arXiv:2602.07467v1 [math.RA] 7 Feb 2026

有限素域上 3×3 矩阵的含幺压缩交换图

˘IVAN-VANJA BOROJA 、DAMJANA KOKOL BUKOVSEK 和 NIKSTOPAR

Abstract. 本文完整描述了有限素域 $\mathrm{GF}(p)$ 上 3×3 阶矩阵环 $\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p))$ 的含幺压缩交换图。为此，我们综合运用了线性代数、域论、射影几何和组合学的方法。首先，根据若尔当标准形将顶点集划分为不同类型，并描述每个顶点的邻域。随后，利用其顶点与 $\mathrm{GF}(p)$ 上射影平面中的点线对之间的双射，确定图的核心部分，即对应于非数量退化矩阵的子图。最后，我们说明其余顶点如何连接到核心部分。我们还给出了构造整个图的算法。由此，我们描述了通常交换图 $\Gamma(\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p)))$；其结构多年来一直是一个未解决问题。

1. 引言

代数中最重要的概念之一是可交换性。近年来，人们对这一概念进行了广泛研究，尤其是在域上的矩阵这一背景下。文献中研究矩阵可交换性的方式多种多样，例如研究中心化子 [12, 13], 交换子 [20, 9], 可交换性保持映射 [24, 26, 10], 等。

近年来的一种研究方法是借助图来直观呈现可交换关系，这种图称为环的交换图 ，由 [2] 首次引入。给定一个环 R, 交换图 $\Gamma(R)$ 是一个简单图，其顶点为环 R 中的非中心元素；环中两个不同的元素 a 和 b 之间有边，当且仅当 $ab = ba.$ 。过去二十年间，许多研究者对环的交换图进行了研究，探讨了其连通性 [1, 14], 直径、围长 [3, 15, 25], 团数 [2], 等。一些作者也研究了该图的补图 [19]。

该理论中的一个核心问题是同构问题，即询问图 $\Gamma(R)$ 是否能唯一确定环 R，见 [1]。对于域上 $n \times n$ 矩阵的环，当 $n = 2$ 且 $n = 3$ 时，这个问题有肯定答案，如 [23] 和 [18] 所示。此外，当 $n = 2^k 3^l$ 且 $k \geqslant 1$ 时， [17] 给出了肯定答案。对于 n 的其他取值，这仍是一个未解决问题。

在 [7] 图的压缩 $\Gamma(R)$中进行了研究，并引入了环的（含幺）压缩交换图。含幺压缩交换图 $\Lambda^1(R)$ 含幺环 R 是一个图，其顶点是 R中元素的等价类，这些等价类是关于如下等价关系定义的： $a \sim b$ 当且仅当元素 a 和 b 生成 R的同一个含幺子环时。若两个顶点各自的代表元在 R 中可交换，则这两个顶点相邻（详见定义2.2 ）。压缩的目的是使图规模更小

2020 数学主题分类。15A27,05C50, 51E15.关键词和短语。交换图、含幺压缩交换图、矩阵环、中心化子、有限域、射影平面。

从而更易处理，见 [8]。此外， [7] 中证明了 Λ^1 可以扩展为从含幺环范畴到带环无向简单图范畴的函子。因此，环 R 的压缩交换图还包含关于 R的同态像中的交换关系的信息。这些附加信息在解决矩阵环的同构问题时可能会有用。

有限域上 2×2 矩阵环的（含幺）压缩交换图已在 [7] 中描述。本文研究有限素域 $\mathbf{GF}(p)$ 上 3×3 矩阵环 $\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p))$ 的含幺压缩交换图。为描述 $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p)))$ 的顶点集，我们证明压缩到同一个顶点的矩阵总具有相同的若尔当结构。这使我们能够逐一描述各个顶点，并考察每个顶点的邻域。图 $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p)))$ 的关键部分是一个与非数量退化矩阵相对应的子图。我们通过建立该子图的顶点集与 $\mathbf{GF}(p)$. 上射影平面中的点线对集合之间的双射，来描述这个子图。借助这一双射，我们随后利用点线对的几何性质描述该子图顶点之间的边。图的其余部分则通过依次添加与非退化矩阵相对应的顶点得到。由此，我们给出了构造环 $\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p))$ 的整个含幺压缩交换图的显式算法。作为应用，我们还能够通过将 $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p)))$ 的顶点扩展为团，并移除环的中心及所有自环，构造普通交换图 $\Gamma(\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p)))$。该算法描述了 $\Gamma(\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p)))$ 的结构，这一问题多年来一直未获解决。

本文结构安排如下。第2 节回顾含幺压缩交换图的定义及其一些基本性质，并回顾有关矩阵的一些结果。第3 节描述 $\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p))$上的含幺压缩交换图的顶点集。第4节讨论顶点的邻域。第5 节描述图的关键部分，第6节给出构造$\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p)))$的算法。最后，第7 节应用我们的结果并描述图 $\Gamma(\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p)))$。

2. Preliminaries

我们在全文中假设 R 是一个含幺环，其单位元为 $\mathbf{1}$。首先回顾交换图 $\Gamma(R)$ 和含幺压缩交换图 $\Lambda^1(R)$的定义。

定义 2.1 ([2])。 R 是一个含幺环。其交换图是无向图 $\Gamma(R)$ ，其顶点集由 R 的所有非中心元素构成；当且仅当 $ab = ba$时，两个不同元素 a 和 b 之间有一条边。

R 由元素 $a \in R$ 生成的含幺子环为

$$\langle a\rangle_1 = \{q(a) \mid q \in \mathbb{Z}[x]\},$$

其中， $\mathbb{Z}[x]$ 表示整数系数多项式环；在$q(a)$ 中求值时，常数项乘以单位元 $1 \in R$。我们在 R 上引入等价关系 $\sim$ ，定义为 $a \sim b$ 当且仅当 $\langle a\rangle_1 = \langle b\rangle_1$，并用 $[a]_1$表示元素 $a \in R$ 关于关系 $\sim$ 的等价类。根据定义， $[a]_1$ 由环 $\langle a\rangle_1$的所有单个生成元组成。

定义 2.2 ([7])。 含幺环的 含幺压缩交换图 ofaunitalring R 是一个无向图 $\Lambda^1(R)$ 其顶点集是元素的所有等价类的集合 R 关于关系 $\sim$，且 $[a]_1$ 与 $[b]_1$ 之间有边当且仅当 $ab = ba$。

R 的中心元素不从图 $\Lambda^1(R)$ 中排除，并且允许存在自环；事实上， $\Lambda^1(R)$ 的每个顶点上都有一个自环。在 [7] 中还介绍了非含幺版本的压缩交换图，不过，本文只关注含幺版本。

映射 Λ^1 可以扩展为一个函子 Λ^1 ，它将由含幺环及含幺环同态构成的范畴**环[1]** 映射到由允许自环的无向简单图及图同态构成的范畴**图**。特别地，对于含幺环之间的含幺环同态 $f\colon R \to S$，其中 R和 S是含幺环，图同态 $\Lambda^1(f)\colon \Lambda^1(R) \to \Lambda^1(S)$定义为 $\Lambda^1(f)([r]_1) = [f(r)]_1$，见 [7]。关于含幺压缩交换图的进一步性质，请参阅 [7, 8]。

注意， $\Lambda^1(R)$ 的每个顶点都对应于由一个元素生成的 R 的一个子环。这意味着，我们也可以将 R 的含幺压缩交换图定义为一个无向图，其顶点集为

$$V(\Lambda^1(R)) = \{\langle a\rangle_1 \mid a \in R\}$$

由一个元素生成的 R 的所有含幺子环的集合；当且仅当 $ab = ba$时，顶点 $\langle a\rangle_1$ 和 $\langle b\rangle_1$ 之间有一条边。在本文余下部分，我们将采用这种观点，并将 $\Lambda^1(R)$ 的顶点视为由一个元素生成的 R 的含幺子环。注意，等价类 $[a]_1$ 的大小等于顶点 $\langle a\rangle_1$的不同单个生成元的数量。

本文将研究域 $\mathbb{F}$上的 $n \times n$ 矩阵环，记作 $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$。矩阵 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ 的**中心化子** 为

$$\mathscr{C}(A) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \mid AX = XA\}.$$

回顾一下，若矩阵的最小多项式与其特征多项式仅相差一个符号，则称该矩阵为**非亏格** 矩阵。当且仅当 $\mathscr{C}(A) = \mathbb{F}[A]$时，矩阵 A 是非亏格矩阵，其中 $\mathbb{F}[A]$是由 A生成的 $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ 的子代数。本文将研究 $\mathbb{F} = \mathbf{GF}(p)$的情形，即含有 p 个元素的有限域，其中 p 是一个素数。在这种情况下， $\mathbb{F}[A] = \langle A\rangle_1$。由此可得，对于任意非亏格矩阵 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{GF}(p))$， $\mathscr{C}(A) = \langle A\rangle_1$ 。

我们用 $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F})$ 表示 $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$中所有可逆矩阵构成的群，并用

$$\mathcal{O}(A) = \{SAS^{-1} \mid S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\}$$

表示矩阵 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ 在相似变换下的轨道。我们将用到以下关于轨道大小的著名公式。

命题 2.3。 设 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$，其中 $\mathbb{F}$ 是一个有限域。则

$$|\mathcal{O}(A)| = \frac{\left|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\right|}{\left|\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\right|}.$$

还要回顾的是，对于含有 $q = p^m$ 个元素的有限域 $\mathbb{F} = GF(q)$， $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ 中可逆矩阵的数量等于

$$|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})| = (q^n - 1)(q^n - q)\cdots(q^n - q^{n-1}).$$

在 [7, 定理 21] 中，环 $\mathcal{M}_2(\mathbb{F})$的含幺压缩交换图对于任意有限域 $\mathbb{F}$均已得到描述。在 $\mathbb{F} = \mathrm{GF}(p)$ 的情形下，结果如下。

命题 2.4 ([7])**.** 设 p为一个素数。则环 $\mathcal{M}_2(\mathrm{GF}(p))$ 的含幺压缩交换图是一个具有 $p^2 + p + 1$ 个叶子且包含所有自环的星图。

3. Vertex set of $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p)))$

此后我们假定 p 是一个素数。我们将研究域 $\mathbf{GF}(p)$上的 3×3 矩阵环。我们的目标是描述 $\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p))$的含幺压缩交换图的结构，并首先描述 $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p)))$的顶点。

设 $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p))$ 为任意矩阵。我们根据 A 的特征多项式 p_A 与最小多项式 m_A 在域 $\mathbf{GF}(p)$上的分裂方式，考虑若干情形，即:

(**A**) $p_A(x) = (x-\lambda)^3$ 与 $m_A(x) = (x-\lambda)$，其中 $\lambda \in \mathbf{GF}(p)$，(**B**) $p_A(x) = (x-\lambda)(x-\mu)^2$ 与 $m_A(x) = (x-\lambda)(x-\mu)$，其中 λ，$\mu \in \mathbf{GF}(p)$ 与 $\lambda \neq \mu$，(**C**) $p_A(x) = m_A(x) = (x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu)$，其中 λ、μ、$\nu \in \mathbf{GF}(p)$ 互不相同，(**D**) $p_A(x) = m_A(x) = (x-\lambda)^3$，其中 $\lambda \in \mathbf{GF}(p)$，(**E**) $p_A(x) = (x-\lambda)^3$ 与 $m_A(x) = (x-\lambda)^2$，其中 $\lambda \in \mathbf{GF}(p)$，(**F**) $p_A(x) = m_A(x) = (x-\lambda)^2(x-\mu)$，其中 λ、$\mu \in \mathbf{GF}(p)$ 与 $\lambda \neq \mu$，(**G**) $p_A(x) = m_A(x)$ 在 $\mathbf{GF}(p)$上不可约，(**H**) $p_A(x) = m_A(x) = (x-\lambda)p_1(x)$，其中 $\lambda \in \mathbf{GF}(p)$ 且 p_1 在 $\mathbf{GF}(p)$上不可约。

对于任意 **X** $\in$ {**A**、**B**.....，**H**}，我们将情形 (**X**) 中的矩阵称为类型 (**X**)矩阵。下一个命题表明，含幺压缩交换图中同一顶点的所有生成元都是同一类型的矩阵，因此我们也可以称其为类型 (**X**)顶点。

命题 3.1. 设 A 和 B 是来自 $\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p))$. 的两个矩阵。若 $\langle A\rangle_1 = \langle B\rangle_1$，则$A$ 和 B 属于同一类型。

证明。 首先注意到 $\deg m_A = \deg m_B$. 。我们用 d表示这个次数。由于 $\langle A\rangle_1 = \langle B\rangle_1$，我们知道存在多项式 q 和 r，使得 $B = q(A)$ 和 $A = r(B)$. 。这意味着矩阵 A 和 B 在 $\mathbf{GF}(p)$. 中具有相同数量的互异特征值。我们用 e. 表示这个数量。注意 $0 \leqslant e \leqslant d \leqslant 3$. 。现在，我们根据 d和 e.的取值来讨论各种情形。

注意，配对 $(d、e) = (1、0)$ 是不可能的，因为一次多项式在域中总有一个零点；也就是说，如果 $d = 1$，那么 $e = 1$. 。此外，配对 $(d、e) = (2、0)$ 也是不可能的，因为这意味着特征多项式有一个二重零点 λ_1. 。由于这是最小多项式的一个零点，它是 $\mathbf{GF}(p^2)\backslash\mathbf{GF}(p)$ 中的一个元素。但这样一来，最小多项式的第二个零点 λ_2 也必须是二重的，这是不可能的。

如果 $(d、e) = (1、1)$，那么矩阵 A 和 B 属于类型 (**A**)。类似地，如果 $(d、e) = (2、1)$，它们属于类型 (**E**)；如果 $(d、e) = (2、2)$，它们属于类型 (**B**)；如果 $(d、e) = (3、0)$，它们属于类型 (**G**)；如果 $(d、e) = (3、2)$，它们属于类型 (**F**)；如果 $(d、e) = (3、3)$，它们属于类型 (**C**)。最后，如果 $(d、e) = (3、1)$，我们分两种情形讨论。若矩阵 A 的所有特征值都在 $\mathbf{GF}(p)$ 中，那么 B 也如此，因为$B = q(A)$. 。在这种情况下，两个矩阵都属于类型 (**D**)。另一方面，若 A有一个特征值$\alpha \notin \mathbf{GF}(p)$，那么 B 也有，因为 $\alpha = r(\beta)$，其中 β 是 B 的某个特征值；显然 $\beta \notin$**GF**(p).。因此，两个矩阵都属于类型 (**H**)。□

根据上述命题，我们可以作如下定义。

定义 3.2. 将 $V_{(\mathrm{X})} \subseteq V(\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p))))$ 定义为类型为 (X) 的顶点集。

以下命题给出了在技术条件下计算 $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p))$ 中某类顶点数量的公式。

命题 3.3. 假设我们有一个由阶为 3 的矩阵 A 生成的 (X) 类顶点。设 $\mathcal{O}(A)$ 与每个 (X) 类顶点相交，并令

$$\omega_A = |\langle A\rangle_1 \cap \mathcal{O}(A)|. \tag{1}$$

Then

$$|V_{(\mathrm{X})}| = \frac{|\mathcal{O}(A)|}{\omega_A} = \frac{|\mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))|}{|\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))| \cdot \omega_A}. \tag{2}$$

证明。 如命题 2.3的证明所示，与矩阵 A相似的某些矩阵位于子环 $\langle A\rangle_1$内，但另一些不在其中。不在其中的那些矩阵将成为子环 $\langle A\rangle_1$的同构副本的生成元。为了计算 (X)类顶点的数量，我们需要统计与 A 相似的矩阵中有多少个位于子环 $\langle A\rangle_1$.

任取 $M \in \mathcal{O}(A)$ 。则 M 与 A 相似，即存在一个可逆矩阵 S，使得 $M = SAS^{-1}$. 。共轭映射 $Y \mapsto SYS^{-1}$ 是从集合 $\langle A\rangle_1 \cap \mathcal{O}(A)$ 到集合 $\langle M\rangle_1 \cap \mathcal{O}(A)$ 的双射，因此所有集合 $\langle M\rangle_1 \cap \mathcal{O}(A)$、 $M \in \mathcal{O}(A)$ 的基数都相同，且该基数等于 ω_A.

注意，来自 $\langle M\rangle_1 \cap \mathcal{O}(A)$ 的任意 W自动是 $\langle M\rangle_1$的生成元。这是因为W 与 A 相似，因而与 M相似，所以三者具有相同次数的最小多项式。由于 W 来自 $\langle M\rangle_1$ ，这意味着 W 是 $\langle M\rangle_1$的生成元。因此， $\langle M\rangle_1 \cap \mathcal{O}(A)$ 中的矩阵被压缩到同一个顶点。

由此可知，由类型为 (X) 的矩阵得到的顶点个数等于

$$|V_{(\mathrm{X})}| = \frac{|\mathcal{O}(A)|}{\omega_A}.$$

方程（2）现由命题2.3得出。 □

对于某一类型 (X) 的每个矩阵 $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p))$ ，我们计算$\dim\langle A\rangle_1$、 $\langle A\rangle_1$的生成元个数以及 $V_{(\mathrm{X})}$的基数。由于 $\langle A\rangle_1$ 的维数和生成元个数在相似下不变，我们可以假设矩阵 A 处于若尔当标准形。

情形（A）： 假设矩阵 A 满足 $p_A(x) = (x-\lambda)^3$ 和 $m_A(x) = (x-\lambda)$，其中$\lambda \in \mathbf{GF}(p)$。则 A 是数量矩阵，由 A 生成的子环是所有数量矩阵构成的子环，且该子环的每个元素都是生成元。因此， $|V_{(\mathrm{A})}| = 1$、$\dim\langle A\rangle_1 = 1$以及$\langle A\rangle_1$ 有 p 个生成元。

情形（B）： 假设矩阵 A 满足 $p_A(x) = (x-\lambda)(x-\mu)^2$ 和 $m_A(x) = (x-\lambda)(x-\mu)$，其中 λ， $\mu \in \mathbf{GF}(p)$ 且 $\lambda \neq \mu$。由此可知，矩阵 A 可对角化，因此我们假设它是对角矩阵，即 $A = \lambda E_{11} + \mu(E_{22} + E_{33})$。由此可知 $\dim\langle A\rangle_1 = 2$ 且

$$\langle A\rangle_1 = \{\alpha E_{11} + \beta(E_{22} + E_{33}) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{GF}(p)\}.$$

注意到， $\langle A\rangle_1$ 的元素是生成元，当且仅当 $\beta \neq \alpha$。因此， $\langle A\rangle_1$ 的生成元数量为 $p(p-1)$.

为了计算 $V_{(\mathrm{B})}$ 的基数，我们将使用命题3.3，因此需要证明 $\mathcal{O}(A)$与每个类型为 (B)的顶点相交。令 Y 为任意一个类型为 (B)的矩阵。这意味着存在一个可逆矩阵 S 使得 $\widehat{A} = SYS^{-1}$ 是 $\langle A\rangle_1$的生成元。因此，

$$\langle Y\rangle_1 = \langle S^{-1}\widehat{A}S\rangle_1 = S^{-1}\langle\widehat{A}\rangle_1 S = S^{-1}\langle A\rangle_1 S = \langle S^{-1}AS\rangle_1,$$

使得 $S^{-1}AS \in \langle Y\rangle_1 \cap \mathcal{O}(A)$. 此外，矩阵 A 的中心化子为

$$\mathscr{C}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{bmatrix} \mid a, e, f, h, i \in \mathrm{GF}(p) \right\}. \tag{3}$$

因此，

$$|\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))| = |\mathrm{GL}_1(\mathrm{GF}(p))| \cdot |\mathrm{GL}_2(\mathrm{GF}(p))| = (p-1)(p^2-1)(p^2-p).$$

现在我们证明 $\omega_A = 1$. 设 $M \in \langle A\rangle_1 \cap \mathcal{O}(A)$ 为任意元素。由于 $M \in \langle A\rangle_1$ 我们推得 $M = \alpha E_{11} + \beta(E_{22} + E_{33})$ 对某个 α， $\beta \in \mathrm{GF}(p)$. 由于 $M \in \mathcal{O}(A)$，我们有 $\alpha = \lambda$ 且 $\beta = \mu$。由此可得 $M = A$，这就证明了我们的断言。根据命题 3.3 类型为 (B) 的顶点数为

$$|V_{(\mathrm{B})}| = \frac{|\mathcal{O}(A)|}{\omega_A} = \frac{|\mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))|}{|\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))| \cdot \omega_A} = \frac{(p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2)}{(p-1)(p^2-1)(p^2-p)\cdot 1} = (p^2+p+1)p^2.$$

情形 (C)：假设矩阵 A 满足 $p_A(x) = m_A(x) = (x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu)$，其中$\lambda$， μ, $\nu \in \mathrm{GF}(p)$ 互不相同。由此可知，矩阵 A 可对角化，因此我们不妨设其为对角矩阵，即 $A = \lambda E_{11} + \mu E_{22} + \nu E_{33}$。注意，在这种情况下， p 必须大于或等于 3，因为如果 $p = 2$, 矩阵在 $\mathrm{GF}(p)$. 中不可能有三个不同的特征值。由此可得 $\dim\langle A\rangle_1 = 3$ ，并且

$$\langle A\rangle_1 = \{\alpha E_{11} + \beta E_{22} + \gamma E_{33} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{GF}(p)\}.$$

注意， $\langle A\rangle_1$ 中的元素是生成元，当且仅当 α、 β 和 γ 彼此不同。因此， $\langle A\rangle_1$ 的生成元个数为 $p(p-1)(p-2)$.

