpoonup \nabla_{\Gamma_H} u$ 属于 $\mathcal{Y}^d$。对于最后一个分量 $K_h[u_h^l]$，我们首先证明时间互相关 $k_h *_{\mathbb{T}} u_h^l \rightharpoonup k *_{\mathbb{T}} u$ 在 $\mathcal{Y}$ 中的弱收敛。定义 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ 翻转后的核函数 $k_h(t) := k_h(-t)$ 和 $k(t) := k(-t)$，其中 $k_h \to k$ 在 $L^1(\mathbb{T})$ 中强收敛。对于任意检验函数 $\varphi \in \mathcal{Y}$，我们将其分解为

$$(k_h *_{\mathbb{T}} u_h^l, \varphi)_{\mathcal{Y}} = (u_h^l, \widetilde{k} *_{\mathbb{T}} \varphi)_{\mathcal{Y}} + (u_h^l, (\widetilde{k_h} - \widetilde{k}) *_{\mathbb{T}} \varphi)_{\mathcal{Y}}.$$

由柯西–施瓦茨不等式和杨氏不等式，第二项趋于零 $h \to 0$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$，并且 $\|k_h - k\|_{L^1(\mathbb{T})} \to 0$。由于 u_h^l 在 $\mathcal{Y}$中弱收敛，第一项收敛至（$k *_{\mathbb{T}} u, \varphi$）$_{\mathcal{Y}}$。引入时间插值算子后，我们写作

$$(\mathcal{P}_h^{\mathrm{temp}}(k_h *_{\mathbb{T}} u_h^l), \varphi)_{\mathcal{Y}} = (k_h *_{\mathbb{T}} u_h^l, \varphi)_{\mathcal{Y}} + (\mathcal{P}_h^{\mathrm{temp}}(k_h *_{\mathbb{T}} u_h^l) - k_h *_{\mathbb{T}} u_h^l, \varphi)_{\mathcal{Y}},$$

根据（12），附加项趋于零 $h \to 0$。如上所示，第一项弱收敛。因此，我们得到（$\mathcal{P}_h^{\mathrm{temp}}$ （$k_h *_{\mathbb{T}} u_h^l$）） $\rightharpoonup k *_{\mathbb{T}} u$ 属于 $\mathcal{Y}$，从而完成了对时间分量和弱收敛的证明。

接下来，假设 $u_h^l \to u$ 在 $\mathcal{V}$中强收敛。我们再次逐分量证明 $\widetilde{L}_h^l[u_h^l]$ 在 $\mathcal{Y}^{d+2}$中的强收敛。对于第一个分量，由假设 $\epsilon_\theta u_h^l \to \epsilon_\theta u$在 $\mathcal{Y}$中强收敛可直接得到其强收敛。对于空间梯度，我们借助中间近似 $v_h \in \mathcal{V}_h$ 来分解收敛误差；该近似是一个分片仿射函数，其提升满足$v_h^l \to \nabla_{\Gamma_H} u$ 在 $\mathcal{Y}^d$中强收敛。由（$\mathcal{Y}_h^l$）^{d}的逼近性质可保证存在这样一个序列。于是我们写作

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{P}_h^{\mathrm{sp}} \nabla_{\Gamma_H}^h u_h)^l - \nabla_{\Gamma_H} u\|_{\mathcal{Y}^d} \le{}& \|(\mathcal{P}_h^{\mathrm{sp}} \nabla_{\Gamma_H}^h u_h)^l - (\mathcal{P}_h^{\mathrm{sp}} v_h)^l\|_{\mathcal{Y}^d} \\ &+ \|(\mathcal{P}_h^{\mathrm{sp}} v_h)^l - v_h^l\|_{\mathcal{Y}^d} + \|v_h^l - \nabla_{\Gamma_H} u\|_{\mathcal{Y}^d}.\end{aligned}$$

对于第一项，将其提升回 $\mathcal{T}_h$ 并利用 $\mathcal{P}_h^{\mathrm{sp}}$ 的稳定性可得

$$\|(\mathcal{P}_h^{\mathrm{sp}} \nabla_{\Gamma_H}^h u_h)^l - (\mathcal{P}_h^{\mathrm{sp}} v_h)^l\|_{\mathcal{Y}^d}^2 = \int_{\mathcal{T}_h \times \mathbb{T}} \left|\mathcal{P}_h^{\mathrm{sp}}(\nabla_{\Gamma_H}^h u_h - v_h)\right|^2 \nu_h \, \mathrm{d}\Pi_h(\mathbf{x}, t)$$

$$\le \int_{\mathcal{T}_h \times \mathbb{T}} \left|\nabla_{\Gamma_H}^h u_h - v_h\right|^2 \nu_h \, \mathrm{d}\Pi_h(\mathbf{x}, t) \le \|(\nabla_{\Gamma_H}^h u_h)^l - \nabla_{\Gamma_H} u\|_{\mathcal{Y}^d}^2 + \|\nabla_{\Gamma_H} u - v_h^l\|_{\mathcal{Y}^d}^2,$$

根据强收敛假设以及 v_h的选取，当 $h \to 0$ 时，该项收敛至 0。第二项恰好为零，因为 $\mathcal{P}_h^{\mathrm{sp}} v_h = v_h$。根据 v_h的构造，第三项收敛至 0。因此，我们得出 $(\mathcal{P}_h^{\mathrm{sp}} \nabla_{\Gamma_H}^h u_h)^l \to \nabla_{\Gamma_H} u$ 在 $\mathcal{Y}^d$中强收敛。最后，我们证明时间互相关分量的强收敛。我们将误差分解为

$$\begin{aligned}\|K_h[u_h^l] - K[u]\|_{\mathcal{Y}} \le{}& \|K_h[u_h^l] - (k_h *_{\mathbb{T}} u_h^l)\|_{\mathcal{Y}} \\ &+ \|(k_h *_{\mathbb{T}} u_h^l) - (k *_{\mathbb{T}} u_h^l)\|_{\mathcal{Y}} + \|K[u_h^l] - K[u]\|_{\mathcal{Y}}.\end{aligned}$$

对于第一项，时间插值估计 (12) 给出

$$\|K_h[u_h^l] - (k_h *_{\mathbb{T}} u_h^l)\|_{\mathcal{Y}} \le C h^2 \|\partial_{tt}(k_h *_{\mathbb{T}} u_h^l)\|_{\mathcal{Y}} \to 0.$$

利用杨氏不等式可对第二项进行估计

$$\|(k_h *_{\mathbb{T}} u_h^l) - (k *_{\mathbb{T}} u_h^l)\|_{\mathcal{Y}} \le \|k_h - k\|_{L^1(\mathbb{T})} \|u_h^l\|_{\mathcal{Y}} \to 0$$

因为 $k_h \to k$ 属于 $L^1(\mathbb{T})$。对于最后一项，由杨氏不等式可得

$$\|K[u_h^l] - K[u]\|_{\mathcal{Y}} \le \|k\|_{L^1(\mathbb{T})} \|u_h^l - u\|_{\mathcal{Y}} \to 0$$

由于在 $\mathcal{Y}$ 中的强收敛 $u_h^l \to u$。结合这三个估计，我们得出 $K_h[u_h^l] \to K[u]$ 在 $\mathcal{Y}$ 中强收敛，由此完成了时间互相关及强收敛的强收敛性证明。

□

注 2. 引理 *1* 的弱收敛和强收敛结果同样适用于 (10) 中的 $\widetilde{\ }$算子 L_h，以其替代 L_h。两种离散化都收敛到相同的极限算子 $L[u]$，位于 $\mathcal{Y}^{d+2}$中。

接下来，我们考察正问题解的收敛性。

引理 2。设 $v \in L^2(\mathbb{T}; H^1(\Omega_0))$ 为关于 $u \in \mathcal{V}$ 的 (1) 的弱解。对于每个 $h > 0$，记 $v_h \in P_1(\mathcal{U}_h) \otimes P_1(\mathcal{S}_h)$ 为边界条件为 $u_h \in \mathcal{V}_h$ 的离散正问题 (2) 的弱解。令 u_h^l 和 v_h^l 表示提升函数。则下列结论成立：

1. 若 $u_h^l \rightharpoonup u$ 在 $\mathcal{V}$ 中弱收敛，则 $v_h^l \rightharpoonup v$ 在 $L^2(\mathbb{T}; H^1(\Omega_0))$ 中弱收敛。
2. 若 $u_h^l \to u$ 在 $\mathcal{V}$ 中强收敛，则 $v_h^l \to v$ 在 $L^2(\mathbb{T}; H^1(\Omega_0))$ 中强收敛。

