arXiv:2602.07487v1 [math.FA] 7 Feb 2026

格罗滕迪克泛函积分的富比尼定理

何浩然和 QICHEN HE

Abstract. 本文系统研究射影张量积上的连续线性泛函中，其范数受格罗滕迪克常数 K_G控制的子集。我们将此类泛函称为格罗滕迪克泛函积分。该积分被定义为射影张量积空间上的线性泛函，并满足有界性条件$|\mu(x)| \leq K_G\|x\|_\pi$，其中 K_G 表示格罗滕迪克常数。我们证明，此类积分具有希尔伯特空间表示定理，并建立相应的抽象富比尼定理，以说明积分次序可以交换。此外，我们将这一理论推广到多重张量积的情形，并在具体函数空间中给出积分表示。我们的工作为双线性与多线性分析提供了统一框架，其中普适常数充当基本界。

关键词。Grothendieck 常数、射影张量积、泛函积分、Fubini 定理；双线性形式、希尔伯特空间表示

Contents

1. 引言 2 2. 预备知识与符号 3 2.1. 射影张量积 3 2.2. 格罗滕迪克不等式 4 3. 格罗滕迪克泛函积分 5 3.1. 定义与基本性质 5 3.2. Hilbert空间表示 6 3.3. 基本例子 7 4. Fubini定理 7 4.1. 偏积分算子 7 4.2. 抽象富比尼定理 8 4.3. Fubini定理的算子形式 9 5. 多重Grothendieck积分与Fubini定理 11

日期：2026年2月10日。

5.1. 多线性定义 11 5.2. 多重 Fubini 定理 11 6. 函数空间中的实现 13 6.1. L^p 空间情形 13 6.2. 连续函数空间 14 6.3. 例子 14 7. 伪微分算子的应用 15 7.1. Hilbert–Schmidt 型算子的 Grothendieck 表示 15 7.2. 利用格罗滕迪克常数估计积分算子的范数 16 7.3. 紧算子在 Sobolev 空间上的应用 17 7.4. 多重积分与迭代核 18 7.5. 总结与讨论 19 8. 结论与展望 19 参考文献 20

1. Introduction

泛函积分是分析学中的核心工具，其发展历程从经典的 Lebesgue 积分延伸至无限维的 Wiener 积分和 Feynman 路径积分。与此同时，泛函分析中的深刻不等式为不同数学领域之间建立了重要联系。在其具有开创性的 1956 年论文中 [2]，，Grothendieck 证明了一个基本不等式：任意定义在巴拿赫空间上的连续双线性形式，都可以通过希尔伯特空间中的内积进行因式分解，其常数为一个普适常数，称为格罗滕迪克常数 K_G。这一不等式已应用于算子理论、量子信息论以及 Banach 空间几何。

受此启发，本文提出一种新型泛函积分，并称之为格罗滕迪克泛函积分。其基本思想是将格罗滕迪克常数用作积分泛函有界性的自然尺度，从而定义一类作用于任意巴拿赫空间张量积、具有良好结构性质的线性泛函。不同于经典泛函积分，这一定义并不依赖特定的测度论结构，而是基于射影张量范数和普适常数K_G，因此具有更高的抽象性和普适性。本文的主要贡献如下：

1. 我们正式定义格罗滕迪克泛函积分，并研究其基本性质；

2. 我们证明该积分的希尔伯特空间表示定理，表明任意格罗滕迪克积分都可表示为希尔伯特空间中的内积；3. 我们建立抽象富比尼定理，证明积分次序可以互换，并给出算子论实现；4. 我们将该理论推广到多重张量积，并建立多重 Fubini 定理；5. 我们讨论该理论在经典函数空间中的具体表示，并给出说明性示例。

请注意，这里的“积分”一词是比喻性用法，用来描述线性泛函对张量积元素的作用，而非传统测度论意义上的积分。采用这一术语旨在强调其与函数空间中积分的类比。

据我们所知，现有文献中尚无直接将格罗滕迪克常数用作积分泛函有界性条件的研究。本文首次定义格罗滕迪克泛函积分，并建立其希尔伯特表示及富比尼定理，扩展了 [5] 中的双线性形式表示结果。

本文结构如下：第 2 节回顾射影张量积和格罗滕迪克不等式的预备知识；第 3 节介绍格罗滕迪克泛函积分的定义和基本性质；第 4 节建立并证明富比尼定理；第 5 节将该理论扩展至多线性情形；第 6 节讨论其在函数空间中的具体实现；第 7 节探讨其在伪微分算子中的应用；第 8 节总结全文并展望未来。

2. Preliminaries and Notation

2.1. 射影张量积。 设 E， F 为巴拿赫空间（定义在实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$上）。代数张量积$E \otimes F$是由形如 $e \otimes f$的元素张成的线性空间。射影形式 $\|\cdot\|_\pi$ 定义为：

$$\|u\|_\pi = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|_E \|f_i\|_F : u = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i\right\}.$$

射影张量积 $E \otimes_\pi F$是 $E \otimes F$关于射影范数的完备化；它是一个巴拿赫空间。

连续双线性形式 φ 的范数： $E \times F \to \mathbb{K}$ （其中$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$）由下式给出

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(e, f)| : \|e\|_E \le 1, \|f\|_F \le 1\}.$$

众所周知，射影张量积的拓扑对偶与连续双线性形式空间等距同构：

$$(E \otimes_\pi F)^* \cong \mathcal{B}(E, F; \mathbb{K}),$$

并且对于任意 $\mu \in （E \otimes_\pi F）^*$，相应的双线性形式 φ 满足$\varphi（e，\ f）= \mu（e \otimes f）$，其中 $\|\mu\| = \|\varphi\|$；例如参见 [7]。

2.2. **格罗滕迪克不等式**。格罗滕迪克不等式有若干种等价表述。本文采用以下算子论版本：

定理 2.1（格罗滕迪克不等式）。存在一个普适常数 K_G（$K_G^{\mathbb{R}} \approx 1.778$ 适用于实数域，$K_G^{\mathbb{C}} \approx 1.338$ 适用于复数域），使得对于任意巴拿赫空间 E、F 以及任意连续双线性形式 φ：$E \times F \to \mathbb{K}$，存在一个希尔伯特空间 H 和有界线性算子 A：$E \to H$、B：$F \to H$，满足：

$$\varphi(e, f) = \langle Ae, Bf \rangle_H, \quad \forall e \in E, f \in F,$$

以及 $\|A\|\|B\| \le K_G \|\varphi\|$。

特别地，若 $\|\varphi\| \le 1$，则存在这样的表示，满足$\|A\| \le 1$ 和 $\|B\| \le K_G$。

格罗滕迪克常数 K_G 是满足上述性质的最小常数。该不等式表明，任何连续双线性形式都可以“提升”为希尔伯特空间中的内积，提升的代价由 K_G控制。

关于 K_G的已知界：Grothendieck常数 $K_G^{\mathbb{R}}$ 和 $K_G^{\mathbb{C}}$ 的精确值仍未确切知晓，但以下界是目前已知的最佳结果：