还要注意，子环 $\langle A\rangle_1$ 不依赖于 λ、 μ和 ν. 的具体取值。这意味着我们可以使用与情形 (B)相同的论证，并得出 $\mathcal{O}(A)$与每个类型为 (C)的顶点都相交。这意味着命题3.3 的假设成立。由于矩阵 A 是非亏格的，因此有 $\mathscr{C}(A) = \langle A\rangle_1$，于是

$$|\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))| = (p-1)^3.$$

接下来，我们计算 ω_A。令 $M \in \langle A\rangle_1 \cap \mathcal{O}(A)$。则 $M = \alpha E_{11} + \beta E_{22} + \gamma E_{33}$和 $\{\alpha、\ \beta、\ \gamma\} =\{\lambda、\ \mu、\ \nu\}$。由此可得 $(\alpha、\ \beta、\ \gamma)$ 是 $(\lambda、\ \mu、\ \nu)$的一个置换，因此 $\omega_A = |\langle A\rangle_1 \cap \mathcal{O}(A)| = 6$。由命题3.3 可得，类型为 (C) 的顶点个数等于

$$\begin{aligned} |V_{(\mathrm{C})}| &= \frac{|\mathcal{O}(A)|}{\omega_A} = \frac{|\mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))|}{|\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))| \cdot \omega_A} = \frac{(p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2)}{(p-1)^3 \cdot 6} \\ &= \tfrac{1}{6}(p^2+p+1)p^3(p+1). \end{aligned}$$

情形（D）：假设矩阵 A 满足 $p_A(x) = m_A(x) = (x-\lambda)^3$，其中 $\lambda \in \mathrm{GF}(p)$。不妨设 A 为若尔当标准形，即 $A = \lambda I + E_{12} + E_{23}$。由此可得 $\dim\langle A\rangle_1 = 3$，且

$$\langle A\rangle_1 = \{\alpha I + \beta(E_{12} + E_{23}) + \gamma E_{13} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{GF}(p)\}.$$

注意，$\langle A\rangle_1$ 中的一个元素是生成元，当且仅当 $\beta \neq 0$。因此，$\langle A\rangle_1$ 的生成元个数为 $p^2(p-1)$. 再一次，子环 $\langle A\rangle_1$ 不取决于 λ的取值，因此，与前面的情形一样，命题3.3 的假设成立。由于矩阵 A 是非亏格的，我们有 $\mathscr{C}(A) = \langle A\rangle_1$，因此

$$|\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))| = (p-1)p^2.$$

接下来，我们计算 ω_A。令 $M \in \langle A\rangle_1 \cap \mathcal{O}(A)$。则 $M = \alpha I + \beta(E_{12}+E_{23}) + \gamma E_{13}$。注意，$M$ 与 A相似，当且仅当 $\alpha = \lambda$ 且 $\beta \neq 0$，因此，

$$\omega_A = |\langle A\rangle_1 \cap \mathcal{O}(A)| = (p-1)p.$$

最后，类型为 (D)的顶点数等于

$$\begin{aligned}|V_{(\mathrm{D})}| &= \frac{|\mathcal{O}(A)|}{\omega_A} = \frac{|\mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))|}{|\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))| \cdot \omega_A} = \frac{(p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2)}{(p-1)p^2 \cdot (p-1)p} \\ &= (p^3-1)(p+1).\end{aligned}$$

情形（E）：假设矩阵 A 满足 $p_A(x) = (x-\lambda)^3$ 和 $m_A(x) = (x-\lambda)^2$，其中$\lambda \in \mathbf{GF}(p)$。不妨设 A 的若尔当标准形为 $A = \lambda I + E_{12}$。由此可得 $\dim\langle A\rangle_1 = 2$，并且

$$\langle A\rangle_1 = \{\alpha I + \beta E_{12} \mid \alpha, \beta \in \mathrm{GF}(p)\}.$$

注意，$\langle A\rangle_1$ 中的元素是生成元，当且仅当 $\beta \neq 0$。因此，$\langle A\rangle_1$ 的生成元个数为 $p(p-1)$. 子环 $\langle A\rangle_1$ 仍与 λ的具体取值无关，因此命题 3.3 的假设成立。

此外，直接计算可得 A 的中心化子等于

$$\mathscr{C}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & h & i \end{bmatrix} \mid a, b, c, h, i \in \mathrm{GF}(p) \right\}. \tag{4}$$

来自 $\mathscr{C}(A)$ 的矩阵可逆，当且仅当 $a \neq 0$ 和 $i \neq 0$，因此

$$\left|\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))\right| = (p-1)^2p^3.$$

为了计算 ω_A，令 $M \in \langle A\rangle_1 \cap \mathcal{O}(A)$。我们有 $M = \alpha I + \beta E_{12}$，且由于 M与 A, 相似，我们有 $\alpha = \lambda$和 $\beta \neq 0$. 因此，$\omega_A = |\langle A\rangle_1 \cap \mathcal{O}(A)| = p-1$。由此可知，类型为 (E)的顶点数等于

$$\begin{aligned}|V_{(\mathrm{E})}| &= \frac{|\mathcal{O}(A)|}{\omega_A} = \frac{|\mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))|}{|\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))| \cdot \omega_A} = \frac{(p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2)}{(p-1)^2p^3 \cdot (p-1)} \\ &= (p^2+p+1)(p+1).\end{aligned}$$

情形（F）：假设矩阵 A 满足 $p_A(x) = m_A(x) = (x-\lambda)^2(x-\mu)$，其中 $\lambda, \mu \in$**GF**(p) 且 $\lambda \neq \mu$。不妨设 A为若尔当标准形，即 $A = \lambda(E_{11}+E_{22}) + E_{12} + \mu E_{33}$。因此，$\dim\langle A\rangle_1 = 3$ 且

$$\langle A\rangle_1 = \{\alpha(E_{11}+E_{22}) + \beta E_{12} + \gamma E_{33} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{GF}(p)\}.$$

注意到，$\langle A\rangle_1$ 中的元素是生成元，当且仅当 $\alpha \neq \gamma$ 和 $\beta \neq 0$。因此，$\langle A\rangle_1$ 的生成元个数为 $p(p-1)^2$.

还要注意，$\langle A\rangle_1$ 不依赖于 λ 和 μ的具体取值，因此命题3.3 的假设再次成立。由于矩阵 A 是非亏格的，因此有 $\mathscr{C}(A)=\langle A\rangle_1$，于是，

$$|\mathscr{C}(A)\cap \mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))| = (p-1)^2p.$$

设 $M\in\langle A\rangle_1\cap\mathcal{O}(A)$。那么 $M=\alpha(E_{11}+E_{22})+\beta E_{12}+\gamma E_{33}$，且由于 M 与 A相似，我们有 $\alpha=\lambda$、$\gamma=\mu$ 和 $\beta\neq 0$.。因此，

$$\omega_A = |\langle A\rangle_1\cap\mathcal{O}(A)| = p-1.$$

By 命题 3.3我们得出，类型为 (F) 的顶点数等于 o

$$\begin{aligned}|V_{(\mathrm{F})}| &= \frac{|\mathcal{O}(A)|}{\omega_A} = \frac{|\mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))|}{|\mathscr{C}(A)\cap\mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))|\cdot\omega_A} = \frac{(p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2)}{(p-1)^2p\cdot(p-1)}\\ &= (p^2+p+1)p^2(p+1).\end{aligned}$$

情形（G）：假设矩阵 A 满足 $p_A(x)=m_A(x)$ 在 $\mathbf{GF}(p)$上不可约。由此可得 $\dim\langle A\rangle_1=3$。由于 m_A 不可约，$\mathbf{GF}(p^3)$ $\langle A\rangle_1\cong$（例如参见 [21]），因此 $\langle A\rangle_1$ 的生成元数为 p^3-p。注意，矩阵 A 是非亏格的，因此 $\mathscr{C}(A)=\langle A\rangle_1$并且

$$|\mathscr{C}(A)\cap\mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))| = p^3-1.$$

我们采用一种与前面情形略有不同的方法。根据命题 2.3 我们知道

$$|\mathcal{O}(A)| = \frac{\left|\mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))\right|}{\left|\mathscr{C}(A)\cap\mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))\right|} = \frac{(p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2)}{(p^3-1)} = (p^3-p)(p^3-p^2).$$

由于 A 与多项式 p_A 的伴随矩阵相似，因此每个类型为(G) 的矩阵的轨道都包含一个不可约多项式的伴随矩阵。事实上，它恰好包含一个伴随矩阵，因为如果 C_1 和 C_2 是同一轨道中两个次数为 3 的不可约多项式的伴随矩阵，那么 C_1 与 C_2 相似，这意味着 $p_{C_1}=p_{C_2}$，因此 $C_1=C_2$. 所以，此情形下的轨道数等于次数为 3 的首一不可约多项式的数量，根据 [22, 定理 3.25]，该数量等于 $\frac{p^3-p}{3}$。这意味着类型为 (G) 的所有矩阵的数量等于

$$\frac{p^3-p}{3}\cdot|\mathcal{O}(A)| = \frac{p^3-p}{3}\cdot(p^3-p)(p^3-p^2) = \frac{(p^3-p)(p^3-p)(p^3-p^2)}{3}.$$

如果将这个数除以类型为 (G) 的一个顶点的生成元数量，我们就得到类型为 (G)的顶点数

$$|V_{(\mathrm{G})}| = \frac{(p^3-p)(p^3-p)(p^3-p^2)}{3(p^3-p)} = \tfrac{1}{3}(p^3-p)(p^3-p^2).$$

情形（H）：假设矩阵 A 满足 $p_A(x)=m_A(x)=(x-\lambda)p_1(x)$，其中 $\lambda\in\mathbf{GF}(p)$，且 p_1 在 $\mathbf{GF}(p)$ 上不可约。由此可得 $\dim\langle A\rangle_1=3$。矩阵 A 与分块对角矩阵相似