证明。通过提升该函数，我们可以将 (8) 重写为：求 v_h^l，使其具有心外膜边界函数 u_h^l，满足

$$a_h^l(v_h^l(\cdot,t),\varphi_h^l) \coloneqq \int_{\Omega_0} \sigma_h(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} H_h^\top \nabla_x \mathbf{x} v_h^l(\mathbf{x},t) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} H_h^\top \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_h^l(\mathbf{x})) \frac{1}{|\det \nabla_{\mathbf{x}} H_h^\top|} \mathrm{d}\mathbf{x} = 0,$$

对所有 $\varphi_h^l \in (P_1(\mathcal{U}_h))^l$ 且满足 $\varphi_h^l|_{\Gamma_H} = 0$。强制性和连续性的证明类似。然后，我们利用 $v_h^l = w_h^l + g_h^l$ 将弱问题改写为式 (9)，得到

$$a_h^l(w_h^l(\cdot,t),\varphi_h^l) = -a_h^l(g_h^l(\cdot,t),\varphi_h^l) \quad \forall \varphi_h^l \in P_1(\mathcal{U}_h), \varphi_h^l|_{\Gamma_H} = 0.$$

对几乎所有 $t \in \mathbb{T}$，以 $\varphi_h^l = w_h^l(\cdot,t)$ 进行测试，得到

$$\left\| w_h^l(\cdot,t) \right\|_{H^1(\Omega_0)} \le C \left\| g_h^l(\cdot,t) \right\|_{H^1(\Omega_0)}.$$

因此，该问题的解存在一个上界

$$\left\| v_h^l(\cdot,t) \right\|_{H^1(\Omega_0)} \le \left\| g_h^l(\cdot,t) \right\|_{H^1(\Omega_0)} + \left\| w_h^l(\cdot,t) \right\|_{H^1(\Omega_0)} \le C \left\| u_h^l(\cdot,t) \right\|_{H^{1/2}(\Gamma_H)}.$$

通过在 $\mathbb{T}$ 上积分，我们证明了 $L^2(\mathbb{T}; H^1(\Omega_0))$ 中的一个上界；借助弱紧性，可取一个子列，使得 $v_h^l \rightharpoonup \widetilde{v}$ 在 $L^2(\mathbb{T}; H^1(\Omega_0))$ 中弱收敛。任取满足 $\varphi|_{\Gamma_H} = 0$ 的 $\varphi \in H^1(\Omega_0)$，并取一个在 $H^1(\Omega_0)$ 中强收敛且满足 $\varphi_h \in P_1(\mathcal{U}_h)$ 的序列 $\varphi_h^l \to \varphi$，则由提升的一致性可得

$$\int_{\mathbb{T}} a_h^l(v_h^l(\cdot,t),\varphi_h^l)\mathrm{d}t \to \int_{\mathbb{T}} a(\widetilde{v}(\cdot,t),\varphi)\mathrm{d}t \quad \text{with} \quad a(\widetilde{v}(\cdot,t),\varphi) = 0 \quad \text{for a.e.} \quad t \in \mathbb{T}.$$

此外，对几乎所有 $t \in \mathbb{T}$，有 $\widetilde{v}(\cdot,t)|_{\Gamma_H} = u(\cdot,t)$；由连续问题的唯一性，$\widetilde{v}(\cdot,t) = v(\cdot,t)$，这证明了在 $L^2(\mathbb{T}; H^1(\Omega_0))$ 中的弱收敛。

接下来，我们假设 $u_h^l \to u$ 在 $\mathcal{V}$中强收敛。对于几乎所有的 $t \in T$，问题的真实解都存在一个上界

$$\left\| v(\cdot,t) - v_h^l(\cdot,t) \right\|_{H^1(\Omega_0)} \le \left\| g(\cdot,t) - g_h^l(\cdot,t) \right\|_{H^1(\Omega_0)} + \left\| w(\cdot,t) - w_h^l(\cdot,t) \right\|_{H^1(\Omega_0)}.$$

和式的第一部分可以通过心外膜上的迹延拓算子从上方估计，从而

$$\left\| g(\cdot,t) - g_h^l(\cdot,t) \right\|_{H^1(\Omega_0)} \le C_E \left\| u(\cdot,t) - u_h^l(\cdot,t) \right\|_{H^{1/2}(\Omega_0)},$$

根据假设，该项趋于零。关于第二个误差的上界，请参阅 [9, 定理 6。1]。对时间进行积分可得在 $\mathcal{V}$中的强收敛。 □

接下来，我们证明能量泛函的收敛性。

引理 3。设 R_θ 为凸函数， $z_h \to z$ 属于 $(L^2(T))^{N_\Sigma}$，且k_h、$_i \to k_i$ 属于 $L^1(\mathbb{T})$，其中$i = 1$、……、N_C。那么，对于任意满足 $u_h \xrightarrow{\mathcal{Z}} u \in \mathcal{V}$的序列 $(u_h)_h \subset \mathcal{V}_h$，有$G(u, z) \le \liminf_{h\to 0} G_h(u_h, z_h)$，且 $R_\theta(u) \le \liminf_{h\to 0} R_{\theta,h}(u_h)$。若 $u_h \xrightarrow{\mathcal{Z}} u$，则$G(u, z) = \lim_{h\to 0} G_h(u_h, z_h)$，且 $R_\theta(u) = \lim_{h\to 0} R_{\theta,h}(u_h)$。

证明。假设 $u_h \xrightarrow{\mathcal{Z}} u$，因此 $u_h^l \xrightarrow{\mathcal{V}} u$。将弱形式（8）中边界条件 u_h^l 对应的提升解记为 v_h^l。由引理 2 可知 $v_h^l \xrightarrow{\mathcal{V}} v$。定义 A_h^l 为依赖于离散问题（2）中边界条件 u_h^l对应的提升解 v_h^l 的提升算子。与线性有界迹算子复合后，弱收敛得以保持 $A_h^l[u_h^l] \xrightarrow{\mathcal{V}} A[u]$。根据 D 的下半连续性以及 z_h的强收敛，可得所需结果。

由于 ϕ_i 对所有自变量都是凸且连续的， R_θ 是弱下半连续的，结合引理 1 可得

$$\begin{aligned} R_\theta(u) &\le \liminf_{h\to 0} \lambda_\theta \sum_{i=1}^{N_C} \int_{\Gamma_H\times\mathbb{T}} \phi_i(L_{h,i}^l[u_h^l](\mathbf{x},t), \widetilde{L}_{h,i}^l[u_h^l](\mathbf{x},t))\mathrm{d}\Pi(\mathbf{x},t) \\ &= \liminf_{h\to 0} \lambda_\theta \sum_{i=1}^{N_C} \int_{\mathcal{T}_h\times\mathbb{T}} \phi_i(L_{h,i}[u_h](\mathbf{x},t), \widetilde{L}_{h,i}[u_h](\mathbf{x},t))\nu_h\mathrm{d}\Pi_h(\mathbf{x},t). \end{aligned}$$

根据（16），在极限 $h \to 0$ 中可以去掉 ν_h，从而得到 R_θ（u）$\le \liminf_{h\to 0} R_{\theta,\ h}$（$u_h$）。假设 $u_h \xrightarrow{\mathcal{Z}} u$，则提升序列强收敛 $u_h^l \xrightarrow{\mathcal{V}} u$；引理 2 与迹定理共同推出，对于几乎处处的 $t \in \mathbb{T}$ 以及 $i = 1$，…，N_Σ

$$\left\|A[u](\cdot,t) - A_h^l[u_h^l](\cdot,t)\right\|_{H^{1/2}(\Sigma_i)} \le C_T \left\|v(\cdot,t) - v_h^l(\cdot,t)\right\|_{H^1(\Omega_0)} \to 0.$$

此外，根据柯西-施瓦茨不等式以及 L^1 在有界区域中嵌入 L^2，我们可以写成

$$\left| \fint_{\Sigma_i} A[u](\mathbf{x},t) - A_h^l[u_h^l](\mathbf{x},t)\mathrm{d}S^\Gamma(\mathbf{x}) \right|^2 \le \frac{1}{|\Sigma_i|} \left\|A[u](\cdot,t) - A_h^l[u_h^l](\cdot,t)\right\|_{L^2(\Sigma_i)}^2 \to 0.$$