- **实数情形（$K_G^{\mathbb{R}}$）：** $1.67696 \le K_G^{\mathbb{R}} \le 1.782$（下界归功于 Davie [1], 上界归功于Grothendieck [2]，，而上界的改进由Braverman等人得到）。
- **复数情形（$K_G^{\mathbb{C}}$）：** $1.33807 \le K_G^{\mathbb{C}} \le 1.40491$（下界归功于 Haagerup [3], 上界归功于Davie [4]）。

关于已知界及其历史发展的全面综述，见 [[5], 第 2]节。

这一基本结果源于 Grothendieck 关于张量积的度量理论的开创性工作 [2]。现代阐述及若干等价表述（包括本文采用的算子论版本），可参见综述 [5]。

3. Grothendieck Functional Integrals

3.1. 定义与基本性质。

定义 3.1（格罗滕迪克泛函积分）。设 E, F 为 Banach 空间。若线性泛函 $\mu: E\otimes F \to \mathbb{K}$ 满足 $\|\mu\| \leq K_G$，则称其为格罗滕迪克泛函积分，其中 K_G 表示格罗滕迪克常数。在这种情况下，我们将 μ 的格罗滕迪克范数定义为$\|\mu\|_G := \|\mu\|$。

所有格罗滕迪克泛函的集合记为 $\mathcal{G}(E,F) = \{\mu \in (E \otimes_\pi F)^* : \|\mu\| \leq K_G\}$。

根据定义，μ 可唯一延拓为$E\otimes_\pi F$上的连续线性泛函，且延拓后的范数满足 $\|\mu\| = \|\mu\|_G \leq K_G$。因此，格罗滕迪克泛函积分构成 $(E \otimes_\pi F)^*$ 的一个子集:

$$\mathcal{G}(E,F) = \{\mu \in (E \otimes_\pi F)^* : \|\mu\|_G \leq K_G\}.$$

注意，$\mathcal{G}(E,F)$在算子范数下是闭的，且 $\|\cdot\|_G$ 与算子范数一致。

命题 3.2（与双线性形式的对应）。设 μ 是一个格罗滕迪克泛函积分。定义 φ_μ: $E\times F \to \mathbb{K}$ 为 $\varphi_\mu(e,f) = \mu(e\otimes f)$。则 φ_μ 是一个连续双线性形式，并且满足 $\|\varphi_\mu\| = \|\mu\|_G$。反之，对于满足 $\|\varphi\| \leq K_G$的任意连续双线性形式 φ，存在唯一的格罗滕迪克积分 μ，使得 $\varphi_\mu = \varphi$。

证明。对于正向结论，注意到，根据代数张量积的泛性质，φ_μ 是双线性的。对于任意满足 $\|e\|_E \leq 1$的 $e \in E$、$f \in F$，我们有 $\|e\otimes f\|_\pi = \|e\|_E\|f\|_F \leq 1$，因此

$$|\varphi_\mu(e,f)| = |\mu(e\otimes f)| \leq \|\mu\|_G\|e\otimes f\|_\pi \leq \|\mu\|_G.$$

这表明 $\|\varphi_\mu\| \leq \|\mu\|_G$。反之，根据基本对偶定理 $(E \otimes_\pi F)^* \cong \mathcal{B}(E, F; \mathbb{K})$，等距同构由 $\mu \mapsto \varphi_u$给出，其中对于所有 $e \in E$、$f \in F$，$\phi_\mu(e, f) = \mu(e\otimes f)$。这意味着$\|\mu\|_{(E\otimes_\pi F)} = \|\varphi_u\|_{\mathcal{B}(E,F;\mathbb{K})}$（见 [[5], 定理 2.2。1]）。因此，当 $\mu \in \mathcal{G}(E, F)$时，我们有$\|\mu\|_G = \|\mu\|_{(E\otimes_\pi F)} = \|\varphi_u\|$。由于 $\|\mu\|_G$是满足对所有 $x \in E\otimes F$均有 $|\mu(x)| \leq C\|x\|_\pi$ 的最小常数 $C \leq K_G$，而 $\|\mu\|$ 自身满足这一不等式，所以当 $\mu \in \mathcal{G}(E, F)$时，我们得到 $\|\mu\|_G = \|\mu\| = \|\varphi_\mu\|$。

对于逆命题，设 $\varphi \in \mathcal{B}(E, F; \mathbb{K})$，其中 $\|\varphi\| \leq K_G$。由等距同构 $(E \otimes_\pi F)^* \cong \mathcal{B}(E, F; \mathbb{K})$，存在唯一的$\mu \in (E \otimes_\pi F)^*$，使得 $\varphi_\mu = \varphi$ 且 $\|\mu\| = \|\varphi\| \leq K_G$。因此$\|\mu\|_G = \|\mu\| \leq K_G$，这意味着 $\mu \in \mathcal{G}(E, F)$。□

3.2. **Hilbert空间表示**。由Grothendieck不等式，我们立即得到：

定理 3.3（希尔伯特空间表示定理）。设 μ 是一个格罗滕迪克泛函积分，其对应的双线性形式为 φ。则存在一个希尔伯特空间 H 以及有界线性算子 $A\colon E \to H$、$B\colon F \to H$，使得：

$$\varphi(e,f) = \langle Ae, Bf\rangle_H, \quad \forall e \in E, f \in F,$$

以及 $\|A\|\|B\| \le K_G\|\varphi\| \le K_G^2$。此外，若 $\|\mu\|_G = 1$，则存在这样的表示，使得 $\|A\| \le 1$ 且 $\|B\| \le K_G$。

证明。若 $\phi = 0$，则结论显然成立。设 $\phi \neq 0$，并令 $\psi = \phi/\|\phi\|$，于是 $\|\psi\| = 1 \le K_G$。将格罗滕迪克不等式˜（定理 2.1）应用于 ψ，可得一个希尔伯特空间 H 以及算子 $A : E \to H$、$B : F \to H$，使得

$$\psi(e,f) = \langle \tilde{A}e, \tilde{B}f\rangle_H, \quad \|\tilde{A}\| \le 1,\ \|\tilde{B}\| \le K_G.$$