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & C\end{bmatrix}, \tag{5}$$

其中 C 是 p_1 的伴随矩阵。由于 p_1 不可约，$\langle C\rangle_1 \cong \mathbf{GF}(p^2)$，因此

$$\langle A\rangle_1 \cong \mathrm{GF}(p) \oplus \mathrm{GF}(p^2).$$

因此，$\langle A\rangle_1$ 的生成元数量为 $p(p^2-p)$。注意，矩阵 A 是非退化的，因此 $\mathscr{C}(A) = \langle A\rangle_1$。此外，$B = (b_1,\ b_2) \in \mathbf{GF}(p) \oplus \mathbf{GF}(p^2)$ 可逆当且仅当 $b_1 \neq 0$ 且 $b_2 \neq 0$，所以

$$|\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))| = (p-1)(p^2-1).$$

由命题2.3可得

$$|\mathcal{O}(A)| = \frac{\left|\mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))\right|}{\left|\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{GL}_3(\mathrm{GF}(p))\right|} = \frac{(p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2)}{(p^2-1)(p-1)} = (p^3-1)p^3.$$

按照与情形 (G)类似的论证，每个 (H)型矩阵的轨道恰好包含一个形如（5）的矩阵。因此，此情形下的轨道数等于形如 $(x-\lambda)p_1(x)$的多项式数，其中 $\lambda \in \mathrm{GF}(p)$ 且 p_1 在 **GF** 上不可约(p)。根据 $p \cdot \frac{p^2-p}{2}$ 定理 [22, 325]，该数等于 (H) 型矩阵的数量为

$$p \cdot \frac{p^2-p}{2} \cdot |\mathcal{O}(A)| = p \cdot \frac{p^2-p}{2} \cdot (p^3-1)p^3 = \frac{p^5(p-1)(p^3-1)}{2}.$$

除以 $\langle A\rangle_1$的生成元个数，我们得到

$$|V_{(\mathrm{H})}| = \frac{p^5(p-1)(p^3-1)}{2p^2(p-1)} = \tfrac{1}{2}p^3(p^3-1).$$

如上所述，逐情形来看，若两个顶点属于同一类型，则它们具有相同个数的单个生成元。这使得我们可以引入如下记号。

定义3.4. 我们用$\mathbf{gen}_{(\mathrm{X})}$ 表示类型为 (X)的顶点的单个生成元个数。

我们现在在下一个命题中总结情形 (A)–(H) 的结果。

命题3.5. 设 p 为一素数，且 $\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p))$ 为 3×3 阶矩阵在 $\mathrm{GF}(p)$上的环。对每一个 $\mathrm{X} \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\ldots, \mathrm{H}\}$，表 *1* 给出类型为 (X) 的顶点在含幺压缩交换图 $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p)))$中的个数、类型为 (X)的每个顶点的单个生成元个数及其在$\mathrm{GF}(p)$上的维数。

注意，列 $|V_{(\mathrm{X})}|$ 与$\mathbf{gen}_{(\mathrm{X})}$ （表1 ）的数量积等于 p^9，即 $\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p))$.的基数

注记3.6。 在以下情形 (B), (C), (D), (E), 以及 (F)中，我们已经证明，某个顶点的生成元的轨道 $\mathcal{O}(A)$ 与每个同类型的顶点都有交集。显然，这在情形 (A) 中也成立，并且可以证明，在情形 (G)和 (H)中也成立。因此，我们可以在命题 3.3中省略关于轨道的假设。

TABLE 1. 顶点 $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p)))$.

(X)	$\lvert V_{(\mathrm{X})}\rvert$	$\mathbf{gen}_{(\mathrm{X})}$	$\mathbf{dim}_{(\mathrm{X})}$
(A)	1	p	1
(B)	$(p^2+p+1)p^2$	$p(p-1)$	2
(C)	$\frac{1}{6}(p^2+p+1)p^3(p+1)$	$p(p-1)(p-2)$	3
(D)	$(p^3-1)(p+1)$	$p^2(p-1)$	3
(E)	$(p^2+p+1)(p+1)$	$p(p-1)$	2
(F)	$(p^2+p+1)p^2(p+1)$	$p(p-1)^2$	3
(G)	$\frac{1}{3}(p^3-p)(p^3-p^2)$	p^3-p	3
(H)	$\frac{1}{2}(p^3-1)p^3$	$p^2(p-1)$	3

4. NEIGHBORHOODS OF VERTICES OF $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p)))$

本节描述 $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p)))$. 中每个顶点的邻域。对于某一类型的顶点$v$，我们将计算与$v$相连的各类型顶点的数量。注意，顶点 $v=\langle A\rangle_1$ 的邻域是其中心化子 $\mathscr{C}(A)$的含幺压缩交换图。对于类型为 (Y) 的顶点 v，我们将用 $N(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})$ 表示类型为 (X)的 v 的邻点数。我们先讨论 $\mathbf{dim}\langle A\rangle_1$ 等于 1 和 3 的情形。

情形（A）：类型为 (A)的矩阵是数量矩阵，因此其中心化子是整个 $\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p))$。由此可知，对于任意类型为 (X)的 $N(\mathrm{X}、\mathrm{A})=|V_{(\mathrm{X})}|$。

情形 (C)：类型为 (C) 的矩阵 A 可对角化，因此不妨设其为对角矩阵。于是，A的中心化子等于

$$\mathscr{C}(A)=\langle A\rangle_1=\{\alpha E_{11}+\beta E_{22}+\gamma E_{33}\mid \alpha,\beta,\gamma\in \mathrm{GF}(p)\}.$$

设 $B=\alpha E_{11}+\beta E_{22}+\gamma E_{33}\in\mathscr{C}(A)$。若 $\alpha=\beta=\gamma$，则 B 属于类型 (A)。若 $\beta=\gamma\neq\alpha$、$\alpha=\beta\neq\gamma$ 或 $\alpha=\gamma\neq\beta$，则 B 属于类型 (B)，且这三种情形给出三个不同的顶点。若 α，β 和 γ 两两不同，则 $\langle B\rangle_1=\langle A\rangle_1$。由此可得

$$N(\mathrm{A},\mathrm{C})=1,\qquad N(\mathrm{B},\mathrm{C})=3,\qquad N(\mathrm{C},\mathrm{C})=1,$$

and

$$N(\mathrm{X},\mathrm{C})=0\qquad \text{for all } \mathrm{X}\in\{\mathrm{D},\mathrm{E},\mathrm{F},\mathrm{G},\mathrm{H}\}.$$

情形（D）：不妨设类型为 (D) 的矩阵 A 处于若尔当标准形。回忆一下，A 的中心化子为

$$\mathscr{C}(A)=\langle A\rangle_1=\{\alpha I+\beta(E_{12}+E_{23})+\gamma E_{13}\mid \alpha,\beta,\gamma\in \mathrm{GF}(p)\}.$$

令 $B=\alpha I+\beta(E_{12}+E_{23})+\gamma E_{13}\in\mathscr{C}(A)$。若 $\beta=\gamma=0$，则 B 属于类型 (A)。若 $\beta=0$ 且 $\gamma\neq 0$，则 B 属于类型 (E)，并且所有此类矩阵生成同一个子环。若 $\beta\neq 0$，则 $\langle B\rangle_1=\langle A\rangle_1$。由此可得

$$N(\mathrm{A},\mathrm{D})=1,\qquad N(\mathrm{D},\mathrm{D})=1,\qquad N(\mathrm{E},\mathrm{D})=1,$$

and

$$N(\mathrm{X},\mathrm{D})=0\qquad \text{for all } \mathrm{X}\in\{\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{F},\mathrm{G},\mathrm{H}\}.$$

情形（F）：我们可以假设一个类型为 (E) 的矩阵 A 处于若尔当标准形。回顾一下，A 的中心化子为

$$\mathscr{C}(A)=\langle A\rangle_1=\{\alpha(E_{11}+E_{22})+\beta E_{12}+\gamma E_{33}\mid \alpha,\beta,\gamma\in \mathrm{GF}(p)\}.$$

设 $B=\alpha(E_{11}+E_{22})+\beta E_{12}+\gamma E_{33}\in\mathscr{C}(A)$。若 $\alpha=\beta$ 且 $\gamma=0$，则 B 属于 (A) 型。若$\alpha=\beta$ 且 $\gamma\neq 0$，则矩阵 B 属于 (E) 型，且所有此类矩阵生成相同的子环。若 $\alpha\neq\beta$ 且 $\gamma=0$，则 B 属于 (B) 型，且所有此类矩阵生成相同的子环。最后，若 $\alpha\neq\beta$ 且 $\gamma\neq 0$，则 $\langle B\rangle_1=\langle A\rangle_1$。由此可得

$$N(\mathrm{A},\mathrm{F})=1,\qquad N(\mathrm{B},\mathrm{F})=1,\qquad N(\mathrm{E},\mathrm{F})=1,\qquad N(\mathrm{F},\mathrm{F})=1$$

and

$$N(\mathrm{X},\mathrm{F})=0\qquad \text{for all } \mathrm{X}\in\{\mathrm{C},\mathrm{D},\mathrm{G},\mathrm{H}\}.$$

情形（G）：若 A 属于 (G) 型，则 $\mathscr{C}(A)=\langle A\rangle_1\cong \mathbf{GF}(p^3)$。该域只有两个由单个元素生成的子环，即 $\mathbf{GF}(p)$，它对应于一个 (A) 型顶点；以及 $\mathbf{GF}(p^3)$，它对应于 $\langle A\rangle_1$。因此，

$$N(\mathrm{A},\mathrm{G})=1,\qquad N(\mathrm{G},\mathrm{G})=1,$$

and

$$N(\mathrm{X},\mathrm{G})=0\qquad \text{for all } \mathrm{X}\in\{\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D},\mathrm{E},\mathrm{F},\mathrm{H}\}.$$

情形（H）：回顾一下，类型为 H 的矩阵 A 可假设为分块对角形式

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & C\end{bmatrix},$$

其中 $\lambda\in\mathbf{GF}(p)$ 且 $\langle C\rangle_1\cong\mathbf{GF}(p^2)$。因此，$A$ 的中心化子等于

$$\mathscr{C}(A)=\left\{\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta I+\gamma C\end{bmatrix}\mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathrm{GF}(p)\right\}.$$

设 $B=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta I+\gamma C\end{bmatrix}\in\mathscr{C}(A)$。若 $\gamma=0$ 且 $\alpha=\beta$，则 B 属于类型 (A)。若 $\gamma=0$ 且 $\alpha\neq\beta$，则 B 属于类型 (B)，且所有此类矩阵生成同一个子环。最后，若 $\gamma\neq 0$，则 $\langle B\rangle_1=\langle A\rangle_1$。由此可得

$$N(\mathrm{A},\mathrm{H})=1,\qquad N(\mathrm{B},\mathrm{H})=1,\qquad N(\mathrm{H},\mathrm{H})=1,$$

and

$$N(\mathrm{X},\mathrm{H})=0\qquad \text{for all } \mathrm{X}\in\{\mathrm{C},\mathrm{D},\mathrm{E},\mathrm{F},\mathrm{G}\}.$$