因此，结合 z_h的强收敛性

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\fint_{\Sigma_i} A[u]\mathrm{d}S^\Gamma(\mathbf{x}) - z_i \right)^2 \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}} \left(\fint_{\Sigma_i} A_h^l[u_h^l]\mathrm{d}S^\Gamma(\mathbf{x}) - z_{h,i} \right)^2 \mathrm{d}t + o(1).$$

通过将逆提升应用于满足 $A_h^l[u_h^l](p(\mathbf{x})\ t) = A_h[u_h](\mathbf{x}\ t)$ 的边界流形，我们可以将其改写为

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\fint_{\Sigma_i} A_h^l[u_h^l]\mathrm{d}S^\Gamma(\mathbf{x}) - z_{h,i} \right)^2 \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}} \left(\fint_{\mathcal{T}^{\Sigma_i}} A_h[u_h]\mathrm{d}S_h^\Gamma(\mathbf{x}) - z_{h,i} \right)^2 \mathrm{d}t + o(1).$$

对所有电极 $i = 1, \ldots, N_\Sigma$ 求和，并乘以 $(2N_\Sigma)^{-1}$，即可得到结论。

我们通过控制收敛定理证明正则化项的收敛性。根据引理 1， $u_h^l \xrightarrow{\mathcal{V}} u$ 意味着 $\widetilde{L}_{h,i}^l[u_h^l] \xrightarrow{\mathcal{Y}^{d+2}} L[u]$。因此，存在一个子列，使得对于几乎处处的 $(\mathbf{x}\ t) \in \Gamma_H \times \mathbb{T}$，有 $\widetilde{L}_{h,i}^l[u_h^l](\mathbf{x}\ t) \to L[u](\mathbf{x}\ t)$。由于 ϕ_i 在所有自变量上都是连续的，我们得到

$$\widetilde{\phi}_i(L_{h,i}^l[u_h^l]((\mathbf{x},t), \widetilde{L}_{h,i}^l[u_h^l]((\mathbf{x},t)) \to \phi_i(L[u](\mathbf{x},t)) \quad \text{for almost every} \quad (\mathbf{x},t) \in \Gamma_H\times\mathbb{T}.$$

$\widetilde{\ }$为保证可积性，我们需要给出关于 ϕ_i 的增长估计。我们首先从上方对 $\widetilde{\omega}_\mu^{d+2}$ 进行有界化 $\|\mathrm{Proj}^{B_{\ell^1}}(\mathbf{y}/\mu)\|_2 \le \|\mathrm{Proj}^{B_{\ell^1}}(\mathbf{y}/\mu)\|_1 \le 1$，并根据三角不等式

$$\left\|\mathbf{y} - \mu\,\mathrm{Proj}_{B_{\ell^1}}(\mathbf{y}/\mu)\right\|_\infty \le \|\mathbf{y}\|_\infty + \mu \left\|\mathrm{Proj}_{B_{\ell^1}}(\mathbf{y}/\mu)\right\|_\infty \le \|\mathbf{y}\|_2 + \mu.$$

两者结合可确保有界性 $\widetilde{\omega}_{\mu}^{d+2}(\mathbf{y}\ \widetilde{\ }\mathbf{y}) \le C_1 + C_2(\|\mathbf{y}\|_2^2 + \|\widetilde{\ }\mathbf{y}\|_2^2)$；再由 $\|\mathbf{Q}_i\|$ 的有界性可得增长条件

$$\widetilde{\phi}_i(\mathbf{y},\widetilde{\mathbf{y}}) = \mu_i\widetilde{\omega}_{\mu_i}^{d+2}(\mathbf{y},\widetilde{\mathbf{y}}) + \mu_i\widetilde{\omega}_{\eta_i\mu_i}^{d+2}(\mathbf{Q}_i\mathbf{y},\mathbf{Q}_i\widetilde{\mathbf{y}}) \le \widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_2(\|\mathbf{y}\|_2^2 + \|\widetilde{\mathbf{y}}\|_2^2).$$

因此，$\widetilde{\phi}_i(L_{h,\ i}^l[u_h^l](\mathbf{x}\ t)\,\widetilde{L}_{h,\ i}^l[u_h^l](\mathbf{x}\ t))$ 在 $L^1(\Gamma_H \times T)$ 中一致可积，由控制收敛可得

$$\begin{aligned} R_\theta(u) &= \lim_{h\to 0}\lambda_\theta \sum_{i=1}^{N_C}\int_{\Gamma_H\times\mathbb{T}} \widetilde{\phi}_i(L_{h,i}^l[u_h^l](\mathbf{x},t),\widetilde{L}_{h,i}^l[u_h^l](\mathbf{x},t))\mathrm{d}\Pi(\mathbf{x},t) \\ &= \lim_{h\to 0}\lambda_\theta \sum_{i=1}^{N_C}\int_{\mathcal{T}_h\times\mathbb{T}} \widetilde{\phi}_i(L_{h,i}[u_h](\mathbf{x},t),\widetilde{L}_{h,i}[u_h](\mathbf{x},t))\nu_h\mathrm{d}\Pi_h(\mathbf{x},t) = R_{\theta,h}(u_h). \end{aligned}$$

□

接下来，我们证明 Mosco 收敛以及极小化子的收敛。

定理 2.（*Mosco* 收敛）设引理 *3* 的假设成立。则~$\mathcal{J}_h$ 相对于 $\mathcal{Z}$-拓扑 *Mosco* 收敛到 $\mathcal{J}$。

证明。（'下极限不等式'）设 $(u_h)_h \subset \mathcal{V}_h$ 是一个满足 $u_h \xrightarrow{\mathcal{Z}} u \in \mathcal{V}$ 的序列。因此，对于 u_h的投影 u_h^l，有 $u_h^l \xrightarrow{\mathcal{V}} u$。根据 $u_h \in \mathcal{V}_h$的构造，我们~有 $\sup_{h>0}\{\mathcal{J}_h(u_h, z_h)\} < \infty$。然后，由引理 3 可得

$$R_\theta(u) \le \liminf_{h\to 0} R_\theta(u_h) \quad \text{and} \quad D(u,z) \le \liminf_{h\to 0} D(u_h^l, z).$$

~综合这些结果，我们得到 $\mathcal{J}(u,z) \le \liminf_{h\to 0}\mathcal{J}_h(u_h,z_h)$，从而确立了下极限条件。

('上极限不等式') 由于 Γ_H 是闭黎曼流形，$C^\infty(\Gamma_H)$ 在 $H^1(\Gamma_H)$ 中稠密，如 [16] 中所证。对 $u \in \mathcal{V}$ 在时间上应用磨光，我们得到 $u * p_\eta \in C^\infty(\mathbb{T};\, H^1(\Gamma_H))$，当 $\eta \to 0$ 时在 $\mathcal{V}$ 中收敛。因此,_我们可以构造一个光滑序列 $(u_n)_n \subset C^\infty(\Gamma_H \times \mathbb{T})$，使得 $u_n \xrightarrow{\mathcal{V}} u$。对每个 u_n，我们构造序列 $(u_{n,h}^l)_h$，满足 $u_{n,h}^l \xrightarrow{\mathcal{V}} u_n$。选取对角子列 $h = h(n)$ 得到恢复序列 $u_{h(n)}^l \xrightarrow{\mathcal{V}} u$。命题 1 与对时间的积分表明，若 $u_h^l \in \mathcal{V}$，则 $u_h \in L^2(T;\, H^1(\mathcal{T}_h))$，且插值误差在 $h \to 0$ 时趋于零。最后，应用引理 3 可得

$$\lim_{h\to 0}\widetilde{\mathcal{J}}_h(u_h,z_h) = \lim_{h\to 0} G_h(u_h,z_h) + R_\theta(u_h) = G(u,z) + R(u,z) = \mathcal{J}(u,z),$$

这就建立了上极限不等式，并完成了证明。 □

最后，我们证明离散极小化子收敛到连续极小化子。

定理 3.（极小化子的收敛性）设引理 *3* 的假设成立，且$(u_h)_h \subset \mathcal{V}_h$ 是离散能量 $\mathcal{J}_h$ 的一列极小化子。那么，序列$(u_h)_h$ 在 $\mathcal{Z}$-拓扑下弱收敛（取某个子列后）到 $\mathcal{J}$ 的一个极小元，并且$\lim_{h\to 0}\inf_{u_h\in\mathcal{V}_h}\left\{\widetilde{\mathcal{J}}_h(u_h, z_h)\right\} = \inf_{u\in\mathcal{V}}\{\mathcal{J}(u, z)\}$。