定义 $A = \|\phi\|^{1/2}\tilde{A}$ 和 $B = \|\phi\|^{1/2}\tilde{B}$。于是

$$\phi(e,f) = \|\phi\|\psi(e,f) = \langle Ae, Bf\rangle_H.$$

此外，

$$\|A\|\|B\| = \|\phi\| \cdot \|\tilde{A}\|\|\tilde{B}\| \le \|\phi\| \cdot K_G \le K_G^2,$$

其中，最后一个不等式由命题 3.2 得出，该命题给出了$\|\phi\| = \|\mu\|_G \le K_G$。

对于归一化情形 $\|\mu\|_G = 1$，我们有 $\|\phi\| = 1$，直接将定理 2.1 应用于 ϕ，即可得到所需的表示，其中 $\|A\| \le$为 1 且 $\|B\| \le K_G$。□

注 3.4。估计 $\|A\|\|B\| \le K_G^2$ 足够，但未必最优。事实上，通过格罗滕迪克–皮埃奇因式分解技巧 [5,定理 3.2]，，可以得到更精确的估计。具体而言，格罗滕迪克不等式等价于：对于任意巴拿赫空间E、F及连续双线性形式 ϕ：$E \times F \to \mathbb{K}$，存在定义在 B_{E^*} 上的概率测度 μ（B_{E^*} 是单位球的某种紧化）以及定义在 B_{F^*} 上的概率测度 ν，并存在有界线性算子 T_1：$E \to L^2(\mu)$、T_2：$F \to L^2(\nu)$，使得 $\|T_1\|\|T_2\| \le K_G\|\phi\|$。这一因式分解表明，定理 3.3 中的希尔伯特空间 H 可以取为$L^2(\mu) \oplus L^2(\nu)$的子空间，且算子范数之积可以由$K_G\|\phi\|$ 控制，而非由 K_G^2控制。不过，为了理论上的简洁，本文采用上述充分估计。

这一表示定理是 Grothendieck 积分的核心特征：它将抽象积分表示为希尔伯特空间中的内积，从而为计算和估计提供几何工具。

3.3. **基本例子**。

例 3.5. 设 $E = F = \ell^2$，并设 $A = (a_{ij})$ 是满足 $\|A\|_{\ell^2 \to \ell^2} \le 1$ 的矩阵。定义双线性形式：

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j.$$

于是 $\|\varphi\| = \|A\|_{\ell^2 \to \ell^2} \le 1$，因此相应的 μ 是一个格罗滕迪克积分，且 $\|\mu\|_G \le K_G$。事实上，存在希尔伯特空间 H 及算子 A、$B : \ell^2 \to H$，使得

$$\varphi(x, y) = \langle Ax, By \rangle_H.$$

例 3.6. 设 $E = C(S)$、$F = C(T)$，其中 S，T 是紧 Hausdorff 空间。任意连续双线性形式 ϕ 对应一个双测度（或 $S \times T$ 上的 Radon 测度）。若 $\|\phi\| \le 1$，那么格罗滕迪克不等式结合 2-可和算子理论（或“小”格罗滕迪克不等式），保证存在有限正测度 μ（定义在 S 上）和 ν（定义在 T 上），使得：

$$|\phi(f, g)| \le K_G \left(\int_S |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_T |g|^2 d\nu \right)^{1/2}.$$

（例如，参见 [[5], 定理 42]，其中在 $C(K)$ 空间的背景下给出了精确陈述和证明。）

通过分别将 μ 和 ν 乘以适当的正数，使它们的乘积等于 1，可以适当缩放其总质量，从而满足该不等式。因此，由 ϕ 诱导的线性泛函是一个格罗滕迪克积分。

4. Fubini theorems

4.1. **偏积分算子**。

定义 4.1（偏积分）。设 $\mu \in \mathcal{G}(E, F)$，其对应的双线性形式为 φ。固定 $e \in E$，定义 $\mu_e \in F^*$ 如下：

$$\mu_e(f) = \varphi(e, f), \quad \forall f \in F.$$

类似地，固定 $f \in F$，定义 $\mu_f \in E^*$ 为 $\mu_f(e) = \varphi(e, f)$。

很容易看出，$\|\mu_e\|_{F^*} \le \|\varphi\| \|e\|_E \le K_G \|e\|_E$ 和 $\|\mu_f\|_{E^*} \le K_G \|f\|_F$。

引理 4.2。 映射 $e \mapsto \mu_e$ 是线性的，因此定义了一个有界线性算子 T_μ：$E \to F^*$，满足 $T_\mu(e) = \mu_e$，其中 $\|T_\mu\| = \|\varphi\| \leq K_G$。类似地，定义 S_μ： $F \to E^*$，使其满足 $S_\mu(f) = \mu_f$，我们还有$\|S_\mu\| = \|\varphi\|$。

证明。 线性性：对任意 $e_1, e_2 \in E$ 及标量 α，我们验证：

$$T_\mu(e_1 + \alpha e_2)(f) = \mu_{e_1+\alpha e_2}(f) = \varphi(e_1 + \alpha e_2, f) = \varphi(e_1, f) + \alpha\varphi(e_2, f) = \mu_{e_1}(f) + \alpha\mu_{e_2}(f) = (T_\mu(e_1) + \alpha T_\mu(e_2))(f).$$

由于这对所有 $f \in F$ 都成立，因此我们有 $T_\mu(e_1+\alpha e_2) = T_\mu(e_1) + \alpha T_\mu(e_2)$。

Norm equality: By definition, $\|T_\mu\| = \sup_{\|e\|_E \leq 1} \|T_\mu(e)\|_{F^*} = \sup_{\|e\|_E \leq 1} \|\mu_e\|_{F^*}$.

$$\text{For } \|e\|_E \leq 1: \quad \|\mu_e\|_{F^*} = \sup_{\|f\|_F \leq 1} |\mu_e(f)| = \sup_{\|f\|_F \leq 1} |\varphi(e, f)| \leq \sup_{\|f\|_F \leq 1} \|\varphi\|\|e\|_E\|f\|_F \leq \|\varphi\|.$$

因此 $\|T_\mu\| \leq \|\varphi\|$。反过来，对任意 $\varepsilon > 0$，取 w_0, f_0，使得 $\|e_0\|_E = \|f_0\|_F = 1$ 满足 $|\varphi(e_0, f_0)| > \|\varphi\| - \varepsilon$。于是：

$$\|T_\mu\| \geq \|T_\mu(e_0)\|_{F^*} = \sup_{\|f\|_F \leq 1} |\varphi(e_0, f)| \geq |\varphi(e_0, f_0)| > \|\varphi\| - \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$，得到 $\|T_\mu\| \geq \|\varphi\|$。因此 $\|T_\mu\| = \|\varphi\|$。关于 S_μ 的论证完全相同。□