情形（E）：我们可以假设类型为 (E) 的矩阵 A 处于其若尔当标准形。回顾一下，A 的中心化子为

$$\mathscr{C}(A)=\left\{\begin{bmatrix}a & b & c\\ 0 & a & 0\\ 0 & h & i\end{bmatrix}\mid a,b,c,h,i\in\mathrm{GF}(p)\right\}.$$

设 $B\in\mathscr{C}(A)$。首先，由于 $|V_{(\mathrm{A})}|=1$ 且矩阵 B 不可能属于类型 (C)、(G) 或 (H)，我们有

$$N(\mathrm{A},\mathrm{E})=1,\qquad N(\mathrm{C},\mathrm{E})=0,\qquad N(\mathrm{G},\mathrm{E})=0\qquad\text{and}\qquad N(\mathrm{H},\mathrm{E})=0.$$

$V_{(\mathrm{E})}$ 与 $V_{(\mathrm{X})}$ 之间所有边的数量可以通过两种不同的方法计算，即

$$N(\mathrm{X},\mathrm{E})\cdot|V_{(\mathrm{E})}|=N(\mathrm{E},\mathrm{X})\cdot|V_{(\mathrm{X})}|.$$

由此可得

$$N(\mathrm{D},\mathrm{E}) = \frac{N(\mathrm{E},\mathrm{D})\cdot|V_{(\mathrm{D})}|}{|V_{(\mathrm{E})}|} = \frac{1\cdot(p^3-1)(p+1)}{(p^2+p+1)(p+1)} = p-1,$$
$$N(\mathrm{F},\mathrm{E}) = \frac{N(\mathrm{E},\mathrm{F})\cdot|V_{(\mathrm{F})}|}{|V_{(\mathrm{E})}|} = \frac{1\cdot(p^2+p+1)p^2(p+1)}{(p^2+p+1)(p+1)} = p^2.$$

回忆一下，$\mathbf{gen}_{(\mathrm{X})}$ 表示类型为 (X)的顶点的生成元数量。现在我们考虑两种情形。若 $a=i$，则 B 属于类型 (A)、 (D) 或 (E)。在 $\mathscr{C}(A)$中有 p^4 个这样的矩阵，因此

$$N(\mathrm{A},\mathrm{E})\cdot\mathrm{gen}_{(\mathrm{A})} + N(\mathrm{D},\mathrm{E})\cdot\mathrm{gen}_{(\mathrm{D})} + N(\mathrm{E},\mathrm{E})\cdot\mathrm{gen}_{(\mathrm{E})} = p^4.$$

由此可得

$$N(\mathrm{E},\mathrm{E}) = \frac{p^4 - N(\mathrm{A},\mathrm{E})\cdot\mathrm{gen}_{(\mathrm{A})} - N(\mathrm{D},\mathrm{E})\cdot\mathrm{gen}_{(\mathrm{D})}}{\mathrm{gen}_{(\mathrm{E})}}$$
$$= \frac{p^4 - 1\cdot p - (p-1)\cdot p^2(p-1)}{p(p-1)} = 2p+1.$$

若 $a\neq i$，则 B 属于类型 (B) 或 (F)。在 $\mathscr{C}(A)$中有 $p^4(p-1)$ 个这样的矩阵，因此

$$N(\mathrm{B},\mathrm{E})\cdot\mathrm{gen}_{(\mathrm{B})} + N(\mathrm{F},\mathrm{E})\cdot\mathrm{gen}_{(\mathrm{D})} = p^4(p-1).$$

由此可得

$$N(\mathrm{B},\mathrm{E}) = \frac{p^4(p-1) - N(\mathrm{F},\mathrm{E})\cdot\mathrm{gen}_{(\mathrm{F})}}{\mathrm{gen}_{(\mathrm{B})}} = \frac{p^4(p-1) - p^2\cdot p(p-1)^2}{p(p-1)} = p^2.$$

情形（B）：类型为 (B) 的矩阵 A 可对角化，因此我们可以假设它为对角形式。回忆一下， A 的中心化子为

$$\mathscr{C}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \mid \alpha\in\mathrm{GF}(p),\ C\in\mathcal{M}_2(\mathrm{GF}(p)) \right\}.$$

令 $B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \in \mathscr{C}(A)$。首先，由于 $|V_{(\mathrm{A})}| = 1$ 和矩阵 B 不可能属于 (D) 或 (G) 型，因此有

$$N(\mathrm{A},\mathrm{B}) = 1, \qquad N(\mathrm{D},\mathrm{B}) = 0 \qquad \text{and} \qquad N(\mathrm{G},\mathrm{B}) = 0.$$

与情形 (E) 类似，我们有

$$N(\mathrm{X},\mathrm{B})\cdot|V_{(\mathrm{B})}| = N(\mathrm{B},\mathrm{X})\cdot|V_{(\mathrm{X})}|.$$

由此可得

$$N(\mathrm{C},\mathrm{B}) = \frac{N(\mathrm{B},\mathrm{C})\cdot|V_{(\mathrm{C})}|}{|V_{(\mathrm{B})}|} = \frac{3\cdot\frac{1}{6}(p^2+p+1)p^3(p+1)}{(p^2+p+1)p^2} = \tfrac{1}{2}p(p+1),$$
$$N(\mathrm{E},\mathrm{B}) = \frac{N(\mathrm{B},\mathrm{E})\cdot|V_{(\mathrm{E})}|}{|V_{(\mathrm{B})}|} = \frac{p^2\cdot(p^2+p+1)(p+1)}{(p^2+p+1)p^2} = p+1,$$
$$N(\mathrm{F},\mathrm{B}) = \frac{N(\mathrm{B},\mathrm{F})\cdot|V_{(\mathrm{F})}|}{|V_{(\mathrm{B})}|} = \frac{1\cdot(p^2+p+1)p^2(p+1)}{(p^2+p+1)p^2} = p+1,$$
$$N(\mathrm{H},\mathrm{B}) = \frac{N(\mathrm{B},\mathrm{H})\cdot|V_{(\mathrm{H})}|}{|V_{(\mathrm{B})}|} = \frac{1\cdot\frac{1}{2}(p^3-1)p^3}{(p^2+p+1)p^2} = \tfrac{1}{2}p(p-1).$$

总共有 p^5 个矩阵属于 $\mathscr{C}(A)$，因此

$$\sum_{\mathrm{X}\in\{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{E},\mathrm{F},\mathrm{H}\}} N(\mathrm{X},\mathrm{B})\cdot \mathrm{gen}_{(\mathrm{X})} = p^5.$$

由此可得

$$\begin{aligned} N(\mathrm{B},\mathrm{B}) &= \frac{p^5 - \sum_{\mathrm{X}\in\{\mathrm{A},\mathrm{C},\mathrm{E},\mathrm{F},\mathrm{H}\}} N(\mathrm{X},\mathrm{B})\cdot \mathrm{gen}_{(\mathrm{X})}}{\mathrm{gen}_{(\mathrm{B})}} \\ &= \frac{p^5-1\cdot p-\frac{1}{2}(p^2+p)\cdot p(p-1)(p-2)-(p+1)\cdot p(p-1)-(p+1)\cdot p(p-1)^2-\frac{1}{2}p(p-1)\cdot p^2(p-1)}{p(p-1)} \\ &= p^2+p+1. \end{aligned}$$

上述结果总结了 $\Lambda_1(\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p)))$ 中所有顶点的邻域，见下一个命题。

命题 4.1. 设 p 为素数，且 $\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p))$ 是由 3×3 个矩阵构成的环，矩阵取自 $\mathrm{GF}(p)$。表 2 的各列描述了含幺压缩交换图 $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p)))$ 中各类型顶点的邻域。特别地，对于每个 X， Y $\in\{$ A、 B、.....、 H$\}$，该表给出了每个类型为 (Y) 的顶点的邻域中，类型为 (X) 的邻居数量。

TABLE 2. $\Lambda_1(\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p)))$ 的顶点的邻域。

(Y) \ (X)	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)	(G)	(H)
(A)	1	1	1	1	1	1	1	1
(B)	$(p^2+p+1)p^2$	p^2+p+1	3	0	p^2	1	0	1
(C)	$\frac{1}{6}(p^2+p+1)p^3(p+1)$	$\frac{1}{2}(p^2+p)$	1	0	0	0	0	0
(D)	$(p^3-1)(p+1)$	0	0	1	$p-1$	0	0	0
(E)	$(p^2+p+1)(p+1)$	$p+1$	0	1	$2p+1$	1	0	0
(F)	$(p^2+p+1)p^2(p+1)$	$p+1$	0	0	p^2	1	0	0
(G)	$\frac{1}{3}(p^3-p)(p^3-p^2)$	0	0	0	0	0	1	0
(H)	$\frac{1}{2}(p^3-1)p^3$	$\frac{1}{2}p(p-1)$	0	0	0	0	0	1

5. SUBGRAPH INDUCED ON $V_{(\mathrm{B})}\cup V_{(\mathrm{E})}$

本节描述由集合 $V_{(\mathrm{B})}\cup V_{(\mathrm{E})}$. 所诱导的 $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p)))$ 子图。我们将这个子图称为 (B)–(E) 图。为了描述 (B)–(E) 图，我们将在 $V_{(\mathrm{B})}\cup V_{(\mathrm{E})}$ 顶点集与 $\mathbf{GF}(p)$ 上射影平面中的点线对之间建立双射。

5.1. 域 $\mathbf{GF}(p)$ 上的射影平面及其关联矩阵。 让我们回顾域 $\mathbf{GF}(p)$ 上的射影平面概念，我们将其记为 $\mathbf{PG}(2,p)$，参见 [5]。考虑向量空间 $\mathbf{GF}(p)^3$ 的所有一维子空间所成的集合，并将其记为 $\mathscr{P}$，以及向量空间 $\mathbf{GF}(p)^3$ 的所有二维子空间所成的集合，并将其记为 $\mathscr{L}$。射影平面 $\mathbf{PG}(2,p)$ 的点是 $\mathscr{P}$ 的元素，而直线是 $\mathscr{L}$ 的元素。

此外，点 $P \in \mathscr{P}$ 位于直线 $L \in \mathscr{L}$ 上，当且仅当 $P \subset L$ ，并且我们将其记为$P \in L$. 这些集合的基数为

$$|\mathscr{P}| = |\mathscr{L}| = p^2 + p + 1,$$

每条直线包含 $p+1$ 个点，且每个点位于 $p+1$ 条直线上。射影平面 PG$(2,\ p)$可用其关联矩阵描述，该矩阵是阶为 $(p^2+p+1)\times(p^2+p+1)$. 的 0-1 矩阵。关联矩阵的每一行对应一个点，矩阵的每一列对应一条直线，其中当 $P \in L$ 时，矩阵的 $(P,\ L)$ 个元素为 1，否则为 0。关联矩阵的每一行和每一列都恰好包含 $p+1$ 个 1。