证明。由于极小化子序列是在 $\mathcal{V}_h$中构造的，对于离散~能量$\sup_{h>0}\{\mathcal{J}_h(u_h,\ z_h)\} < \infty$，由构造可知，势函数满足

$\sim\phi_i(\mathbf{y}\ \tilde{}\ \mathbf{y}) \geq \frac{\epsilon_\omega}{2}\|\mathbf{y}\|_2^2$，因此对于 $C>0$，我们有

$$
\begin{aligned}
R_{\theta,h}(u_h) &= \lambda_\theta \sum_{i=1}^{N_C} \int_{\mathcal{T}_h\times\mathbb{T}} \widetilde{\phi}_i(L_{h,i}[u_h](\mathbf{x},t), \widetilde{L}_{h,i}[u_h](\mathbf{x},t))\mathrm{d}\Pi_h(\mathbf{x},t) \\
&\geq \lambda_\theta \frac{\epsilon_\omega}{2} \sum_{i=1}^{N_C} \int_{\mathcal{T}_h\times\mathbb{T}} (\epsilon_\theta u_h(\mathbf{x},t))^2 + |\nabla^h_{\Gamma_H} u_h(\mathbf{x},t)|^2 + (K_{h,i}[u_h](\mathbf{x},t))^2 \mathrm{d}\Pi_h(\mathbf{x},t) \\
&\geq C \int_{\mathcal{T}_h\times\mathbb{T}} (u_h(\mathbf{x},t))^2 + |\nabla^h_{\Gamma_H} u_h(\mathbf{x},t)|^2 \mathrm{d}\Pi_h(\mathbf{x},t) = C\|u_h\|^2_{\mathcal{V}_h} \geq \widetilde{C}\|u_h^l\|^2_{\mathcal{V}}.
\end{aligned}
$$

由弱紧性可知，希尔伯特空间 $\mathcal{V}$ 中的任意有界序列都存在一个弱收敛子序列。因此，存在子列 $u_h^l \xrightarrow{\mathcal{V}} u^\infty$，从而 $u_h \xrightarrow{z} u^\infty$。由定理 2 中的下极限不等式可知

$$
\mathcal{J}(u^\infty, z) \leq \liminf_{h\to 0} \widetilde{\mathcal{J}}_h(u_h, z_h) = \liminf_{h\to 0} \inf_{v_h\in\mathcal{V}_h} \left\{\widetilde{\mathcal{J}}_h(v_h, z_h)\right\}.
$$

相应的上界可直接由定理 2 的上极限不等式推出：选取一个序列 $(\widetilde{u}_h)_h$，使其收敛到 $\mathcal{J}$ 的一个极小元

$$
\limsup_{h\to 0} \inf_{v_h\in\mathcal{V}_h} \left\{\widetilde{\mathcal{J}}_h(v_h, z_h)\right\} \leq \limsup_{h\to 0} \widetilde{\mathcal{J}}_h(\widetilde{u}_h, z_h) = \inf_{v\in\mathcal{V}} \{\mathcal{J}(v,z)\}.
$$

最后，我们得出

$$
\mathcal{J}(u^\infty, z) \leq \liminf_{h\to 0} \inf_{v_h\in\mathcal{V}_h} \left\{\widetilde{\mathcal{J}}_h(v_h, z_h)\right\} \leq \limsup_{h\to 0} \inf_{v_h\in\mathcal{V}_h} \widetilde{\mathcal{J}}_h(v_h, z_h) \leq \inf_{v\in\mathcal{V}} \{\mathcal{J}(v,z)\}
$$

因此 $u^\infty \in \arg\min_{v\in\mathcal{V}} \{\mathcal{J}(v,\ z)\}$。 □

注 3. 如果不假设 R_θ 是凸的，那么 $\mathcal{V}$ 中的弱收敛不再足以保证在下极限不等式中取极限。在这种情况下，需要 $\mathcal{V}$ 中的强收敛。一种自然的保证方式是，在更正则的空间中对极小化序列加以界定，例如

$$
H^1(\mathbb{T}; H^{-1}(\Gamma_H)) \cap L^2(\mathbb{T}; H^2(\Gamma_H)),
$$

其范数可乘以一个较小的权重后加入能量泛函（$0<\epsilon\ll 1$），以确保额外的正则性。根据 *Aubin–Lions*引理，该空间紧嵌入到 $\mathcal{V}$ 中，从而保证极小化序列在 $\mathcal{V}$ 中强收敛。

5 优化

本节介绍反问题和高斯去噪的变分形式与数值极小化，以及用于学习正则化项的双层优化方法。

5.1 能量极小化

我们在经高斯去噪的函数上训练多元FoE型正则化项，以学习能够捕捉心外膜电位结构特性的数据驱动先验。我们期望所学习的正则化函数能够推广到纯去噪以外的其他反问题。令 $v_h^m \in \mathcal{V}_h$, $m = 1$、.....、M 表示缩放至区间 $[0,1]$ 的无噪声输入。相应的含噪观测定义为

$$
z_h^m = v_h^m + \kappa^m n_h^m, \quad m = 1, \ldots, M,
$$

其中，$n_h^m \in \mathcal{V}_h$ 是噪声实现，其节点系数向量满足 $\mathbf{n}^m \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{N_\mathcal{V}\times(N_\mathbb{T}+1)})$，$\kappa^m > 0$ 表示噪声标准差。近端算子通过正则化项 $R_{\theta,\,h}$ 求解去噪问题

$$\operatorname*{prox}_{R_{\theta,h}}(z_h) = \operatorname*{arg\,min}_{u_h\in\mathcal{V}_h} \left\{ \frac{1}{2}\|u_h - z_h\|_{\mathcal{Y}_h}^2 + R_{\theta,h}(u_h) \right\}. \tag{17}$$

在这一表述中，高斯去噪对应于最小化一个能量泛函，其结构与反问题 (3) 中的能量泛函相同；区别在于，原始的数据保真项 $G(u,\ z)$ 被替换为 $\widetilde{G}(u,\ z) := \frac{1}{2}\|u-z\|_{\mathcal{Y}}^2$，后者用于衡量与含噪输入 z 之间的 L^2 距离平方。反问题 (3) 和去噪问题 (17) 均采用 [7]中提出并在算法 1 中概述的带重启的加速梯度下降法进行最小化。我们首先计算各函数的 Fr´echet 导数，然后对其进行离散化，并使用节点值和矩阵形式将其表示为向量值量，如表 1 所示。对于正则化函数 R_θ，为求简便，我们仅使用插值线性算子 L_i，并定义线性算子 $L:\ u \mapsto (L_1[u],\ \ldots,\ L_{N_C}[u])$，以及势函数 $\Phi(x_1,\ \ldots,\ x_{N_C})$ 的向量值导数 $=(\phi_1'(x_1),\ \ldots,\ \phi_{N_C}'(x_{N_C}))$，其中

$$\phi_i'(\mathbf{y}) = \mu_i\Big(\mathrm{Proj}_{B_{\ell^1}}(\mathbf{y}/\mu_i) - \mathbf{Q}_i^\top \mathrm{Proj}_{B_{\ell^1}}(\mathbf{Q}_i\mathbf{y}/(\mu_i\eta_i)) + \epsilon_\omega(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_i^\top\mathbf{Q}_i)\mathbf{y}\Big),$$

其中 $\|\mathbf{Q}_i\|_2 = 1$ 确保 ϕ_i' 是利普希茨连续的，常数为 $(1+\epsilon_\omega)$。~此外，每个线性算子 L_i^* 都通过以下方式离散化

$$\widetilde{\mathbf{L}}_i^*\mathbf{u} = (\epsilon_\theta \mathbf{I}_{N_\mathcal{V}\times(S+1)} + \sum_{j=1}^{d} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P}^{\mathrm{sp}}\boldsymbol{\nabla}_{\Gamma_H,j})^\top\mathbf{M} + \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{P}^{\mathrm{temp}}\mathbf{K}_i)^\top\mathbf{D})\mathbf{u}$$

使其在有限元函数空间中成为伴随算子。空间质量矩阵和时间质量矩阵仅出现在算子分别作用于空间或时间的分量中；如果某个分量仅依赖于空间（或时间），则不会出现相应的时间（或空间）质量矩阵。为确定步长