4.2. **抽象富比尼定理**。

定理 4.3 （富比尼定理）。 设 $\mu \in \mathcal{G}(E, F)$。则对任意 $x = \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i \in E \otimes F$，有：

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^n T_\mu(e_i)(f_i) = \sum_{i=1}^n S_\mu(f_i)(e_i).$$

也就是说，按任一顺序迭代计算积分，结果都相同。

证明。 我们通过直接计算得出第一个等式：

$$\mu(x) = \mu\left(\sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(e_i \otimes f_i) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i, f_i) = \sum_{i=1}^n \mu_{e_i}(f_i) = \sum_{i=1}^n T_\mu(e_i)(f_i).$$

对于第二个等式，注意到根据对称性，$\varphi(e_i, f_i) = \mu_{f_i}(e_i)$，因此：

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i, f_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_{f_i}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} S_\mu(f_i)(e_i).$$

□

该定理表明，格罗滕迪克积分 μ可分解为两个线性算子的复合。具体而言，考虑自然配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle : F^* \times F \to \mathbb{K}$。则：

$$\mu(x) = \langle (T_\mu \otimes I)(x) \rangle,$$

其中 $(T_\mu \otimes I) : E \otimes F \to F^* \otimes F$将 $e \otimes f$映射为 $T_\mu(e) \otimes f$，再通过配对得到一个标量。同样，利用 S_μ 可得到另一种分解。

推论 4.4 (连续延拓)。设 $\mu \in \mathcal{G}(E, F)$。对于任意$x \in E \otimes_\pi F$，取一个序列 $\{x_n\} \subset E \otimes F$，使得 $x_n \to x$ 在射影范数下成立，其中 $x_n = \sum_{i=1}^{N_n} e_i^{(n)} \otimes f_i^{(n)}$ 。则

$$\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} T_\mu(e_i^{(n)})(f_i^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} S_\mu(f_i^{(n)})(e_i^{(n)}).$$

证明。根据射影张量积的定义，每个 $x \in E \otimes_\pi F$ 都可以用射影范数下的有限和逼近；这是一个标准事实（参见 [7, 命题 2。1] 或 [5, 第 3]节）。由于$\mu \in (E \otimes_\pi F)^*$ 关于射影范数连续，并且$x_n \to x$ 推出 $\mu(x_n) \to \mu(x)$，对每个 x_n 应用定理 4.3 即得所需结果。□

注 4.5。这种逼近序列的存在性可由射影张量积的构造得出：根据定义，$E \otimes_\pi F$ 是代数张量积 $E \otimes F$ 关于射影范数的完备化。因此，任意 $x \in E \otimes_\pi F$都可以表示为有限和序列的极限。关于射影张量积的逼近性质，可参见[7,第 3]章。

4.3. **Fubini定理的算子形式**。我们可以用算子复合来表达富比尼定理。

定理 4.6 (算子形式). 设 $\mu \in \mathcal{G}(E, F)$。则存在唯一的有界线性算子 $T_\mu : E \to F^*$ 和 $S_\mu : F \to E^*$，使得

下列图表交换：

$$\begin{array}{ccc} E \otimes_\pi F & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{K} \\ {\scriptstyle T_\mu \otimes I}\downarrow & \nearrow_{\langle\cdot,\cdot\rangle} & \\ F^* \otimes_\pi F & & \end{array} \quad and \quad \begin{array}{ccc} E \otimes_\pi F & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{K} \\ {\scriptstyle I \otimes S_\mu}\downarrow & \nearrow_{\langle\cdot,\cdot\rangle} & \\ E \otimes_\pi E^* & & \end{array}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示自然配对。此外，$\|T_\mu\| = \|S_\mu\| = \|\mu\|_G$。

证明。存在性：算子 T_μ 和 S_μ 在引理 4.2 中构造。对于任意 $x = \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i \in E \otimes F$：

$$\begin{aligned} \langle (T_\mu \otimes I)(x) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n T_\mu(e_i) \otimes f_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle T_\mu(e_i), f_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n T_\mu(e_i)(f_i) = \mu(x). \end{aligned}$$

根据定理 4.3。因此，第一个图表交换。第二个图表的证明类似。

唯一性：设 $T : E \to F^*$ 也使第一个图表交换。那么对所有 $e \in E$, $f \in F$：

$$\langle \tilde{T}(e), f \rangle = \langle (\tilde{T} \otimes I)(e \otimes f) \rangle = \mu(e \otimes f) = \varphi(e, f) = \langle T_\mu(e), f \rangle.$$

由于 $f \in F$ 是任意的，对所有 e, $T(e) = T_\mu(e)$，因此 $T = T_\mu$。由对称性可得 S_μ 的唯一性。

范数相等：已在引理 4.2 中确立。 □

该定理表明，计算 $\mu(x)$ 可以先对第一个变量进行“积分”（应用 T_μ），然后进行配对；也可以先对第二个变量进行“积分”（应用 S_μ），然后进行配对。两种顺序得到的结果相同。

注 4.7。需要强调的是，抽象张量积框架中的“富比尼定理”是泛函的线性性的直接推论。本文的主要贡献在于建立一类由 K_G 控制的函数空间，并展示这一框架如何在具体分析语境中导出经典积分交换公式。

必须区分抽象张量积框架中的“次序交换”和具体函数空间中的“积分次序交换”。在抽象框架中，“次序交换”只是对求和项的重新排列，这可由线性性直接推出。然而，在具体函数空间中，这一

抽象恒等式对应于经典Fubini定理，该定理允许在特定条件下交换积分次序。

5. Multiple Grothendieck integrals and Fubini theorems

5.1. 多线性定义。 设 $E_1, \dots, E_n$ 为巴拿赫空间。记 $\bigotimes_{\pi,i=1}^{n} E_i$ 为射影张量积（在多重射影范数下完备化）。多重射影范数定义如下：

$$\|u\|_\pi = \inf\left\{\sum_{k=1}^{m} \|e_1^k\|_{E_1} \cdots \|e_n^k\|_{E_n} : u = \sum_{k=1}^{m} e_1^k \otimes \cdots \otimes e_n^k\right\}.$$