关联矩阵的显式描述见 [4], ；此处我们回顾并稍作调整。令 e 为长度为 p且所有位置均为 1 的向量，即

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^p.$$

对于每个 $s \in \{1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ p\}$ 令 $R_s \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ 为矩阵，其第 s 行等于 e^T，其余元素均为 0，即

$$(R_s)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = s, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此外，对于每个 $s \in \{2,\ \ldots\ldots,\ p\}$ 以及每个 $t \in \{1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ p\}$，令 $S_{s,\ t} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ 为如下定义的置换矩阵:

$$(S_{s,t})_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{if } (s-1)(i+j) \equiv t \pmod{p}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

现在，令 $T_p \in \mathcal{M}_{1+p+p^2}(\mathbb{R})$ 为如下定义的 0-1 分块矩阵:

$$T_p = \begin{bmatrix} 1 & e^T & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ e & 0 & R_1 & R_2 & \cdots & R_p \\ 0 & R_1^T & I_p & I_p & \cdots & I_p \\ 0 & R_2^T & S_{2,1} & S_{2,2} & \cdots & S_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & R_p^T & S_{p,1} & S_{p,2} & \cdots & S_{p,p} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

其中， I_p 是 p 阶单位矩阵。文中证明了， T_p 是平面 PG$(2,\ p)$.的关联矩阵。

例如，当 $p=3$ 时，射影平面 $\mathbf{PG}(2,\ 3)$ 的关联矩阵 T_3 为

$$T_3=\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\\hline
1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\\hline
0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1\\\hline
0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\\hline
0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1
\end{array}\right].$$

5.2. $V_{(\mathrm{B})}\cup V_{(\mathrm{E})}$ **与** $\mathscr{P}\times\mathscr{L}$ **之间的双射**。记

$$\mathscr{B}=\{(P,L)\in\mathscr{P}\times\mathscr{L}\mid P\notin L\} \tag{7}$$

and

$$\mathscr{E}=\{(P,L)\in\mathscr{P}\times\mathscr{L}\mid P\in L\}. \tag{8}$$

$\mathscr{B}$ 的元素对应于关联矩阵 T_p 中的零，而 $\mathscr{E}$ 的元素对应于 T_p中的 $\mathbf{1}$。显然，
$|\mathscr{E}|=(p+1)(p^2+p+1)$ 和 $|\mathscr{B}|=p^2(p^2+p+1)$.

我们首先在集合 $V_{(\mathrm{B})}$ 与 $\mathscr{B}$之间建立一个双射。设 $v\in V_{(\mathrm{B})}$ 是任意一个顶点。设 A 是顶点 v的一个生成元，其特征多项式为 $p_A(x)=(x-\lambda)(x-\mu)^2$，其中 $\lambda\neq\mu$。记 $\widehat{A}=(\lambda-\mu)^{-1}(A-\mu I)$。则 $\widehat{A}$ 是一个秩 $\mathbf{1}$ 幂等元，满足 $v=\langle A\rangle_1=\langle A\rangle_{1^\circ}$。由于 $\omega_{\widehat{A}}=1$， A 是 v中唯一的秩 $\mathbf{1}$ 幂等元，因此 A 只依赖于 v ，而不依赖于生成元 A的选择。这意味着我们可以定义一个映射 $\Phi_{\mathrm{B}}\colon\ V_{(\mathrm{B})}\to\mathscr{B}$ ，其为

$$\Phi_{\mathrm{B}}(v)=(\operatorname{Im}\widehat{A},\operatorname{Ker}\widehat{A}).$$

注意到 $L=$核 $A\in\mathscr{L}$, $P=$像 $A\in\mathscr{P}$, and $P\notin L$, so that $\Phi_{\mathrm{B}}(v)$ 属于 $\mathscr{B}$。

为了证明映射 Φ_{B} 是一个双射，我们定义映射 $\Psi_{\mathrm{B}}:\mathscr{B}\to V_{(\mathrm{B})}$如下。对于一对 $(P,\ L)\in\mathscr{B}$ 我们令 $\Psi_{\mathrm{B}}(P,\ L)$ 为由 $\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p))$ 中像为 P且核为 L的唯一幂等元生成的子环。显然， $\Phi_{\mathrm{B}}\circ\Psi_{\mathrm{B}}=\mathsf{Id}_{\mathscr{B}}$。由于 $|V_{(\mathrm{B})}|=|\mathscr{B}|=p^2(p^2+p+1)$， 我们得出 Φ_{B} 是一个双射。

接下来，我们建立集合 $V_{(\mathrm{E})}$ 与 $\mathscr{E}$之间的一个双射。设 $v\in V_{(\mathrm{E})}$ 为任意顶点。设 A 为顶点 v 的一个生成元，其特征多项式为 $p_A(x)=(x-\lambda)^3$.

记 $A=A-\lambda I$。则 A 是一个秩 $\mathbf{1}$ 幂零元，满足 $v=\langle A\rangle_1=\langle A\rangle_{1^\circ}$。由于 $\omega_{\widehat{A}}=p-1$， v 中的每个秩 $\mathbf{1}$ 幂零元都是 A的标量倍数，因此 A的核和像仅取决于 v ，而与生成元 A的选择无关。这意味着我们可以定义映射 $\Phi_{\mathrm{E}}\colon\ V_{(\mathrm{E})}\to\mathscr{E}$ ，其定义为

$$\Phi_{\mathrm{E}}(v)=(\operatorname{Im}\widehat{A},\operatorname{Ker}\widehat{A}).$$

注意 $L=$核 $A\in\mathscr{L}$、 $P=$像 $A\in\mathscr{P}$以及 $P\in L$，从而 $\Phi_{\mathrm{E}}(v)$ 属于 $\mathscr{E}$。

为了证明映射 Φ_{E} 是双射，我们如下定义映射 Ψ_{E} : $\mathscr{E} \to V_{(\mathrm{E})}$。对于一对 $(P, L) \in \mathscr{E}$，我们令 $\Psi_{\mathrm{E}}(P, L)$ 为 $\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p))$ 中一个幂零元所生成的子环，其像为 P、核为 L。由于任意两个具有此性质的幂零元互为标量倍数，映射 Ψ_{E} 是良定义的。显然，$\Phi_{\mathrm{E}} \circ \Psi_{\mathrm{E}} = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$。由于$|V_{(\mathrm{E})}| = |\mathscr{E}| = (p^2 + p + 1)(p + 1)$, 我们得出 Φ_{E} 是双射。

现在我们将映射 Φ_B 和 Φ_{E} 合并为一个双射

$$\Phi : V_{(\mathrm{B})} \cup V_{(\mathrm{E})} \to \mathscr{B} \cup \mathscr{E} = \mathscr{P} \times \mathscr{L}$$

由 $\Phi|_{V_{(\mathrm{B})}} = \Phi_{\mathrm{B}}$ 和 $\Phi|_{V_{(\mathrm{E})}} = \Phi_{\mathrm{E}}$. 定义。由于 $V_{(\mathrm{B})}$ 和 $V_{(\mathrm{E})}$ 不相交，Φ 定义良好。此外，由于 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{E}$ 不相交，且 Φ_{B} 和 Φ_{E} 是双射，Φ 是一个双射。

5.3. 边的几何解释。我们定义一个图 Δ，其顶点集为 $V(\Delta) = \mathscr{P} \times \mathscr{L}$，边定义如下。设 v_1 和 v_2 是 $V_{(\mathrm{B})} \cup V_{(\mathrm{E})}$. 的元素。当且仅当含幺压缩交换图 $\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p))$. 中的 v_1 和 v_2 之间存在一条边时，Δ 中的 $\Phi(v_1)$ 和 $\Phi(v_2)$ 之间存在一条边。这使得映射 Φ 成为 $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p)))$ 的导出子图（其顶点集为 $V_{(\mathrm{B})} \cup V_{(\mathrm{E})}$ 和 Δ.）与图 Δ 之间的图同构。我们将图 Δ 的顶点与关联矩阵 T_p 的元素对应起来。下一个定理将用几何术语描述图 Δ 的边。

定理 5.1. 令 $(P_1, L_1), (P_2, L_2) \in \mathscr{P} \times \mathscr{L}$ 为任意元素。当且仅当满足以下条件之一时，(P_1, L_1) 与 (P_2, L_2) 在 Δ 中之间存在一条边
(a) $P_1 = P_2$ 与 $L_1 = L_2$,(b) $P_1 \in L_1$, $P_2 \in L_2$, 且 $P_1 = P_2$ 或 $L_1 = L_2$,(c) $P_1 \neq P_2$, $L_1 \neq L_2$ 与 $P_2 \in L_1 \cap L_2$ 以及 $P_1 \in L_2 \backslash L_1$,
(d) $P_1 \neq P_2$, $L_1 \neq L_2$ 与 $P_1 \in L_1 \cap L_2$ 以及 $P_2 \in L_1 \backslash L_2$,
(e) $P_1 \neq P_2$, $L_1 \neq L_2$ 与 $P_1 \in L_2 \backslash L_1$ 以及 $P_2 \in L_1 \backslash L_2$.

证明。令 $(P_1, L_1) = \Phi(v_1)$ 和 $(P_2, L_2) = \Phi(v_2)$。令 A_1 为 v_1 的生成元，其像为 P_1，核为 L_1；令 A_2 为 v_2 的生成元，其像为 P_2，核为 L_2。
($\Leftarrow$): 假设条件 (a)–(e) 中有一个成立。
(a) 由于 $(P_1, L_1) = (P_2, L_2)$ 和 Φ 是双射，因此 $v_1 = v_2$. 。由于 $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p)))$ 中的每个顶点都有一个环，故 (P_1, L_1) 与 (P_2, L_2). 之间存在一条边。
(b) 这些条件意味着 $(P_1, L_1), (P_2, L_2) \in \mathscr{E}$，因此 $v_1, v_2 \in V_{(\mathrm{E})}$.
若 $P_1 = P_2$，则 $P_2 \in L_1$ 且 $P_1 \in L_2$，因此 $A_1A_2 = 0$ 且 $A_2A_1 = 0$。结合最后两个等式可得 $A_1A_2 = A_2A_1$，这意味着 v_1 与 v_2 之间存在一条边，因此 (P_1, L_1) 与 (P_2, L_2). 之间也存在一条边。