Fr´échet 导数	离散化
$\mathcal{D}\widetilde{G}(u,\ z)(\mathbf{x}\ t) = (u-z)(\mathbf{x}\ t)$	$\nabla\widetilde{\mathbf{G}}_h(\mathbf{u},\ \mathbf{z}) = \mathbf{u} - \mathbf{z}$
$\mathcal{D}G(u,z)(\mathbf{x}\ t) = \widetilde{A}^*\widetilde{A}[u](\mathbf{x}\ t) - \widetilde{A}^*[z](\mathbf{x}\ t)$	$\nabla\mathbf{G}_h(\mathbf{u},\mathbf{z}) = \mathbf{M}^{-1}\,\widetilde{\mathbf{A}}^\top(\widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{u} - \mathbf{z})$
$\mathcal{D}R_\theta(u)(\mathbf{x}\ t) = \lambda_\theta \widetilde{L}^*\Phi(\widetilde{L}[u])(\mathbf{x}\ t)$	$\nabla\mathbf{R}_{\theta,\,h}(\mathbf{u}) = \lambda_\theta\widetilde{\mathbf{L}}^*\Phi(\widetilde{\mathbf{L}}\mathbf{u})$

表 1：优化中使用的 Fr´echet 导数及其离散近似。

对于算法 1，我们计算导数的利普希茨常数。我们通过幂法估计 $\mathbf{L}^*\mathbf{L}$ 的最大特征值：

$$\mathbf{u}_{k+1} = \frac{\widetilde{\mathbf{L}}^*\widetilde{\mathbf{L}}\mathbf{u}_k}{\|\widetilde{\mathbf{L}}^*\widetilde{\mathbf{L}}\mathbf{u}_k\|_2}, \quad \lambda_{\max}(\widetilde{\mathbf{L}}^*\widetilde{\mathbf{L}}) = \|\widetilde{\mathbf{L}}^*\widetilde{\mathbf{L}}\mathbf{u}_{N_{\lambda_{\max}}}\|_2,$$

~最大迭代次数为 $N_{\lambda_{\max}} \in \mathbb{N}$。导数 $\mathcal{D}(G+R_\theta)$ 的利普希茨常数决定了加速梯度下降算法的步长，并通过 $\mathcal{L} = 1 + (1+\epsilon_\omega)\,\lambda_{\max}(\mathbf{L}^*\mathbf{L})$ 计算得出。在计算反问题的重建时，利普希茨常数 $\mathcal{D}G$ 通过 $\lambda_{\max}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})$ 计算得出。

算法 1： 采用基于目标函数的重启的加速梯度下降

1. **初始化：** 设置 $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$、观测值 $\mathbf{z}$、 $\mathcal{L}$ 的利普希茨常数 $\mathcal{D}(\widetilde{G} + R_\theta)$、$\tau_0 = 1$、$f^0 = \infty$、$\mathbf{v}^0 = \mathbf{u}^0$。

2. **迭代** $(n \geq 0)$：计算

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{v}^n - \mathcal{L}^{-1}\nabla(\widetilde{\mathbf{G}}_h(\mathbf{v}^n, \mathbf{z}) + \mathbf{R}_{\theta,h}(\mathbf{v}^n)), \quad \tau_{n+1} = \frac{1+\sqrt{1+4\tau_n^2}}{2}, \\ \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1} + \frac{\tau_n - 1}{\tau_{n+1}}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n), \quad f^{n+1} = \widetilde{\mathbf{G}}_h(\mathbf{u}^n, \mathbf{z}) + \mathbf{R}_{\theta,h}(\mathbf{u}^n) \end{cases}$$

If $f^{n+1} > f^n$, reset: $\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1}, \tau_{n+1} = 1$.

5.2 学习正则化项

对于正则化项的泛化，我们通过公式（7）中的加权参数 $\mu_i(\kappa)$，将 R_θ 建模为噪声水平 κ 的函数。更多详细信息见 [7]。正则化项通过以下损失函数进行训练

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{\sqrt{\kappa^m}}\|v_h^m - \operatorname*{prox}_{R_{\theta,h}}(z_h^m)\|_{\mathcal{Y}_h},$$

这形成了一个双层优化问题：内层问题通过最小化能量来优化 $u_h \in \mathcal{V}_h$，而外层问题则更新多变量 FoE 正则化器（6）的参数 θ 。这些参数包括全局权重 λ_θ 和ϵ_θ、时间核函数 k_i，以及由神经网络表示的势函数参数ϕ_i。我们通过去噪来计算先验，因为正则化项的近端算子能够有效编码无噪函数的典型结构：通过学习 R_θ ，使得 prox $_{R_\theta}(z_h)$能够去除高斯噪声，该正则化项便捕获了干净函数 v_h^m的统计特性。训练完成后，所学习的先验可以迁移到其他反问题中，在直接求逆不稳定的情况下提供稳健的指导。

为优化神经网络参数，我们使用 PyTorch [23]实现模型，并采用隐式微分，高效计算模型所定义的平衡点处的梯度。具体而言，我们使用 torchdeq 库 [12], ，该库为深度平衡模型提供了可扩展的工具，并采用布罗伊登算法作为不动点求解器。这种拟牛顿法无需通过求解器的所有迭代步骤显式执行反向传播，即可快速且高效地收敛至不动点。我们使用 ADAM 优化器来优化神经网络参数。训练在 NVIDIA A40 GPU 上进行。

6 结果

我们在二维模拟上训练并基准评估用于去噪和反问题的学习型正则化方法，并将其与最先进的手工设计有限元正则化器进行比较，包括时空一阶 Tikhonov 和全变分。

6.1 数据集生成

我们在图2所示的二维躯干–心脏模型 [11] 上模拟了 1000 个心外膜电势场，该模型包含肺。数据随机划分为训练集（80%）、验证集（10%）和测试集（10%）。合成数据通过在更精细的二维心脏网格上，使用有限元反应–扩散

模型模拟心脏活动生成，并通过最近邻插值映射到较粗糙的躯干-心脏模型上，以避免逆向犯罪。跨膜电位 $v : \Omega_0 \times T \to \mathbb{R}$ 按照 [25] 中提出的方法计算。

$$C_m \partial_t v - \frac{1}{\beta} \nabla(\mathbf{G}_m \nabla v) + I_{\text{ion}}(v) = I_{\text{stim}}, \quad I_{\text{stim}}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} I_{\max} \mathbf{1}_{\text{stim}}(\mathbf{x}), & 0 \le t < I_{\text{dur}}, \\ 0, & t \ge I_{\text{dur}}, \end{cases}$$

其中，空间指示函数用于表示随机定位的刺激区域 $\mathbf{1}_{\text{stim}}$ ，并采用逐单元各向异性的细胞内和细胞外电导率 $\mathbf{G}_i$ 以及$\mathbf{G}_e$

$$\mathbf{G}_\alpha = \sigma_{\alpha,t} \mathbf{I} + (\sigma_{\alpha,l} - \sigma_{\alpha,t}) \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}, \quad \alpha \in \{i, e\}, \quad \mathbf{G}_m = \mathbf{G}_i (\mathbf{G}_i + \mathbf{G}_e)^{-1} \mathbf{G}_e,$$

其中，$\mathbf{l}$ 表示局部纤维方向；在心脏模型中，该方向取为围绕心室的环向方向，反映了心肌纤维的典型取向。电导率按照 [26] 进行计算：固定 $\sigma_{i,l}$ ，并将其余分量确定为 $\lambda_{\text{LT}}, \alpha$和 ε的函数：

$$\sigma_{i,t} = \frac{\sigma_{i,l}}{\lambda_{\text{LT}}^2} \left(\frac{1 + \alpha(1 - \varepsilon)}{1 + \alpha} \right), \quad \sigma_{e,t} = \frac{\sigma_{i,t}}{\alpha(1 - \varepsilon)}, \quad \sigma_{e,l} = \frac{\sigma_{i,l}}{\alpha}.$$

以概率 $1/3$引入一个具有指定半径的随机定位瘢痕组织区域，方法是将电导率张量 $\mathbf{G}_m$ 乘以一个从 $[0.05, 0.25]$ 中均匀抽取的因子；以概率 $1/6$再加入第二个瘢痕区域。离子电流遵循不包含复极化的Nagumo型立方模型，

$$I_{\text{ion}}(v) = g_{\max}(v - V_{\text{rest}})(v - V_{\text{th}})(v - V_{\text{dep}}),$$

其中去极化电位、静息电位和阈值电位均固定。时间积分采用后向欧拉法，并使用 Δt，得到

$$\left(C_m \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{\beta} \mathbf{K}_m \right) \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{C} \left(C_m \mathbf{v}^n - \Delta t (I_{\text{ion}}(\mathbf{v}^n) - I_{\text{stim}}) \right),$$