定义 5.1（多重Grothendieck积分）. 若存在线性泛函μ：$\bigotimes_{i=1}^{n} E_i \to \mathbb{K}$ 及常数 $C \le K_G^{n-1}$，使得：

$$|\mu(x)| \le C\|x\|_\pi, \quad \forall x \in \bigotimes_{i=1}^{n} E_i.$$

此类常数中的最小值记为 $\|\mu\|_{G^{(n)}}$。

注 5.2（常数 K_G^{n-1} 的合理性说明）。选择上界 K_G^{n-1} 的动机在于反复应用经典的（双线性）格罗滕迪克不等式。对于一个 n线性形式 ϕ，可以依次对变量对应用双线性格罗滕迪克不等式，每次应用都会引入一个 K_G因子。经过 $n-1$ 次这样的迭代后，可得到希尔伯特空间分解，其累积常数有界于 K_G^{n-1}。这一迭代估计在关于Grothendieck定理多线性推广的文献中十分常见（例如，参见 [6] 或 [[5], 第 10]节，其中详细讨论了多线性Grothendieck常数）。

多重Grothendieck积分与连续的 n-线性形式一一对应，并满足一个类似于定理3.3的希尔伯特空间表示定理（这需要格罗滕迪克不等式的一个多重线性版本）。

5.2. 多重 Fubini 定理。

定理 5.3（多重 Fubini 定理）。令 μ 为一个多重*Grothendieck*积分，其对应的连续 n线性形式为 φ： $E_1 \times \cdots \times E_n \to \mathbb{K}$。那么，对于任意 $1 \le k \le n$，都存在一个有界线性算子：

$$T^{(k)} : E_k \to \left(\bigotimes_{\pi, i \ne k} E_i\right)^*$$

满足：

$$T^{(k)}(e_k)(e_1 \otimes \cdots \otimes e_{k-1} \otimes e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) = \varphi(e_1, \ldots, e_n).$$

此外， $\|T^{(k)}\| \leq K_G^{n-1}$ 。

此外，对于任意置换 $\sigma \in S_n$，积分次序都可以交换：

$$\mu(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = T^{(\sigma(1))}(e_{\sigma(1)}) \circ T^{(\sigma(2))}(e_{\sigma(2)}) \circ \cdots \circ T^{(\sigma(n))}(e_{\sigma(n)}),$$

其中，右侧表示偏积分算子的迭代应用：首先固定$e_{\sigma(1)}$ ，以获得关于其余变量的线性泛函；然后固定 $e_{\sigma(2)}$，依此类推。

证明。 我们对 n 进行归纳法证明。

基例（$n = 2$）： 这正是定理 4.3，其中 $T^{(1)} = T_\mu$ 和 $T^{(2)} = S_\mu$。

归纳步骤：假设定理对 $n - 1$ 成立。对于 n 重迭代的情形，将 $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ 视为 $E_1 \otimes_\pi (\bigotimes_{i=2}^n E_i)$。应用二元情形（定理 4.3），得到一个算子：

$$T^{(1)} : E_1 \to \left(\bigotimes_{i=2}^{n} E_i \right)^*$$

对于固定的 $e_1 \in E_1$，泛函 $T_{(1)}(e_1)$ 本身是定义在 $E_2 \times \cdots \times E_n$上的一个 $(n-1)$-线性形式。根据归纳假设，$(n-1)$-线性形式的常数为 K_G^{n-2} (参见 [[5], 定理 5。3])。将 $\otimes_\pi^n E_i$视为 $E_1 \otimes_\pi (\otimes_\pi^{n-1} E_i)$ 时， n-线性形式的常数变为 $K_G \cdot K_G^{n-2} = K_G^{n-1}$ ，这是由二元情形（常数 K_G）和归纳假设得到的。因此， $T^{(1)}(e_1)$ 的范数有界于 K_G^{n-2} 。

更确切地说， $T^{(1)}(e_1)$对应于 $\bigotimes_{i=2}^n E_i$ 上的一个常数为K_G^{n-2} 的多重 Grothendieck 积分。由归纳法可知，对每个 $k \geq 2$，都存在算子：

$$T_{e_1}^{(k)} : E_k \to \left(\bigotimes_{\substack{i=2 \\ i \neq k}}^{n} E_i \right)^*$$

它们满足关于 $\|T_{e_1}^{(k)}\| \leq K_G^{n-2}$ 的所需性质。通过与 $T_{(1)}$ 复合来定义 $T_{(k)}(e_k)$，即可得到具有 $\|T^{(k)}\| \leq K_G \cdot K_G^{n-2} = K_G^{n-1}$ 的所需算子。

置换不变性源于以下观察：任何置换都可以由相邻对换构成，而每个相邻对换都对应于对这些空间的适当配对应用二元富比尼定理。

□

注记 5.4。 多重 Fubini 定理表明，多重Grothendieck积分可以按任意顺序通过逐次积分计算，且结果与计算顺序无关。这为计算复杂的多重线性形式提供了强大的工具。

6. Realizations in function spaces

6.1. 的情形 L^p 空间。 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 是 σ-有限测度空间。考虑 $E = L^p(X, \mu)$ 和 $F = L^q(Y, \nu)$，其中$1 \le p, q \le \infty$ 满足 $1/p + 1/q \le 1$。在此情形下，射影张量积 $L^p(X) \otimes_\pi L^q(Y)$ 等距嵌入 $L^p(X, L^q(Y))$，其完备化与 $L^p(X) \widehat{\otimes}_\pi L^q(Y)$ 同构。

定理 6.1。 设 $\varphi : L^p(X) \times L^q(Y) \to \mathbb{K}$ 是一个连续双线性形式，且 $\|\varphi\| \le K_G$。那么存在唯一的有界线性算子 $T\colon L^p(X) \to L^{q^*}(Y)$（其中 $1/q + 1/q^* = 1$），使得：

$$\varphi(f, g) = \int_Y T(f)(y) g(y)\, d\nu(y), \quad \forall f \in L^p(X), g \in L^q(Y),$$

以及 $\|T\| \le K_G$。

证明。 由引理 4.2，存在 $T : L^p(X) \to (L^q(Y))^* = L^{q^*}(Y)$，其中 $\|T\| = \|\varphi\| \le K_G$。通过 Riesz 表示定理得到的识别 $(L^q(Y))^* \cong L^{q^*}(Y)$ 给出积分形式。□

推论 6.2 (积分核表示)。 在定理 *6.1* 的假设下，若满足 $p = q = 2$，则存在定义在 $\sim X$ 上的有限正测度 μ' 和定义在 Y 上的有限正测度 ν'，以及一个有界线性算子 $T : L^2(X, \mu') \to L^2(Y, \nu')^{\sim}$，其中 $\|T\| \le K_G$，使得

$$\varphi(f, g) = \int_Y \big(\widetilde{T}(f)\big)(y)\, g(y)\, d\nu'(y) \quad \textit{for all } f \in L^2(X, \mu),\, g \in L^2(Y, \nu).$$