如果 $L_1 = L_2$，那么再次有 $P_2 \in L_1$ 和 $P_1 \in L_2$，由此得到相同的结论 n.
(c)–(e) 每组条件都意味着 $P_2 \in L_1$ 和 $P_1 \in L_2$，因此 (P_1, L_1) 与 (P_2, L_2)，之间存在一条边，如上所示。
($\Rightarrow$): 假设在 Δ. 中，(P_1, L_1) 与 (P_2, L_2) 之间存在一条边。那么 v_1 与 v_2 之间也存在一条边，因此我们有 $A_1A_2 = A_2A_1$. 。如果 $(P_1, L_1) = (P_2, L_2)$，那么条件 (a) 成立。因此，假设 $(P_1, L_1) \neq (P_2, L_2)$。注意，矩阵 A_1 和 A_2 的秩为 1，因为它们的像分别是 P_1 和 P_2，而它们是维数为 1 的向量子空间。

我们声称 $A_1A_2 = 0$. 假设情况并非如此。那么秩$(A_1A_2) = 1$. 这意味着像$(A_1A_2) =$ 像$(A_1) = P_1$ 且核$(A_1A_2) =$ 核$(A_2) = L_2$. 由于 $A_1A_2 = A_2A_1$，我们得出结论

类似地，像$(A_2A_1) = 像(A_2) = P_2$ 且核$(A_2A_1) = 核(A_1) = L_1$.因此，$P_1 = P_2$ 且$L_1 = L_2$，这与$(P_1, L_1) \neq (P_2, L_2)$矛盾。这证明了我们的断言。

由上可得 $A_1A_2 = 0$ 和 $A_2A_1 = 0.$。这意味着 $P_2 \in L_1$ 和 $P_1 \in L_2.$。现在考虑四种情形：

(i) $P_1 \in L_1$ 和 $P_2 \in L_2$：若 $P_1 = P_2$ 或 $L_1 = L_2$，则条件 (b) 成立。因此，设相反情形成立，即 $P_1 \neq P_2$ 和 $L_1 \neq L_2.$。这意味着两个不同的点 P_1 和 P_2 同时位于两条不同的直线 L_1 和 L_2 上，这是不可能的。(ii) $P_1 \notin L_1$ 和 $P_2 \in L_2$：由于 $P_1 \notin L_1$ 和 $P_2 \in L_1$，我们有 $P_1 \neq P_2.$。类似地，由于 $P_1 \notin L_1$和 $P_1 \in L_2$，可得 $L_1 \neq L_2.$。此外，$P_2 \in L_1 \cap L_2$ 和 $P_1 \in L_2 \backslash L_1.$。因此，条件$(c)$ 成立。(iii) $P_1 \in L_1$ 和 $P_2 \notin L_2$：由于 $P_2 \notin L_2$ 和 $P_1 \in L_2$，我们有 $P_1 \neq P_2.$。类似地，由于 $P_2 \notin L_2$和 $P_2 \in L_1$，可得 $L_1 \neq L_2.$。此外，$P_1 \in L_1 \cap L_2$ 和 $P_2 \in L_1 \backslash L_2.$。因此，条件$(d)$ 成立。(iv) $P_1 \notin L_1$ 和 $P_2 \notin L_2$：由于 $P_1 \in L_2$ 和 $P_1 \notin L_1$，可得 $P_1 \in L_2 \backslash L_1.$。类似地，由于 $P_2 \in L_1$和 $P_2 \notin L_2$，可得 $P_2 \in L_1 \backslash L_2$。这意味着 $P_1 \neq P_2$ 和 $L_1 \neq L_2$，因此条件(e) 成立。

证明至此完成。 □

我们注意到，定理 (a) 5.1 中的条件 Δ.描述了 (b) 中的自环。条件 $\mathscr{E}$描述了 (c)中两个不同顶点之间的边，(d) 这意味着，当且仅当关联矩阵中的两个 1 位于同一行或同一列时，它们才相连。条件 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{E}$描述了 2×2 中的顶点之间的边，T_p它们意味着，当且仅当关联矩阵中的 *0* 和 *1* 位于不同行且不同列，并且包含这两个元素的子矩阵的另外两个元素都等于 1 时，它们才相连。条件 (e) 描述了 $\mathscr{B}$ 中两个不同顶点之间的边。它意味着，当且仅当关联矩阵中的两个 0 T_p 位于不同行且不同列，并且包含这两个 0 的 2×2 子矩阵的另外两个元素 T_p都等于 *1* 时，它们才相连。

图 1 展示了所有可能的 2×2 子矩阵，以及其元素之间的边。图中的红色顶点是类型为 (B) 的顶点，对应于矩阵 T_p 中的零，而蓝色顶点是类型为 (E) 的顶点，对应于矩阵 $T_p.$ 中的 1。注意，2×2 的子矩阵 T_p 不可能只包含 1，因为这意味着两条不同的直线在两个不同的点相交，而这在射影平面中是不可能的。

6. Description of $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p)))$

本节将完整描述环 3×3 上矩阵的含幺压缩交换图$\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathbf{GF}(p)))$，其中矩阵定义在 $\mathbf{GF}(p)$ 上，并给出其构造算法。

注意，由顶点集 $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p)))$ 所诱导的子图的性质$V_{(\mathrm{B})} \cup V_{(\mathrm{E})}$ 在第5节中已有描述。考虑关联矩阵 T_p 的各项作为顶点，并按照图1设置边，即可构造出该子图。这里，我们根据顶点的类型描述图其余部分的性质，并说明剩余顶点如何连接到 (B)–(E) 子图。此外，根据表 2，由顶点集 $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p)))$ 所诱导的子图 $V_{(\mathrm{C})} \cup V_{(\mathrm{D})} \cup V_{(\mathrm{F})} \cup V_{(\mathrm{G})} \cup V_{(\mathrm{H})}$

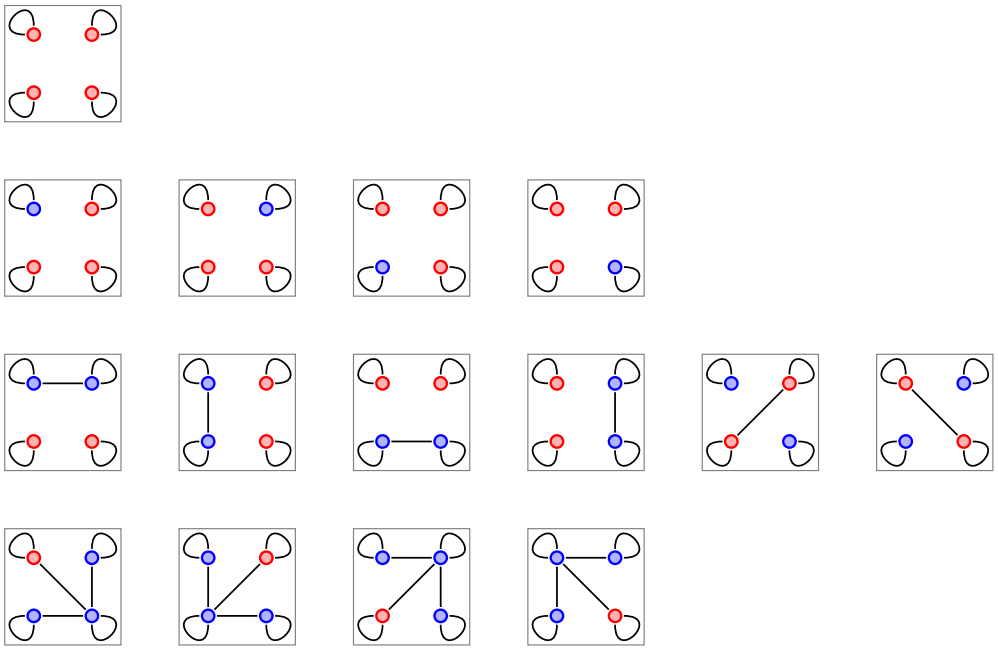

FIGURE 1. 2×2 的可能子矩阵，以及其元素之间的边 .

仅包含自环，不含其他边。这些性质使我们能够给出构造整个图的算法。

(C) 注意，对于 $p = 2$ ，不存在类型为 (C) 的顶点，因此设 $p \geqslant 3.$ 。根据表 2，每个类型为 (C) 的顶点都与 3 个类型为 (B) 的顶点相连，这些顶点构成一个三角形，因为它们是某个交换环的子环；具体而言，该交换环是类型为 (C) 的顶点。因此，每个类型为 (C) 的顶点都与一个唯一三角形的顶点相连；在 (B)–(E) 图中，该三角形的顶点类型为 (B) 。现在证明，对于每个由类型为 (B) 的顶点构成的三角形，都存在一个与它们相连的类型为 (C) 的顶点。任选三个不同的类型为 (B) 的顶点，使它们构成一个三角形。由于它们的生成元彼此可交换，因此可以同时对角化，所以它们与任何在同一基下可对角化的类型为 (C) 的矩阵都可交换。所有这类类型为 (C) 的矩阵生成同一个类型为 (C) 的顶点。注意，该顶点是唯一的，因为基在其元素的标量乘法意义下唯一。因此，由类型为 (B) 的顶点构成的三角形数量等于类型为 (C) 的顶点数量；根据表 1，该数量等于 $\frac{1}{6}(p^2+p+1)p^3(p+1)$。

(F) 根据表 2，每个类型为 (F) 的顶点恰好与一个类型为 (B) 的顶点和一个类型为 (E) 的顶点相连。由于这两个顶点是同一个交换环的子环，它们之间有一条边。因此，每个类型为 (F) 的顶点都与一条唯一的 (B)–(E) 边的两个端点相连。由表1可知，类型为 (B) 的顶点数为 $(p^2+p+1)p^2$ ；由表 2 可知，每个类型为 (B) 的顶点都与 $p+1$ 个类型为 (E) 的顶点相连，因此 (B)–(E) 边的数量等于 $(p^2+p+1)p^2 \cdot (p+1)$。此外，这也等于类型为 (F) 的顶点数。因此，每条 (B)–(E) 边的两个端点都与一个唯一的类型为 (F) 的顶点相连。