其中，$\mathbf{K}_m$ 对应于 $\nabla \cdot (G_m \nabla \cdot)$ 的有限元离散，$\mathbf{C}$ 是相应的质量矩阵，$\mathbf{v}$ 包含节点值。对于每个 n_{sample}时间步，通过伪双域模型 [2] 计算细胞外电位v_e

$$(\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_e + \eta \mathbf{M}) \mathbf{v}_e = -\mathbf{K}_i \mathbf{v} \quad \text{with} \quad \eta = 10^{-9}.$$

图3展示了数据集中的一个模拟心外膜电位，其中包含瘢痕组织。用于生成该数据集的模拟参数汇总于表2。

V_{rest}	V_{dep}	V_{th}	$g_{\max}$	$\sigma_{i,l}$	λ_{LT} [26]	ε [26]
-85mV	30mV	-55mV	1.4×10^{-3}	3S/m	$[2.16, 2.84]$	$[0.58, 0.93]$
α [26]	C_m [25]	β [25]	$I_{\max}$	I_{dur}	Δt	n_{sample}
1	1μF/厘米²	100cm^{-1}	1.2μA/厘米²	100毫秒	$[0.07, 0.12]$毫秒	$[7, 13]$

表2：生成合成数据集所用的模型参数和采样范围。参数从所示区间内均匀随机抽取。

6.2 基线方法

作为手工设计的基线方法，我们考虑时空一阶 Tikhonov（**TIK**）正则化，

$$\widetilde{G}(u, z) + \frac{1}{2} \left\| \Lambda \nabla_{(\mathbf{x},t)} u \right\|_{\mathcal{Y}^d}^2,$$

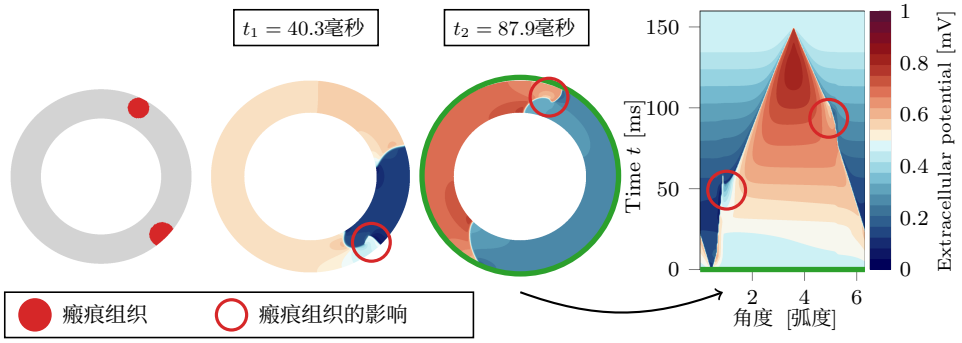

图 3：存在瘢痕组织时三个时间步下心肌上的细胞外电位 v ，以及归一化至 $[0,1]$ 的心外膜时空图。瘢痕区域电导率降低，使特征性尖峰状电位发生变形，并减缓传播。

其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_\gamma, \ldots, \lambda_\gamma, \lambda_t) \in \mathbb{R}_+^{(d+1)\times(d+1)}$， λ_γ和 λ_t 分别表示空间和时间正则化参数。通过对最优性系统应用共轭梯度法求解该优化问题。此外，我们还将其与各向同性时空全变分（**TV**）正则化 [15],进行比较。

$$\widetilde{G}(u,z) + \int_{\Gamma_H \times \mathbb{T}} \left\| \Lambda \nabla_{(\mathbf{x},t)} u(\mathbf{x},t) \right\|_2 \mathrm{d}\Pi(\mathbf{x},t),$$

使用一阶原始-对偶算法对其进行最小化。所有基线方法均使用集中质量矩阵计算，因为这能显著缩短计算时间，同时在视觉效果和 L^2 误差方面造成的差异可以忽略不计。

6.3 去噪

我们首先评估 FoE 模型在心外膜电位高斯去噪任务中的表现，其中真实值（**真实值**）函数受到标准差为 κ 的高斯噪声污染，与训练时使用的噪声相同。本节重点展示模型从含噪观测中重建干净信号的能力，这也说明了将其用作更一般逆问题先验的理由。最后，我们分别在凸（**CMFoE**）和非凸（**MFoE**）形式下评估所提出的时空 FoE 类正则化项。凸版本具有理论保证，且行为可预测；非凸版本则更加灵活，能够捕捉复杂的信号相关性，并有望提升实际表现。用于调节模型的参数为输入噪声水平 κ 和学习得到的加权参数 λ_θ。为扩大滤波器的作用范围，我们将每个滤波器构造为三个定义在较小区间上的滤波器的复合，从而增加每个互相关的输出通道数，即 $k_i(t) = \int_{\mathbb{R}^2} k_i^3(s) k_i^2(\tau) k_i^1(\tau+s+t)\mathrm{d}(s,\ \tau)$，其中 $k_i^j \in L^1(\widetilde{\mathbb{T}})$ 且 $k_i^j = 0$ 定义在 $\mathbb{R} \setminus \widetilde{\mathbb{T}}$ 上。图 4 展示了从高斯去噪中学习得到的分段仿射核函数 k_{h_i}，每个 $k_{h,\ i}^j$ 均定义在 $\widetilde{\mathbb{T}} = [t_{-2}, t_2]$ 上。模型训练 10000 次迭代，学习率为 0.005，并在 2500 次迭代后衰减至原来的 0.75；由于节点向量的时间值数量各不相同，批量大小设为 1。

图5展示了在噪声水平为 $\kappa = 0.2$ 时，采用不同正则化方法获得的代表性去噪结果。表3中，测试集上多个不同噪声水平下的去噪误差，是先在验证集上调整参数后计算得出的。正如预期，**TIK** 正则化会产生过度平滑的重建结果：虽然能有效降低噪声，但也会模糊尖锐特征，且无法保留边缘，导致精细结构细节丢失。在

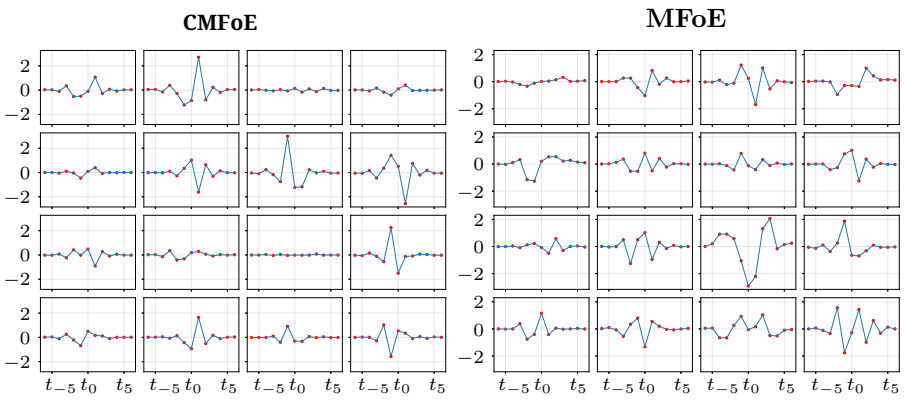

图 4：FoE 方法的学习核函数 $(k_{h,i})_{i=1}^{N_C}$，用于 $N_C = 16$ b y 去噪。

相比之下，**全变分** 正则化能够生成边缘明显更清晰的重建结果。不连续和分片常数区域都得到了很好的保留。时空**CMFoE** 和**MFoE** 正则化器的去噪效果最佳，非凸情况下的性能提升尤为显著，能够有效抑制高斯噪声，同时保留清晰的空间和时间特征。与手工正则化器相比，其学习滤波器能更好地适应噪声特性，生成在视觉效果和定量指标上都更接近真实值的重建结果。