此外，若测度 μ' 和 ν' 选为概率测度，则

$$|\varphi(f, g)| \le K_G \|f\|_{L^2(\mu')} \|g\|_{L^2(\nu')}.$$

证明。 当 $p = q = 2$ 时，定理 6.1 给出的算子 $T : L^2(X, \mu) \to L^2(Y, \nu)$ 满足 $\|T\| \le K_G$。

根据格罗滕迪克不等式（定理 2.1），存在一个希尔伯特空间 H 以及有界线性算子 $A : L^2(X, \mu) \to H$, $B : L^2(Y, \nu) \to H$，满足 $\|A\| \le 1$, $\|B\| \le K_G$，使得

$$\varphi(f, g) = \langle Af, Bg \rangle_H.$$

有限正测度 μ' 和 ν' 的存在性源自适用于 $C(K)$ 空间的“弱” Grothendieck 不等式（或者，也可以源自

L^2 上有界线性泛函的表示）。具体而言，我们可以取 μ' 和 ν' 为由算子 A 和 B 的极分解所给出的有限测度：

$$d\mu'(x) = \|A^*\delta_x\|_H^2 \, d\mu(x), \quad d\nu'(y) = \|B^*\delta_y\|_H^2 \, d\nu(y),$$

其中， A^* 和 B^* 是伴随算子。

采用这一选择后， A 和 B 分别通过 $L^2(\mu')$ 和 $L^2(\nu')$ 分解，从而得到一个具有所需性质的算子 T： $L^2(X, \mu') \to L^2(Y, \nu')$。范数界 $\|T\| \le K_G$ 继承自$\|T\| \le K_G$。

最后，通过缩放 μ' 和 ν' ，我们可以假设它们是概率测度，此时不等式 $|\varphi(f, g)| \le K_G \|f\|_{L^2(\mu')} \|g\|_{L^2(\nu')}$ 就是格罗滕迪克不等式在这一具体情形下的另一种表述。□

6.2. **连续函数空间**。设 S， T 是紧 Hausdorff 空间， $E = C(S)$ $F = C(T)$。则 $E \otimes_\pi F$在 $C(S \times T)$ 中稠密。格罗滕迪克积分 $\mu \in \mathcal{G}(E, F)$ 唯一延拓为 $C(S \times T)$ 上的连续线性泛函，其范数为 $\|\mu\| \le K_G$。根据里斯–马尔可夫–角谷表示定理，存在唯一的复（或符号）Radon测度 ρ，定义在 $S \times T$ 上，使得

$$\mu(f \otimes g) = \iint_{S \times T} f(s) g(t) \, d\rho(s, t), \quad \forall f \in C(S), g \in C(T).$$

泛函 μ 的范数等于表示测度 ρ的全变差范数，即 $\|\mu\| = |\rho|(S \times T)$, 其中 $|\rho|$ 表示 ρ 的全变差测度（例如参见 [[8]），定理 6。19] 因此, Grothendieck 条件 $\|\mu\|_G \le K_G$ 可转化为具体的测度论条件：

$$\text{Total variation of } \rho \text{ is bounded by } K_G: \quad |\rho|(S \times T) = \|\mu\| \le K_G.$$

在这一经典情形下，抽象富比尼定理（定理 4.3）化为针对 Radon测度ρ的标准富比尼–托内利定理，但还附带定量控制： ρ 的全变差不超过普适常数 K_G。

6.3. **示例**。

例 6.3. 考虑由下式定义的双线性形式 ϕ： $L^2[0,1] \times L^2[0,1] \to \mathbb{R}$

$$\phi(f, g) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(x) g(y)}{1 + |x - y|} \, dx \, dy.$$

相应的积分核为 $k(x,y) = (1+|x-y|)^{-1}$。根据卷积的杨不等式，由下式定义的算子 $T\colon L^2[0,1] \to L^2[0,1]$

$$(Tf)(y) = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+|x-y|}\,dx$$

满足范数估计

$$\|T\| \le \int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+|t|} = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = 2\ln 2 \approx 1.386.$$

因此 $\|\phi\| = \|T\| \le 1.386$。由于实格罗滕迪克常数满足 $K_G^{\mathbb{R}} \approx 1.782$（当前最佳上界，见第 2.2 节），我们有$\|\phi\| < K_G^{\mathbb{R}}$。为将 ϕ 纳入格罗滕迪克积分框架，定义缩放形式 $\tilde{\phi} = \phi/\|\phi\|$。于是 $\|\tilde{\phi}\| = 1 \le K_G^{\mathbb{R}}$。根据命题 3.2，$\phi$ 对应于唯一的格罗滕迪克积分$\tilde{\mu} \in \mathcal{G}(L^2[0,1], L^2[0,1])$，且带有 $\|\tilde{\mu}\|_G = 1$。于是原始形式 $\phi = \|\phi\|\tilde{\phi}$可视为带权重 $\|\phi\|$的格罗滕迪克积分。

对于这种具体形式，定理 4.3 所保证的富比尼换序就是经典的积分换序：对于任意 $f,\ g \in L^2[0,1]$,

$$\begin{aligned}\phi(f,g) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{f(x)}{1+|x-y|}\,dx \right) g(y)\,dy \\ &= \int_0^1 f(x) \left(\int_0^1 \frac{g(y)}{1+|x-y|}\,dy \right) dx.\end{aligned}$$

也就是说，迭代积分的顺序可以交换。这个例子说明，抽象的格罗滕迪克积分理论自然涵盖了分析中的经典Fubini定理。

注 6.4。 在实际应用中，如果 $\|\phi\| \le K_G$，则无需缩放。在这个例子中，由于 $\|\phi\| < K_G^{\mathbb{R}}$，缩放仅仅是一个归一化步骤。这种缩放技巧还表明，任何范数不超过 K_G 的双线性形式都可以归一化，从而符合格罗滕迪克积分框架的要求。

7. Applications to Pseudodifferential Operators

7.1. Hilbert–Schmidt 型算子的 Grothendieck 表示。 设 $(X,\ \mu)$ 和 $(Y,\ \nu)$ 是 σ-有限测度空间。考虑巴拿赫空间 $E = L^2(X,\ \mu)$ 和 $F = L^2(Y,\ \nu)$。回顾第 6.1 节，格罗滕迪克泛函积分 $\mu_0 \in \mathcal{G}(E,\ F)$ 对应于一个连续双线性形式 $\phi\colon L^2(X) \times L^2(Y) \to \mathbb{K}$，满足 $\|\phi\| \le K_G$。