(H) 根据表 2，每个类型为 (H) 的顶点都与一个唯一的类型为 (B) 的顶点相连。每个类型为 (B) 的顶点的邻域中有 $\frac{p(p-1)}{2}$ 个类型为 (H) 的顶点。由表1可知，类型为 (H) 的顶点有 $\frac{1}{2}(p^3-1)p^3$ 个，类型为 (B) 的顶点有 $(p^2+p+1)p^2$ 个。注意到 $\frac{1}{2}(p^3-1)p^3 = (p^2+p+1)p^2 \cdot \frac{p(p-1)}{2}$，因此，类型为 (H) 的顶点被划分为 $(p^2+p+1)p^2$ 组，且每组都与一个唯一的类型为 (B) 的顶点相连。(D) 根据表 2，每个类型为 (D) 的顶点都与一个唯一的类型为 (E) 的顶点相连。每个类型为 (E) 的顶点的邻域中有 $p-1$ 个类型为 (D) 的顶点。类型为 (D) 的顶点有 $(p^3-1)(p+1)$ 个，类型为 (E) 的顶点有 $(p^2+p+1)(p+1)$ 个。由于 $(p^3-1)(p+1) = (p^2+p+1)p^2 \cdot (p-1)$，类型为 (D) 的顶点被划分为 $p-1$ 组，且每组都与一个唯一的类型为 (E) 的顶点相连。(G) 根据表1，类型为 (G) 的顶点有 $\frac{1}{3}(p^3-p)(p^3-p^2)$ 个，且它们不与 (B)–(E) 图相连。(A) 类型为 (A) 的顶点是唯一的，并且它与图中的每个顶点相连。现在我们可以给出构造环 $\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p))$ 的幺压缩交换图 $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p)))$ 的算法。1. 按照第5节所述，构造 (B)–(E) 图。类型为 (B) 的顶点对应于式 (6) 中给出的射影几何 $\mathrm{PG}(2,p)$ 的关联矩阵 T_p 中的零，类型为 (E) 的顶点则对应于同一矩阵中的1。这些顶点之间的边如图1所示。2. 如果 $p \geqslant 3$，则对于每个由类型为 (B) 的顶点组成的三角形，添加一个类型为 (C) 的顶点，并将其与该三角形的各顶点相连。如果 $p = 2$，则跳过此步骤。3. 对于每条 (B)–(E) 边，添加一个类型为 (F) 的顶点，并将其与该边的两个端点相连。4. 对于每个类型为 (B) 的顶点，添加 $\frac{p(p-1)}{2}$ 个类型为 (H) 的顶点，并将它们与该类型为 (B) 的顶点相连。5. 对于每个类型为 (E) 的顶点，添加 $p-1$ 个类型为 (D) 的顶点，并将它们与该类型为 (E) 的顶点相连。6. 添加 $\frac{1}{3}(p^3-p)(p^3-p^2)$ 个类型为 (G) 的顶点。7. 添加一个类型为 (A) 的顶点，并将其与其他所有顶点相连。8. 在每个顶点上添加一个环。

上述算法给出了含幺压缩交换图 $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p)))$的完整描述，这也是本文的主要贡献。

7. Commuting graph of $\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p))$

最后，我们展示如何利用含幺压缩交换图 $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p)))$来描述普通（未压缩的）交换图 $\Gamma(\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p)))$。

对于有限域 $\mathbb{F}$ 上的 2×2 矩阵，交换图 $\Gamma(\mathcal{M}_2(\mathbb{F}))$ 的结构在 [2, 定理 2]中作了描述。特别地，该图是 $|\mathbb{F}|^2+|\mathbb{F}|+1$ 个大小为 $|\mathbb{F}|^2-|\mathbb{F}|$. 的团的不交并。对于 3×3 矩阵，交换图 $\Gamma(\mathcal{M}_3(\mathbb{F}))$ 的描述仍是一个未解决问题。该图在 [16, 引理4.1] 中得到了部分描述，作者证明该图不连通，且除一个连通分支外，其余连通分支均为团。此外，每一个作为团的连通分支都等于 $\mathbb{F}[A]\backslash\mathbb{F}I$，其中 A 是具有不可约最小多项式的非亏格矩阵，并且在域 $\mathbb{F}$与 $\mathbb{F}[A]$.之间不存在中间域。

利用第6 节的结果，我们现在可以完整描述图 $\Gamma(\mathcal{M}_3(\mathbb{F}))$ 在 $\mathbb{F} = \mathrm{GF}(p)$这一情形下的结构。我们将使用最初用于零因子图的所谓“膨胀”过程来完成这一描述，该过程见于 [11, 6]。

我们从 $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p)))$ 第 6 节中描述的图开始。要得到图 $\Gamma(\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p)))$，我们首先移除唯一一个类型为 (A) 的顶点，以及与该顶点相 incident 的所有边。然后，我们移除每个顶点上的自环。最后一步中，我们按照任意顺序逐个将每个类型为 v (X) 的顶点扩展为大小为 $\mathrm{gen}^{(\mathrm{X})}$ 的团，其中 $\mathrm{gen}^{(\mathrm{X})}$ 由表 1 给出。此外，我们将该团中的每个顶点与所有原先和 v 相连的顶点相连。对所有顶点完成此操作后，便得到图 $\Gamma(\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p)))$.

我们注意到，移除唯一一个类型为 (A) 的顶点及其所有边，并从 $\Lambda^1(\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p)))$ 中移除所有自环后，该图会分解为若干个连通分支。除一个之外，其余连通分支都只有一个顶点；这些顶点恰好是类型为 (G) 的顶点，共有 $\frac{1}{3}(p^3-p)(p^3-p^2)$ 个。经过“扩展”过程后，这些顶点在 $\Gamma(\mathcal{M}_3(\mathrm{GF}(p)))$. 中变为大小为 p^3-p 的团。唯一剩下的连通分支包含所有类型为 (B)、(C)、(D)、(E)、(F) 和 (H) 的矩阵。这与[16,引理 4.1]中的部分描述相符。

Acknowledgments

谨此感谢 ARIS（斯洛文尼亚研究与创新署）通过双边资助 BI-BA/24-25-024 和 BI-BA/26-27-008 提供的支持。Damjana Kokol Bukov˘sek 和 Nik Stopar 感谢 ARIS 提供的经费支持（科研核心资助编号 P1-0222，以及项目 J1-70034 和 J1-50002）。
Ivan-Vanja Boroja 感谢 Mrkonji´c Grad 市政府提供的经费支持（编号 01-67-6/21）。

References

1. S. Akbari、H. Bidkhori 和 A. Mohammadian，矩阵代数的交换图，《代数通讯》**36**(2008)，第 11 期，4020–4031。MR 2460400 2. S. Akbari、M. Ghandehari、M. Hadian 和 A. Mohammadian，半单环的交换图，《线性代数及其应用》**390**(2004)，345–355。MR 2083665 3. S. Akbari、A. Mohammadian、H. Radjavi 和 P. Raja，关于交换图的直径，《线性代数及其应用》**418** (2006)，第 1 期，161–176。MR 2257587 4. C. Balbuena，射影平面以及一些顶点较少、围长为 *6* 的正则二部图的关联矩阵，SIAM 离散数学杂志 **22** (2008)，第 4 期，1351–1363。MR 2443118 5. L.M. Batten，有限几何的组合学，第二版，剑桥大学出版社，剑桥，1997。MR 1474497 6. N. Bloomfield 和 C. Wickham，零因子图亏格为二的局部环，《代数通讯》**38** (2010)，第 8 期，2965–2980。MR 2730289 7. I.-V. Boroja、H.R. Dorbidi、D. KOKOL BUKOV˘SEK 和 N. STOPAR，矩阵环的压缩交换图，《线性与多重线性代数》(2025)，19 页，https://doi.org/10.1080/03081087.2024.2447527。8. I.-V. Boroja、D. KOKOL BUKOV˘SEK 和 N. STOPAR，无限环何时具有有限压缩交换图？，《代数及其应用杂志》(2025)，2650148，https://doi.org/10.1142/S0219498826501483。9. M. Bre˘sar，非交换多项式的交换子与像，《数学进展》**374** (2020)，107346，21 页。MR 4132755 10. A. Chirvasitu、I. Gogi´c 和 M. Toma˘sevi´c，针对奇异矩阵的 *˘semrl* 保持子定理的一种变体，《线性代数及其应用》**724**(2025)，298–319。MR 4927632 11. A. Djuri´c、S. Jev¯deni´c 和 N. STOPAR，有限交换环的压缩零因子图的范畴性质，《代数及其应用杂志》**20** (2021)，第 5 期，论文编号 2150069，16 页。MR 4255745

12. G. Dolinar、A. Guterman、B. Kuzma 和 P. Oblak，极值矩阵中心化子，《线性代数及其应用》438 (2013)，第 7 期，2904–2910。MR 3018047 13. ，交换图与极值中心化子，《当代数学艺术》7 (2014)，第 2 期，453–459。MR 3240449 14. D. Dolˇzan，有限环的交换图，《德布勒森数学刊物》95 (2019)，第 1–2 期，123–131。MR 3998029 15. D. Dolˇzan、D. KOKOL BUKOVˇSEK 和 B. Kuzma，关于阶数为素数平方的矩阵的交换图直径下界，《Filomat》32 (2018)，第 17 期，5993–6000。MR 3899333 16. D. Dolˇzan、D. KOKOL BUKOVˇSEK 和 B. Kuzma，关于交换图中连通分支的直径，《线性代数及其应用》522 (2017)，161–174。MR 3621183 17. H.R. Dorbidi，关于有限矩阵环交换图的一个猜想，《有限域及其应用》56 (2019)，93–96。MR 3883282 18. H.R. Dorbidi 和 R. Manaviyat，环 $M_3(F_q)$ 的交换图，《线性与多重线性代数》72 (2024)，第 1 期，25–30。MR 4685140 19. A. Erfanian、K. Khashyarmanesh 和 Kh. Nafar，环的非交换图，《离散数学、算法与应用》7 (2015)，第 3 期，1550027，7 页。MR 3402835 20. G.R. Goodson，关于矩阵理论中的交换子，《矩阵运算》4 (2010)，第 2 期，283–292。MR 2667339 21. I.N. Herstein，《抽象代数》，第三版，普伦蒂斯·霍尔公司，上萨德尔河镇，新泽西州，1996。MR 1375019 22. R. Lidl 和 H. Niederreiter，《有限域及其应用导论》，第一版，剑桥大学出版社，剑桥，1994。MR 1294139 23. A. Mohammadian，有限矩阵环的交换图，《代数通讯》38 (2010)，第 3 期，988–994。MR 2650384 24. M. Omladiˇc、H. Radjavi 和 P. ˇSemrl，保持可交换性，《纯粹与应用代数杂志》156 (2001)，第 2–3 期，309–328。MR 1808828 25. Y. Shitov，具有最大直径交换图的矩阵环，《组合论杂志 A 辑》141 (2016)，127–135。MR 3479240 26. P. ˇSemrl，非线性保交换映射，《塞格德数学科学学报》71 (2005)，第 3–4 期，781–819。MR 2206609University of Banja Luka,
Faculty of Natural sciences and Mathematics, Bosnia and Herze-govina电子邮箱：ivan-vanja.boroja@pmf.unibl.orgUniversity of Ljubljana, School of Economics and Business, and Institute of Mathematics,Physics and Mechanics, Ljubljana, Slovenia电子邮箱：damjana.kokol.bukovsek@ef.uni-lj.siUniversity of Ljubljana,
Faculty of Civil and Geodetic Engineering, University of Ljubl-jana,
Faculty of Mathematics and Physics, and Institute of Mathematics, Physics and Mechanics, Ljubljana, Slovenia电子邮箱：nik.stopar@fgg.uni-lj.si