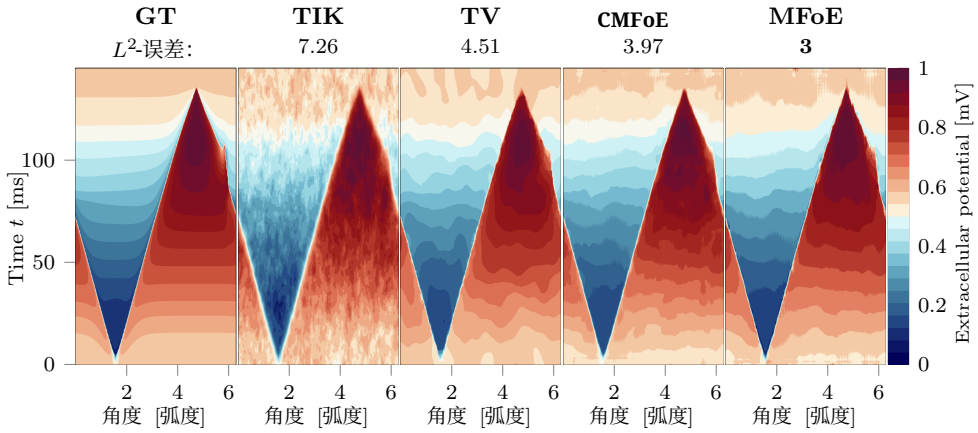

图5：在时空图中展示了对真实值施加噪声水平为 $\kappa = 0.2$ 的观测，采用多种正则化方法得到的去噪重建及其 L^2误差。

6.4 反问题

接下来，我们考察心电成像逆问题，并再次比较**TIK** 正则化、**全变分** 正则化以及所提出的时空**CMFoE** 和**MFoE** 方法，如图6所示；表4评估了这些方法在不同噪声水平下的表现，噪声水平以观测数据的信噪比（SNR）衡量。与纯去噪场景不同，该反问题严重不适定；由于优化过程中需要反复求解正问题和伴随问题，重建所需的计算时间也显著更长。反问题的不适定性在重建中清晰可见

κ \ Reg.	**TIK**	**TV**	**CMFoE**	**MFoE**
0.05	3.85	2.16	1.72	**1.59**
	$\lambda_\gamma, \lambda_t = 0.595$,**1.189**	$\lambda_\gamma,\ \lambda_t = 0.088,\ 0_\circ 044$	$\lambda_\theta, \kappa = 6.97, 0.02$	$\lambda_\theta, \kappa = 7.23, 0.05$
0.1	5.4	3.15	2.6	**2.19**
	$\lambda_\gamma,\ \lambda_t = 1.091,\ 1.834$	$\lambda_\gamma, \lambda_t = 0.177$,**0.088**	$\lambda_\theta, \kappa = 6.97, 0.1$	$\lambda_\theta, \kappa = 7.23, 0.1$
0.2	7.32	4.74	3.84	**3.23**
	$\lambda_\gamma,\ \lambda_t = 1.834,\ 2_\circ 828$	$\lambda_\gamma, \lambda_t = 0.354$,**0.177**	$\lambda_\theta, \kappa = 6.97, 0.2$	$\lambda_\theta, \kappa = 7.23, 0.2$

表3：不同噪声水平（标准差为 $\kappa \in (0.05,\ 0.1,\ 0.2)$）下去噪重建的平均 L^2-误差及相应的正则化参数。

质量。**全变分** 正则化改善了边缘保留，并产生更清晰的空间特征，但可能引入人为的不连续，尤其是在信噪比较低的区域。该**MFoE** 正则化项再次提供了最佳的整体性能。尽管反问题的难度有所增加，它仍能比经典方法更准确地捕捉相关的时空激活模式，并更有效地抑制噪声和反演伪影。特别是，学习到的时间相互作用有助于稳定重建，并减少随时间出现的非物理振荡。重要的是，尽管该反问题比去噪情形更具挑战性，各正则化器在性能上的排序仍然相同。

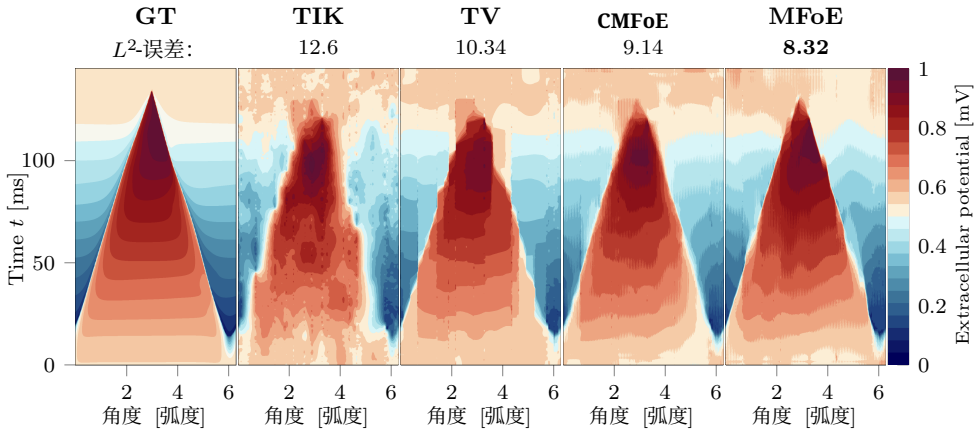

图6：在观测数据上施加高斯噪声（信噪比为30 dB）后，多种正则化方法的逆问题重建及其 L^2-误差的时空图可视化。

7 结论

我们提出了一类面向非结构化网格上逆问题的经训练时空正则化子，并在严格的变分框架中对其进行了分析。我们证明了离散泛函到其连续极限的理论 Mosco 收敛，这意味着极小化子的收敛，并确保了网格细化下的稳定性。关于去噪和反问题的数值实验表明，所提出的时空正则化项始终优于经典的手工设计方法。尽管反问题严重不适定，且重建需要更长的计算时间，但各正则化器彼此之间的相对性能保持不变。当前实现仅限于均匀时间步，这限制了其在问题中的适用性

Reg. / SNR	**TIK**	**TV**	**CMFoE**	**MFoE**
50	12.82	9.19	8.09	**7.59**
	$\lambda_\gamma = 2.97 \times 10^{-3}$ $\lambda_t = 2.97 \times 10^{-3}$	$\lambda_\gamma = 4.59 \times 10^{-6}$ $\lambda_t = 9.64 \times 10^{-7}$	$\lambda_\theta = 6.97 \times 10^{-3}$ $\kappa = 8.84 \times 10^{-2}$	$\lambda_\theta = 9.04 \times 10^{-4}$ $\kappa = 4.2 \times 10^{-1}$
40	13.01	9.98	9.02	**8.11**
	$\lambda_\gamma = 8.41 \times 10^{-3}$ $\lambda_t = 8.41 \times 10^{-3}$	$\lambda_\gamma = 2.83 \times 10^{-5}$ $\lambda_t = 5.95 \times 10^{-6}$	$\lambda_\theta = 3.49 \times 10^{-2}$ $\kappa = 8.84 \times 10^{-2}$	$\lambda_\theta = 5.11 \times 10^{-3}$ $\kappa = 4.2 \times 10^{-1}$
30	13.54	11.72	10.74	**10.48**
	$\lambda_\gamma = 2.38 \times 10^{-2}$ $\lambda_t = 2.38 \times 10^{-2}$	$\lambda_\gamma = 2 \times 10^{-4}$ $\lambda_t = 4.59 \times 10^{-5}$	$\lambda_\theta = 8.29 \times 10^{-1}$ $\kappa = 2.87 \times 10^{-2}$	$\lambda_\theta = 1.81 \times 10^{-2}$ $\kappa = 5 \times 10^{-1}$

表4：在信噪比（30，40、50）dB 下，逆问题重建的平均 L^2-误差及相应的正则化参数。

需要自适应或可变时间分辨率。将该方法扩展到可变时间步长会增加计算复杂度。同样，将模型扩展为在空间流形上学习核卷积（类似于时间卷积）在计算上要求很高，从而限制了空间正则化的实用性。总体而言，本工作表明，数据驱动正则化可以与强有力的解析保证相结合，从而得到既在理论上可靠、又在实践中更优的方法，适用于 ECGI 等具有挑战性的逆问题。

参考文献

[1] F. B. Belgacem，为什么柯西问题会严重不适定？，《InverseProblems》，23（2007），第823–836页，https://doi.org/10.1088/0266-5611/23/2/ 020，https://doi.org/10.1088/0266-5611/23/2/020。

[2] M. J. Bishop and G. Plank，使用增广单域模型模拟心电图以求解心脏源，《IEEE生物医学工程汇刊》，58（2011），第10.1109/TBME.2011.2148718页，https://doi.org/10. 1109/TBME.2011.2148718，https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/ PMC3378475/（访问日期：2022年-07-19）。

[3] S. C. Brenner and L. R. Scott,有限元方法的数学理论，《应用数学文本》第15卷，施普林格，纽约，第3版，2008，https://doi.org/10.1007/978-0-387-75934-0，https://doi.org/10. 1007/978-0-387-75934-0。