根据定理 6.1，存在一个有界线性算子 $T\colon L^2(X) \to L^2(Y)$，使得

$$\phi(f,g) = \int_Y (Tf)(y)g(y)\,d\nu(y), \qquad \forall f \in L^2(X),\, g \in L^2(Y),$$

以及 $\|T\| \le K_G$。

此外，若算子 T 是希尔伯特–施密特算子，我们便得到一个具体的积分核表示。

定理 7.1 (格罗滕迪克积分核表示**)**。设 $\phi : L^2(X) \times L^2(Y) \to \mathbb{K}$ 是一个连续双线性形式，其中 $\|\phi\| \le K_G$，并设 $T : L^2(X) \to L^2(Y)$ 是其关联算子。若 T 是希尔伯特–施密特算子，则存在唯一的核 $k \in L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$ 使得

$$(Tf)(y) = \int_X k(x,y)f(x)\,d\mu(x) \qquad \textit{for a.e. } y \in Y,$$

and

$$\phi(f,g) = \iint_{X\times Y} k(x,y)f(x)g(y)\,d\mu(x)d\nu(y).$$

特别地，若测度空间是有限的（即 $\mu(X)\ \nu(Y) < \infty$），则

$$\|k\|_{L^2(X\times Y)} = \|T\|_{\mathrm{HS}} < \infty.$$

证明。由标准的希尔伯特–施密特核定理可知，存在一个 L^2-核 k。等式 $\|k\|_{L^2} = \|T\|_{\mathrm{HS}}$ 是众所周知的；由于 T 是希尔伯特–施密特算子，$\|T\|_{\mathrm{HS}}$ 有限，因此 $k \in L^2(X \times Y)$。□

7.2. 通过格罗滕迪克常数得到积分算子的范数估计。现在，我们为关联双线性形式为格罗滕迪克积分的积分算子建立精确的范数估计。

定理 7.2 (积分算子的范数界**)**。设 $k \in L^2(X\times Y)$是一个核，使得其诱导双线性形式

$$\phi_k(f,g) = \iint_{X\times Y} k(x,y)f(x)g(y)\,d\mu(x)d\nu(y)$$

满足 $\|\phi_k\| \le K_G$。定义积分算子 $T_k\colon L^2(X) \to L^2(Y)$如下：

$$(T_k f)(y) = \int_X k(x,y)f(x)\,d\mu(x).$$

则：

(1) T_k 是有界的，且 $\|T_k\| \le K_G$。

(2) 若 k 是对称的（即 $X = Y$ 且 $k(x, y) = k(y, x)$），则 T_k 是自伴的，且其谱满足 $\sigma(T_k) \subseteq [-K_G, K_G]$。此外，若 k 是正定的，则 $\sigma(T_k) \subseteq [0, K_G]$。

证明。第 (1) 部分直接由定理 6.1 得出。对于第 (2) 部分，若核 k 是对称的（即 $k(x, y) = k(y, x)$），则算子 T_k 是自伴的。根据谱半径定理，对于任意 $\lambda \in \sigma(T_k)$，有 $|\lambda| \leq \|T_k\| \leq K_G$，因此 $\sigma(T_k) \subseteq [-K_G, K_G]$。

现在进一步假设 k 是正定核。这意味着相应的双线性形式 ϕ_k 满足 $\phi_k(f, f) \geq 0$ 对所有 $f \in L^2(X$ 均成立。因此，T_k 是正算子（即，$\langle T_k f, f\rangle \geq 0$ 对所有 f 均成立）。谱理论中的一项基本结果指出，希尔伯特空间上有界正算子的谱包含于 $[0, \infty)$（参见，例如，[9] 中的定理 12.32，或 [11] 中的定理 VI.8）。将此结果与范数界 $\|T_k\| \leq K_G$ 结合，可得更精确的包含关系 $\sigma(T_k) \subseteq [0, \|T_k\|] \subseteq [0, K_G]$。 □

注记 7.3. 该结果为一类由 K_G 控制其双线性形式的积分算子提供了一个普适常数界。在显式核估计难以获得、但可证明双线性形式满足 Grothendieck 条件的情形下，这一结果尤为有用。

7.3.Sobolev 空间上的紧算子的应用。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是边界为 C^∞ 的有界区域，并令 $H^s(\Omega)$ 表示 $s \geq 0$ 阶 Sobolev 空间。我们考察椭圆边值问题的格林函数所产生的积分算子。

命题 7.4 (格林算子作为格罗滕迪克积分). 考虑拉普拉斯算子的狄利克雷问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = f & in\ \Omega, \\ u = 0 & on\ \partial\Omega. \end{cases}$$

令 $G\colon L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ 为解算子，即 $u = Gf$。根据椭圆正则性理论，G 可扩展为 $L^2(\Omega)$ 上的紧自伴算子（仍记为 G）。定义双线性形式 $\phi_G : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\phi_G(f, g) = \int_\Omega (Gf)(x) g(x)\, dx.$$

于是 ϕ_G 连续，并且可以表示为

$$\phi_G(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle f, \psi_j\rangle \langle g, \psi_j\rangle,$$

其中，$\{\psi_j\}$ 是 G 的特征函数，其特征值为 $\lambda_j > 0$，它们构成 $L^2(\Omega)$的标准正交基。因此，ϕ_G 是常数为 1的格罗滕迪克泛函积分；特别地，$\|\phi_G\|_G \le 1$。此外，$\|\phi_G\| \le C(\Omega)$，其中 $C(\Omega) = \|G\|_{L^2\to L^2}$。

证明。 标准椭圆理论（例如，参见 [[10], 第6节。5]表明G 是从 $L^2(\Omega)$到 $L^2(\Omega)$的紧自伴算子，且其核（格林函数）属于 $L^2(\Omega\times\Omega)$。希尔伯特–施密特定理给出上述特征展开，这表明 ϕ_G 已经是 ℓ^2中的内积；因此它是常数为1的格罗滕迪克积分。界 $\|\phi_G\| \le \|G\|$ 由算子范数的定义直接得出。□

例7.5 (特征值估计)。对于上文的格林算子 G，特征值 λ_j 满足两个互补的估计：

(1) 一致界：$\lambda_j \le \|G\| = C(\Omega)$对所有 j成立。(2) 衰减界（韦尔定律）：存在常数 $C'(\Omega)$，使得 $\lambda_j \le C'(\Omega) j^{-2/n}$ 对所有 j成立。

这些估计说明，抽象的 Grothendieck 框架（它给出了一致界）如何补充经典谱理论。

7.4. 多重积分与迭代核。 第5节中发展的多重Grothendieck积分理论自然适用于迭代积分算子。

定理 *7.6*（迭代积分算子）。设 $k_1 \in L^2(X\times Y)$ 和 $k_2 \in L^2(Y\times Z)$ 为核，它们诱导算子 $T_1 : L^2(X) \to L^2(Y)$ 和 $T_2 : L^2(Y) \to L^2(Z)$。假设相应的双线性形式 ϕ_1和 ϕ_2 满足 $\|\phi_i\| \le K_G$，其中 $i = 1, 2$。那么，复合算子 $T = T_2 \circ T_1$ 对应于双重*Grothendieck*积分 $\mu \in \mathcal{G}^{(2)}(L^2(X)\ L^2(Y)\ L^2(Z))$，其界为 $\|\mu\|_{G^{(2)}} \le K_G^2$。

此外，T 的核 $k \in L^2(X\times Z)$ 由卷积给出

$$k(x,z) = \int_Y k_1(x,y)k_2(y,z)\,d\nu(y) \quad (for\ a.e.\ (x,z) \in X\times Z),$$

并且，相应的三重积分对所有 $f \in L^2(X)$、$h \in L^2(Z)$ 满足以下迭代积分恒等式：

(7.6)

$$\iiint_{X\times Y\times Z} k(x,z)f(x)h(z)\,d\mu(x)d\nu(y)d\rho(z) = \int_Z \left(\int_Y \left(\int_X k_1(x,y)f(x)\,d\mu(x)\right) k_2(y,z)\,d\nu(y)\right) h(z)\,d\rho(z).$$

证明。 这直接应用多重 Fubini 定理（定理 5.3）于三重射影张量积 $L^2(X) \otimes_\pi L^2(Y) \otimes_\pi L^2(Z)$ 得出。界 K_G^2 由定理 5.3 证明中的归纳构造得到。 □

7.5. **小结与讨论**。 在本节中，我们展示了格罗滕迪克泛函积分框架如何给出：

1. 对双线性形式满足格罗滕迪克界的算子的具体核表示；2. 由普适常数K_G控制的一致范数估计；3. 对椭圆格林算子的应用，给出补充经典谱理论的特征值界；4. 通过多重 Fubini 定理为迭代积分提供的自然框架。

这些应用展示了第3–5节所发展的抽象理论的力量。Grothendieck 框架的一个关键优势在于常数 K_G的普适性，它提供与维数无关的界，这在渐近分析与谱分析中尤为有价值。

8. Conclusion and outlook

本文系统地引入了格罗滕迪克泛函积分的概念：它以格罗滕迪克常数为控制核心，并在任意巴拿赫空间的射影张量积上定义一类具有希尔伯特空间表示的线性泛函。我们证明了此类积分的抽象富比尼定理，表明积分次序可以交换，并给出了算子论实现。此外，我们将该理论推广到多重张量积，并建立了多重 Fubini 定理。最后，我们在具体函数空间中给出了积分表示，并讨论了它们与经典积分的关系。

格罗滕迪克泛函积分的优点包括：

1. 普适性：定义不依赖于特定的测度或空间结构，适用于一般巴拿赫空间；2. 结构：自动获得的希尔伯特空间表示有助于几何分析和估计；3. 常数控制：以格罗滕迪克常数为尺度，可提供统一的范数界；4. 计算便利性：富比尼定理允许灵活交换积分次序，从而简化计算。

未来研究方向

1. 变量替换公式：我们首先需要定义巴拿赫流形上的射影张量积。然后将其与切空间的 Hilbert空间表示结合起来（参见[12] 关于巴拿赫流形上的张量分析）。2. 与分布理论的联系：将格罗滕迪克积分发展为一种适用于广义函数的新型积分，并将其应用于偏微分方程。这需要将积分定义扩展到分布空间，并建立相应的收敛结果。3. 随机分析：研究格罗滕迪克积分在维纳空间和高斯空间中的应用，并探索其与马利亚万演算的联系。这包括定义随机格罗滕迪克积分并确立其性质。4. 量子场论：考虑使用格罗滕迪克积分来形式化量子场论中的路径积分，尤其是针对多项式型相互作用场。这需要应用多重 Fubini 定理来简化高维积分计算（参见 [13] 关于泛函积分的多重线性展开）。5. 最优常数问题：研究在不同空间类中使定义成立所需的最小常数，并探索其与格罗滕迪克常数的精确关系。这包括确定特定巴拿赫空间和张量积范数的最优常数。6. 数值方法：基于希尔伯特空间表示，为格罗滕迪克积分设计数值逼近算法。这需要开发在希尔伯特空间中高效计算内积的方法，并将其用于逼近格罗滕迪克积分。

总之，格罗滕迪克泛函积分为双线性与多线性分析提供了一种新颖而强大的框架，并有望应用于数学和物理学的多个领域。

References

[1] A.-M.-Davie, *Lower bound for K_G,* 未发表的笔记，1977。[2]A.-Grothendieck, *R´esum´e de la th´eorie m´etrique des produits tensorielstopologiques*, Bol.Soc. Mat. S˜ao Paulo **8** (1956), 1–79.[3] U.-Haagerup,双线性形式在 C^*-代数上的格罗滕迪克不等式,Adv. Math. 56(1985),no. 2, 93–116.[4] A.-M.-Davie, textitQuotient algebras ofuniform algebras J. LondonMath. Soc.(2) 7 (1973), no.1, 31–40. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-7.1.31

[5]G.-Pisier, Grothendieck定理：过去与现在，《美国数学会通报》(N.S.) 49 (2012), no. 2, 237–323. https://doi.org/10.1090/ S0273-0979-2011-01348-9 [6] D.-P.-Blecher and V.-I.-Paulsen, 算子空间的张量积，《泛函分析杂志》99 (1991), no. 2, 262–292. https://doi.org/10.1016/0022-1236(91) 90042-4[7] R.-A.-Ryan, 巴拿赫空间张量积导论, 施普林格数学专著, Springer-Verlag, 伦敦, 2002.[8] W. Rudin, 实分析与复分析, 第3版, 麦格劳-希尔, 1987.[9] W.-Rudin, 泛函分析, 第2版, 麦格劳-希尔, 1991.[10]L.-C.-Evans, 偏微分方程, 第2版, 数学研究生教材，第19卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2010.[11] M.-Reed and B.-Simon, 现代数理物理方法 I：泛函分析, 学术出版社, 1980.[12] S.-Lang, 微分几何基础, Springer-Verlag, 纽约, 1999.[13]J.-Glimm and A.-Jaffe, 量子物理：泛函积分的观点, Springer-Verlag, 纽约, 1987. 电子邮箱：haoranhemaths@163.com

电子邮箱地址：qichenhemaths@163.com