[4] P. G. Ciarlet, 椭圆问题的有限元法，《数学及其应用研究》第4卷，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹-纽约-牛津，1978。

[5] M. Cluitmans, D. H. Brooks, R. MacLeod, O. Dössel, M. S. Guillem, P. M. van Dam, J. Svehlikova, B. He, J. Sapp, L. Wang, and L. Bear，心电成像的验证与机遇：从技术成果到临床应用，《生理学前沿》，9（2018），https://doi.org/10.3389/fphys.2018.01305，https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fphys.2018.01305。

[6] P. Colli Franzone, L. F. Pavarino, and S. Scacchi, 数学心脏电生理学，MS&A《建模、仿真与应用》第13卷，施普林格，Cham，2014，https://doi.org/10.1007/978-3-319-04801-7，https://doi.org/10.1007/978-3-319-04801-7。

[7] S. Ducotterd and M. Unser，多变量专家场，2025，https: // arxiv.org/abs/2508.06490，https://arxiv.org/abs/2508.06490。

[8] A. Effland, S. Neumayer, and M. Rumpf，*Hadamard*流形上时间离散变形模型的收敛性，*SIAM J. Imaging Sci.*，*13*（*2020*），第*557–588*页，*https://doi.org/10.1137/19M1247073*，*https://doi.org/10. 1137/19M1247073*。[9] C. M. Elliott and T. Ranner，耦合体域-曲面偏微分方程的有限元分析，*IMA J. Numer. Anal.*，*33*（*2013*），第*377–402*页，*https://doi.org/10.1093/imanum/drs022*，*https://doi.org/10.1093/imanum/drs022*。[10] L. C. Evans，偏微分方程，数学研究生教材第*19*卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，*1998*，*https: //doi.org/10.1090/gsm/019*，*https://doi.org/10.1090/gsm/019*。[11] L. Gander, R. Krause, M. Multerer, and S. Pezzuto，心电图学正问题与逆问题中的时空形状不确定性，*International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*，*37*（*2021*），*https://doi.org/10.1002/cnm.3522*，*https://arxiv.org/abs/2010.16104*。[12] Z. Geng and J. Z. Kolter，*TorchDEQ*：一个深度平衡模型库。*https://github.com/locuslab/torchdeq*，*2023*。[13] A. Goujon, S. Neumayer, and M. Unser，学习用于收敛图像重建算法的弱凸正则项，*SIAM J. Imaging Sci.*，*17*（*2024*），第*91–115*页，*https://doi.org/10.1137/23M1565243*，*https://doi. org/10.1137/23M1565243*。[14] T. Grandits, J. Verhülsdonk, G. Haase, A. Effland, and S. Pezzuto，基于测地线反向传播的体表心电图心脏电生理模型数字孪生，*IEEE Transactions on Biomedical Engineering*，*71*（*2024*），第*1281–1288*页，*https://doi.org/10.1109/TBME.2023.3331876*，*https://arxiv.org/abs/2308.08410*。[15] M. Haas, T. Grandits, T. Pinetz, T. Beiert, S. Pezzuto, and A. Effland，心电成像逆问题的基于有限元的时空全变差型正则化，*SIAM J. Sci. Comput.*，*47*（*2025*），第*B1317–B1342*页，*https://doi.org/10.1137/24M1685055*，*https://doi.org/10.1137/24M1685055*。[16] E. Hebey，黎曼流形上的索伯列夫空间，数学讲义第*1635*卷，施普林格出版社，柏林，*1996*，*https://doi.org/10. 1007/BFb0092907*，*https://doi.org/10.1007/BFb0092907*。[17] A. Karoui, L. Bear, P. Migerditichan, and N. Zemzemi，使用离体数据和计算机模拟数据评估解决心电成像逆问题的十五种算法，*Frontiers in Physiology*，*9*（*2018*），*https: //doi.org/10.3389/fphys.2018.01708*。[18] E. Kobler, A. Effland, K. Kunisch, and T. Pock，全深度变分：一种稳定的逆问题正则化方法，*IEEE*模式分析与机器智能汇刊，*44*（*2022*年），第*9163–9180*页，*https://doi.org/10.1109/TPAMI.2021.3124086*。[19] J. Moreau，希尔伯特空间中的近端算子与对偶性，*Bulletin de la Société Mathématique de France*，*93*（*1965*），第*273–299*页，*http://eudml.org/ doc/87067*。[20] U. Mosco，凸集及变分不等式解的收敛性，*Advances in Math.*，*3*（*1969*），第*510–585*页，*https://doi.org/10.1016/0001-8708(69)90009-7*，*https://doi.org/10.1016/0001-8708(69)90009-7*。

[21] G. Nardi, B. Charlier, and A. Trouvé 通过 BV 惩罚项匹配函数形状：一个 Γ-收敛结果，《Interfaces Free Bound.》，26 (2024), 第381–414页，https://doi.org/10.4171/ifb/517，https://doi.org/10.4171/ifb/517。

[22] M. Onal and Y. Serinagaoglu，逆心电图中的时空解，载于国际医学与生物工程联合会第四届欧洲会议论文集，J. Vander Sloten、P. Verdonck、M. Nyssen 和 J. Haueisen 编，柏林，海德堡，2009年，Springer Berlin Heidelberg，第180–183页。

[23] A. Paszke, S. Gross, F. Massa, A. Lerer, J. Bradbury, G. Chanan, T. Killeen, Z. Lin, N. Gimelshein, L. Antiga, A. Desmaison, A. Köpf, E. Yang, Z. DeVito, M. Raison, A. Tejani, S. Chilamkurthy, B. Steiner, L. Fang, J. Bai, and S. Chintala, *PyTorch*：一种命令式风格的高性能深度学习库，*Curran Associates Inc.*，美国纽约州雷德胡克，*2019*年。
[24] S. Pezzuto, P. Perdikaris, and F. Sahli Costabal, 利用流形上的多保真贝叶斯优化，根据*12*导联心电图学习心脏激活图，*IFAC-PapersOnLine*，*55 (2022*年*)*，第*175–180*页，*https://doi.org/10. 1016/j.ifacol.2022.09.091*，*https://arxiv.org/abs/2203.06222*。[25] M. Potse, B. Dube, J. Richer, A. Vinet, and R. M. Gulrajani, 人类心脏动作电位传播中单域与双域反应-扩散模型的比较，《*IEEE* 生物医学工程汇刊》，*53 (2006*年*)*，第*2425–2435*页，*https://doi.org/10.1109/TBME.2006.880875*。[26] B. J. Roth, 心脏组织双域模型所用的电导率值，《*IEEE* 生物医学工程汇刊》，*44 (2002*年*)*，第*326–328*页。
[27] S. Roth and M. J. Black, 专家场：一种学习图像先验的框架，*2005*年*IEEE*计算机学会计算机视觉与模式识别会议（*CVPR'05*），*2 (2005*年*)*，第*860–867*页，第*2*卷，*https: //api.semanticscholar.org/CorpusID:2843211*。
[28] L. I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi, 基于非线性全变差的去噪算法，《物理学*D*：非线性现象》，*60 (1992*年*)*，第*259–268*页，*https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0167-2789(92) 90242-F*，*https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/ 016727899290242F*。
[29] M. Seger, G. Fischer, R. Modre-Osprian, B. Messnarz, F. Hanser, and B. Tilg, 心电逆问题的导联场计算——有限元与边界元的比较，《生物医学中的计算机方法与程序》，*77 (2005*年*)*，第*241–52*页，*https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2004. 10.005*。[30] R. Tenderini, S. Pagani, A. Quarteroni, and S. Deparis, 面向心脏电生理学逆问题的偏微分方程感知深度学习，*SIAM J. Sci. Comput.*，*44 (2022*年*)*，第*B605–B639*页，*https://doi.org/10.1137/21M1438529*，*https://doi.org/10.1137/21M1438529*。

[31] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin,不适定问题的解, Scripta 数学丛书, V. H. Winston & Sons, 华盛顿特区; 约翰·威立父子公司, 纽约-多伦多-伦敦, 1977. 译自俄语，翻译编辑 Fritz John 作序。

[32] D. Wang, R. M. Kirby, and C. R. Johnson,心电图逆问题基于有限元的求解的求解策略,《IEEE生物医学工程汇刊》, 57 (2010), 第220–237页, https://doi.org/10.1109/TBME.2009.2024928.